

[illegible]

Matemātikas metodika

1.-6. klasei

Matemātikas metodika

1.–6. klasei

UDK 5(072)

Ma828

France, I., Cīrulis, A., Čakāne, I., Hačatjana, L., Dudareva, I., Brūveris, I., Raituma, L. *Matemātikas metodika 1.–6. klasei*. Atb. red. I. France. Rīga: LU Akadēmiskais apgāds, 2025. 424 lpp.

Darbs ir sagatavots ar Valsts pētījumu programmas “Letonika latviskas un eiropiskas sabiedrības attīstībai” projekta “Inovatīvi risinājumi kombinētās mācīšanās ieviešanai mācību procesa digitālās transformācijas kontekstā”, VPP-LETONIKA-2021/1-0010 atbalstu.



LATVIJAS
UNIVERSITĀTE



Latvijas Zinātnes padome

Autores: Ilze France, Astrīda Cīrulis, Ildze Čakāne. Atsevišķu nodaļu materiālu izstrādē piedalījās: Liena Hačatjana (1.2.1.), Inese Dudareva (1.1.1., 1.8.1., 1.8.3.), Ilona Brūveris (1.7.), Liene Raituma (1.8.4. un 2. nod.)

Paldies par praktiskām idejām un iesaisti šī darba tapšanā Elīnai Lorei, Maritai Dzenei, Helgai Mezītei, Ilzei Pilskalnei, Baibai Apsītei, Ilzei Bodniecei, Santai Apšei, Ancei Krastiņai, Indrai Pauliņai, Elīzai Sīlītei, Lainei Blūmai, Kecijai Vatuļinai, Ksenijai Fadejevai

Recenzenti: *Dr. paed.* Ineta Helmane, *Dr. math.* Gunta Lāce, Inese Gaša

Projekta komanda izsaka pateicību Dacei Namsonei un LU EZTF SIIC kolēģiem, visām Latvijas izglītības iestādēm un skolotājiem, kas piedalījās metodikas satura aprobācijā.

Matemātikas redaktore Ingrīda Kreicberga

Latviešu valodas teksta literārās redaktors: Gita Kļaviņa, Ieva Zarāne

Vāka dizainu veidojusi un maketējusi Baiba Lazdiņa

Darbā izmantotas Maritas Dzenes, Helgas Mezītes, Ildzes Čakānes,

Astrīdas Cīrulis, Ilzes Frances un *shutterstock.com* fotogrāfijas

© Ilze France, Astrīda Cīrulis, Ildze Čakāne, Liena Hačatjana, Inese Dudareva, Ilona Brūveris, Liene Raituma, 2025

© Latvijas Universitāte, 2025

ISBN 978-9934-36-417-4

ISBN 978-9934-36-418-1 (PDF)

Saturs

Priekšvārds	9
-------------------	---

1. daļa. Vispārīgi par matemātikas mācīšanu

1.1. Matemātikas saturs un mācīšana	12
1.1.1. Matemātikas saturs digitālajā laikmetā	12
1.1.2. Situācijas apraksts, darbs stundās	19
1.2. Kā skolēns mācās	25
1.2.1. Kā skolēns iemācās: kognitīvo spēju attīstība un dažādi spriešanas veidi	25
Kognitīvās zinātnes pētījumu atziņas mācību procesa labākai organizēšanai	26
Mācīšanās un indivīda attīstība: ko skolēns spēj dažādos vecumos?	29
Skolēna spriešana: prasme analizēt, vērtēt, radīt	32
1.2.2. Matemātiski pratīgs skolēns	36
1.3. Matemātikas mācīšanās, veidojot izpratni	42
1.3.1. Matemātisko konceptu reprezentācija jeb attēlojums	42
1.3.2. Kā apgūt prasmes un izmantot virzītās mācīšanās modeli	55
1.3.3. Mācīšanās iedziļinoties – dažādu izziņas darbības līmeņu uzdevumi	62
1.3.4. Saruna, lai notiktu iedziļināšanās	72
1.4. Problēmu risināšana un matemātiskā modelēšana	79
1.4.1. Problēmrisināšanas process	79
1.4.2. Problēmrisināšanas stratēģijas	86
1.4.3. Matemātiskās modelēšanas elementi	101
Matemātiskās modelēšanas process	101
Kā nonākam līdz matemātiskās modelēšanas uzdevumam?	104
Matemātiskās modelēšanas organizēšana: mijiedarbība starp skolotāju – koordinatoru un skolēniem – modelētājiem	116

1.5. Pašregulēta mācīšanās un metakognīcija	122
1.6. Motivācija mācīties drošā vidē	131
1.6.1. Kompetence	132
1.6.2. Piederība	133
1.6.3. Autonomija	134
1.7. Mācīt tā, lai visi skolēni ir iekļauti	137
1.7.1. Iekļaujošā izglītība	137
1.7.2. Matemātikas mācīšanas risinājumi skolēnu iekļaušanai	139
1.7.3. Skolotāju loma skolēnu atbalstīšanā un mācību barjeru mazināšanā	146
1.7.4. Skolēnu uzvedības veidošana	150
1.7.5. Matemātiskā trauksme	152
1.8. Digitālās tehnoloģijas un to lietojums	158
1.8.1. Matemātiskās prasības attīstība un pilnveide digitālajā laikmetā	158
1.8.2. Kombinēta mācīšanās	159
1.8.3. Digitālo tehnoloģiju izmantošana	161
Digitālās tehnoloģijas prasmju apguvē	161
Digitālās izglītojošās spēles matemātikas apguvei	164
Digitālo tehnoloģiju izmantošana diferencēšanai	165
Digitālo tehnoloģiju izmantošanas izaicinājumi sākumskolā ...	165
1.8.4. <i>GeoGebra</i> un tās lietojums sākumskolas matemātikā	166
1.9. Vērtēšana	173
1.9.1. Kas ir vērtēšana, tās mērķis	173
Kāpēc vērtējam?	173
Ko vērtē?	173
Vērtēšanas veidi pēc mērķa	180
1.9.2. Formatīvā vērtēšana	181
Kas vērtē un dod atgriezenisko saiti?	181
Skolotāja darbības stundā, veicot formatīvo vērtēšanu	187
1.9.3. Summatīvā vērtēšana	199
Summatīvās vērtēšanas norise	199
Nobeiguma darba veidošana	200
Kā iedziļināties skolēnu sniegunā	210

2. daļa. Matemātisko konceptu un procedūru veidošana

2.1. Skaitļi	216
2.1.1. Sākotnējā skaitļu izjūta	216
2.1.2. Skaitļa jēdziens un decimālās skaitīšanas sistēmas izveide	220
2.1.3. Saskaitīšanas paņēmieni un to attīstība	226
2.1.4. Atņemšanas paņēmieni un to attīstība	235
2.1.5. Reizināšanas paņēmieni un to attīstība (naturālie skaitļi)	244
2.1.6. Dalīšanas paņēmieni un to attīstība (naturālie skaitļi)	255
2.1.7. Daļas	267
Daļas jēdziens (parastās daļas)	267
Darbības ar parastām daļām	275
Darbības ar decimāldaļām	288
Procenti	296
2.1.8. Negatīvie skaitļi	304
2.2. Sakarības	313
2.3. Statistikas elementi	332
2.3.1. Dati un to apstrāde	332
Tabula	333
Grupēšana un diagrammas	334
2.4. Ģeometrijas elementi	357
2.4.1. Telpiskā domāšana	357
2.4.2. Ģeometriskās domāšanas līmeņi	363
2.4.3. Ģeometriskās domāšanas attīstība	370
Figūru atpazīšana un definēšana	372
Figūru veidošana un sadalīšana	373
Figūras un to īpašības	375
Prasme modelēt un zīmēt figūras	379
Telpiskas figūras	380
2.5. Mērīšanas un mēru koncepta veidošana	384
2.5.1. Garums, tā mērīšana un aprēķināšana	385
Apkārtmēra jeb perimetra mērīšana un aprēķināšana	390
2.5.2. Leņķa mērīšana	393
2.5.3. Laukums un tā mērīšana	398

2.5.4. Tilpums un tā mērīšana	408
2.5.5. Citi mēri	416
Laiks	416
Masa	420
Izmantotās mācību grāmatas	423

Priekšvārds

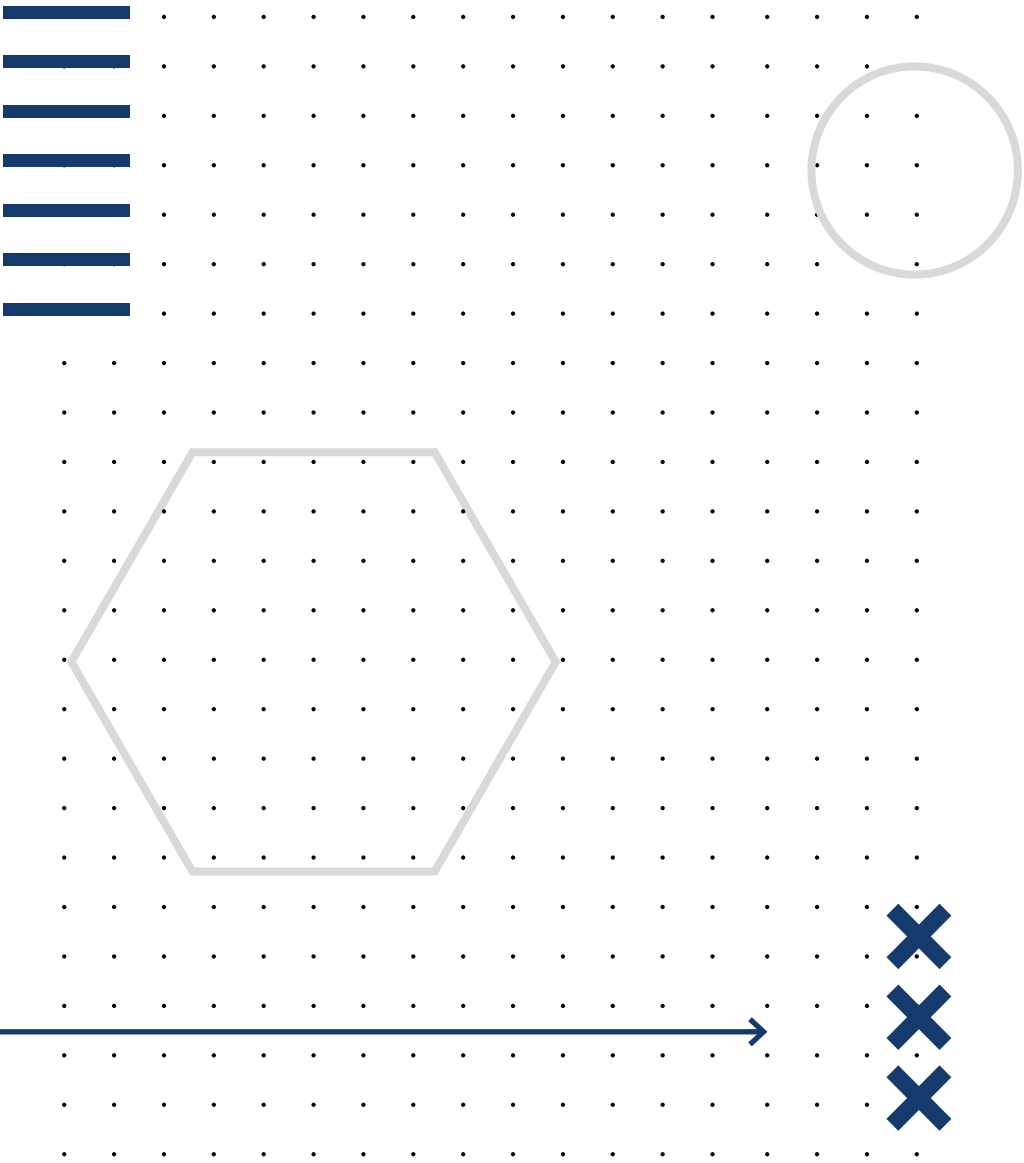
Šī grāmata* ir Latvijas Universitātes (LU) Eksakto zinātņu un tehnoloģiju fakultātes (EZTF) Starpnozaru izglītības inovāciju centra (SIIC) pētnieku grupas un skolās praktizējošu skolotāju kopdarbs, kas pievērš uzmanību matemātikas metodikas tendencēm sākumskolas matemātikas apguvē digitālo tehnoloģiju un kombinētas mācīšanās ietekmē. Darbā izmantotas idejas un piemēri no mācību literatūras un skolu prakses.

Darba **1. daļa** ietver starptautiskās un Latvijas pieredzes analīzi par to, kas mainās mācību saturā, ikdienas dzīvē arvien vairāk ienākot digitālajām tehnoloģijām un mainoties pašam mācību procesam. Lai veicinātu skolēna izpratni, mācoties matemātiku, īpaši šobrīd, skolotājiem ir jāzina, kā skolēni spriež, kā organizēt mācību procesu, lai skolēniem būtu iespēja domāt un spriest arī augstākajos izziņas darbības līmeņos. Matemātikas saturs vairs nesastāv tikai no matemātikas pamatjomām, tajā ir ietverti arī skolēna spriešanas veidi un mācīšanās, jēgpilni lietojot digitālās tehnoloģijas. Joprojām aktuāli ir tas, kā realitātē sabalansējam matemātikas pamatprasmju un problēmrisināšanas prasmju pilnveidi jau sākumskolas posmā, kā izprotam, kas ir matemātiskā modelēšana un kā notiek matemātikas apguve jau no 1. klases. Lai mācīšanās būtu efektīva, nevaram nedomāt par skolēnu apzinātu motivāciju, pašregulētu mācīšanos un metakognīciju un katra skolēna atbilstošu iekļaušanu mācību procesā, par matemātiskās trauksmes mazināšanu, ja tāda tiek novērota.

Darba **2. daļa** ietver matemātikas konceptu – skaitļu, sakarību, statistikas elementu, ģeometrijas elementu un mēru – metodisku aprakstu, sniedzot iespēju skolotājam aplūkot veidus, kā palīdzēt veidot izpratni par šiem konceptiem, kā skolēni vingrinās un tos pilnībā apgūst, lai būtu gatavi lietot daudzveidīgās situācijās.

* Sagatavota ar Valsts pētījumu programmas "Letonika latviskas un eiropiskas sabiedrības attīstībai" atbalstu projektā "Inovatīvi risinājumi kombinētās mācīšanās ieviešanai mācību procesa digitālās transformācijas kontekstā", VPP-LETONIKA-2021/1-0010.

1. daļa



Vispārīgi par matemātikas mācīšanu

Šajā daļā lasītājam ir iespēja iepazīties ar teorijas un prakses idejām, kā mainās matemātikas mācību saturs un tā apguve, ikdienas dzīvē arvien vairāk ienākot digitālajām tehnoloģijām. Īpaša uzmanība pievērsta tam, kā skolotājs var veicināt skolēna konceptuālu izpratni, prasmju apguvi, spriešanas prasmes dažādos izziņas darbības līmeņos, veidot jēgpilnas sarunas. Aktualizēta problēmrisināšanas prasmju apguve, ko būtiski uzsākt jau sākumskolas posmā, kā arī tas, kā izprotam matemātisko modelēšanu. Aplūkotas idejas, kā veicināt skolēna motivāciju, pašregulētu mācīšanos un apzinātu metakognīciju, katra skolēna atbilstošu iekļaušanu mācību procesā un matemātiskās trauksmes mazināšanu, ja tāda tiek novērota.

1.1. Matemātikas saturs un mācīšana

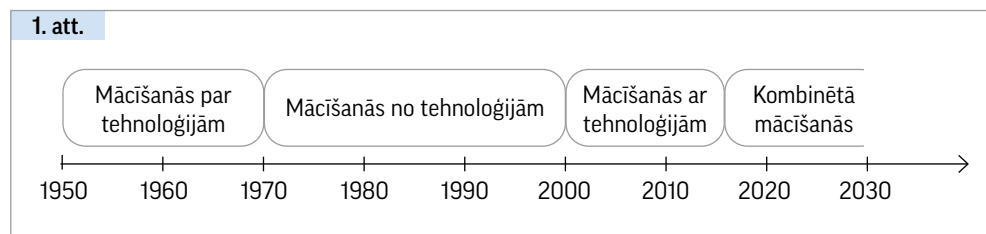
1.1.1. Matemātikas saturs digitālajā laikmetā

Mūsdienās matemātikai ir liela nozīme digitālo tehnoloģiju inovācijās un ekonomiskajā izaugsmē. Tā ir būtiska tādās jomās kā datu zinātne un mākslīgais intelekts, lai izstrādātu algoritmus, lietotu statistiku un atpazītu sakarības.

Pasaules prakse atzīst, ka matemātikas mācību programmu modernizēšanai ir kritiska loma, lai sagatavotu skolēnus dinamiskai nākotnei, līdzsvarojot spēcīgu pamatzināšanu izpratni ar jaunu kompetenču, piemēram, datu un digitālo prātību, ieviešanu.

Digitālo tehnoloģiju attīstība un to izmantošana dažādās jomās, piemēram, zinātnē, uzņēmējdarbībā u. c., ietekmē arī to lomu un pielietojumu izglītībā. Vēsturiski atskatoties uz tehnoloģiju attīstību, varam izcelt vairākus posmus (Green & Donovan, 2018), kas raksturo mācīšanos un digitālo tehnoloģiju attīstību. **1. att.**

Matemātika, kas bieži uzskatīta par grūti maināmu disciplīnu, šobrīd piedzīvo pārmaiņas. Daudzu izglītības sistēmu galvenais mērķis ir attīstīt skolēnu matemātisko spriešanu papildus tradicionālajām satura jomām, piemēram, lielumiem un darbībām ar tiem, ģeometrijai un mērījumiem. Būtiski tiek uzsvēta skolēnu kognitīvā un metakognitīvā darbība. Tā izpaužas, piemēram, lietojot rēķinprātības prasmes, problēmrisināšanas prasmes, kritisko domāšanu un strādājot ar tekstiem. Arī sākumskolas mācību programmās ievērojams uzsvars likts uz datu un digitālo prātību, atspoguļojot to, cik svarīgi ir palīdzēt skolēniem orientēties tehnoloģiski bagātā vidē. Programma PISA 2025 mācīšanos digitālā pasaulē definē kā “spēju iesaistīties iteratīvā un pašregulētā zināšanu veidošanas un problēmu risināšanas procesā, izmantojot datorizētus rīkus un prakses” (OECD, 2023d).



Matemātikas mācību programmas un mācīšana turpina attīstīties, pielāgojoties jaunām digitālajām tehnoloģijām un mācību metodēm. Tām ir jānodrošina, lai matemātika būtu mērķtiecīga, izaicinoša, veicinātu dziļāku izpratni un prasmes un būtu saskaņota ar reālo lietojumu, lai apmierinātu mainīgās darbaspēka un sabiedrības prasības (OECD, 2024; Cotič et al., 2024).

Organization for Economic Cooperation and Development (OECD) ir veikti plaši pētījumi un statistiskā analīze arī par to, kā skolēnu kognitīvo prasmju izaugsme ir saistīta ar valsts ekonomisko izaugsmi. Pētījumā tika salīdzināti skolēnu rezultāti *Program for International Student Assessment* (PISA) ar iekšzemes kopproduktu (IKP), izmantojot datus no OECD dalībvalstīm. Dati liecina, ka izglītības kvalitātes uzlabošana pozitīvi ietekmē valsts ekonomisko izaugsmi. Ja visu OECD dalībvalstu rezultāti uzlabotos par tikai 25 punktiem, tad OECD valstu IKP pieaugtu par vairāk nekā 100 triljoniem ASV dolāru (OECD, 2010).

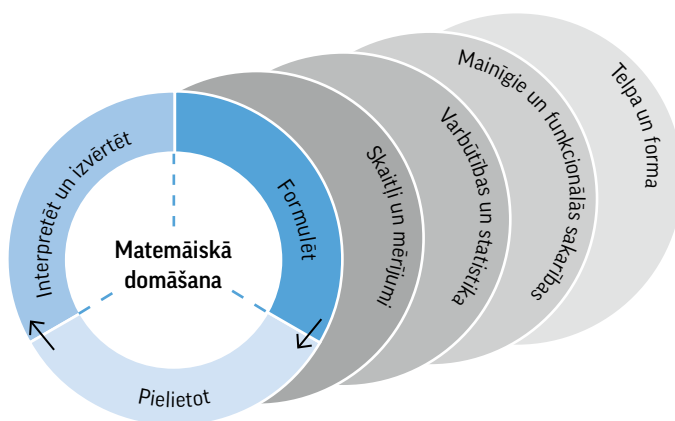
Mūsu valsts mērķus nosaka Nacionālais attīstības plāns. Tajā minēts, ka līdz 2027. gadam ir jāuzlabo skolēnu prasmes matemātikā, lai pieaugtu skolēnu sagatavotība un interese par turpmāko izglītību tajās specialitātēs, kurās tiek iegūtas uzņēmējdarbībai un darba tirgum nozīmīgas prasmes un zināšanas un kuras ir perspektīvākas nākotnes ekonomikas kontekstā (Saeima, 2020).

Savukārt mācību satura mērķus priekšmetā nosaka Noteikumi par valsts pamatizglītības standartu un pamatizglītības programmu paraugiem (Ministru kabinets, 2018), kur ir definēts matemātikas mācību jomas mērķis – skolēns situācijās ar matemātisku, citu mācību jomu un reālu kontekstu, jēgpilni lietojot matemātikas instrumentus, veic aprēķinus, apstrādā datus, izmanto figūru īpašības, saskata sakarības starp lielumiem, spriež vispārīgi un matemātiski modeļi, problēmsituācijās izvēlas atbilstošu pieeju vai paņēmieni, apzinās pierādījuma nepieciešamību un veido pamatotus spriedumus.

Matemātikas jomas standarts pamatizglītībā virzīts uz matemātiskās prasmes apguvi, t. i., mērķi, ko mēra OECD PISA.

20. gadsimta vidū mācību programmās sāka parādīties matemātiskās prasmes jēdziens (*mathematical literacy*) kā analogija tekstprasībai, uzsverot matemātisko procesu, nevis tikai matemātiskā satura zināšanas. PISA 2022 matemātikas jomas ietvars (OECD, 2023b) 2. att. definē matemātisko prasmi, kas ir indivīda spēja domāt matemātiski, formulēt, lietot un interpretēt matemātikas problēmas dažādās dzīves situācijās. Tā ietver jēdzienus, darbības, faktus un instrumentus, lai aprakstītu, izskaidrotu un prognozētu dažādas parādības. Matemātiskā prasme palīdz indivīdam apzināties matemātikas lomu dzīvē un pieņemt labi pamatotus lēmumus, kuri nepieciešami konstruktīva, ieinteresēta un atbildīga 21. gadsimta pilsoņa dzīvē.

2. att.

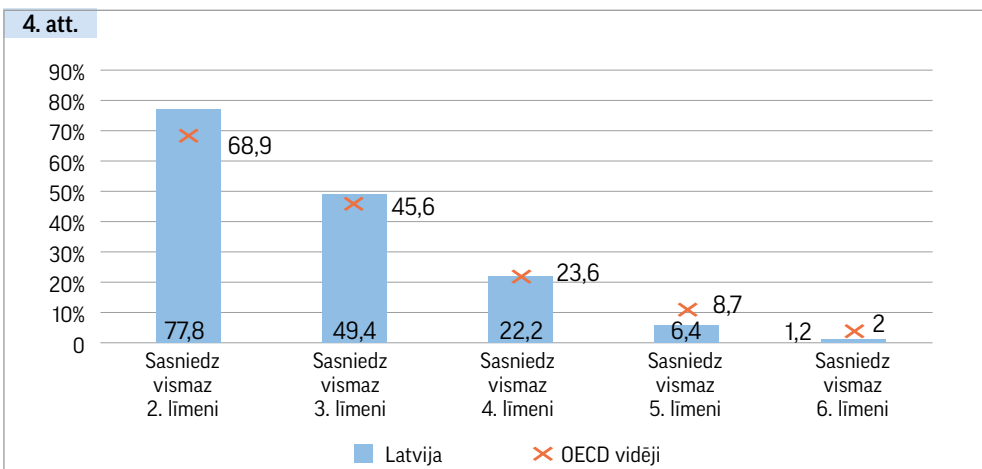


3. att.

1. līmenis	2. līmenis	3. līmenis	4. līmenis	5. līmenis	6. līmenis
1. līmenī skolēni spēj: - atbildēt uz skaidri formulētiem jautājumiem par pazīstamu kontekstu; - identificēt informāciju un veikt rutinētas darbības saskaņā ar skaidri izteiktām norādēm precīzi formulētās situācijās.					
			6. līmenī skolēni spēj: konceptualizēt, vispārināt; - pielietot savas zināšanas nestandarta situāciju kontekstā; saistīt dažādus informācijas avotus; formulēt viedokli; - izstāstīt savas domas par iegūtajiem rezultātiem, to interpretāciju, argumentiem un to piemērotību oriģinālām situācijām.		

Būtiski ir veicināt skolēnu mācīšanos tā, lai skolēni spētu domāt un darboties kognitīvi dziļi, veicot arī 5. un 6. līmeņa uzdevumus (OECD, 2023a). **3. att.** Pēdējās tendences PISA mērījumos rāda, ka Latvijas skolēnu īpatsvars (procentos) ir krietni lielāks nekā vidēji OECD valstīs, ja runājam par 1.–3. kompetences līmeņa sasniegšanu, bet situācija mainās, sākot ar 4. līmeni, – tas rāda, ka arvien mazāk skolēnu spēj apgūto jēgpilni lietot dažādās situācijās (OECD, 2023c). **4. att.**

Vēl viens starptautisks pētījums, kurā piedalās Latvijas skolēni, ir TIMSS. TIMSS 2023 (*Trends in International Mathematics and Science Study 2023*) ir starptautisks izglītības pētījums (von Davier et al., 2024), ko organizē Starptautiskā Izglītības sasniegumu vērtēšanas asociācija (IEA). Tā mērķis ir novērtēt 4. klases skolēnu sasniegumus matemātikā un dabaszinātnēs, analizējot izglītības sistēmu efektivitāti dažādās valstīs. Pētījums tiek veikts reizi četros gados, un tas sniedz



vērtīgus datus izglītības politikas veidotājiem, skolotājiem un pētniekiem. TIMSS palīdz identificēt faktorus, kas veicina skolēnu labāku sniegumu, un piedāvā iespēju salīdzināt dažādu valstu izglītības sistēmas.

Aplūkojot Latvijas 4. klases skolēnu sniegumu 2023. un 2019. gada pētījumos (von Davier et al., 2024) **1. tabula**, redzams, ka 12% skolēnu spēj pielietot savu izpratni un zināšanas plašā, relatīvi sarežģītu situāciju spektrā un spēj pamatot savu viedokli (ļoti augsts līmenis). Neiepriecina, ka 22% skolēnu nespēj pielietot pamatzināšanas matemātikā vienkāršās situācijās (nesasniedz vidējo līmeni). Savukārt 5% skolēnu neuzrāda pat zemu līmeni atbilstošu sniegumu.

Latvijas skolēni visās kognitīvajās jomās – zināšanas (40% no darba apjoma), zināšanu pielietošana (40% no darba apjoma) un pamatošana (20% no darba apjoma) – uzrādīja līdzīgu sniegumu. Vidējais punktu skaits dažādās satura jomās aplūkojams **2. tabulā**.

Pētījumā aptaujāti arī skolēni, lai noteiktu viņu attieksmes un pieredzi. Daži rezultāti redzami **5. att.**

Visu šo atainoto faktoru pozitīvie rādītāji ir saistīti ar skolēnu augstāku sniegumu. Redzams, ka Latvijas skolēniem ir gan zemāka piederības izjūta skolai, gan zemāka pārliecība un patika mācīties matemātiku nekā pārējo pētījuma dalībvalstu skolēniem.

Lai skolēnu rezultāti būtu augstāki, jāsaprot, ka matemātika ir kas vairāk nekā uzdevumu risināšana vai skolotāja skaidrojumi. Matemātikas lietošana nozīmē ģenerēt stratēģijas, lai risinātu problēmas, lietot paņēmienus, kuri palīdz veidot risinājumu, un izvērtēt, vai un kā iegūtā atbilde atbilst konkrētajai situācijai.

Pratība nozīmē spēju kompleksi lietot zināšanas, prasmes un paust attieksmes, risinot problēmas mainīgās dzīves situācijās. **Mācīšanās iedziļinoties** ir process, kura laikā skolēni attīsta spēju vispārināt jeb pārnest iegūtās zināšanas un

1. tabula

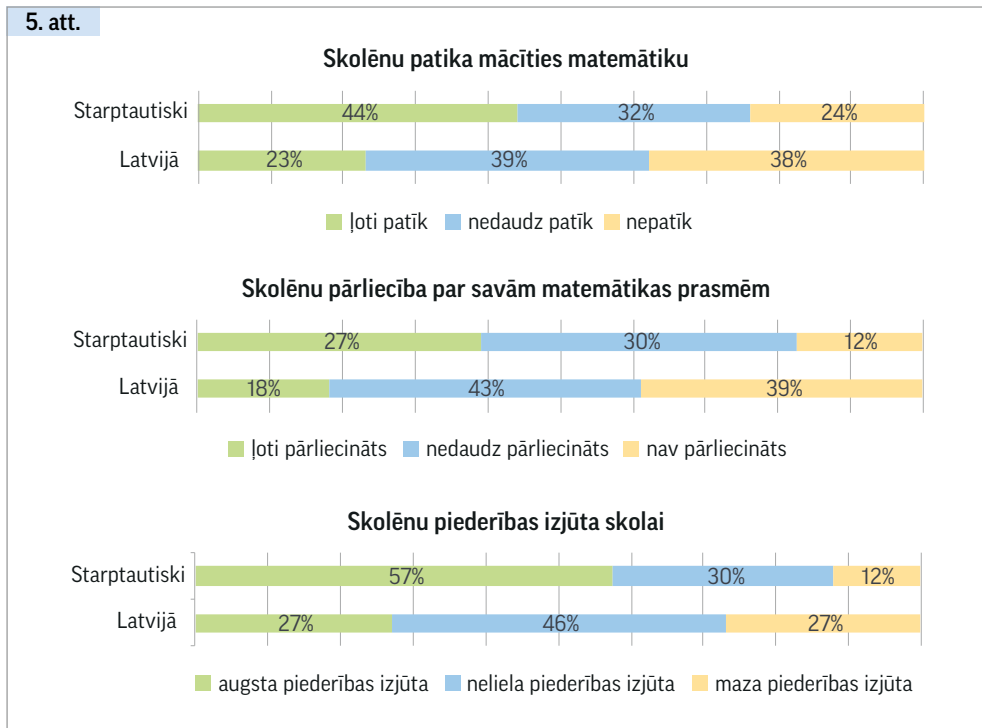
Matemātikas kompetenču līmeņu apraksts	2023			2019
	Kopā, %	Meitenes, %	Zēni, %	Kopā, %
Zems līmenis (vismaz 400 punkti) Skolēniem ir pamatzināšanas matemātikā. Viņi var saskaitīt, atņemt, reizināt un dalīt viena vai divu ciparu veselus skaitļus. Var atrisināt vienkāršus teksta uzdevumus. Viņiem ir zināšanas par vienkāršām parastām daļām un pazīstamākajām ģeometriskajām figūrām. Skolēni var nolasīt un papildināt informāciju vienkāršās joslu diagrammās un tabulās.	95	94	96	98
Vidējs līmenis (vismaz 475 punkti) Skolēni spēj pielietot pamatzināšanas matemātikā vienkāršās situācijās. Viņi prot rēķināt ar trīs un četri ciparu veseliem skaitļiem dažādās situācijās. Viņiem piemīt zināma izpratne par decimāldaļām un parastām daļām. Skolēni var identificēt un uzzīmēt figūras ar vienkāršām īpašībām. Spēj nolasīt, papildināt un interpretēt informāciju diagrammās un tabulās.	78	77	79	85
Augsts līmenis (vismaz 550 punkti) Skolēniem ir vispārīga izpratne par problēmu risināšanu. Viņi spēj pielietot zināšanas par veseliem skaitļiem, lai risinātu divpakāpju teksta uzdevumus. Viņiem ir izpratne par skaitļu asi, dalāmajiem, dalītājiem, skaitļu noapaļošanu, kā arī darbībām ar parastām daļām un decimāldaļām. Skolēni spēj atrisināt vienkāršus uzdevumus ar mērvienībām. Viņi demonstrē izpratni par ģeometrisku figūru un leņķu īpašībām. Spēj interpretēt un izmantot tabulās un dažādās diagrammās attēlotos datus problēmu risināšanai.	44	42	46	50
Ļoti augsts līmenis (vismaz 625 punkti) Skolēni spēj pielietot savu izpratni un zināšanas plašā, relatīvi sarežģītu situāciju spektrā un pamatot savu viedokli. Spēj atrisināt daudzpakāpju teksta uzdevumus, izmantojot veselus skaitļus un izpratni par parastām daļām un decimāldaļām. Skolēni pielieto zināšanas par divu un trīs dimensiju figūrām dažādās situācijās. Spēj interpretēt un atspoguļot datus daudzpakāpju uzdevumu risināšanā.	12	10	14	11

2. tabula

Vidējais sniegums	Skaitļi (50% no darba apjoma)	Mērīšana un ģeometrija (30% no darba apjoma)	Dati (20% no darba apjoma)
534 (503)*	533 (506)	540 (504)	532 (500)

* Starptautiskais vidējais.

5. att.



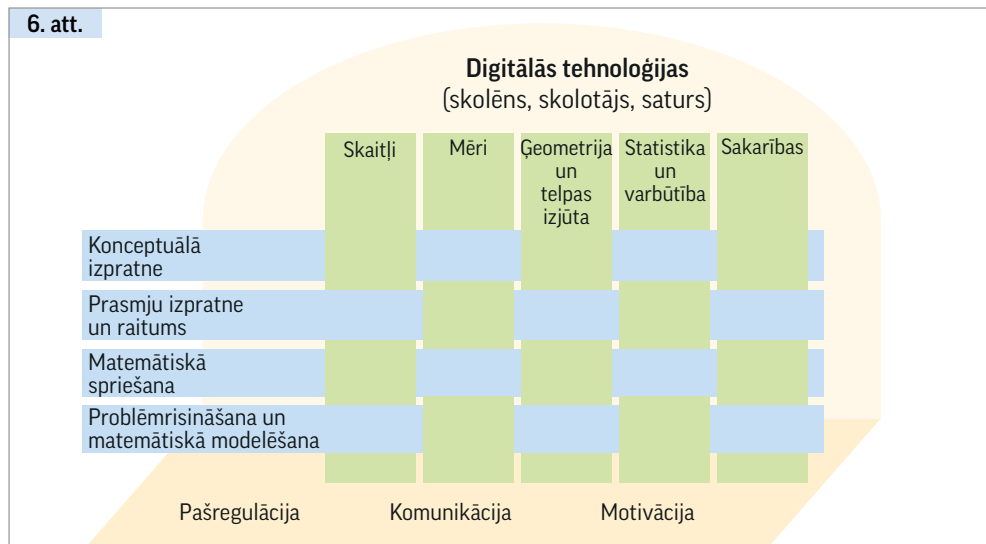
prasmes uz jaunām, nezināmām situācijām. **Pratība** ir rezultāts tam, ka skolēns ir mācījies iedziļinoties. Mācīšanās priekšplānā tiek izvirzīti procesi, ar kuru palīdzību mēs iegūstam zināšanas (kā mēs zinām?), nevis tikai uzkrājam noteiktu informācijas apjomu (ko mēs zinām?). UNESCO Starptautiskās izglītības biroja ziņojumā teikts, ka skolu mācību programmās pašlaik ir pārāk daudz satura, bet pārāk maz uzmanības veltīts izpratnes dziļumam. Galvenā atšķirība mācīšanai iedziļinoties no izolētu zināšanu un prasmju mācīšanas ir tā, ka skolēnam jāprot ne tikai lietot konkrētas matemātiskas sakarības uzdevuma risināšanā, bet arī atpazīt un izvēlēties piemērotāko risināšanas paņēmieni, lietot šo paņēmieni jaunā, nezināmā situācijā, izvērtēt problēmas risināšanas nozīmību (Oliņa et al., 2018). Pasaulē kopš 20. gadsimta 80. gadiem, domājot par matemātikas saturu, tas veidots tā, lai skolā apgūtais būtu cieši saistīts ar pielietojumu – reālām

situācijām – un ņemtu vērā mācību priekšmeta sociālos un kultūras aspektus. Mācību saturā tiek iekļautas tādas tēmas kā statistika un cita veida praktisko problēmu attēlojums, dažādu matemātikas reprezentāciju lietojums. Īpaši pievērsta uzmanība tam, kā sākumskolas skolēni varētu apgūt praktisko problēmu risināšanu (Shimizu & Vithal, 2023). Galvenais iemesls statistikas, varbūtību un kombinatorikas elementu ieviešanai bija tabulu, diagrammu, aptauju apguve, jo tā ienāca ikdienas dzīvē, komunikācijā. Radās nepieciešamība kritiski izvērtēt datus, palielinājās pieejamība datu apstrādes rīkiem. Pirmajos skolas gados skolēni intuitīvi iegūst pirmās zināšanas par datiem un to apstrādi, tas pakāpeniski sagatavo viņus abstraktai izpratnei (Cotič et al., 2024).

Matemātikas mācību satura izstrāde digitālajā laikmetā prasa rūpīgu satura un procesa līdzsvaru. Mācību saturam jāuzsver problēmu risināšanas, loģiskās domāšanas un reālā pielietojuma nozīme, nodrošinot, ka skolēni ne tikai apgūst matemātiskās procedūras, bet arī saprot, kā tās praktiski izmantot. Piemēram, Austrālijas skolu matemātikas saturs (<https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/>), kas organizēts ap galvenajiem satura un prasmju virzieniem, nodrošina holistisku un praktisku matemātikas izpratni, integrējot dažādas jomas, piemēram, skaitļus un algebru, mērījumus un ģeometriju, kā arī statistiku un varbūtību. Koncentrējoties uz izpratni, prasmju raitumu (*fluency*), problēmu risināšanu un loģisko domāšanu, mācību programma atbalsta visaptverošu matemātisko prasmju attīstību. Spirālveida pieejas izmantošana, kas nav sveša arī mūsu mācību procesā, ir uzsvēta kā būtiska Singapūras mācību saturā (Singapore Ministry of Education, 2006), lai atkārtoti pārskatītu un padziļinātu galveno jēdzienu izpratni laika gaitā. Pieeja, kas balstās uz ideju KONKRĒTS – ATTĒLS – ABSTRAKTS, vēl vairāk uzlabo šo procesu, palīdzot skolēniem attīstīt spēcīgu konceptuālo izpratni pirms pārejas uz abstraktām procedūrām. Pētnieciskās darbības veicināšana, apgūstot saturu, ir vēl viens svarīgs efektīvas matemātikas mācību satura aspekts. Veicinot izpēti, jautājumu uzdošanu un problēmu risināšanu, tiek attīstīta skolēnu kritiskā domāšana un dziļāka izpratne. Skolēnu centrētā pieeja saskan ar konstruktīvisma principiem, kur skolēni aktīvi iesaistās matemātisko problēmu risināšanā un atklāj risinājumus, izmantojot vadītu izpēti (Vasuki et al., 2016). Šāda visaptveroša pieeja nodrošina, ka skolēni attīsta dziļu matemātisko izpratni, kritiskās domāšanas prasmes un spēju pielietot matemātiku dažādos kontekstos, tā sagatavojoties panākumiem digitālajā laikmetā.

Līdzīgi šobrīd skatāmies uz matemātikas saturu Latvijā, ko veido tās pamatkoncepti – skaitļi, sakarības, statistika un varbūtības, ģeometrija un mēri un to konceptuālā izpratne, prasmju izpratne un raitums, matemātiskā spriešana un problēmrisināšana –, kas tiek apgūti, izmantojot digitālās tehnoloģijas, apgūstot matemātikas komunikācijas prasmes un saskatot visas kopsakarības (Čakāne et al., 2025). **6. att.**

6. att.



1.1.2. Situācijas apraksts, darbs stundās

Būtiski, lai skolotāju profesionālā attīstība tiktu uzskatīta par galveno sastāvdaļu, ieviešot jebkuru mācību satura reformu. Reformas centieni, kas nav saistīti ar skolotāju apmācību, dod maz cerību uz panākumiem, ja viens no galvenajiem aģentiem, proti, skolotājs, nebūs apguvis prasmes, zināšanas vai pārliecību, lai īstenotu pārskatīto mācību programmu paredzētajā veidā (Shimizu & Vithal, 2023).

Šis skolotāju atbalsta materiāls tapis arī kā reakcija uz novēroto stundās skolās (no 2017. līdz 2024. gadam), kur bija iespējams konstatēt, kādas zināšanas skolotājiem vēl nepieciešamas, lai skolēni iegūtu matemātisko pratību. Lai konstatētu, kas notiek stundās, un raksturotu skolēnu atšķirīgās pieredzes dažādās klasēs, tika vākti dati – stundu vērojumu transkripcija un to analīze. Stundu analīzei izmantota skolotāja snieguma izvērtēšana 21. gadsimta prasmju mācīšanā – tas ir 13 kritēriju kopums, kas konceptualizē skolotāja prakses, kuras vajadzīgas, lai skolēni apgūtu 21. gadsimta prasmes. Kritēriji ir strukturēti 6 kategorijās: skolēna pašvadītas mācīšanās veicināšana, skolēna izziņas darbības aktivēšana, skolēnu sadarbības veicināšana, jēgpilns digitālo tehnoloģiju lietojums, skolotāja pamatprasmes un tehnika, mācību satura reprezentācija. Lai aprakstītu, kas notiek sākumskolas matemātikas stundās, tika izvēlētas 4 kategorijas un 6 kritēriji **3. tabula**, kam ir būtiska nozīme, lai skolēni apgūtu matemātiku, to izprotot. Skolotājiem ir iespējas arī pašiem izvērtēt savu praksi, to rubrikā salīdzinot ar ieteicamo (labo) praksi, kas var noderēt kā ceļa rādītājs un nākamo pedagoģiskās izaugsmes soļu atspoguļojums (Namsone et al., 2021).

3. tabula

Kategorija	Kritērijs
Mācību satura reprezentācija	6.1. Mācību satura skaidrība
Skolotāja pamatprasmes un tehnika	5.1. Stundas veidošana
	5.2. Klases un metožu pārvaldība
Skolēnu izziņas darbības aktivizēšana	2.1. Mācību uzdevumi, lai notiktu mācīšanās iedziļinoties
	2.2. Sarunā tiek panākta iedziļināšanās
Pašregulētas* mācīšanās veicināšana	1.2. Metakognitīvo prasmju mācīšana, pilnveidošana

* Jēdziena skaidrojums 1.5. nodaļā 122. lpp.

Katram kritērijam ir izveidoti skolotāja snieguma līmeņa apraksti. Apraksti ir veidoti šādiem līmeņiem – nav novērots; mēģina, sāk; tuvu rezultātam; prasmīgs, lietpratīgs; eksperts (atbilstoši skalā no 0 līdz 3+), tā salīdzinot vēroto praksi ar aprakstītu vēlamo praksi, piemēram, kā varam izvērtēt, vai sarunā tiek panākta iedziļināšanās. 4. tabula

4. tabula

Līmenis	Apraksts
2.2. Sarunā tiek panākta iedziļināšanās	
Skolotāja uzdoto jautājumu daudzveidība; iespēja atbilžu variācijām. Laiks domāšanai. Vide un sarunas veicina domāšanu. Skolēnu skaits, kuri jautā. Uzdoto jautājumu veidi, fokuss. Skolēniem ir skaidra sarunas procedūra; skolēniem tiek mācīts, kā jautāt, kā atbildēt.	
0 (nav novērots)	Jauno informāciju izstāsta , jēdzienus skaidro skolotājs pats ; ja arī ir jautājumi – tie ir slēgti. <i>Skolēni pamatā klausās, skatās, pieraksta.</i>
1 (mēģina, sāk)	Daudz stāsta skolotājs , bet izmanto arī sarunas elementus – uzdod jautājumus , uz kuriem pamatā tiek gaidītas vēlamās atbildes . Faktiski izmanto jautāšanu atprasīšanai . Ja skolēni ātri nedod vajadzīgo atbildi, skaidro pats. <i>Skolēni pamatā klausās, skatās, pieraksta, atbild uz atsevišķiem jautājumiem un/vai uzdod atsevišķus jautājumus.</i>
2 (tuvu rezultātam)	Līdztekus stāstīšanai, jautāšanai veido situāciju, lai skolēni jautātu par mācīšanās saturu . Ja nepieciešams, māca skolēnus, kā veidot jautājumus, kā sarunāties. Cenšas dot skolēniem laiku atbildes apdomāšanai, taču tas nav pietiekams. <i>Skolēni brīvi jautā, iesaistās sarunā.</i>

3 (prasmīgs, lietpratīgs)	Uzdod daudzveidīgus jautājumus, t. sk. tādus, uz kuriem nav vienas pareizas atbildes, jautā skolēnu domas, prasa tās pamatot. Izmanto jautājumus un dažādās skolēnu atbildes, paplašinot sarunu frontāli vai grupās (pāros), nepieciešamības gadījumā skolēnu jautājumus pārfrāzējot. Dod skolēniem pietiekami laika domāšanai sarunas laikā. <i>Skolēniem ir skaidra sarunas procedūra, veidojot gan frontālās sarunas, gan sarunas grupās (pāros) – kā jautāt, kā atbildēt. Skolēni uzdod daudzveidīgus jautājumus.</i>
3+ (eksperts)	Ar piemērotiem problēmjautājumiem veido situācijas, lai ieinteresētu, panāktu iedziļināšanos. <i>Skolēni uzdod daudzveidīgus jautājumus; paši iniciē, vada diskusijas, ir aktīvi, pilnībā iesaistīti domāšanā.</i>

Pēc 171 matemātikas stundas vērojumiem un analīzes pētnieki ir konstatējuši gan to, kāda ir tipiska skolēna pieredze **5. tabula**, gan to, kāda dažādība pastāv, mācoties pie dažādiem skolotājiem. Vidējais skolotāju sniegums vērotajās sākumskolas matemātikas mācību stundās ir rēķināts, izmantojot skalu no 0 līdz 4.

5. tabula

Kritērijs	Vidējais sniegums	Mediāna
6.1. Mācību satura skaidrība	1,57	1
5.1. Stundas veidošana	1,81	2
5.2. Mācīšanas tehnika	1,80	2
2.1. Mācību uzdevumi, lai notiktu mācīšanās iedziļinoties	0,93	1
2.2. Sarunā tiek panākta iedziļināšanās	1,20	1
1.2. Metakognitīvo prasmju mācīšana, pilnveidošana	0,49	0

6. tabula parāda pārsvarā novēroto stundu raksturojumu (datu atainojums aprakstošs).

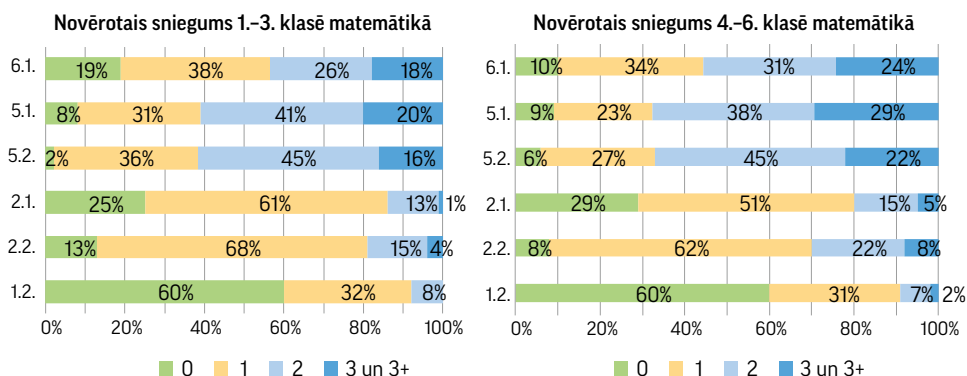
Stundās novērotais skolotāju sniegums sadalījumā pa snieguma līmeņiem ir redzams **7. att.** Lielākajā daļā 1.–3. klašu stundu netika strādāts ar skolēnu priekšstatiem un satura reprezentācija nebija pilnībā atbilstoša, gandrīz piektajā daļā no tām (un desmitajā daļā 4.–6. klašu stundu) satura attēlojums nebija skolēniem atbilstošs, tika pieļautas zinātniskas kļūdas, šajās stundās skolēniem varēja rasties maldīgi priekšstati. Tomēr tikpat daudzās jaunāko klašu stundās (un gandrīz piektajā daļā vecāko klašu stundu) saturs un tā attēlojumi bija korekti,

daudzveidīgi un atbilstoši, kā arī tika izzināti skolēnu priekšstati un maldīgo priekšstatu pārveide. Satura apguve bija virzīta uz jēgu, saistot jaunos jēdzienus esošajā sistēmā un atsedzot kopsakarības. Lielākajā daļā no visām sākumskolas matemātikas stundām stundas uzbūve un mācīšanas tehnika, kas ietver metožu pārvaldīšanu un klasvadības principu lietošanu, bija tuvu vēlamajam un atbilda vēlamajam sniegumam. Nelielā daļā stundu (14% jaunāko klašu un 20% vecāko klašu) skolēniem tika piedāvāti kompleksi uzdevumi, lai notiktu mācīšanās

6. tabula

Mācību stundai izvēlētais saturs ir būtisks, un ir centieni skaidrot jēgu, tomēr netiek strādāts ar skolēnu priekšstatiem. Saturs, tā skaidrojumi, valodas lietojums daļēji atbilst skolēnu vajadzībām. Notiek uz sasniedzamo rezultātu virzīta ieinteresēšana, un tiek aktualizēta skolēnu pieredze, bet tā nav pilnībā vērsta uz sasniedzamā rezultāta sasniegšanu. Uzdevumi un mācību aktivitātes ir secīgas un vajadzīgas rezultāta sasniegšanai, bet uzdevumi nav pietiekami savstarpēji saistīti. Laiks aktivitātēm pārsvarā ir atbilstošs (dažkārt nav pietiekams vai paliek pāri). Uzdevumi tiek doti skaidri un saprotami, tomēr par to, vai skolēniem ir skaidrs, kas darāms, pārliecinās formāli. Tiek panākts, ka skolēni pilda uzdevumus. Izvēlēti tādi uzdevumi, kuros ir nepieciešamas dažādas domāšanas prasmes, bet katrā tikai kāda atsevišķa, tie aizņem nelielu stundas daļu. Lielākajā stundas daļā ir nepieciešams lietot zema kognitīvā līmeņa prasmes. Stundā daudz stāsta skolotājs, bet izmanto arī sarunas elementus. Uz jautājumiem tiek gaidītas vēlamās atbildes. Jautājumus izmanto atprasīšanai. Ja skolēni ātri nedod atbildi, skolotājs skaidro pats. Skolēni pamatā klausās, skatās, pieraksta un atbild uz atsevišķiem jautājumiem. Skolēni nelieto metakognitīvās prasmes (netiek organizēta refleksija par to, kā notiek mācīšanās; skolēni netiek iesaistīti mērķu izvirzīšanā un savas darbības pārraudzīšanā, vērtēšanā).

7. att.



iedzīlīnoties. Nedaudz lielākā skaitā stundu (19% un 30%) tika organizēta produktīva saruna. Atlikušajās stundās skolēniem lielākajā stundas daļā (vai visu stundu) tika piedāvāti reproduktīvi uzdevumi un jautāšana lielākoties izmantota atprasīšanai. 40% no visām vērotajām stundām skolēniem tika dota iespēja vingrināt kādu atsevišķu metakognitīvu prasmi, skolēni tika iesaistīti refleksijā par stundā notiekošo procesu jēgu vai stratēģiju izmantošanas iespējām. Varam secināt, ka sākumskolas skolēniem, mācoties matemātiku, ir ļoti atšķirīgas pieredzes pie dažādiem skolotājiem – no mācību stundām, kurās mācās iedzīlīnoties, līdz tādām, kurās notiek tikai procedūru atdarināšana, neveidojot izpratni.

Tādējādi izgaismojas Latvijas sākumskolas skolotāju matemātikas mācīšanas profesionālās pilnveides vajadzības:

- matemātikas satura reprezentēšana un mācīšana,
- produktīvu uzdevumu izvēle,
- sarunas veidošana, lai notiktu mācīšanās iedzīlīnoties,
- metakognīcijas un pašregulētas mācīšanās veicināšana.

Būtiski ir piemeklēt atbilstošu profesionālās pilnveides formu un saturu, reaģējot uz konkrēta skolotāja vajadzībām.



Jautājumi pārdomām

Kādi ir matemātikas mācīšanas mērķi šodien?

Kā digitālo tehnoloģiju ienākšana ikdienā maina matemātikas satura struktūru?

Kā pētījumi, piemēram, PISA un TIMSS, signalizē par mūsu skolēnu spējām lietot matemātiku?

Kā es varu pārliecināties, ka savās stundās dodu iespēju skolēniem iedzīlīnāties un domāt?

Kā es saskatu nepieciešamību savai profesionālajai pilnveidei?

Literatūra tālākai uzzīpai

Cotič, M., Doz, D., Jenko, M., & Žakelj, A. (2024). Mathematics Education: What Was It, What Is It, and What will It Be? *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 19(3), em0783. <https://doi.org/10.29333/iejme/14663>

Čakāne, I., France, I., & Cīrule, A. (2025). Readjusting for Digital Transformation: A Primary Mathematics Framework. Environment. Technology. Resources. *Rezekne, Latvia Proceedings of the 16th International Scientific and Practical Conference*. Volume 3, pp. 61–68. <https://doi.org/10.17770/etr2025vol3.8554>

Green, T. D., & Donovan, L. C. (2018). *Learning Anytime, Anywhere through Technology. In The Wiley Handbook of Teaching and Learning* (eds. G. E. Hall, L. F. Quinn and D. M. Gollnick). <https://doi.org/10.1002/9781118955901.ch9>

Ministru kabinets. (2018). Ministru kabineta noteikumi Nr. 747: "Noteikumi par valsts pamatizglītības standartu un pamatizglītības programmu paraugiem". *Latvijas Vēstnesis*, 249, 19.12.2018. <https://likumi.lv/ta/id/303768-noteikumi-par-valsts-pamatizglitibas-standardu-un-pamatizglitibas-programmu-paraugiem>

- Namsone, D., Čakāne, L., & Eriņa, D. (2021). Teorētiskais ietvars skolotāju pašnovērtējumam 21. gs. prasmju mācīšanai. *Proceedings of the International Scientific Conference*. Volume II, May 28th – 29th, 402–429. Rēzeknes Tehnoloģiju akadēmija. <https://doi.org/10.17770/sie2021vol2.6437>
- OECD. (2010). *The High Cost of Low Educational Performance: The Long-run Economic Impact of Improving PISA Outcomes*. Paris: OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264077485-en>
- OECD (2023a). *PISA 2022. Assessment and Analytical Framework*. Paris: OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en>
- OECD (2023b). *PISA 2022. Mathematics Framework, in PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*. Paris: OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/7ea9ee19-en>
- OECD (2023c). *PISA 2022. Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education*. Paris: OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- OECD. (2023d). *PISA 2025. Learning in the Digital World. Assessment Framework (second draft)*. <https://www.oecd.org/en/topics/sub-issues/learning-in-the-digital-world/pisa-2025-learning-in-the-digital-world.html>
- OECD. (2024). *An Evolution of Mathematics Curriculum: Where It Was, Where It Stands and Where It Is Going*. Paris: OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/0ffd89d0-en>
- Oliņa, Z., Namsone, D., & France, I. (2018). *Mācīšanās lietpratībai*. Kolektīva monogrāfija (zin. red. D. Namsone). Rīga: LU Akadēmiskais apgāds.
- Saeima. (2020). Par Latvijas Nacionālo attīstības plānu 2021.–2027. gadam (NAP2027). *Latvijas Vēstnesis*, 127, 06.07. <https://likumi.lv/ta/id/315879-par-latvijas-nacionalo-attistibas-planu-20212027-gadam-nap2027>
- Shimizu, Y., & Vithal, R. (2023). *Mathematics Curriculum Reforms around the World*. New ICMI Study Series. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13548-4_21
- Singapore Ministry of Education. (2006). *A Philosophy for Learning Mathematics*. Singapore: Ministry of Education.
- Vasuki, M., Mbonigaba, C., & Dinesh, K. (2016). Curriculum Design in Mathematics: A Review of Effective Frameworks and Models. *Journal of Engineering, Scientific Research and Applications*, 2(2), 207–222.
- von Davier, M., Kennedy, A., Reynolds, K., Fishbein, B., Khorramdel, L., Aldrich, C., Bookbinder, A., Bezirhan, U., & Yin, L. (2024). *TIMSS 2023 International Results in Mathematics and Science*. Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center. <https://doi.org/10.6017/lse.tpisc.timss.rs6460>

1.2. Kā skolēns mācās

Tā kā skolotāji un politikas veidotāji cenšas pilnveidot matemātikas mācību programmas nākotnei, ir svarīgi pārvarēt plaisu starp matemātikas teorētiskajiem pamatiem un tās praktisko pielietojumu. Skolēniem ir jānodrošina iespējas nodarboties ar matemātiku tādā veidā, kas atspoguļo tās nozīmi un lietderību reālajā pasaulē, nodrošinot, ka viņi beidz skolu ne tikai ar izpratni par matemātikas jēdzieniem, bet arī ar pārlicību un spēju tos efektīvi pielietot ikdienas dzīvē un darbā (OECD, 2023).

1.2.1. Kā skolēns iemācās: kognitīvo spēju attīstība un dažādi spriešanas veidi

Lai skolēns labāk apgūtu mācību saturu un spētu padziļināti un atbilstoši vecumposmam spriest par apgūto, ir jābūt ievērotiem vairākiem nosacījumiem:

- 1) jāņem vērā skolēna individuālās īpašības (piemēram, intelekts, personība) un īpaši jau vecumposms un tam raksturīgās iezīmes kognitīvās attīstības kontekstā;
- 2) mācību process jāorganizē efektīvi, atbilstoši kognitīvo zinātņu pētījumiem par mācīšanos;
- 3) jābūt skaidrai izpratnei par to, kā skolēnam dažādās mācību jomās apgūt vispārīgās domāšanas un spriešanas prasmes.

Kādēļ šie nosacījumi ir tik būtiski? Pirmkārt, skolēna individuālās īpatnības var veidot gan skolēna uztveri un redzējumu par mācību saturu, gan attieksmi pret mācību procesu. Skolēni ir dažādi – to nosaka gan kognitīvās spējas jeb intelekts, gan personības iezīmes un citi faktori, piemēram, kāds var būt mierīgāks, pacietīgāks un ar labu atmiņu, cits – impulsīvāks un ar nepieciešamību vairākas reizes atkārtot visu un izmēģināt praktiski. Otrkārt, jāņem vērā arī skolēna vecumposms jeb jāpārzina gan cilvēku kognitīvā attīstība, gan emocionālās nobriešanas likumsakarības. Kā tiks aplūkots tālāk, mēs nevaram gaidīt, ka, piemēram, sešgadīgs bērns visās situācijās spēs patstāvīgi loģiski un likumsakarīgi spriest par abstraktiem jēdzieniem.

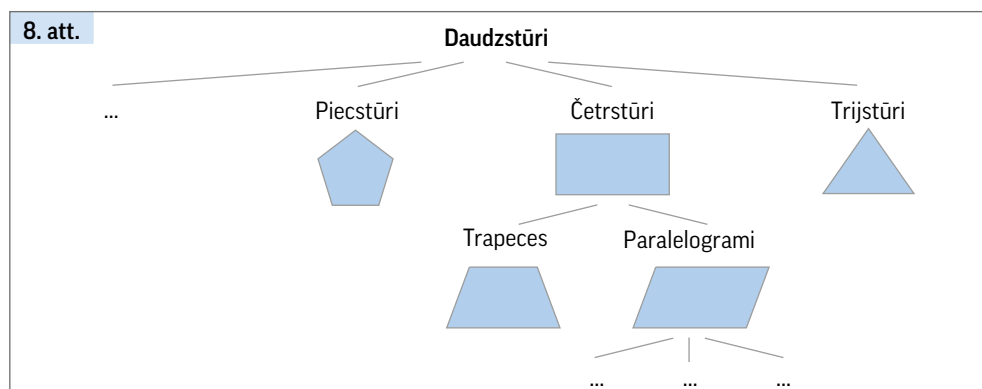
Savukārt mācību process ir saistāms ne tikai ar mācību fizisko vidi un nodrošinājumu, bet arī ar mācību procesa organizāciju. Dažādus mācību procesa

organizācijas paņēmienus jeb mācīšanas stratēģijas pēta kognitīvās psiholoģijas pētnieki. Šeit skolotājam talkā nāk atziņas no pētījumiem par kognitīvajiem jeb prātā norisošiem procesiem, tādiem kā uzmanība, atmiņa, valoda un citi.

Kognitīvās zinātnes pētījumu atziņas mācību procesa labākai organizēšanai

Kognitīvā zinātne ir psiholoģijas zinātnes virziens, kas pēta dažādus procesus, kuri notiek prātā, un principus, kuri jāievēro, lai efektīvi mācītos. Skolotājam ir svarīgi izprast, ka psiholoģijas zinātnē ir izpētīti tādi kognitīvie procesi kā indivīda uztvere, atmiņa, domāšana un abstraktā spriešana, kā arī valoda. Visi šie kognitīvie procesi ir saistīti ar to, kā skolēns mācās un kādi skolotāja organizēti paņēmieni var palīdzēt labāk tos aktivizēt un tādējādi labāk apgūt mācību saturu. Kognitīvo zinātņu pētnieki, balstoties uz praksē veiktiem pētījumiem, ir izveidojuši pārskatu par efektīviem paņēmieniem, kurus skolotājs var pielietot, lai veiksmīgāk iemācītu vielu (Perry et al., 2021). Tālāk apkopoti daži no šiem paņēmieniem.

- **Duālā iekodēšana.** Ir pierādīts, ka skolēni iemācās labāk, ja paralēli tiek lietoti gan verbāli, gan vizuāli stimuli (piemēram, attēli, shēmas vai video). Citiem vārdiem – skolēns gan dzird jauno jēdzienu vai redz to uzrakstītu, gan redz tā attēlu vai vizualizāciju. Piemēram, kad skolēns mācās daudzstūru nosaukumus, tiek gan vārdos nosaukti jēdzieni, gan rādīta shēma ar šiem jēdzieniem un arī atbilstoši attēli. **8. att.**
- **Mācīšanās ar pārtraukumu jeb pauzi.** Izpētīts, ka skolēns labāk iemācās materiālu, ja pie tā atgriežas vairākas reizes ar noteiktu laika nobīdi pēc pauzes, kas veltīta kādai citai tēmai. Piemēram, skolotājs vienā stundā māca, kā dalīt ar divciparu skaitli, tad pēc pāris dienām atgriežas pie šīs tēmas, līdz jaunapgūtās prasmes nostiprinās. Šai metodei var būt dažādas variācijas,



piemēram, pie kādas tēmas var atgriezties vairākas reizes vienas stundas laikā, ievērojot nelielu pārtraukumu. Vai arī gluži pretēji – pie vienas tēmas (jēdziena, koncepta, formulas, likuma utt.) skolotājs atgriežas, piemēram, vairākas reizes mēneša laikā, to ik reizi atkārtojot un nostiprinot. Šos variantus ir pat ieteicams kombinēt. Piemērs – par konkrēto tēmu tiek veidota domu karte, kuru skolēns papildina, ik pa laikam atgriežoties pie tās; to var veidot digitāli vai arī pierakstu lapās.

- **Tēmu mācīšana pamišus** (*interleaving*). Šis paņēmiens tiek īstenots līdzīgi kā mācīšanās ar pauzi, bet šajā gadījumā pēc konkrētas tēmas apguves noteikts laiks tiek veltīts citai tēmai. Tātad pamišus tiek apgūtas divas tēmas. Pēc otrās tēmas mācīšanas skolotājs atkal ķeras klāt sākumā mācītajam saturam. Tādā veidā paralēli tiek mācītas vairākas lietas, pie katras vairākkārt atgriežoties (pretēji idejai, ka jaunai vielai pievēršas tikai tad, kad pilnībā ir apgūta pirmā, tādējādi sadalot to stingri nošķirtos blokos). Piemēram, var miksēt dažādas tēmas un mācību paņēmienus: skolēns saskaita, atņem, reizina utt. Skolēns tiek arī mudināts analizēt un saprast, kāda ir atšķirība tam, ko un kā dara šajā piemērā, salīdzinot ar to, kā darīts iepriekšējā piemērā ar citu matemātikas paņēmieni.
- **Segmentēšana**. Sadalot lielu kāda mācību satura apjomu mazākos gabalos, skolotājs atvieglo tā uztveri un iemācīšanos. Jauna temata sākumā skolotājs uzreiz neparāda visas idejas, saturu un paņēmienus, kas būs jāapgūst, bet pamazām tos loģiski atsedz secīgās nodarbībās, tādējādi mazāk noslogojot skolēna prātu.
- **Atcerēšanās praktizēšana jeb “izgūšana no atmiņas”**. Ir pierādīts, ka iemācīšanos uzlabo prakse, kad stundas laikā par tikko vai nesen apgūtu mācību vielu tiek uzdoti kontroljautājumi pārbaudei. Tas var būt īss mācību tests, atvērtie jautājumi vai saruna pāros. Tam var pieiet arī radoši, piemēram, katrs skolēns mēģina izdomāt āķīgu jautājumu klasesbiedram par tikko apgūto saturu. Tādā veidā skolēns praktizē nupat iemācītā izgūšanu no atmiņas, nostiprinot zināšanas.
- **Zināšanu un prasmju pārbaude (jeb paštestēšanās)**. Arī šeit darbojas minētie atcerēšanās praktizēšanas principi. Ir izpētīts, ka testēšana, uzdodot jautājumu, darbojas labāk nekā vienkārši mācību materiāla pārlasīšana jeb klasiskā atkārtošana. Kādēļ tā? Jo, vienkārši lasot vēlreiz to pašu saturu, patiesībā skolēns mēģina atkārtoti ievietot šo informāciju savā atmiņā, nevis atcerēties, ko ir mācījies. Savukārt, mēģinot atbildēt uz jautājumu, notiek “izgūšana no atmiņas”. Turklāt šāda prakse arī ļauj ātri saprast, kur zināšanās ir robi un kas būtu jāmācās papildus (Perry et al., 2021). Praksē tas var izskatīties, piemēram, tā – skolēni citu pēc citas izvelk skolotāja sagatavotas

lapiņas ar potenciālajiem “testa jautājumiem” un mēģina uz tiem atbildēt, vai arī visiem skolēniem ir vienāds neliels tests ar atbilžu variantiem.

Zinātniskajā literatūrā atrodamas arī citas noderīgas mācīšanās un mācīšanas stratēģijas. Kopumā tās var iedalīt “lielajās stratēģijās” un “mazajās stratēģijās” (Yin et al., 2024). Lielās stratēģijas, piemēram, ir jau pieminētā mācīšanās ar atstatumu vai testēšana, kas no skolotāja prasa vairāk resursu un gatavošanās. Bet mazās stratēģijas jeb konkrēti paņēmieni ir pielietojamas vienkāršāk, bez speciāliem sagatavošanās darbiem (piemēram, teksta daļu pasvīturošana, pārlasīšana vai tikko izlasītā apkopošana, skaidrojot saviem vārdiem). Tiek pieņemts, ka lielās stratēģijas ir nozīmīgākas mācību satura apguvei. Tomēr būtiski ir skolēnam izskaidrot katras stratēģijas būtību un to, kā un kādēļ tā var palīdzēt uzlabot sniegumu, un to, lai zināšanas tiktu pamatīgi nostiprinātas. Var skaidrot, ka regulāra mācīšanās darot un aktīva piedalīšanās mācību procesā būs efektīvāka nekā mēģinājums vienā vakarā atcerēties visu mācīto. Efektīvāk ir sadalīt mācību saturu noteiktos posmos, ik reizi mācoties kādu daļu no visa tematā apgūstamā. Šāda pieeja un attiecīgo stratēģiju pielietošana gan prasa augstu pašorganizēšanās prasmi no skolēna puses (vai arī ārēju kontroli no vecākiem attiecībā uz jaunāka vecuma skolēniem).

Ko vēl vērts pieminēt, balstoties uz kognitīvās zinātnes pētījumu atziņām? Jāņem vērā arī teorija par kognitīvo slodzi (Chandler & Sweller, 1991). Tā pamatojas uz pieņēmumu, ka cilvēka darba atmiņa ir ierobežota. Darba atmiņas kā kognitīvā procesa funkcija ir nodrošināt īslaicīgu informācijas paturēšanu prātā un tās tūlītēju apstrādi, pirms tā nonāk ilglaicīgajā atmiņā (vai arī tiek aizmirsta jeb izmesta no prāta). Tipisks darba atmiņas pārbaudes uzdevums ir nupat dzirdētu skaitļu virkni nosaukt pretējā secībā (piemēram, dzirdot “7, 4, 6, 2”, nosaukt “2, 6, 4, 7”). Tipiski pēc šāda uzdevuma veikšanas indivīds tikko dzirdēto skaitļu virkni nepatur ilgtermiņa atmiņā.

Ir izpētīts, ka cilvēks spēj īslaicīgi paturēt prātā un apstrādāt ierobežotu daudzumu informācijas (piemēram, ir normāli paturēt prātā un nosaukt pretējā secībā 5 vai 6 ciparu virkni, bet būtu ārkārtīgi netipiski to izdarīt ar 30 cipariem). Un, ja darba atmiņa visu laiku ir pārslogota, skolēns nevar apstrādātās jaunās zināšanas veiksmīgi noglabāt ilgtermiņa atmiņā, kā arī uzņemt nākamās zināšanas. Līdzīgi kā telefona vai datora operatīvā atmiņa var ik pa laikam paziņot, ka tā jāiztīra no liekā, lai būtu vieta jaunai informācijai, tāpat arī cilvēka prātam vajag klusumu un tukšumu, lai nupat apgūto veiksmīgi noglabātu ilgtermiņa atmiņā. Darba atmiņas funkcionēšana ir ļoti svarīga, lai skolēns varētu prātā apstrādāt nupat apgūto informāciju (jeb “operēt ar informāciju”), kā arī lai veiksmīgi iemācītos jeb informāciju saglabātu ilgtermiņa atmiņā. Tas arī ir pamatojums, kādēļ liela apjoma mācību materiālu ir efektīvāk segmentēt un ievērot pauzes tā apguves laikā.

Mācīšanās un indivīda attīstība: ko skolēns spēj dažādos vecumos?

Lai izprastu, kādu sniegumu no skolēna var gaidīt dažādos vecumos, jāņem vērā teorija un pētījumi par indivīda attīstību. Psiholoģijas zinātnē atsevišķi aplūko gan kognitīvo jeb prāta spēju attīstību, gan dažādu socioemocionālo prasmju nobriešanu. Tālāk ieskicēsim kognitīvās attīstības principus.

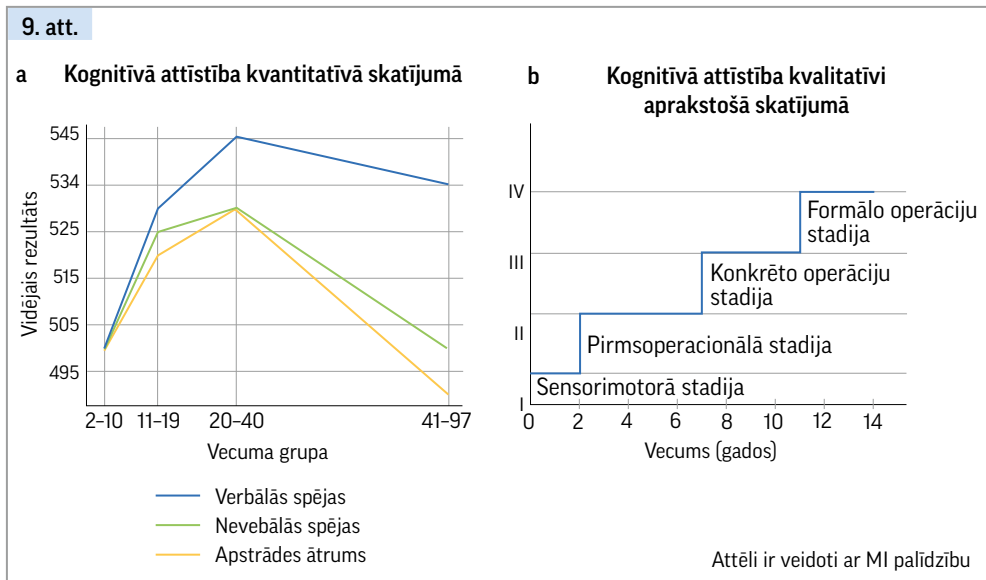
Attiecībā uz kognitīvo attīstību psiholoģijā nodala **kvalitatīvi** aprakstošās pieejas par bērna attīstību pa posmiem jeb pakāpēm un psihometriskās pieejas, kas attīstību mēra un salīdzina **kvantitatīvi**. 9. att.

Kvalitatīvi aprakstošās teorijas (attēlā b) raksturo, kādi ir tipiskie indivīda attīstības posmi. Šo pieeju pārstāvji runā nevis par to, cik punktu testā konkrētā vecumā bērnam būtu jāspēj iegūt, bet par to, kādas kvalitatīvas izmaiņas notiek laika gaitā.

Viens no plaši zināmiem klasiķiem šajā jomā – Žans Piažē (*Jean Piaget*) – izšķīra vairākas bērna kognitīvās attīstības stadijas (Piaget, 1964; Sebre, Miltuze, 2022), kuras bērns kopš dzimšanas secīgi iziet savā attīstības procesā. Attīstības gaitā mainās veids, kā bērns domā un uztver apkārtējo pasauli, un viņš pakāpjas nākamajā līmenī.

Balstoties uz Ž. Piažē teoriju, nodalāmas šādas attīstības stadijas:

- 1) **sensori motorā stadija**: aptuveni līdz 2 gadu vecumam (bērns uztver apkārtējo vidi un informāciju caur sensorām un fiziskām darbībām, sāk izprast notikumu secību);



- 2) pirmsoperacionālā stadija: aptuveni 2–6 gadu vecumā (bērns jau lieto simbolus informācijas reprezentācijai, bet vēl nespriež loģiski visās situācijās, vērojams egocentrisms domāšanā jeb nespēja pilnībā izprast, ka citi domā atšķirīgi);
- 3) konkrēto operāciju (darbību) stadija: aptuveni 7–12 gadu vecumā (bērns sāk spriest loģiski, izprot sakarības, vielas nezūdamību un citus konceptus), tomēr vēl pilnībā nespēj spriest par augsti abstraktām tēmām un izprast relativitāti (ka pasaulē viss nav “melns un balts”);
- 4) formālo operāciju stadija: aptuveni no 12 gadu vecuma (bērns jau spēj spriest abstraktos terminos, hipotētiski, piemēram, plānot eksperimentu).

Pēdējā no nosauktajām – formālo operāciju stadija – iezīmē bērna pāreju uz spēju domāt zinātniski, abstrakti loģiski un hipotētiski (tātad arī, piemēram, plānot zinātnisku eksperimentu), un tas notiek pusaudža gados – pamatskolas posmā. Šis ir laiks, kad arī mācību saturā ļoti strauji pieaug augsti abstraktu konceptu apjoms. Lai atvieglotu abstraktu jēdzienu izpratni, skolotājam ieteicams izmantot dažādus jau pieminētos paņēmienus, kā, piemēram, “duālo iekodēšanu”, vizualizācijas u. c. Turklāt kopumā jāņem vērā, ka ikvienam bērnam var būt individuālas attīstības īpatnības.

Savukārt **kvantitatīvi** par bērna attīstību izdara secinājumus, balstoties uz empīriskiem pētījumiem, kas balstīti mērījumos un datos. Ir pierādīts, ka vecums kopumā pozitīvi korelē ar spriešanas testu rādītājiem – tātad sniegums kognitīvo spēju testos pieaug skaitliski, pieaugot vecumam (Breit et al., 2024). Praktiski tas nozīmē, ka, piemēram, dodot bērnam ik gadu pildīt līdzvērtīgu kognitīvo spēju testu, viņš ar katru gadu spētu izpildīt arvien vairāk un arvien grūtākus piemērus, iegūstot arvien vairāk punktu konkrētajā testā. Pētnieki šādus secinājumus izdara arī, balstoties uz spēju testu standartizācijas pētījumiem lielās izlasēs. Šādos pētījumos ir skaidri redzams, ka, salīdzinot rezultātus pa vecumiem, pieaug ballu jeb punktu skaits testā.

Kopumā intelekts ir viena no dzīves laikā stabilākajām cilvēka pazīmēm, kā to apstiprina nesena metaanalīze (Breit et al., 2024). Tas nozīmē, ka indivīdam ar augstu intelektu jaunības gados ir liela iespēja saglabāt relatīvi augstu intelektu arī brieduma gados. Un tomēr – maziem bērniem šādas korelācijas ir zemākas. Tas nozīmē, ka maza bērna intelekta agrīns mērījums (piemēram, 5 vai 7 gados) vēl tik precīzi neprognozē vēlākus mērījumus, īpaši ja starp tiem ir daudzu gadu intervāls. Tas apliecina, ka agrīnā vecumā (īpaši pirmsskolā) spriešanas attīstību var lielā mērā ietekmēt apkārtējā vide, tās sniegtā kognitīvā stimulācija, mācīšanās, atbalsts attīstībai u. c. pozitīvi ietekmējoši faktori. Šis ir pierādījums, kāpēc agrīni (jau pirmsskolā) mācīšanās videi un labam mācību procesam ir tik būtiska nozīme! Psiholoģijas pētījumi par bērnu kognitīvo attīstību kopumā apstiprina teorētiku izvirzītos pieņēmumus, ka pakāpeniski bērns kļūst par indivīdu, kurš spēj

loģiski spriest. Pirmsskolas vecums un skolas pirmās klases (no apmēram 4 līdz 8 gadiem) iezīmē strauju spriešanas spēju pieaugumu (Jósza et al., 2024). Spriešanas spēju pieaugums notiek paralēli vispārējai fiziskai, emocionālai attīstībai un pieredzes gūšanai ģimenē, mācību un plašākā sociālā vidē. Šajā laika posmā pakāpeniski un nozīmīgi attīstās dedukcijas spēja, kas kļūst niansētāka: no vienkāršu secinājumu izdarīšanas (pareizi/nepareizi) līdz komplicētiem, daudzšķautņainiem secinājumiem. Apjomīgā pētījumā ar vairākiem tūkstošiem bērnu 4–8 gadu vecumā tika atklāts, ka deduktīvās spriešanas rādītāji nozīmīgi korelē ar vecumu. Turklāt vidējo rādītāju kāpums ik pa gadam šajā posmā bija kopumā vienmērīgs, tātad neparādījās īpaši netipisks, straujš lēcienš kādā gadā. Izpētīts arī, ka 2.–4. klases vecuma skolēniem nozīmīgi attīstās skaitļu izpratne, un tā saistās arī ar telpisko domāšanu (Carr et al., 2020).

Vēl agrāk – jau 3 gadu vecumā – parādās bērna spēja pamatot izvēli vienkāršās situācijās, lietojot vienkāršāku valodu (Hartwell, 2022). Pirms 3 gadu vecuma jau novērojama spēja izdarīt vienkāršus secinājumus (bez verbālas spriešanas). Piemēram, bērns spēj veidot secinājumu, balstoties uz savu novērojumu. Pētījumā bērni secināja, ka dzīvnieka rotaļlieta atrodas tajā mājīnā, pie kuras redzami attiecīgie pēdu nospiedumi. Turklāt bērni precīzi prata izšķirt, ka otra rotaļlieta (dzīvnieciņš, kurš “neatstāj pēdu nospiedumus”, ir otrā mājā, pie kuras neved pēdu nospiedumi).

Ar domāšanu un loģisko spriešanu saistītas spējas strauji attīstītās tieši skolas pirmajos gados. Piemēram, izpētīts, ka 7 gadu vecumā bērniem jau izteikti novērojama metaruna (jeb runāšana par notiekošo procesu) un ka tā parādās nozīmīgi vairāk salīdzinājumā ar bērniem 5 gadu vecumā (Hartwell, 2022). Metaruna izpaužas tad, kad bērni spontāni runā par lēmumu pieņemšanas procesu un kritērijiem, pēc kuriem pieņem lēmumu kādā situācijā, piemēram, izvērtējot, kura cilvēka teiktais visdrīzāk ir ticams. To var novērot pat 5 gadu vecumā, un ap šo laiku bērns arī jau apzinās, ka citi var domāt nepareizi jeb kļūdaini (Hartwell, 2022).

Attiecībā uz spēju spriest matemātiski kādā pētījumā tika atklāts, ka astoņgadnieku grupā vairums skolēnu spēja atrisināt matemātikas uzdevumus ar vienkāršiem, skaidriem nosacījumiem. Savukārt 10 gadus veci skolēni jau spēja vispārināt, izsecināt matemātiskas sakarības un tās pielietot citos uzdevumos, bet daļa no desmitgadniekiem spēja veiksmīgi pārnest savas prasmes citā kontekstā (Sun et al., 2023). Tomēr dati atklāja arī to, ka ne visi skolēni šajos vecumos tiek galā ar tādiem uzdevumiem, kurus tiem būtu jāspēj atrisināt. Šādi pētījumi apliecina nozīmīgu skolēna kognitīvo spēju pieaugumu sākumskolas vecumā, tomēr arī iezīmē individuālās atšķirības starp skolēniem.

Secināms, ka, salīdzinot kvalitatīvi aprakstošā pieejā un psihometriskā pieejā balstītos pētījumus, var apstiprināt strauju bērna spriešanas attīstību pirmsskolas

beigu posmā un skolas sākumā. Savukārt skolas vecumā spriešana kļūst loģiska, pamazām arvien labāk darbojoties ar abstraktu mācību vielu.

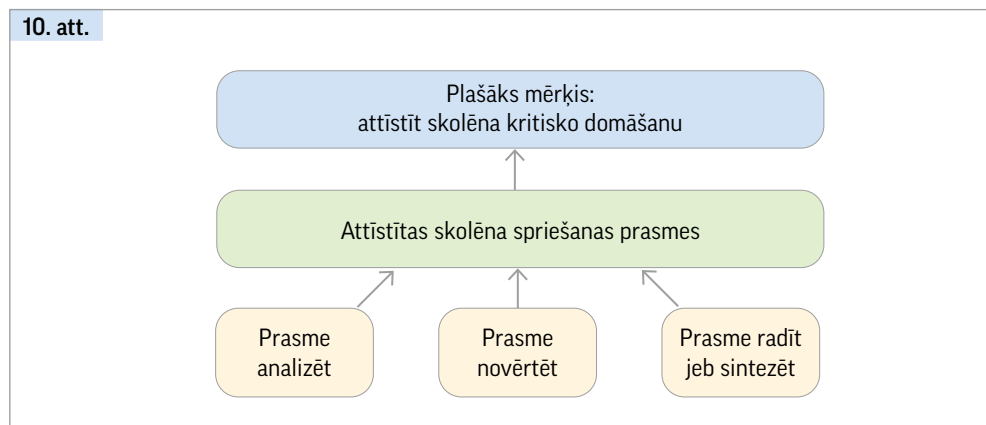
Skolēna spriešana: prasme analizēt, vērtēt, radīt

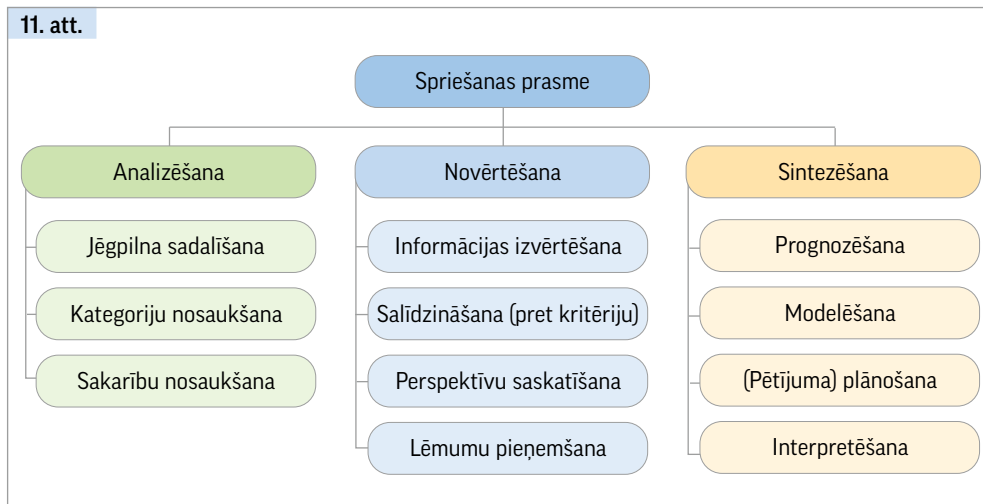
Viens no būtiskiem mērķiem izglītības procesā ir apgūt zināšanas un prasmes konkrētā jomā, kā arī nostiprināt epistēmiskās zināšanas (izpratni par to, kā veidojas zināšanas konkrētajā jomā). To visu kopā – zināšanas, prasmes un epistēmiskās zināšanas – dēvē arī par “zinātnisko spriešanu” (*PISA assessment framework*) (OECD, 2013). Zinātniskās spriešanas attīstībai svarīgas ir arī labi attīstītas vispārīgās *spriešanas prasmes*.

Skolēna kritiskās domāšanas prasme kā svarīgs izglītības mērķis definēts dažādos politikas dokumentos un starptautiskos izglītības projektos (piemēram, Vincent-Lancrin et al., 2019). Tomēr jēdziens “kritiskā domāšana” nereti ir nepietiekami detalizēti raksturots, lai skolotājs to skaidri ieviestu praksē mācību procesā un mācību stundā. Līdz ar to nepieciešams jēdziena skaidrojums, lai to tālāk varētu pielietot. Citiem vārdiem sakot – ir jāizprot, kādas konkrētas prasmes jēdziens “kritiskā domāšana” sevī ietver un ko tas nozīmē no skolēna skatpunkta (Hačatrjana & Namsone, 2024).

Jāsaprot, ka tas, ko vispārīgi dēvē par “kritiskās domāšanas prasmēm”, pēc būtības ietver dažādas spriešanas prasmes (Hačatrjana & Namsone, 2024).

10. att. Turklāt arī jēdziens “spriešanas prasmes” ir pārāk vispārīgs, tas jāsadala sīkāk, lai to precīzāk izprastu. Iedalot prasmes smalkāk, redzams, ka “spriešanas prasmes” kā virsjēdziens apvieno vairākas konkrētākas spriešanas prasmes: **analizēšanu, novērtēšanu un sintezēšanu jeb radīšanu** (Anderson & Karthwohl, 2001). Balstoties uz šo sadalījumu, var tālāk radīt konkrētas idejas, kā katru no šīm spriešanas prasmēm skolēnam attīstīt ikdienas mācību darbā.





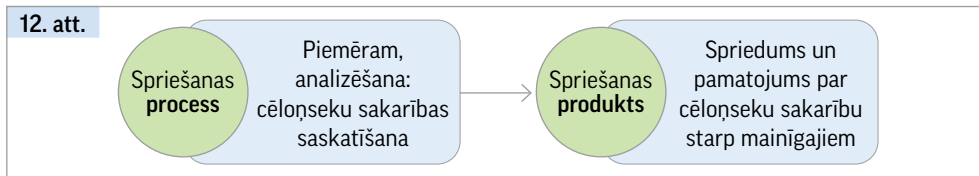
Svarīgi, ka nereti manāma arī neprecīza izpratne par jēdzieniem, kas saistīti ar domāšanas prasmēm. Piemēram, mēdz uzskatīt, ka “kritiskā domāšana” nozīmē informācijas ticamības izvērtēšanu (piemēram, atšķirt viltus ziņas no patiesām). Tomēr patiesībā, ja mēģinām saprast, vai ziņa ir ticama vai viltus ziņa, mēs izvērtējam informāciju, kas neaptver visus spriešanas aspektus, bet ir tikai viena no spriešanas prasmēm (Hačtrjana & Namsone, 2024).

Skolotājiem viens no svarīgākajiem mērķiem ir saprast, kā skolēnam nodrošināt iespēju secīgi apgūt matemātikas saturu. Attiecībā uz katrai jomai specifiskām zināšanām un prasmēm izglītības speciālisti parasti izstrādā mācību materiālus un metodiku, kā skolēnam labāk apgūt mācību saturu. Savukārt attiecībā uz spriešanas prasmēm (analizēt, vērtēt, radīt informāciju) izglītības jomā tiek izmantotas atziņas no psiholoģijas pētījumiem (Anderson & Karthwohl, 2001). Psiholoģijas pētnieki tipiski skatās uz indivīda attīstību un kognitīvajiem procesiem kopumā, nevis domā par kādu konkrētu mācību jomu (piemēram, pēta, “kādu procesu ietver informācijas analīze kopumā?”, nevis “kā notiek analīze matemātikā?”). Šī ir būtiska izglītības un psiholoģijas pētnieku atšķirība, un svarīgi saprast, kā abu jomu zināšanas apvienot, lai labāk izprastu skolēna mācīšanos konkrētā jomā.

Nākamais svarīgais solis, lai praktiski attīstītu spriešanu, ir izvērst konkrētās spriešanas prasmes (analizēt, vērtēt, sintezēt jeb radīt) vēl detalizētāk. Katru no prasmēm var iedalīt smalkāk līdz tādām līmenim, kas raksturo konkrētu prātā veiktu spriešanas darbību. 11. att. Katru šo darbību var aktivizēt, piemēram, mācību stundas laikā.

Tā kā spriešanas prasme ir komplekss fenomens, atsevišķi var nodalīt 1) gan pašu spriešanas procesu (nupat pieminētās prātā notiekošās darbības), 2) gan

12. att.



spriešanas rezultātu – galaproduktu (King et al., 1998; Hačatrdžana & Namsone, 2024).

Spriešanas produkts ir redzams un novērtējams domāšanas rezultāts, kas ir īpaši svarīgi mācību procesā, lai saprastu skolēna izpratnes līmeni. Skolēna spriešanas procesu prātā nevar tiešā veidā redzēt un novērtēt, kamēr domas nav izteiktas vārdos, rakstiski, vizuāli vai citādi padarītas redzamas jeb pārvērstas kādā galaproduktā.

Katram spriešanas procesa veidam ir kāds konkrēts sagaidāmais gala produkts. Piemēram, analīzes kā spriešanas procesa galaprodukts var būt argumentēts spriedums, kas tiek pateikts vai uzrakstīts. 12. att. Mācību procesā ir svarīgi runāt un aktualizēt gan spriešanas procesa, gan produkta nozīmi. Citiem vārdiem, svarīgs ir gan rezultāts, gan rezultāta sasniegšanas process un vingrināšanās to pielietot. **Spriešanas process** raksturo to, ko “skolēns dara savā prātā”, kad veic kādu mācību uzdevumu. Piemēram, ja skolēns aplūko izteiksmi $2 + 4 (3 + 2) = \dots$, kur ir ietvertas gan iekavas, gan reizināšana un saskaitīšana, skolēnam nākas to analizēt, lai izprastu, kā rīkoties. Tas nozīmē – savā prātā jēgpilni sadalīt visu doto izteiksmi loģiskās vienībās un saprast, kā un kādā secībā tās savā starpā mijiedarbojas.

Savukārt spriešanas produkts ir redzamais, novērtējamais iznākums tam, kas ir noticis skolēna prātā. Tieši produkts ir tas, ko skolotājs var redzēt un pēc kā var novērtēt skolēna izpratni. Minētā matemātikas piemēra gadījumā skolēns, pielietojot analīzes prasmes, var pareizi izpildīt uzdevumu, uzrakstīt atbildi un paskaidrot loģiku uzdevuma risināšanā.



Jautājumi pārdomām

Kādu paņēmieni no kognitīvo zinātņu pētījumos pamatotām atziņām skolotājs varētu pielietot, lai veicinātu jauna abstrakta jēdziena iegaumēšanu vai izpratni?

Kādu paņēmieni skolotājs varētu pielietot, lai skolēns labāk apgūtu kādu mācību priekšmetā būtisku prasmi?

Kad jūs kā pieaugušais apgūvat kaut ko jaunu – vai esat saskāries ar pieredzi, ka pasniedzējs izmanto kādu no aprakstītajiem paņēmieniem?

Kā jūs saprotat jēdzienu “metaruna”, un vai esat novērojuši skolēna metarunu?

Vai intelekta līmenis dzīves laikā ir nemainīgs?

Literatūra tālākai uzzīnai

- Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives: Complete Edition*. New York: Longman.
- Breit, M., Scherrer, V., Tucker-Drob, E. M., & Preckel, F. (2024). The Stability of Cognitive Abilities: A Meta-Analytic Review of Longitudinal Studies. *Psychological Bulletin*, 150(4), 399–439. <https://doi.org/10.1037/bul0000425>
- Carr, M., Horan, E., Alexeev, N., Barned, N., Wang, L., & Otumfuor, B. (2020). A Longitudinal Study of Spatial Skills and Number Sense Development in Elementary School Children. *Journal of Educational Psychology*, 112(1), 53–69. <https://doi.org/10.1037/edu0000363>
- Chandler, P., & Sweller, J. (1991). Cognitive Load Theory and the Format of Instruction. *Cognition and Instruction*, 8(4), 293–332. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0804_2
- Hačtrjana, L., & Namsone, D. (2024). Breaking Down the Concept of Students' Thinking and Reasoning Skills for Implementation in the Classroom. *Journal of Intelligence*, 12, 109. <https://doi.org/10.3390/jintelligence12110109>
- Hartwell, K. (2022). *Human Cognition: A Developmental Account of Human Reasoning Skills*. Doctoral thesis. The University of Manchester.
- Józsa, K., Oo, T. Z., Borbélyová, D., & Podráczky, J. (2024). Deductive Reasoning Skills in Children Aged 4–8 Years Old. *Journal of Intelligence*, 12, 33. <https://doi.org/10.3390/jintelligence12030033>
- King, F. J., Goodson, L., & Rohani, F. (1998). *Higher Order Thinking Skills: Definition, Teaching Strategies, Assessment*. New Brunswick: Center for Advancement of Learning and Assessment.
- OECD. (2013). *PISA 2012. Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. Paris: OECD Publishing.
- OECD. (2023). *PISA 2022. Mathematics Framework, in PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*. Paris: OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/7ea9ee19-en>
- Perry, T., Lea, R., Jørgensen, C. R., Cordingley, P., Shapiro, K., & Youdell, D. (2021). *Cognitive Science in the Classroom*. London: Education Endowment Foundation. <https://educationendowmentfoundation.org.uk/evidence-summaries/evidence-reviews/cognitive-science-approaches-in-the-classroom/>
- Piaget, J. (1964). Cognitive Development in Children: Development and Learning. *Journal of Research in Science Teaching*, 2, 176–86.
- Sebre, S., Miltuze, A. (2022). *Attīstības psiholoģija. Cilvēka attīstība visas dzīves garumā*. Zvaigzne ABC.
- Sun, S., Sun, D., & Xu, T. (2023). The Developmental Progression of Early Algebraic Thinking of Elementary School Students. *Journal of Intelligence*, 11(12), 222. <https://doi.org/10.3390/jintelligence11120222>
- Vincent-Lancrin, S., González-Sancho, C., Bouckaert, M., de Luca, F., Fernández-Barrerra, M., Jacotin, G., Urgel, J., & Vidal, Q. (2019). *Fostering Students' Creativity and Critical Thinking: What it Means in School*. Paris: Educational Research and Innovation, OECD Publishing.
- Yin, Y., Fan, T., Zhao, W., Zheng, J., Hu, X., Su, N., Yang, C., & Luo, L. (2024). Study Strategy Use among Elementary School Students: Is Use of Specific Study Strategies Related to Academic Performance? *Metacognition and Learning*. <https://doi.org/10.1007/s11409-024-09377-y>

1.2.2. Matemātiski pratīgs skolēns

Skolēnam ar matemātisko pratību* piemīt konceptuāla izpratne, spēja veikt procedūras raiti, stratēģiskā izpratne, adaptīva domāšana un produktīva attieksme. Nedaudz raksturosim katru no šiem faktoriem (Van de Walle et al., 2013).

Konceptuālā izpratne (*conceptual/relational understanding*) – matemātisko jēdzienu, darbību un attiecību izpratne. Tās ir zināšanas par saistībām vai fundamentālas idejas kādā temātā. Skolēns spēj izmantot esošās zināšanas un tās saistīt ar jaunām, paplašināt savu zināšanu apjomu par matemātisko konceptu. Piemēram, situācijā, kad domājam par izteiksmi $48 + 27$, konceptuāla izpratne izpaudīsies, ja par to spēsim domāt dažādi. Varam spriest, ka šī izteiksme var attēlot to, ka ir 48 svētku dalībnieki un vēl ierodas 27, ka šī izteiksme ir tas pats, kas $40 + 20 + 8 + 7$, ka varam skaitļus pierakstīt citādi, mainīt saskaitāmo kārtību, izprast, ka šī summa ir lielāka nekā 60, utt.

Ja jautājam skolēnam “kas ir taisnstūra laukums?”, atbilde bieži ir “platums reiz garums”. Ja lūdzam paskaidrot, kas tas ir, skolēni bieži atkārtoti detalizētāk, skaidrojot, ka ir jāzina gan platuma, gan garuma lielumi, un tad tos sareizina, lai aprēķinātu laukuma lielumu. Šajā atbildē skolēns demonstrē zināšanas par procedūru, nevis konceptuālu izpratni. Ričards Skempis (*Richard Skemp*) skaidro, ka bieži lietojam vārdu “izpratne” (*understanding*) šaurā vai virspusējā nozīmē (Skemp, 1976). Šajā piemērā skolēns jēdzienu “laukums” asociēja ar formulu, un nav skaidrs, vai formula skolēnam kaut ko nozīmē vai ne. Savukārt skolēns, kuram ir konceptuālā izpratne, skaidros, ka taisnstūra laukums raksturo virsmas lielumu, ko parasti mēra, izmantojot vienādus kvadrātus – laukuma mērvienības, piemēram, kvadrātcentimetrus vai kvadrātmetrus. Skolēns demonstrēs izpratni par to, kas ir laukums, – ka tas ir lielums, kas raksturo noklāto/aizņemto virsmas platību, un ka to aprēķina, atbildot uz jautājumu, “cik kvadrātu pārklāj virsmu?”.

Procedūru veikšanas raitums (*procedural fluency*) ir prasme veikt dažādas darbības, algoritmus utt. elastīgi, precīzi, efektīvi un atbilstoši. Ar procedūrām saprotam darbību vai soļu secību, kas tiek izmantota, lai sasniegtu uzdevumu vai mērķi (Hurell, 2021). Būtībā procedūra ir rutīna, bet to var izmantot ar izpratni vai arī vienkārši atdarināt. Procedūru veikšanas raitums ir zināšanu, algoritmu/likumu lietošana, kā arī simbolu lietojums, ko izmantojam matemātikā. Tās var ietvert matemātisko darbību vai algoritmu sistēmas atpazīšanu, tai pašā laikā ietvert zināšanas par to, kā veidot algoritmus, kas nepieciešami problēmas risināšanai. Ja dota izteiksme $50004 - 49997$, tad skolēns, kura procedūru veikšanas raitums ir neliels, varētu lietot tradicionālo atņemšanas algoritmu. Savukārt skolēns

* *Adding It Up, National Research Council, 2001.*

ar lielāku procedūru veikšanas raitumu varētu saprast, ka vienkāršāk šoreiz ir domāt tā, ka no 49997 līdz 50000 ir tikai trīs un vēl 4, tātad starpība būs 7.

Ja ir jāsaskaita vairākas reizes viens un tas pats skaitlis, piemēram, 375 jāsaskaita 10 reizes, tad tiek izmantota nevis saskaitīšana, bet reizināšana ar 10.

Stratēģiskā kompetence (*strategic competence*) ir spēja formulēt, attēlot un risināt dažādus matemātikas uzdevumus, izvēloties atbilstošu risināšanas stratēģiju. Te tiek izmantoti jautājumi un meklētas uz tiem atbildes. Piemēram, ja kaut kas nestrādā, vai es varu darīt citādi? Ja skolēns spēj nomainīt vienu stratēģiju pret citu, kad uzreiz neizdodas uzdevumu atrisināt un tiek mēģināts darīt vēl un vēl, viņš demonstrē savu stratēģisko kompetenci.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Dāvis devās uz tirdzniecības centru. Atgriezies mājās, viņš stāstīja savai mānai Daigai: “Man atlikuši 2 eiro. Pirmajā veikalā es iztērēju pusi no līdzpaņemtās naudas. Otrajā veikalā es iztērēju pusi no atlikušās naudas un vēl 6 eiro.”

Daiga viņam jautāja: “Cik naudas tev bija, kad tu aizbrauci uz tirdzniecības centru?”

Viena no stratēģijām būtu veidot un izmantot algebrisku modeli, ko skolēni ir spējīgi lietot pēc sākumskolas posma.

x ... tik naudas bija

$$2 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} : 2 + 6 = x$$

$$8 + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = x \quad | \cdot 4$$

$$32 + 2x + x = 4x$$

$$32 + 3x = 4x$$

$$32 = x$$

Ja domājam par jautājumu, kā uz šādu uzdevumu skatāmiem sākumskolas posmā un vai te jau būtu iespējas lietot dažādas stratēģijas, atbilde ir jā.

Varam novērtēt un izmantot stratēģiju “mini un pārbaudi”. Būtiski ir tas, ka skolēns novērtē, ar kuru lielumu sākt, un pēc tam mērķtiecīgi pārbauda vairākas versijas, līdz iegūst gala risinājumu, pieņem lēmumu, kā sakārtot informāciju, piemēram, izmanto **7. tabulu**.

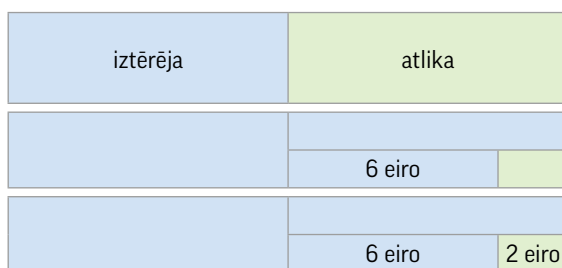
Varam izmantot “taustāmu” modeli vai vizualizāciju un izmantot stratēģiju “risinu no beigām”. **13. att.**

Daiga sprieda un veidoja savu modeli, izmantojot taisnstūri: pirmajā veikalā Dāvis iztērēja pusi no savas naudas – sadalu taisnstūri uz pusēm. Otrajā veikalā viņš iztērēja pusi no atlikušās naudas un vēl 6 eiro – sadalu atlikušo daļu uz pusēm

7. tabula

Prognoze					
Nauda, kas bija	Puse no naudas	Puse no puses	6 eiro	Palika 2 eiro	Pārbauda
20	10	5	6	2	$23 > 20$
30	15	7,5	6	2	$30,5 > 30$
40	20	10	6	2	$38 < 40$
<i>Naudas daudzums būs starp 30 un 40 eiro</i>					
32	16	8	6	2	$32 = 32$

13. att.



un, tā kā es nezinu, cik liela daļa ir 6 eiro, iezīmēju to aptuveni. Atlikusi daļa ir 2 eiro, kas Dāvim palika.

Tad spriežam no beigām: ceturtā daļa Dāvja naudas ir $2 + 6 = 8$ eiro.

Uz tirdzniecības centru ejot, līdzī paņemtās naudas daudzums ir $8 \cdot 4 = 32$ eiro.

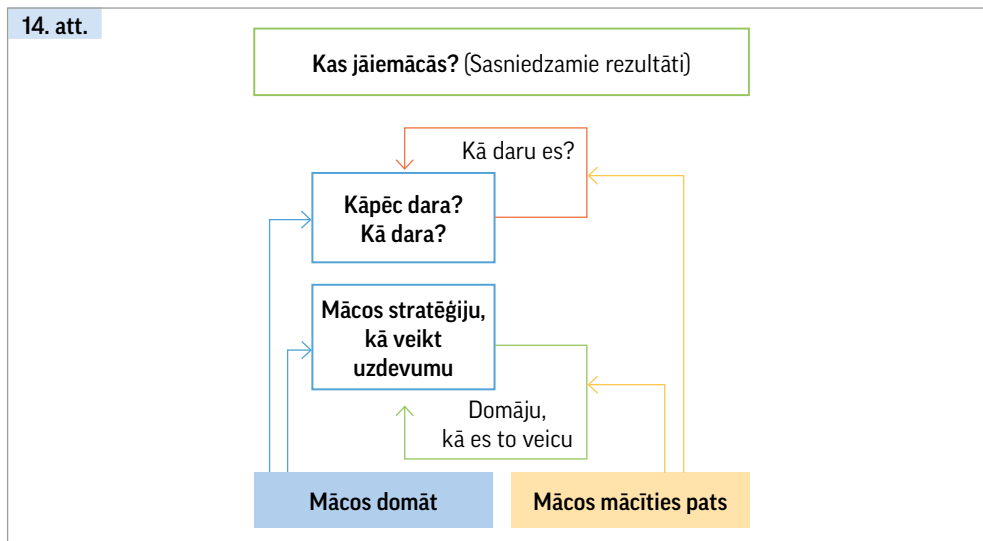
Adaptīvā domāšana (*adaptive reasoning*) ir spēja elastīgi un radoši pielietot zināšanas un prasmes dažādās situācijās, lai risinātu problēmas un pieņemtu lēmumus. Tā ietver loģisko domāšanu, argumentāciju un spēju pielāgoties jauniem apstākļiem vai izaicinājumiem. Tā ir būtiska, lai efektīvi risinātu sarežģītas problēmas, jo ļauj izmantot iepriekš iegūtās zināšanas un pieredzi, izstrādājot jaunus risinājumus un pielāgojot pieejas atbilstoši situācijai.

Skolēns ir gatavs meklēt atbildes uz jautājumiem (Namsone u. c., 2020). 14. att.

Kad uzdevums pabeigts, skolēns spēj uzdot sev jautājumus: "Kā es zinu, ka tas ir pareizi? Vai man ir veids, kā pašam pārliacināties vai pārliecināt kādu klasesbiedru, ka izdarīts pareizi? Kā es saprotu, ka kaut kur ir kļūda? Kā es varētu izmantot...?"

Tā ir spēja reflektēt par savu darbu, izvērtēt un tad pielāgot uzlabojumus.

Iepriekšminēto var attīstīt, ja skolēniem ir problēmrisināšanas pieredze kā matemātikas ikdienas mācīšanās.



Produktīva attieksme (*productive disposition*) ir uzskats, ka matemātika ir pielietojama un vērtīga sasaistē ar centības un savas efektivitātes nozīmību. Tātad skolēnam ir tieksme saskatīt jēgu matemātikā, uztvert to kā gan noderīgu, gan vērtīgu, ticēt, ka pastāvīgs darbs matemātikas apgūvē atmaksājas, un redzēt sevi kā veiksmīgu matemātikas lietotāju. (Varu izdarīt, man nepieciešama iespēja padomāt, kā.)

Atceramies, ka mācīšanos ietekmē arī motivācija, kas ir produktīvas attieksmes sastāvdaļa. Piemēram, ja skolēns iepazīstas ar uzdevumu, kuram ir sadzīvīgs saturs, kādus jautājumus un apgalvojumus viņš lieto – “Es nevaru atcerēties, kā šādus uzdevumus risināja” vai “Kā es šo varētu atrisināt? Man tikai vajag nedaudz padomāt”?

Skolēnam ir pārliecība, ka viņš var saprast un izdarīt.

Matemātikas mācīšanās un apgūvē skolā ir jāievēro, lai visu piecu faktoru – konceptuālās izpratnes, procedūru veikšanas raituma, stratēģiskās kompetences, adaptīvās domāšanas un produktīvās attieksmes – attīstība būtu integrēta un līdzsvarota. Mācībām nevajadzētu balstīties uz galējām pozīcijām, ka skolēni mācās, no vienas puses, tikai apgūstot to, ko saka skolotājs vai grāmata, vai, no otras puses, tikai paši atklājot matemātikas sakarības (National Research Council, 2001).

Mācoties strādājot tehniskās nozarēs un pat ikdienas dzīvē cilvēki izmanto sakarības vai formulas bez domāšanas. Formulas atvieglo darbu. Lietojot matemātikā, cilvēks veido savu rīcību – savieno situāciju ar atbilstošo formulu un sekmīgi veic visus matemātiskos soļus, lai nonāktu pie pareizās atbildes. Tādējādi

gan **konceptuālā izpratne**, gan **prasmju lietojums un to raitums** ir svarīgi (Hiebert & Grouws, 2007). Matemātikā iemācāmies un mācām visādus veidus, kā atcerēties formulas, attiecības un paņēmienus, kas ir ļoti svarīgi problēmu risināšanā. Lai atrastu nezināmo malas garumu taisnleņķa trijstūrī, nāk prātā Pitagora teorēma, lai izdalītu daļu ar daļu, “apgriež” otro daļu un reizina skaitītājus un saucējus. Liekot skolēniem iemācīties paņēmienus bez sapratnes, tas var viņus negatīvi ietekmēt arī turpmākajā dzīvē (Richland et al., 2012). Pētnieki secina, ka bieži vien skolēni neattīsta zināšanas par jēdzieniem, bet paliek tikai pie prasmēm, kas apgrūtina matemātisko domāšanu un ilgtermiņa atmiņu par tām. Novērots, ka tad, ja skolēni neattīsta tālāk domāšanu par konceptiem, viņi nepārbauda, vai atbilde ir loģiska vai ne, un nemēģina atrast sakarības, kas atvieglinātu rēķināšanu. Skolotājs, kurš dod rēķināt daudz vienveidīgu uzdevumu, palīdz skolēniem attīstīt prasmes, bet ne konceptuālo izpratni. Ja skolotājs lūdz skolēniem skaidrot, kāpēc kāds algoritms dod pareizo atbildi, tad tas veicina arī zināšanas (Richland et al., 2012).

Zināšanas un izpratne par jēdzienu dod iespēju izvēlēties piemērotu darbību katram solim problēmu risināšanas procesā, prognozēt risinājumu gaitu un veidot jaunu izpratni un stratēģijas, ar kuru palīdzību risināt jaunas problēmas (Richland et al., 2012). Izpratni var aprakstīt kā jēdzienu attiecību tīklu (*web of relationships*), kas savieno jau iepriekš zināmus jēdzienus un arī rada jaunus (Hurrell, 2021).



Jautājumi pārdomām

Kā jūs raksturotu savu skolēnu konceptuālo izpratni par kādu no matemātikas satura jautājumiem?

Cik nozīmīgi ir attīstīt skolēniem matemātikas procedūru veikšanas raitumu?

Kā stratēģiju pārzināšana ietekmē skolēnu mācīšanās procesu?

Kā jūs varat veicināt savu skolēnu adaptīvo domāšanu?

Kādas aktivitātes jūs veicat savās stundās, lai veicinātu skolēnu produktīvo attieksmi?

Literatūra tālākai uzziņai

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The Effects of Classroom Mathematics Teaching on Students' Learning. In F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371–404). Charlotte, NC: Information Age.

Hurrell, D. P. (2021). Conceptual Knowledge OR Procedural Knowledge OR Conceptual Knowledge AND Procedural Knowledge: Why the Conjunction is Important for Teachers. *Australian Journal of Teacher Education*, 46(2). <http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2021v46n2.4>

- Namsone, D., Čakāne, L., France, I. (2020). *Skolotājs prātnieku laboratorijā. Atgādes skolotājam, kurš mācās*. LU Starpnozaru izglītības inovāciju centrs. Rīga: LU Akadēmiskais apgāds.
- National Research Council. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: The National Academies Press. <https://doi.org/10.17226/9822>
- Richland, L. E., Stigler, J. W., & Holyoak, K. J. (2012). Teaching the Conceptual Structure of Mathematics. *Educational Psychologist*, 47(3), 189–203. <https://doi.org/10.1080/00461520.2012.667065>
- Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–26.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., Bay-Williams, J. M., & Wray, J. (2013). *Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally*. Upper Saddle River, NJ, Pearson.

1.3. Matemātikas mācīšanās, veidojot izpratni

Lai skolēni spētu risināt jaunas problēmas, viņiem ir jāmācās matemātika ar izpratni (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Piažē atzina, ka izpratni veido pats indivīds, to nevar ne atrast, ne saņemt (Piaget, 1972). Skolotājs var palīdzēt skolēnam iemācīties no galvas reizināšanas tabulu vai formulas, bet izpratni skolēns veido pats, tas ir skolotāja apzināti atbalstīts process. Nevar gaidīt, ka skolēns pats izpratīs, ja neradīs tam piemērotus apstākļus, kā arī būtiski ir mācīšanās mērķi. Vairāku līdzīgu matemātikas uzdevumu risināšana nenozīmē, ka tiks iegūta dziļa izpratne par tiem (Richland et al., 2012).

1.3.1. Matemātisko konceptu reprezentācija jeb attēlojums

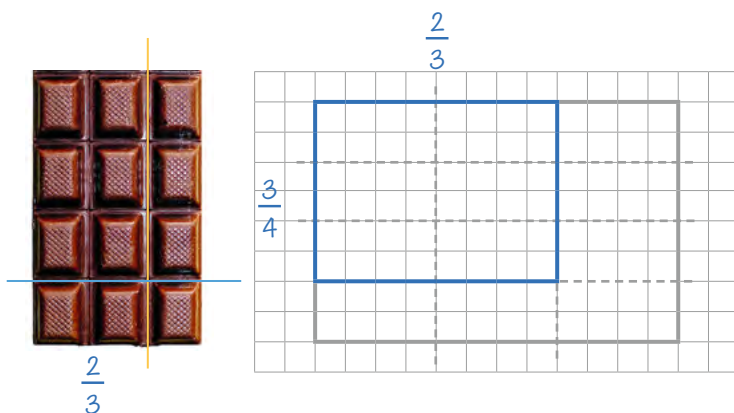
Lai padziļinātu skolēnu izpratni par kādu jaunu matemātisku ideju, tai skaitā par matemātiskām darbībām, ir nepieciešams domāt par dažādām matemātikas jēdzienu reprezentācijām jeb attēlojumiem. Tas paplašina skolēnu izpratni, kur un kā lietot katru darbību un ko nozīmē iegūtie rezultāti (Van de Walle et al., 2013; Mainali, 2021; Huinker, 2015). Efektīva matemātikas mācīšana iesaista skolēnus, veidojot pārejas starp matemātiskajām reprezentācijām, lai padziļinātu izpratni par matemātikas jēdzieniem un procedūrām, un problēmu risināšanas instrumentiem (Huinker & Bill, 2017; Chang et al., 2017). Jo vairāk reprezentāciju skolēns spēj sasaistīt vai darboties konkrētā attēlojuma robežās, jo vieglāk skolēnam ir integrēt konkrētu ideju bagātīgā jēdzienu tīklā un attīstīt jēdzienu savstarpējo attiecību izpratni.

Dažādu attēlojumu piemērs daļu reizināšanas konceptam

Jāsareizina $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$.

Vārdiski varam pateikt, ka divas trešdaļas ir jāreizina ar trīs ceturtdaļām, – lietojam matemātikas valodu.

15. att.



Stāstu: nolauzu $\frac{2}{3}$ no šokolādes. Šodien nolēmu apēst $\frac{3}{4}$ no nolauztās daļas. Tātad šodien apēdišu 6 šokolādes gabaliņus jeb $\frac{6}{12}$ no visas šokolādes.

Atceros, ka reizināšanu var vizualizēt ar laukuma palīdzību, rīkošos līdzīgi. Zīmēju taisnstūri, vienu malas garumu sadalu 3 daļās, atlieku $\frac{2}{3}$, otru malas garumu sadalu 4 daļās, atlieku $\frac{3}{4}$. Jaunā taisnstūra laukums ir $\frac{6}{12}$ jeb $\frac{1}{2}$ no taisnstūra.

Varam paņemt fizisku objektu – šokolādi – vai to vizualizēt, izmantojot zīmējumu. **15. att.**

Pierakstu daļu reizināšanu ar simboliem – skaitļiem.

Izmantoju modeli vai attēlu un rakstu $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$.

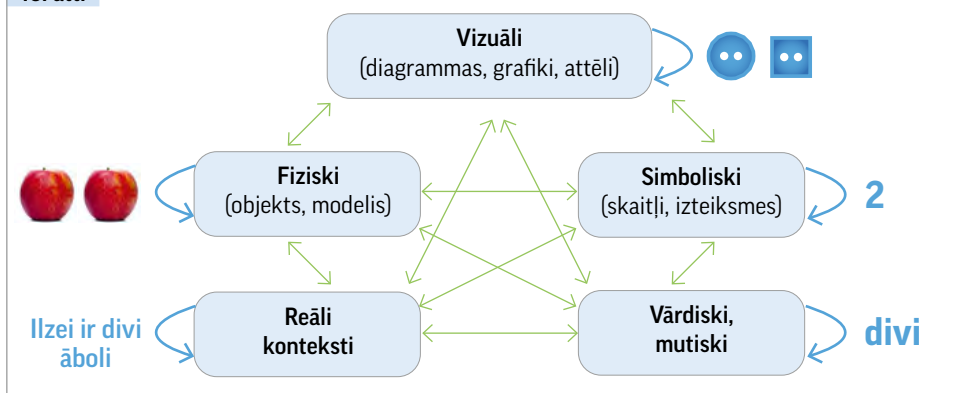
Zinu daļas īpašības un reizināšanas algoritmu un izpildu reizināšanu:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3^1}{3^1 \cdot 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Varu izdomāt savu situāciju uzdevumu, kura risināšanā būs jāizmanto daļu reizināšana.

Ģimenes ekskursijai nolēmām tērēt $\frac{2}{3}$ no sakrātās naudas. Mēs aprēķinājām, ka ceļa izdevumi būs $\frac{3}{4}$ no ekskursijai paredzētās naudas. Cik lielu daļu no sakrātās naudas tērēsim ceļa izdevumiem šai ekskursijai?

16. att.



Matemātiska reprezentācija jeb attēlojums ir prāta vai fiziski taustāma (konkrēta) konstrukcija, kas apraksta matemātisku jēdzienu un šī jēdziena saistību ar citiem jēdzieniem. Lai veidotu izpratni par kādu jēdzienu, ir jāpieredz, kā šis jēdziens izpaužas dažādās vidēs (Tripathi, 2008).

Reprezentāciju dažādā loma mācoties (Huinker & Bill, 2017):

- tā ir bāze skolēnu **izpratnei** par matemātisku **ideju**,
- tā palīdz skolēniem **izprast matemātiskos kontekstus**,
- tā palīdz **atpazīt saistību** starp matemātikas jēdzieniem,
- tā dod iespēju **komunicēt par izpratni** un spriedumiem.

Viens pieņemtais veids, kā klasificēt šos attēlojumus jeb reprezentācijas, ir adaptēts no Lesh et al., 1987. **16. att.**

Būtiskas ir skolēna prasmes veidot sasaisti starp dažādiem matemātiskā koncepta attēlojumiem. Tas nozīmē, ka skolēniem jāspēj izprast dažādas reprezentāciju formas, viegli izmantot tās pēc vajadzības un izvēlēties piemērotāko un ērtāko attēlojuma metodi, lai izskaidrotu un risinātu problēmas.

Fiziskā reprezentācija

Ar fiziskiem objektiem jeb priekšmetiem saprotam tāds objektus kā, piemēram, klucīši, bumbas, papīra loksnes, izgatavotas ģeometriskās plaknes vai telpiskās figūras u. c. To izmantošana ļauj skolēniem apgūt sarežģītas matemātiskas idejas praktiskos, pieredzē balstītos veidos (Reys et al., 2007).

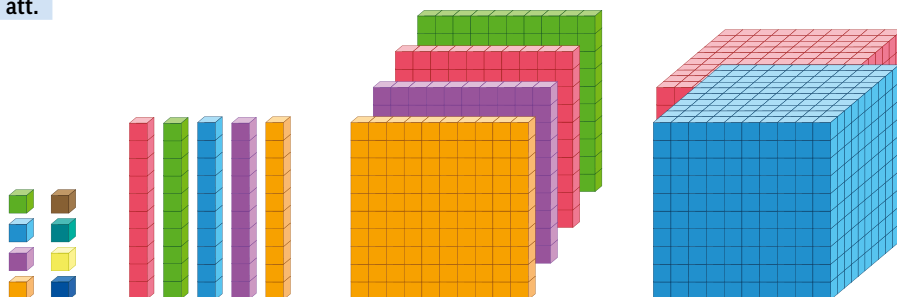
Jau pirmsskolā bērni, domājot par matemātiku, izmanto dažādus dabas objektus, ko skaita, mācās izprast, ko nozīmē jēdzieni, piemēram, “kopā”, “atņēma” utt. **17. att.**

Apgūstot skaitļošanas paņēmieni ar naturāliem skaitļiem un decimāldaļām, varam izmantot desmitu bāzes blokus. **18. att.**

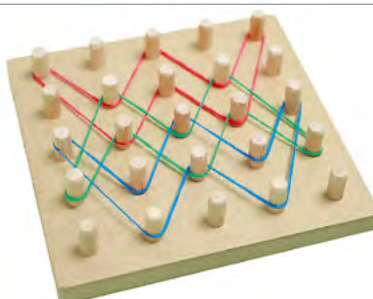
17. att.



18. att.



19. att.

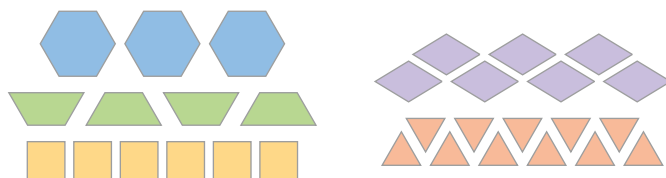


Pētot figūras, to veidošanu vai to īpašības, kā aprēķināt figūras perimetru vai laukumu, to kopsakarības, varam izmantot *Geobord* – ģeometrijas dēli jeb ģeodēli. 19. att. Darbošanās ar ģeodēli attīsta arī sīko motoriku, telpisko domāšanu, acu un roku koordināciju. To var izmantot arī daļu vizualizēšanai.

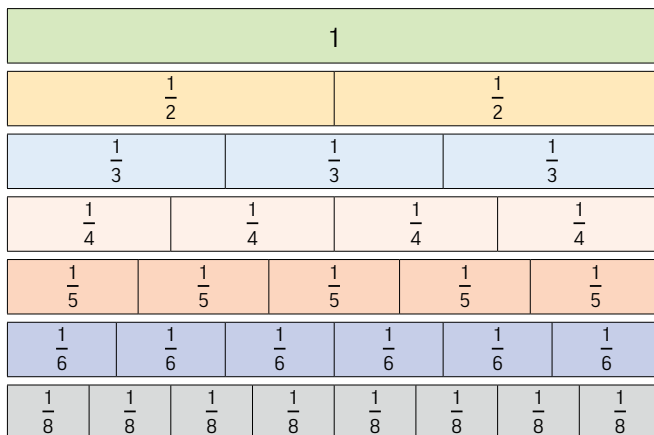
Lai iegūtu un pētītu dažādas sakarības, modelētu parastās daļas un apgūtu skaitļošanas paņēmienus ar parastajām daļām, veidotu vai sadalītu figūras u. c., var izmantot noteiktu ģeometrisku figūru komplektus (*pattern blocks*). 20. att.

Daļu sloksnītes, ja tās ir kā modelis, var izmantot, lai veicinātu izpratni par to, kas ir daļa un tās lielums, lai daļas salīdzinātu, saīsinātu un paplašinātu, apgūstot darbības ar parastajām daļām, lai kopumu dalītu daļās u. c. 21. att.

20. att.



21. att.



22. att.



42 āboli



par 5 vairāk

? ābolu

Cik ābolu pavisam?

Kurš no zēniem atrisināja pareizi?
Pamato savu atbildi!

Jānis: $42 + 5 = 47$ (āboli)

Pēteris: $42 + (42 + 5) = 89$ (āboli)

Papildini ar skaitļiem shematisko zīmējumu, kurš attēlo doto situāciju!

Grozā

Kastē



Vizuālā reprezentācija

Ar vizuālu attēlojumu saprotam zīmētas bildes, fotogrāfijas vai vizuālu attēlu, kuru skolēns ierauga mācību grāmatā, plakātā, datorā vai planšetes ekrānā un izmanto, lai ilustrētu, parādītu un strādātu ar kādu no matemātiskām idejām. Piemēram, izmantojam daļu sloksnītes kā attēlu, ne taustāmu modeli, ilustrējot parastu daļu saskaitīšanu, risinot situāciju vai cita veida uzdevumus, zīmējot shematiskus attēlus vai izmantojot jau dotus attēlus. **22. att.**

Reālu kontekstu reprezentācija

Kontekstuāli visbiežāk ir jārisina situāciju un matemātiskās modelēšanas uzdevumi no reālās dzīves. Vēl izmantojam pieredzē balstītas situācijas, kur zināšanas un prasmes tiek veidotas vai izmantotas, lietojot reālās pasaules piemēru, kas noder kā vispārīgs konteksts cita veida problēmsituāciju interpretēšanai un risināšanai. Spriežam par konkrētām situācijām un lielumiem, piemēram, par cilvēkiem, naudu, metriem u. c.

Vārdiska/mutiska reprezentācija

Runātā valoda jeb vārdiska reprezentācija nozīmē, ka skolēns dzird aprakstu vai to veido. Izmanto valodu (vārdus un frāzes), lai interpretētu, apspriestu vai aprakstītu matemātikas idejas, izmantojot gan neformālu, gan formālu matemātikas valodu. Runātā valoda ietver arī valodu, kas saistīta ar loģiskiem spriedumiem, argumentāciju utt. Skolēnam šādi ir iespēja “skaļi domāt”.

Simboliskā reprezentācija

Rakstītie simboli jeb simboliska reprezentācija – te domājam par to, ka rakstām ar pieņemtiem matemātiskiem simboliem – cipariem, darbību zīmēm u. c. Rakstītie simboli attiecas ne tikai uz matemātisko simbolu un izteiksmju rakstīšanu, bet arī uz matemātiska satura tekstu, kā arī jebkura teksta lietošanu.

Daži autori kā sesto reprezentāciju min digitālās tehnoloģijas (Johnson, 2018), tomēr biežāk tā tiek aplūkota kā līdzeklis, kas dod iespēju lietot vizuālos attēlojumus. Tehnoloģiskā reprezentācija tiek saprasta un attiecas uz jebkuras digitālas tehnoloģijas (datorprogrammas, vietnes, lietotnes u. c.) izmantošanu, kas rada konkrētas vai grafiskas attēlojuma pārvietojamas kopijas. Piemēram, vietne, kurā skolēns var pārvietot “desmitu blokus”, ar kuru palīdzību var izteikt vesela skaitļa vai decimāldaļas šķiru vienības, vai lietotnes, kurās ir vizualizētas parastās daļas, kuras ir iespējams pārvietot, lai izveidotu kādu noteiktu skaitli vai demonstrētu, kā dotais skaitlis ir pārveidojams noteiktās daļās.

Digitālās tehnoloģijas varam uztvert kā rīku, kas palīdz noteiktā vidē izmantot minētos piecus attēlojumus.

Nepieciešams, lai skolēnam būtu iespējas un viņš iemācītos pāriet no vienas reprezentācijas uz citu un izprastu, kā šīs reprezentācijas tiek sasaistītas. Skolotājs var veicināt sakarību veidošanu starp dažādām reprezentācijām, veidojot sarunas un diskusijas skolēnu starpā. Piemēram, Ēriks Kordero-Sajs (*Eric Cordero-Siy*) un Heila Goseini (*Hala Ghouseini*) iesaka skolotājam aicināt skolēnus izstāstīt un izskaidrot savas idejas un tad lūgt atkārtot cita skolēna domas. Tad skolotājs virza sarunas, lai skolēni savas idejas vai attēlojumus salīdzinātu ar klasesbiedriem (Cordero-Siy & Ghouseini, 2022).

Dažādas reprezentācijas pauž atšķirīgas domas par jēdzienu. Tādējādi skolēnam, kurš var viegli pārslēgties no viena attēlojuma uz citu, ir dziļa izpratne par šo jēdzienu (Heinze et al., 2009).

Cita pētnieku grupa atklāja, ka skolēniem ir lielas grūtības pāriet no vienas reprezentācijas uz citu un ka tas izskaidro, kāpēc skolēniem ir grūtības risināt uzdevumus, kuros jālasa teksts. Situāciju uzdevumos varam uzskatīt par kontekstuālām vai vārdiskām reprezentācijām. Skolēniem ir grūti aprakstīto situāciju pārtulkot, lietojot fiziskus objektus, attēlus vai tabulas, vai pārvērst to simbolos (Lesh, 1987). Jau 20. gadsimta 60. gados psihologs Džeroms Bruners (*Jerome Bruner*) aprakstīja reprezentāciju formas un uzsvēra, ka skolēnam ir aktīvi jādarbojas ar konkrētiem objektiem, pirms pāriet uz attēlu izmantošanu un tad uz darbībām ar simboliem (Bruner, 1964). Šo ideju apstiprina daudzi pētnieki, kas norāda, ka īsta saprašana rodas tad, kad skolēns pats var brīvi pāriet no vienas reprezentācijas uz citu. Skolēniem ir jādod iespēja darboties, ja iespējams, ar objektiem un tad ar attēliem uz papīra vai ekrānā datorā programmā. Skolotājiem ir svarīgi atcerēties, ka iegaumētās formulas vai paņēmieni, respektīvi, darbības ar simboliem, bez izpratnes drīz aizmirsīsies vai skolēni nesaredzēs, kur tos var un kur nevar lietot. Aplūkosim piemēru, kurā analizēta reprezentāciju daudzveidīga izmantošana, ja skolēniem dots uzdevums:

Uz galda ir 7 klucīši. Pieliekam klāt vēl 5 klucīšus. Cik klucīšu ir kopā?

Šajā uzdevumā varam izmantot vairākus attēlojumus. **Kontekstuāli** aprakstām situāciju (klucīši uz galda), **fiziski** – noliekam 7 klucīšus un tad pieliekam vēl 5 klāt, **vārdiski** varam izteikt darbību – pie 7 pieliekam 5 jeb 7 plus 5. Skolēni, kuri saprot, ka skaitlis, ko pasaka, nosaka kopas elementu skaitu, var sekmīgi atbildēt uz jautājumu, cik ir kopā.

Bieži vien skolēns, redzot, ka uzrakstīts $7 + 5$, ierauga tikai **simbolus** un nezina, ko ar tiem iesākt. Simboli ir nozīmīgi vienīgi tad, ja cilvēks saprot, ko tie nozīmē. Tas parāda, ka nevajag skolēnus steidzināt lietot simbolus, pirms neesam pārliecinājušies, ka viņi tos izprot.

Ieteikums ir sākt ar fiziskiem – taustāmiem objektiem un tikai pēc tam ieviest **attēlus**. Attēli var būt gan bildes grāmatās, gan bildes vai animācija datorā. Ir pieejamas dažādas datoranimācijas vai uzdevumi, kas dod iespēju skolēnam izprast,

piemēram, saskaitīšanu. Skolēns tad var redzēt, saskaitīt un saprast situāciju. Tad, kad bērns saprot, ka 7 reprezentē septiņus elementus un 5 – piecus, un kad var pats nolikt 7 objektus un vēl 5 objektus un tad paskaidrot, ka + nozīmē “salikt kopā”, viņš saprot, ka izteiciens “7 + 5” nosaka, cik ir viss kopā.

Šobrīd diskusijās ar skolotājiem izskan, ka skolēni nezina reizrēķinu. Katrs gadījums būtu jāskata individuāli, jāsaprot, kāpēc tā ir.

Lai veicinātu skolēnu izpratni pirms reizrēķina atcerēšanās, uzdevums skolēniem var būt domāt par jautājumiem: “Uzraksti, kā tu izdomāji... Uzzīmē zīmējumu, kurā var redzēt, ko nozīmē... Kā citādāk var izdomāt, cik ir... Uzraksti problēmu, kuru var atrisināt ar izteiksmi...” (sk. skolēnu atbildes 23., 24. un 25. att.).

Uzraksti, kā izdomāji, cik ir $4 \cdot 7$?

$14 + 7 \rightarrow 21 + 7 = 28$

23. att.

Uzzīmē zīmējumu, kurā var redzēt, ko nozīmē $4 \cdot 7$!



$4 \cdot 7 = 28$

Kā citādāk var izdomāt, cik ir $4 \cdot 7$?

$14 + 14 = 28$

Uzraksti problēmu, kuru var atrisināt ar izteiksmi $4 \cdot 7$!

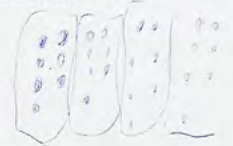
Helēna nopirka 4 zīmēšu kartītes. Katrā kartītē ir 7 zīmuli. Cik zīmuli ir kopā?

Uzraksti, kā izdomāji, cik ir $4 \cdot 7$?

$7 + 7 + 7 + 7 = 28$

24. att.

Uzzīmē zīmējumu, kurā var redzēt, ko nozīmē $4 \cdot 7$!



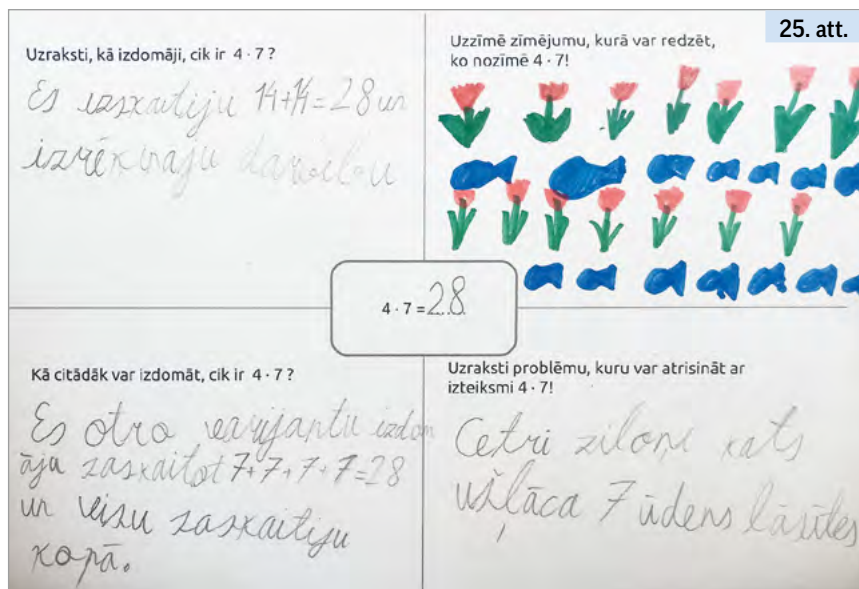
$4 \cdot 7 = 28$

Kā citādāk var izdomāt, cik ir $4 \cdot 7$?

$14 + 14 = 10 + 10 + 2 + 2 = 28$

Uzraksti problēmu, kuru var atrisināt ar izteiksmi $4 \cdot 7$!

Annai bija 4 galdi katrā galda bija 7 popiiti



Aktivitāte skolēniem

Aritmētiskais vidējais

SR* Skaidro, kas ir aritmētiskais vidējais, izmantojot modeli un to pierakstot simboliski.

Simboliski mēs saprotam aritmētisko vidējo kā visu elementu summu, dalītu ar elementu skaitu.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Veido modeli, kas parāda, cik ir 5, 4 un 9 aritmētiskais vidējais, pēc tam parādi aprēķinus!

Fiziski varam izmantot modeļus un dot iespēju skolēniem no klucīšiem (ripiņām vai citiem objektiem) būvēt 3 torņus. **26. att. a**

Tad liekam klucīšus pārvietot tā, lai visi torņi būtu vienādi augsti jeb lai visos torņos būtu vienāds skaits klucīšu. **26. att. b**

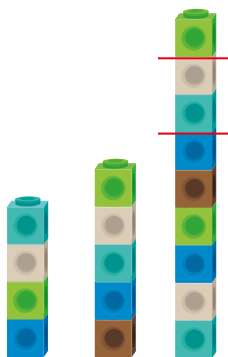
Katrā tornī tagad ir 6 klucīši, un mēs sakām, ka 5, 4 un 9 vidējais aritmētiskais ir 6, kas nozīmē: ja visi torņi būtu vienādi augsti, tad katrā tornī būtu 6 klucīši.

$$\frac{4 + 5 + 9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

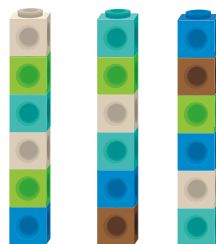
* SR – sasniedzamais rezultāts.

26. att.

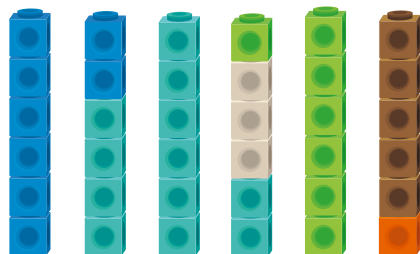
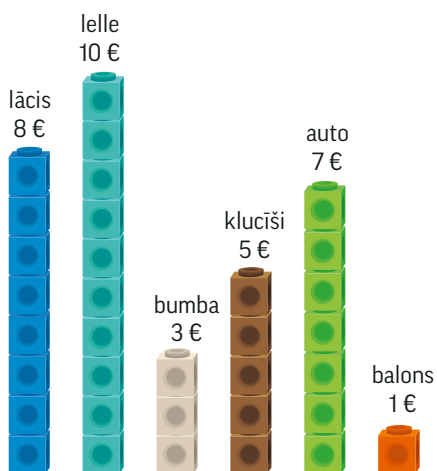
a



b



27. att.



Līdzīgi situāciju var ilustrēt ar attēlu vai izmantot digitālo tehnoloģiju rīkus, kur skolēns var interaktīvā veidā pārvietot klucīšus.

Jā izmantojam attēlus, tad varam skolēniem dot uzdevumu:

Izpēti dotos attēlus un izskaidro, kas tajos ir redzams! Kā varētu veikt aprēķinus, ja modeļa nebūtu? 27. att.

Attēlā redzamas rotaļlietu cenas. Vienam eiro atbilst viens klucītis.

Pārliekam klucīšus tā, lai visi stabiņi ir vienāda augstuma.

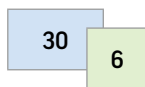
Stabiņa augstums tagad parāda rotaļlietu vidējo cenu jeb vidējo aritmētisko vērtību.

Skaitļa 36 dažādi attēlojumi

decimālais sastāvs

desmiti	vieni
3	6

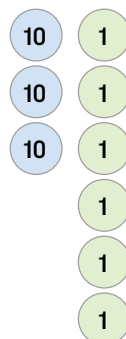
šķiru kārtis



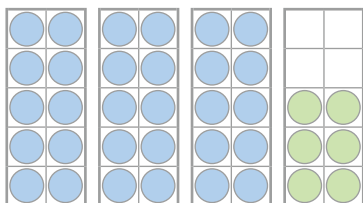
simta kvadrāts

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

šķiru žetoni



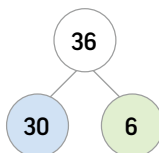
desmitnieka rāmji



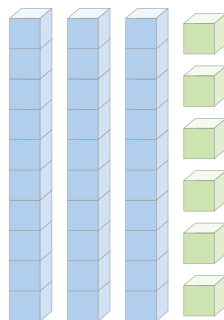
naudas modeļi



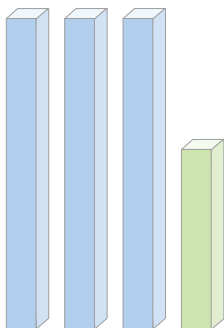
skaitļa sastāva modeļis



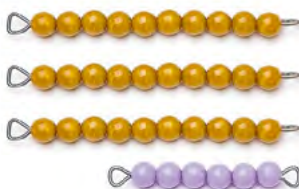
šķiru bloki



beļģu kluči



Montesori pērles



ar simboliem

$$30 + 6 = 36$$

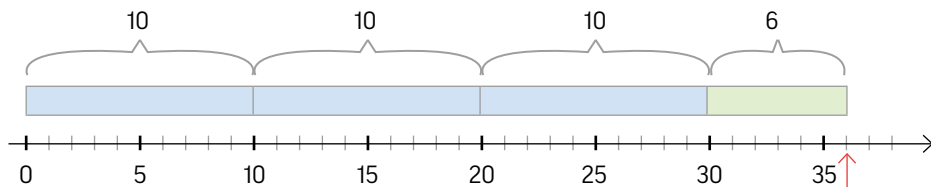
$$10 + 10 + 10 + 6 = 36$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ + 6 \\ \hline 36 \end{array}$$

vārdiski

Trīs desmiti un seši vieni.
Trīsdesmit un vēl seši.
Trīsdesmit seši.

joslu modeļi



skaitļu taisne



Aktivitāte skolēniem

SR Skaidro, kā aprēķina aritmētisko vidējo, ja dots reālās dzīves konteksts.

Kontekstuāls piemērs: *vienu gadu maijā pilsētā lija 5 dienas, nākamo gadu 4 dienas un trešo gadu 9 dienas. Skaidro, kā aprēķināsi, cik dienu vidēji līst maijā?*

Skolēniem tiek jautāts, ko nozīmē “cik dienu vidēji”, atbildē skolēni var skaidrot **vārdiski** vai izmantot **fiziskos** objektus un demonstrēt to. Ja skolēni to var izdarīt pietiekami veikli, tad var pāriet uz simbolisko attēlojumu un rakstīt **ar simboliem**:

$$\frac{5 + 4 + 9}{3} = 6$$

Lai skolēni labi izprastu matemātiskos jēdzienus un darbības ar tiem, ir ieteicams lietot visus 5 attēlojumus, aicinot skolēnus skaidrot ar piemēriem – parādīt vai uzrakstīt, kā doto situāciju var parādīt dažādi, izmantojot vairākus attēlojumus. Domājot par fiziskiem, vizuāliem, simboliskiem attēlojumiem, jāpatur prātā, ka arī tie var būt ļoti dažādi. **28. att.** Skolotājs pieņem lēmumu, rosinot, kuri attēlojumi un kā tiks izmantoti, tai pašā laikā dodot iespēju skolēniem izvēlēties pašiem.



Jautājumi pārdomām

Kāpēc, mācot kādu matemātikas ideju, ieteicams izmantot dažādas reprezentācijas jeb attēlojumus?

Kurus no attēlojumiem jūs izmantojat vairāk un kāpēc?

Kādus priekšmetiskās darbības rīku piemērus varat minēt no savas prakses?

Cik lielā mērā un kuras matemātikas idejas skolēniem palīdz izprast priekšmetu izmantošana?

Literatūra tālākai uzziņai

- Bruner, J. S. (1964). The Course of Cognitive Growth. *American Psychologist*, 19(1), 1–15.
- Chang, S. H., Lee, N. H., & Koay P. L. (2017). Teaching and learning with concrete-pictorial-abstract sequence: A proposed model. *The Mathematics Educator*, 17(1), 1-28.
- Cordero-Siy, E., & Ghousseini, H. (2022). Supporting Understanding Using Representations. *Mathematics Teacher: Learning and teaching Pk-12*, 115(6), 394–403.
- Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and Adaptive Use of Strategies and Representations. *ZDM Mathematics Education*, 41, 535–540.
- Huinker, D. (2015). *Representational Competence: A Renewed Focus for Classroom Practice in Mathematics*. Center For Mathematics and Science Education Research, Canada: University of Wisconsin Milwaukee.

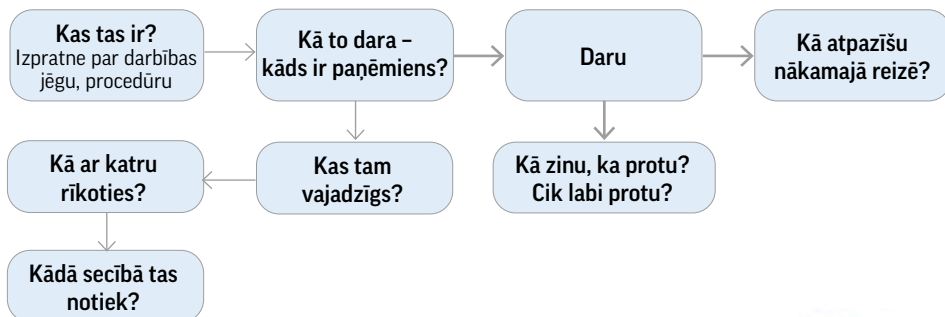
- Huinker, D., & Bill, V. (2017). *Taking Action. Implementing Effective Mathematics Teaching Practices*. K-Grade 5., The National Council of Teachers of Mathematics.
- Johnson, E. L. (2018). A New Look at the Representations for Mathematical Concepts: Expanding on Lesh's Model of Representations of Mathematical Concepts. Forum on Public Policy, *A Journal of the Oxford Round Table*. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1191692.pdf>
- Lesh, R. A., Post, T., & Behr, M. J. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In C. Janvier, *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33–40). Hinsdale, NJ: Erlbaum.
- Mainali, B. (2021). Representation in Teaching and Learning Mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)*, 9(1), 1–21. <https://doi.org/10.46328/ijemst.1111>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA NCTM.
- Piaget, J. (1972). *The Psychology of the Child*. New York: Basic Books.
- Reys, R. E., Lindquist, M., Lambdin, D., & Smith, N. (2007). *Helping Children Learn Mathematics*. 8th edition. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.
- Richland, L. E., Stigler, J. W., & Holyoak, K. J. (2012). Teaching the Conceptual Structure of Mathematics. *Educational Psychologist*, 47(3), 189–203. <https://doi.org/10.1080/00461520.2012.667065>
- Tripathi, P. N. (2008). Developing Mathematical Understanding through Multiple Representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 438–445.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Boston: Allyn & Bacon.

1.3.2. Kā apgūt prasmes un izmantot virzītās mācīšanās modeli

Domājot par to, kā notiek konkrētas prasmes apguve, skolēnam sākotnēji ir jāizprot pati darbības jēga un tad, kā šo darbību veic, ar kādiem paņēmieniem. Piemēram, ja ir jādala skaitļi, skolēns domā, vai dalīšu, pakāpeniski novērtējot, vai dalīšu rakstos un lietošu zināmo algoritmu, kāda ir mana darbošanās secība, ko ievērošu, kā veidošu pierakstu, vai lietošu efektīvāko paņēmieni, kā zināšu, ka šo paņēmieni lietoju pareizi. Pēc tam var sākt vingrināties un saprast, kā šo prasmi lietot citās situācijās (Namsone u. c., 2020). **29. att.**

Lai skolēns iemācītos jēgpilni izmērīt leņķi, nepietiek tikai ar to, ka transportieris tiek pielikts pie leņķa. Skolēnam jāiegūst izpratne, ar ko garuma mērīšana ar

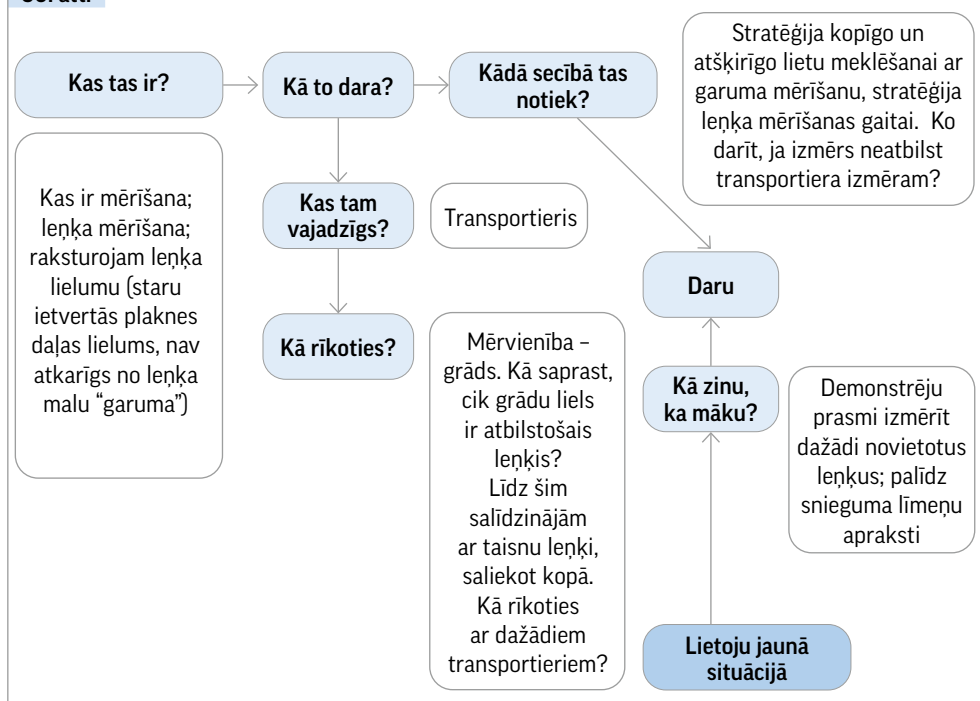
29. att.



Piemērs:

Snieguma līmeņa apraksts	Sācis apgūt	Turpina apgūt	Apguvis	Apguvis padziļināti
Prasme: mēra un zīmē leņķi, 4. klase	Zina, kā izmērīt leņķi, ar palīdzību var to izdarīt. Mēra un zīmē leņķus ar precizitāti līdz 3 grādiem, izmantojot norādīto mērinstrumentu.	Prot izmērīt, izstāstīt un parādīt, kā mēra leņķi. Mēra un zīmē leņķus, izvēloties no dotajiem mērinstrumentiem piemērotāko. Mērījuma rezultātam pieraksta mērvienības.	Precīzi mēra un zīmē leņķus, ar precizitāti līdz 1 grādam. Izvēlas atbilstošo mērinstrumentu.	Veic mērījumus jaunās situācijās, piemēram, ja objektam (gaismas staram) mērinstrumentu nav iespējams pilnībā pielikt. Veic mērījumus ar situācijai atbilstošu precizitāti, to pamatojot.

30. att.



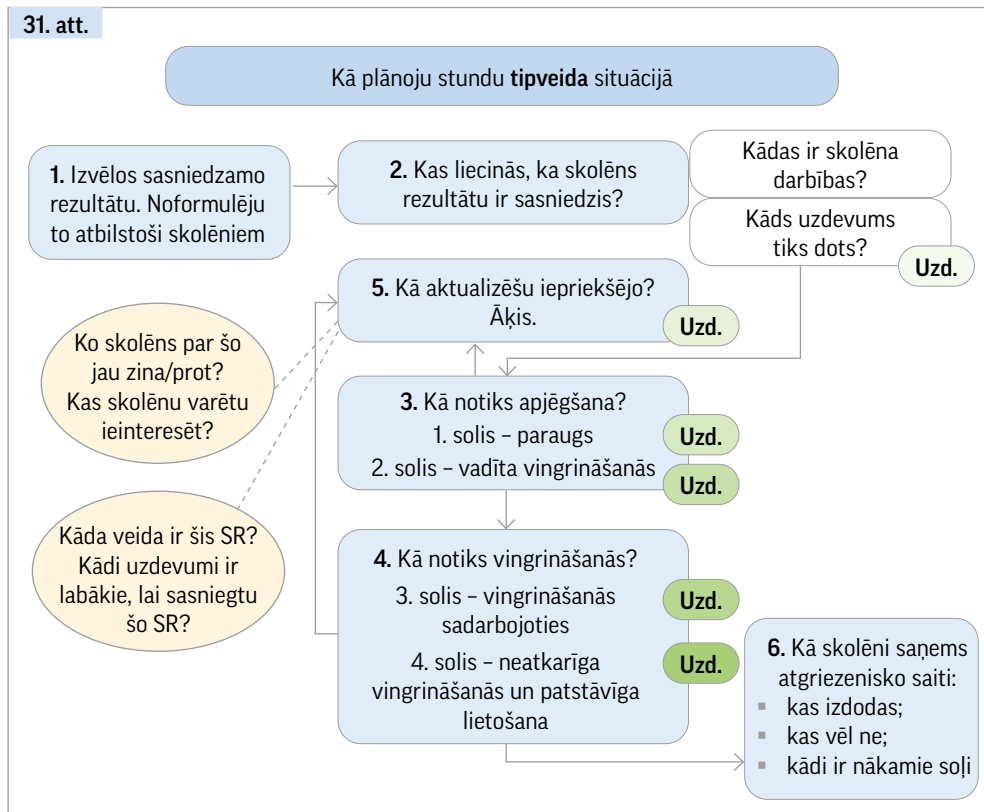
lineālu atšķiras no leņķa lieluma mērīšanas un kas abām mērīšanām ir kopīgs, kāpēc tā ir. 30. att.

Pakāpeniska atbrīvošanās no atbildības (*Gradual Release of Responsibility*), kuras modeli 1983. gadā izstrādāja Deivids Pīrsons (*David Pearson*) un Mārgarita Galahere (*Margarit Gallagher*) (Pearson & Gallagher, 1983), ir strukturēta pedagoģijas metode, kas koncentrējas uz atbildības pārdali mācību procesā no skolotāja uz skolēnu. Tas liecina, ka kognitīvais darbs pakāpeniski un apzināti jāpārnes no skolotāja demonstrēšanas un skaidrojuma uz kopīgu atbildību starp skolotāju un skolēniem līdz neatkarīgai praksei no skolēna puses.

Šis modelis ietver četras galvenās fāzes.

1. **Modelēšana** (*I Do*): skolotājs demonstrē un skaidro uzdevumu, parādot, kā tas tiek veikts.
2. **Vadīta vingrināšanās** (*We Do*): skolotājs un skolēni kopīgi veic uzdevumu, skolotājam sniedzot atbalstu un vadot.
3. **Vingrināšanās sadarbojoties** (*You Do It Together*): skolēni strādā grupās vai pāros, lai veiktu uzdevumu, skolotājam sniedzot minimālu atbalstu.
4. **Neatkarīga vingrināšanās un patstāvīga lietošana** (*You Do It Alone*): skolēni patstāvīgi veic uzdevumu, parādot savu izpratni un prasmes.

31. att.



Šī pieeja balstās uz Vigotska teoriju par tuvākās attīstības zonu, kurā skolēni var sasniegt augstāku izpratnes līmeni ar skolotāja vai prasmīgāka vienaudža palīdzību. Šis modelis ir plaši pielāgots un izmantots dažādās izglītības sistēmās, lai veicinātu skolēnu neatkarību un pašpārliedzīgumu mācību procesā.

Plānojot mācību stundu tipveida situācijā, ir risks procesā izlaist kādu no soļiem. Shēmā attēlota secība, kā skolotājs var domāt, plānojot stundu tipveida situācijā. 31. att.

Aplūkosim stundas piemēru, kurā, dodot skolēniem iespēju pašiem pakāpeniski atklāt risināšanas algoritmu, ir iekļauts arī virzītās mācīšanās modelis.

Stundas plāns “Parasto daļu saskaitīšana ar dažādiem saucējiem”

SR Skaidro, kā saskaitīt parastās daļas ar dažādiem saucējiem, un saskaita tās.

1. Aktualizē jēdzienus, kas būs nepieciešami stundas gaitā.

Skolēni sadalās pāros A un B.

A stāsta, kā saskaita daļas ar vienādiem saucējiem. Skolotājs jautā: kurš no **B** dzirdēja labu padomu, kas jāievēro, kad saskaita parastās daļas?

B stāsta, kā notiek daļas paplašināšana. Tad **A** atbild par daļas paplašināšanu.

2. Turpinās aktualizācija, kurā skolēni formatīvi veic pašnovērtējumu.

Darbs pāros – sagrupēt dotos piemērus divās grupās: vienā tos, kurus prot saskaitīt, otrā tos, kurus neprot. Skolēni atrisina tos, kurus prot.

$\frac{5}{12} + \frac{1}{12}$	$\frac{3}{8} + \frac{5}{8}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	$\frac{5}{24} + \frac{7}{24}$	$\frac{5}{12} + \frac{1}{4}$
-------------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-------------------------------	------------------------------

Skolotājam šajā fāzē ir ļoti jāseko līdzi skolēnu darbībai, lai skolēni neveidotu sākotnēji maldīgu priekšstatu, kā saskaitīt daļas ar dažādiem saucējiem – bieži sastopama kļūda, ka skolēni saskaita skaitītājus un saucējus, jo nezina, ko citu darīt. Būtu kopīgi jāsecina, ka protam saskaitīt daļas ar vienādiem saucējiem, bet vēl neprotam saskaitīt daļas ar dažādiem saucējiem.

3. Kopīgi nonāk līdz stundā sasniedzamajam rezultātam.

Šodien iemācīsimies saskaitīt daļas, kuru saucēji ir dažādi.

4. Uzdevums pāri apspriest idejas, kā varētu saskaitīt daļas ar dažādiem saucējiem.

Skolotājs aicina skolēnus izmantot daļu sloksnītes un tad mēģināt saskatīt, kāds ir rezultāts un kā tas rodas. Ieteikums skolotājiem: ja skolēni nezina, ko darīt, var paņemt sloksnīti, piemēram, $\frac{1}{4}$, un jautāt, vai ir cits veids, kā varam parādīt $\frac{1}{4}$? Skolēni, izmantojot sloksnītes, varētu saskatīt $\frac{2}{8}$ utt.

5. Darbs grupās pa četri – salīdzināt tos piemērus, kurus skolēni ir saskaitījuši.

Skolēni apspriež idejas, kā saskaitīt piemērus ar dažādiem saucējiem. Uz lapas uzraksta savu variantu. Jebkuram no grupas ir jāvar pastāstīt par grupas ideju, demonstrējot to un izmantojot daļu sloksnītes.

Virzītās mācīšanās pirmais solis.

6. Grupas prezentē savas versijas.

Izmantojot tās, skolotājs veido apkopojumu: kā saskaitīt daļas ar dažādiem saucējiem.

Kā pierakstīt saskaitīšanu?

Ar vienu no piemēriem skolotājs demonstrē, kā veidot pierakstu, un sarunā ar skolēniem pastāsta, kā tas tiek darīts.

Piemēram,

$$\frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8}{12}$$

7. Uzdevums katram pierakstīt sev: kas man jāievēro, kad jāsaskaita daļas?

Skolēni savā starpā izstāsta cits citam, ko pierakstījuši, sarunājas, vai varētu to izstāstīt vēl kādam.

Virzītās mācīšanās otrais solis.

8. Izrēķina kopā vēl vienu piemēru: $\frac{3}{8} + \frac{5}{12}$

Šajā piemērā jāapspriež, kāds būs daļu saucējs, lai tas būtu vienāds, – vai jāpaplašina abas daļas vai var paplašināt, pirmo daļu paplašinot ar reizinātāju 12, bet otru daļu – ar 8, u. c. jautājumi, kas rodas skolēniem.

Virzītās mācīšanās trešais solis.

9. Piemēru patstāvīga risināšana mācoties, ar iespēju iepazīties ar risinājumu.

Uzdevumi ir sadalīti trīs grupās – A, B un C, un skolēniem izdala lapiņas ar piemēriem. **32. att.** Lapiņām otrā pusē ir atbilde. **33. att.**

32. att. a 1. $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} =$ 2. $\frac{3}{10} + \frac{2}{5} =$	b 1. $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} =$ 2. $\frac{4}{15} + \frac{3}{10} =$
c 1. $\frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3} =$ 2. Veicot remontu, naudu plānots tērēt šādi: $\frac{2}{5}$ logu iegādei, $\frac{1}{15}$ tapešu iegādei un $\frac{3}{10}$ citu materiālu iegādei. Novērtē, vai pusi no plānotajām remonta izmaksām varēs samaksāt par darbu veikšanu!	

33. att. b 1. $\frac{12}{35}$ 2. $\frac{17}{30}$	a 1. $\frac{7}{9}$ 2. $\frac{7}{10}$
c 1. $\frac{8}{10}$ 2. Pusi no plānotajām remonta izmaksām nevarēs samaksāt par darbu veikšanu, jo materiāliem tērēs $\frac{23}{30}$, kas ir vairāk nekā viena puse.	

34. att. a 1. $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} + \frac{4}{9} = \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$ 2. $\frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{3}{10} + \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$ Pārliecinies, vai vari atrisināt! $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} =$ $\frac{5}{14} + \frac{2}{7} =$	b 1. $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{1 \cdot 7}{5 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{7}{35} + \frac{5}{35} = \frac{12}{35}$ 2. $\frac{4}{15} + \frac{3}{10} = \frac{4 \cdot 2}{15 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{8}{30} + \frac{9}{30} = \frac{17}{30}$ Pārliecinies, vai vari atrisināt! $\frac{1}{9} + \frac{5}{6} =$ $\frac{1}{8} + \frac{2}{9} =$
c 1. $\frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{6 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 6}{3 \cdot 6} = \frac{3}{18} + \frac{4}{18} + \frac{6}{18} = \frac{13}{18}$ 2. Saskaitu, cik liela naudas daļa plānota materiālu iegādei. $\frac{2}{5} + \frac{1}{15} + \frac{3}{10} = \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 2}{15 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{12}{30} + \frac{2}{30} + \frac{9}{30} = \frac{23}{30}$ Puse būtu $\frac{15}{30}$	

Ja atbildes nesakrīt, skolēns apskatās risinājumu un mēģina izprast, kur bijusi kļūda. Risina papildu piemērus **34. att.** .

10. Skolotājs aktualizē, ko gribējām iemācīties.

Kā notiek saskaitīšana? Kā jūs zināt, kā jums veicās?

Virzītās mācīšanās ceturtais solis.

11. Skolotājam un skolēniem ir svarīgi pārliecināties, kā visiem veicies, lai zinātu, ko nākamajā stundā būtu svarīgi darīt.

Skolēni risina divus piemērus:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{21} \text{ un } \frac{1}{6} + \frac{2}{9}$$

Skolēniem ir iespēja uzreiz salīdzināt atbildes, savukārt skolotājs, paņemot skolēnu darbus, veic dziļāku izpēti – kā skolēni veidojuši pierakstu u. c.

Riski

Noteikti jāpārliecinās, ka skolēni ir izpratuši saskaitīšanas algoritmu, lai, darot patstāvīgi, neiemācītos maldīgus priekšstatus vai aplamus algoritmus.



Jautājumi pārdomām

Ko nozīmē apgūt prasmi?

Ko nozīmē vingrināties?

Kāpēc ir svarīgi virzītās mācīšanās modelī neizlaist nevienu no tā četriem soļiem?

Literatūra tālākai uzziņai

- Namsone, D., Čakāne, L., France, I. (2020). *Skolotājs prātnieku laboratorijā. Atgādnē skolotājam, kurš mācās*. LU Starpnozaru izglītības inovāciju centrs. Rīga: LU Akadēmiskais apgāds.
- Pearson, P. D., & Gallagher, M. (1983). The Instruction of Reading Comprehension. *Contemporary Educational Psychology*, 8, 317–344.

1.3.3. Mācīšanās iedziļinoties – dažādu izziņas darbības līmeņu uzdevumi

Mācīšanās iedziļinoties ir process, kura laikā skolēni attīsta, nostiprina un izmanto augsta līmeņa domāšanas prasmes – analizē, sintezē, izvērtē, risina problēmas, lieto metakognitīvos paņēmienus, lai konstruētu ilgtermiņa izpratni. Mācīšanās iedziļinoties ietver jaunu ideju vērtējošu analīzi, sasaistot tās ar jau esošajām, un šādas mācīšanās pieejas mērķis ir prast risināt problēmas jaunās, nezināmās situācijās, t. sk. reālās dzīves situācijās, spējot veidot pārnesei. Šādas mācīšanās pieejas būtība ir procesi, ar kuru palīdzību iegūt zināšanas (kā mēs zinām?), ne tikai uzkrāt noteiktu satura apjomu (ko mēs zinām?). Mācību stundas līmenī tas nozīmē arī skolēnu apzinātu kognitīvo un metakognitīvo paņēmienu lietošanu, lai konstruētu zināšanas dažādā kontekstā un situācijās, kā arī skolēnu sadarbību. Mācīšanās iedziļinoties pamatmērķis ir tiekties uz to, lai skolēns iegūtu padziļinātu un konceptuālu izpratni par kompleksām situācijām (Namsone, Oliņa, 2018).

Pētnieki min, ka mācīšanās iedziļinoties ietver sešas kompetences, kas ir būtiskas, lai sagatavotu skolēnus augstiem sasniegumiem:

- mācību priekšmeta satura apguve,
- kritiskā domāšana un sarežģītu problēmu risināšana,
- sadarbība,
- efektīva komunikācija,
- mācīšanās, kā mācīties,
- akadēmiskas domāšanas veida attīstība, ko palīdz īstenot projektos balstīta, autentiskā vidē balstīta mācīšanās (Hewlett Foundation, 2013; Hernández et al., 2019).

Lai mācību procesā izmantotu dažāda līmeņa, tai skaitā augsta līmeņa, domāšanas prasmes, ir jāatlasa vai jāveido atbilstoši uzdevumi.

Mārgarita Smita (*Margaret Smith*) un Mērija Staina (*Mary Stein*) apskata un raksturo matemātikas uzdevumus, domājot par to, kā skolēns spriež, kādas viņam ir iespējas izmantot dažādu līmeņu izziņas darbību, apgūstot konkrētus matemātikas konceptus (Smith & Stein, 1998).

Zemākā līmeņa prasības/nosacījumi

legaumēšana

- Ietver iepriekš apgūtus tieši reproducējamus vai iegaumētus faktus, likumus, formulas, definīcijas.
- Uzdevums netiek risināts, izmantojot noteiktu procedūru, jo tāda nav nepieciešama vai laika ierobežojums neļauj to īstenot.

- Uzdevuma nosacījumi ir viennozīmīgi. Uzdevumā skaidri norādīts, ko un kā no iepriekš apgūtā materiāla nepieciešams reproducēt.
- Uzdevums neprasa demonstrēt izpratni par faktiem, likumiem, formulām vai definīcijām, kuras tiek apgūtas vai izmantotas.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Kā $\frac{1}{2}$ pieraksta, izmantojot decimāldaļu vai procentus?

Plānotais skolēna sniegums

Zina, ka puse ir 0,5 un 50%.

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

Procedūru izpilde bez saistības ar to izpratni

- Algoritmiskas procedūras. Uzdevumā ir precīzi norādīts, kā tas jāveic, – norādīts iepriekš apgūts veids vai algoritms vai arī tas saskatāms uzdevuma formulējumā, balstoties pieredzē vai uzdevuma noformējumā.
- Uzdevuma veikšanai nepieciešamas atsevišķas kognitīvas prasmes. Uzdevumā ir pietiekami tieša saistība ar to, kas jāizdara, un kā to izdarīt.
- Uzdevuma veikšanā nav nepieciešams demonstrēt konceptuālu izpratni par procedūru, ko veic, uzdevumu pildot.
- Uzdevums vērsts uz pareizo atbilžu sniegšanu, nevis izpratnes veidošanu.
- Uzdevumā netiek prasīti skaidrojumi kopumā vai skaidrojumi par izmantoto procedūru.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Uzraksti $\frac{5}{8}$ kā decimāldaļu un procentus!

Plānotais skolēna sniegums

Dalu:

$5 : 8 = 0,625$	
50	
48	$6 \cdot 8 = 48$
20	
16	$2 \cdot 8 = 16$
40	
40	$5 \cdot 8 = 40$
0	

vai paplašinu daļu: $\frac{5 \cdot 145}{8 \cdot 125} = \frac{625}{1000}$.

Tātad

$$\frac{5}{8} = 0,625$$

Procents ir simtdaļa, tāpēc izmantoju decimāldaļas pierakstu 0,625, kur ir 62 simtdaļas un 5 tūkstošdaļas.

Tātad

$$\frac{5}{8} = 0,625 = 62,5\%$$

Augstākā līmeņa prasības

Ar izpratni saistīta procedūru izpilde

- Skolēnu uzmanība tiek fokusēta uz procedūru lietošanu, lai attīstītu dziļāku matemātikas konceptu un ideju izpratni.
- Tiek skaidri vai netieši norādīti ceļi, kas ir vispārīgas procedūras, kurām ir cieša saistība ar matemātikas konceptuālajām idejām pretstatā šauriem algoritmiem, kuru saistība ar pamatā esošajiem jēdzieniem nav skaidri saskatāma.
- Parasti formulējumos vai risinājumos tiek izmantotas vairākas reprezentācijas, piemēram, diagrammas, priekšmetiskās darbības rīki, simboli vai problēmsituācijas. Uzdevumā saiknes veidošana starp dažādām reprezentācijām palīdz veidot izpratni.
- Nepieciešama izziņas darbības piepūle. Lai gan var izmantot vispārīgas procedūras, to nevar darīt neiedziļinoties. Skolēniem pašiem ir jāpiedāvā konceptuālas idejas, kas ir procedūru pamatā, lai risinātu uzdevumu un tā attīstītu izpratni.

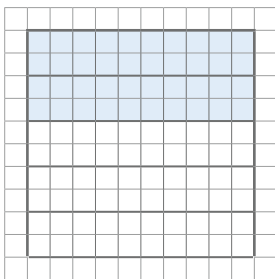
UZDEVUMA PIEMĒRS

Plānotais skolēna sniegums

Izmantojot rūtiņu kvadrātu 10×10 , izdomā, kā $\frac{2}{5}$ var pierakstīt kā decimāldaļu un procentus!

Plānotais skolēna sniegums

Iekrāsoju kvadrātā $\frac{2}{5}$.



Zīmējumā saskatu, ka $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{40}{100}$.

Kā decimāldaļu tad varu pierakstīt: $\frac{2}{5} = 0,4 = 0,40$.

Kā procentus tad varu pierakstīt, izmantojot parastās daļas pierakstu vai arī decimāldaļas pierakstu, kur varu saskatīt simtdaļas: $\frac{40}{100} = 40\%$ vai $0,40 = 40\%$.

Būtiski šajā gadījumā ir tas, ka skolēns spēj veikt šādus secinājumus, pirms skolotājs ir iedevis gatavos algoritmus. Ja skolotājs ir jau parādījis šīs saistības, šāda veida uzdevumu vairs nevaram uzskatīt par dziļu uzdevumu, jo tad skolēns lietos zināmus algoritmus.

Jēgpilna matemātikas izmantošana (*Doing Mathematics*)

- Uzdevumos nepieciešama kompleksa un nealgoritmiska domāšana – paredzama, zināma pieeja nav tieši norādīta uzdevumā vai risinājuma piemērā.
- Skolēnam nepieciešams atklāt un izprast matemātiskus konceptus, procesus vai attiecības. Uzdevums prasa kognitīvo darbību, demonstrējot paškontroli un pašregulāciju.
- Skolēniem nepieciešams saprast, kādas ir viņu atbilstošās zināšanas un pieredzes, kuras jāizmanto uzdevuma risināšanā.
- Skolēniem jāanalizē uzdevums, izpētot iespējamās ierobežojumus, kas var ietekmēt stratēģiju izvēli un risinājumu.
- Nepieciešama ievērojama izziņas darbības piepūle, kas var ietvert zināmu izaicinājumu skolēnam, jo risinājuma procesam ir neparedzams raksturs.

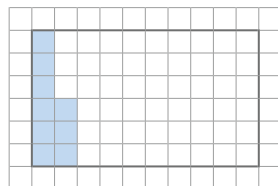
UZDEVUMA PIEMĒRS

Taisnstūrī, kura malu garumi ir 10 un 6 rūtiņas, iekrāso 9 rūtiņas. Izmantojot taisnstūri, izskaidro, kā var noteikt:

- kāda daļa, pierakstot to ar parasto daļu, no taisnstūra ir iekrāsotais laukums,*
- kāda daļa, pierakstot to ar decimāldaļu, no taisnstūra ir iekrāsotais laukums,*
- kāda daļa, pierakstot to ar procentiem, no taisnstūra ir iekrāsotais laukums?*

Iespējamais skolēna spriedums

- Taisnstūrī ir 60 rūtiņas, no tām iekrāsotas 9, tātad to var pierakstīt: $\frac{9}{60} = \frac{3}{20}$
- Tā kā taisnstūrim ir 10 rūtiņu kolonnas, tad viena pilna kolonna ir viena desmitā daļa jeb 0,1, bet 3 rūtiņas atbilst pusei no desmitdaļas jeb pusei no 10 simtdaļām, kas ir 0,05, tātad kopā būs 0,15.



Cits spriedums: skatoties zīmējumā, redzēju, ka ir iekrāsotas $\frac{3}{20}$. Lai to pierakstītu ar decimāldaļām, vajadzētu iegūt desmitdaļas vai arī simtdaļas. Desmitdaļas varētu iegūt, ja skaitītāju un saucēju dalītu ar 2, tad skaitītājā ir 1,5, bet šādi nepieraksta parastas daļas, jeb man jādomā, ka ir iegūtas 1,5 desmitdaļas, ko jāprot pierakstīt kā decimāldaļu. Pāriešu uz simtdaļām, skaitītāju un saucēju reizinu ar 5 un tad varu pierakstīt rezultātu kā 0,15.

$$\frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{15}{100} = 0,15$$

- c) Tā kā taisnstūrim ir 10 rūtiņu kolonnas, tad viena kolonna būs $100\% : 10 = 10\%$. Puse no kolonnas rūtiņām jeb 3 rūtiņas tad aizņem $10\% : 2 = 5\%$ lielu laukumu. Kopā ir iekrāsoti 15% no visa taisnstūra laukuma.

UZDEVUMA PIEMĒRS

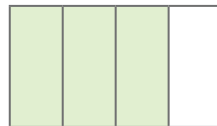
Izveidojiet reālu situāciju, ja dota izteiksme $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$! Atrisiniet izveidoto problēmu, nelietojot zināmos algoritmus, un skaidrojiet savu risinājumu!

Iespējamais skolēna spriedums

Uz galda virtuvē bija palikušas $\frac{3}{4}$ no mūsu pasūtītās picas. Es pusdienās no tās apēdu $\frac{2}{3}$. Kādu daļu no visas picas es apēdu?

Risinājums varētu būt izveidot zīmējumu un spriest:

Es uzzīmēju taisnstūri, lai parādītu visu picu. Tad es to sagriezu ceturtdaļās un iekrāsoju trīs no tām, lai parādītu daļu, kas bija palikusi uz galda. Tā kā es apēdu tikai $\frac{2}{3}$ no palikušās picas, tad tās būtu tikai divas no iekrāsotajām sadaļām jeb puse no picas.



Savukārt Džo Bolere (*Jo Boaler*) ir formulējusi šādus ieteikumus skolotājiem, lai matemātikas uzdevumi kļūtu atvērtāki un palielinātu mācīšanās potenciālu:

- Veidojiet uzdevumus tā, lai būtu vairākas risināšanas metodes, risināšanas ceļi un reprezentācijas.
- Iekļaujiet iespēju pētīt.

UZDEVUMA PIEMĒRI

Vai, izmantojot četrus 4 un jebkādas darbības, rezultātā var iegūt skaitļus no 1 līdz 20?

Vai jūs varat iegūt katru no rezultātiem vairākos veidos?

Vai jūs rezultātā varat iegūt lielākus skaitļus par 20?

Vai jūs varat iegūt arī kādu negatīvu skaitli?

- Piedāvāriet problēmu skolēniem, pirms apgūt risināšanas metodi.
- Aiciniet skolēnus vizualizēt – uzzīmēt doto problēmu – un jautāriet, kā tas viņiem palīdz izprast matemātiku.
- Paplašinet uzdevumu tā, lai to var risināt jebkurš – jautāriet, kā skolēni redz doto problēmu, un meklēriet dažādas risināšanas stratēģijas, lai varētu spriest arvien dziļāk.
- Aiciniet skolēnus pārliecināt par savu risinājumu un izmantot argumentus, tai pašā laikā arī kritiski izvērtējot savus risinājumus (Boaler, 2022).

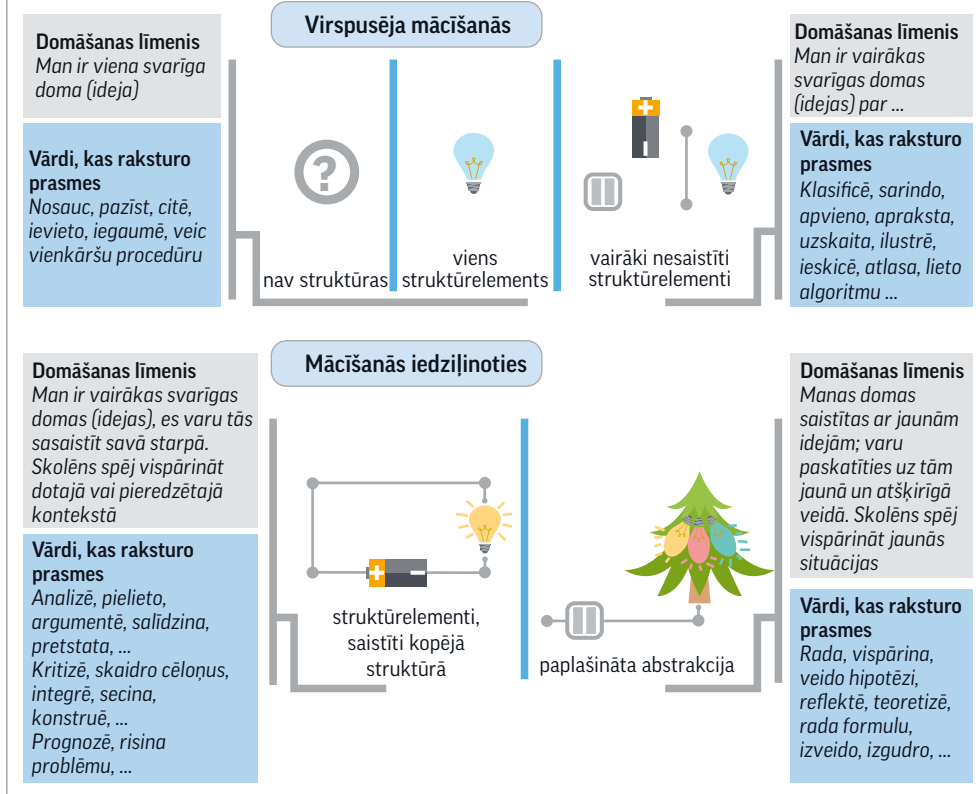
Ja skolēni mācās iedziļinoties, viņi attīsta spēju vispārināt, pārnest jaunās zināšanas un prasmes uz nezināmām situācijām (tai skaitā uz reālās dzīves situācijām), konstruēt zināšanas, sasaistot jaunās idejas ar iepriekš apgūto un ikdienas pieredzi. Mācīšanās mērķu analīzei pedagoģijā izmanto dažādas taksonomijas. Līdz 20. gadsimta beigām un 21. gadsimta sākumam dominēja Blūma taksonomija (Bloom, 1956). Tās pamatideja bija kategorizēt un novērtēt jebkura standarta sasniedzamos rezultātus pēc izziņas darbības. Blūma taksonomiju izmanto mācību mērķu (skolēniem sasniedzamo rezultātu) plānošanai. Blūma oriģinālo taksonomiju veido 6 hierarhiski līmeņi:

- atceras faktus,
- izprot, ko nozīmē fakti,
- pielieto faktus, idejas, konceptus,
- sadala informāciju daļās – analizē,
- apkopo informāciju – sintezē,
- izvērtē.

Mainoties paradigmai psiholoģijā un izglītības pētījumos no biheiviorisma uz konstruktīvismu, tika kritizēts Blūma taksonomijas pielietojums, lai novērtētu skolēna domāšanas procesa dziļumu (Hattie & Donoghue, 2016). Analizējot skolēnu sniegtās atbildes, var konstatēt, ka piemērotāka ir SOLO (*Structure of Observed Learning Outcomes*) taksonomija (Biggs & Collis, 1982; Biggs & Tang, 2011) jeb novēroto mācīšanās rezultātu taksonomija, kas ļauj ieraudzīt izziņas darbības dziļuma atšķirības skolēnu sniegtajās atbildēs (Valsts izglītības satura centrs, 2022; Namsone u. c., 2018). **35. att.**

SOLO taksonomija atspoguļo, par cik elementiem un par cik dažādām attiecībām starp elementiem skolēnam ir jādomā, lai atrisinātu kādu uzdevumu. SOLO taksonomija ir izziņas rīks, ar kura palīdzību var atspoguļot un izvērtēt kvalitatīvu virzību no virspusējas mācīšanās uz mācīšanos iedziļinoties, skatoties uz skolēna sniegumu. Taksonomiju var izmantot, lai analizētu, cik dziļi domā skolēns, kā arī lai skolēnam palīdzētu saprast, kā uzlabot savu rezultātu (pāriet uz nākamo līmeni), un lai spriestu par mācību uzdevuma kognitīvo līmeni.

Skolēna kognitīvās darbības dziļuma mērīšana



SOLO izpratne tiek uztverta kā skolēnu domās veidoto savienojumu skaita un sarežģītības pieaugums, progresējot no nekompetences līdz ekspertīzei. Katrs līmenis ir paredzēts, lai aptvertu un pārsniegtu iepriekšējo līmeni (Caniglia & Meadows, 2018).

Pirmsstrukturālais jeb bezstrukturālais līmenis. Šajā pirmajā posmā skolēniem nav iepriekšēju zināšanu, kas palīdzētu izprast tēmu. Piemēram, skolēns var neiesaistīties uzdevuma risināšanā, sniegt pilnīgi nesaistītas atbildes, nezināt atbildi, nesaprast jautājumu, sniegt neatbilstošu informāciju vai vienkārši atkārtot kaut ko, ko ir dzirdējis.

Viens struktūrelements (SOLO I). Skolēniem var būt ierobežotas zināšanas par tēmu, vai viņi zina tikai dažus izolētus faktus. Piemēram, skolēni var izmantot vienu noteiktu informāciju, lai atbildētu, bet neredz saikni starp uzdevuma idejām. Viņi var piemērot ideju iegaumēšanu procedurālā un iepriekš noteiktā veidā un sniegt faktus/konceptus izolēti.

Vairāki nesaistīti struktūrelementi (SOLO II). Progresējot uz šo posmu, skolēniem var būt zināmi daži fakti par tēmu, bet viņi joprojām nespēj tos savienot

kopā. Piemēram, skolēns var izmantot vairākus nesaistītus faktus vai idejas, bet nesaprot ideju organizāciju un nozīmīgumu. Idejas ir nesaistītas, jo tās ir konkrētas. Skolēna atbildes var sniegt vairākus atbilstošus faktus vai pareizi identificēt parādības īpašības, bet šie fakti nav integrēti.

Kopējā struktūrā saistīti struktūrelementi (SOLO III). Virzoties uz augstāku domāšanas līmeni, skolēni spēj savienot informāciju kopā un izskaidrot vairākas idejas, kas saistītas ar tēmu. Piemēram, skolēns var integrēt atsevišķus informācijas gabalus, lai izveidotu jēgpilnu risinājumu uzdevumam. Skolēnu atbildes sniedz skaidrojumus, kas saista un integrē atbilstošas detaļas. Viņi bieži izsaka savas atbildes abstraktu ideju veidā.

Paplašinātā abstrakcija (SOLO IV). Skolēniem ir jāspēj saistīt idejas ārpus tā, ko viņi jau ir iemācījušies, vispārinot uz pilnīgi jaunām vai iedomātām pieredzēm. Prasība saprast attiecības šajos posmos liek skolēnam izmantot sintēzi un/vai novērtēšanu. Piemēram, skolēns spēj organizēt, vērtēt un vispārināt savu mācīšanos, lai izmantotu un pielāgotu esošās zināšanas un prasmes jaunās situācijās. Viņš var veidot saiknes starp dažādos priekšmetos mācīto, kā arī starp mācīto un reāli lietojamo, un izmantot šīs saiknes, lai uzlabotu savu izpratni.

SOLO taksonomiju var izmantot, lai palīdzētu formulēt sasniedzamos rezultātus, veidot mācību pieredzi, izvēlēties mācību metodes un novērtēšanas uzdevumus, palīdzot skolēniem pāriet no zemākiem izpratnes līmeņiem uz augstākiem. To var arī izmantot, lai palīdzētu plānot jautājumus, kurus varat uzdot skolēniem klasē un testos, lai nodrošinātu, ka skolēni tiek izaicināti domāt nedaudz ārpus komforta zonas, iekļūstot sarežģītākos un dažkārt satraucošos līmeņos, ko pieprasa struktūrelementu sasaistes un paplašinātās abstrakcijas līmenis (Potter & Kustra, 2012). Aplūkosim uzdevuma piemēru, kurā tiek plānots, ka skolēniem ir iespēja spriest SOLO IV līmenī, un analizēsīm skolēnu atbildes, domājot par to, kādā izziņas darbības līmenī tās ir sniegtas.

UZDEVUMA PIEMĒRS

(LU EZTF SIIC pētījumu arhīvs)

12 gadus vecā Undīne katru dienu dodas krustojumā pāri ielai. Viņa ir novērojusi, ka viņa paspēj pāriet ielu, zaļajai gaismai degot, bet daudzi cilvēki nepaspēj.

Meitene gribēja uzrakstīt lūgumu Luksoforu dienestam pagarināt zaļās gaismas degšanas laiku. Lai pamatotu lūgumu, viņa vēlējās aprēķināt, cik ilgi zaļajai gaismai būtu jādeg, lai visi paspētu šķērsot ielu.

Viņa noskaidroja, ka brauktuves platums ir 12 m. Zaļās gaismas signāls luksoforā deg 10 sekundes. Internetā viņa atrada informāciju, ka 70 gadu vecumā vidējais cilvēka iešanas ātrums ir par 0,24 m/s mazāks nekā 20 gadu vecumā. Palīdzī Undīnei aprēķināt, cik sekunžu zaļās gaismas degšanas laiks būtu nepieciešams! 8. tabula

8. tabula

Līmeņi	Snieguma līmeņa apraksts	Skolēna risinājuma piemērs
SOLO I	Saprot tekstā doto situāciju.	Sākumā ir jāaprēķina Undīnes iešanas ātrums vai arī jāatrod kāds cilvēks, kuram ir 20 gadu, un jāizmēra viņa vidējais iešanas ātrums. Pēc tam no šī ātruma jāatņem 0,24 m/s, lai iegūtu rezultātu, kāds ir 70 gadus vecam cilvēkam. Undīne iet ar ātrumu 12 m / 10 s $12 - 0,86 = 11,86 \text{ m} / 10 \text{ s}$ Zaļās gaismas ilgumu vajadzētu pagarināt vismaz par 2 sekundēm.
SOLO II	Skolēns dotajā informācijā atrod tieši un netieši dotos lielumus un demonstrē prasmi aprēķināt ātrumu.	20-gadīga cilvēka iešanas ātrums ir 1,2 m/s, un viņš labi iekļaujas noteiktajā laikā. Bet 70-gadīga cilvēka iešanas ātrums ir 0,96 m/s. Laiks jāpalielina aptuveni par 1 sekundi.
SOLO III	Korekti izmanto dotos lielumus, veic nepieciešamos aprēķinus, lai noteiktu luksofora zaļās gaismas minimālo degšanas laiku atbilstoši dotajam, t. i., vismaz 12,5 s.	Cik liels pārvietošanās ātrums ir 20-gadīgam cilvēkam? $12 : 10 = 1,2 \text{ m/s}$ Cik ātri iet 70-gadīgs cilvēks? $1,2 - 0,24 = 0,96 \text{ m/s}$ Cik laika vajag, lai pie zaļās gaismas ielu pāspētu pāriet 70-gadīgs cilvēks? $12 : 0,96 = 12,5 \text{ s.}$ Vajag 12,5 sekundes, lai 70-gadīgs cilvēks pārietu ielu.
SOLO IV	Atrisina doto situāciju un matemātiskajā modelī iekļauj vismaz vienu no pieņēmumiem: "20 gadus veca jaunieša ātrums ir tāds pats kā Undīnes ātrums" vai "Undīne iet tieši 10 sekundes". Sniedzot atbildi, skaidro savus novērtējumus vai piebilst: nav droši zināms, ka visi paspēs, jo dotie lielumi ir vidēji, – demonstrē dziļu izpratni par doto problēmu.	Ātrums, lai šķērsotu brauktuvi 10 sekundēs, ir $12 : 10 = 1,2 \text{ m/s}$. Ja pieņem, ka 20 gadus veca jaunieša iešanas ātrums ir 1,2 m/s, tad 70 gadus veca cilvēka iešanas ātrums ir $1,2 - 0,24 = 0,96 \text{ m/s}$. Ja 1 sekundē noiet 0,96 m, tad 12 metrus noiet $12 : 0,96 = 12,5 \text{ sekundēs}$. Ja pieņemam, ka 70-gadīgs cilvēks iet ar ātrumu 0,96 m/s, tad, lai visi paspētu šķērsot 12 m platu brauktuvi, būtu nepieciešamas aptuveni 13 sekundes.



Jautājumi pārdomām

Kādi faktori, jūsu prāt, ietekmē uzdevuma grūtības pakāpi skolēniem?

Izmantojot četrus kognitīvā līmeņu aprakstus uzdevumam, kā jūs klasificētu katru no saviem plānotajiem stundas uzdevumiem, ko piedāvāsi skolēniem?

Kā šādu klasifikāciju jūs varat izmantot, izvēloties un veidojot dziļus matemātikas uzdevumus savas klases skolēniem?

Kāda veida uzdevumus jūs izmantotu, lai diskutētu ar kolēģiem par mācīšanos iedziļinoties?

Kā jūs izmantotu SOLO taksonomiju, lai spriestu par katra skolēna izziņas darbības līmeņa dziļumu?

Literatūra tālākai uzziņai

Biggs, J., & Collis, K. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: The SOLO Taxonomy*. New York, NY: Academic Press.

Biggs, J. B., & Tang, C. (2011). *Teaching for Quality Learning at University*. McGraw-Hill Education. <http://public.eblib.com/choice/publicfullrecord.aspx?p=798265>

Bloom, B. S. (ed.). (1956). *Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goal*. New York: Longmans Green.

Boaler, J. (2022). *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Mathematics, Inspiring Messages and Innovative Teaching (Mindset Mathematics)*. 2nd edition. Jossey-Bass A Wiley Brand.

Caniglia, J. C., & Meadows, M. (2018). An Application of the Solo Taxonomy to Classify Strategies Used by Pre-Service Teachers to Solve "One Question Problems". *Australian Journal of Teacher Education*, 43(9). <http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2018v43n9.5>

Hattie, J., & Donoghue, G. (2016). Learning Strategies: A Synthesis and Conceptual Model. *npj Science of Learning*, 1, 16013. <https://doi.org/10.1038/npjscilearn.2016.13>

Hernández, L. E., Darling-Hammond, L., Adams, J., & Bradley, K. (with Duncan Grand, D., Roc, M., & Ross, P.). (2019). *Deeper Learning Networks: Taking Student-Centered Learning and Equity to Scale*. Palo Alto, CA: Learning Policy Institute.

Hewlett Foundation. (2013). *Deeper Learning Competencies*. http://www.hewlett.org/uploads/documents/Deeper_Learning_Defined_April_2013.pdf

Namsone, D., Čakāne, L., Butkēviča, A. (2018). *Kompetenci attīstoša mācīšanās. Ieteikumi izglītības politikas un rīcībpolitikas veidotājiem*. LU Starpnozaru izglītības inovāciju centrs.

Namsone, D., Oliņa, Z. (2018). Kas ir mācīšanās iedziļinoties jeb kādā procesā mācīšanās rezultāts var būt kompetence. No D. Namsone (zin. red.), *Mācīšanās lietpratībai*. Rīga: LU Akadēmiskais apgāds.

Potter, M. K., & Kustra, E. (2012). *A Primer on Learning Outcomes and the SOLO Taxonomy Centre for Teaching and Learning*. University of Windsor. <http://www1.uwindsor.ca/ctl/system/files/PRIMER-on-Learning-Outcomes.pdf>

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in Middle School*, 3(5), 344–349.

Valsts izglītības satura centrs. (2022). *Skolēnu mācību sasniegumu summatīvā vērtēšana*. Metodiskais līdzeklis. <https://mape.gov.lv/catalog/materials/A0468945-2A65-42F2-92CD-6874F1D18E12/view>

1.3.4. Saruna, lai notiktu iedziļināšanās

Matemātikas stundās sarunas veidošana ir būtiska, jo tā veicina skolēnu dziļāku izpratni un kritisko domāšanu. Kā norāda Delisa Endrūsa (*Delise Andrews*) un Karla Bendemera (*Karla Bandemer*), produktīvas matemātikas sarunas ir nozīmīga mācību procesa sastāvdaļa, lai attīstītu skolēnu matemātisko izpratni un spēju efektīvi paust savas domas (Andrews & Bandemer, 2018). Skolotāju uzdotie jautājumi var vai nu kavēt, vai veicināt šo izpratni. Mērķtiecīga skolēnu domāšanas izpratne jau uzdevuma sākotnējā posmā palīdz skolotājam izvēlēties skolēnu idejas, kuras izmantot sarunai, kas savukārt veicina matemātikas izpratni. Smita un Staina (Smith & Stein, 2018) uzsver piecus nosacījumus, kas palīdz organizēt produktīvas sarunas stundā:

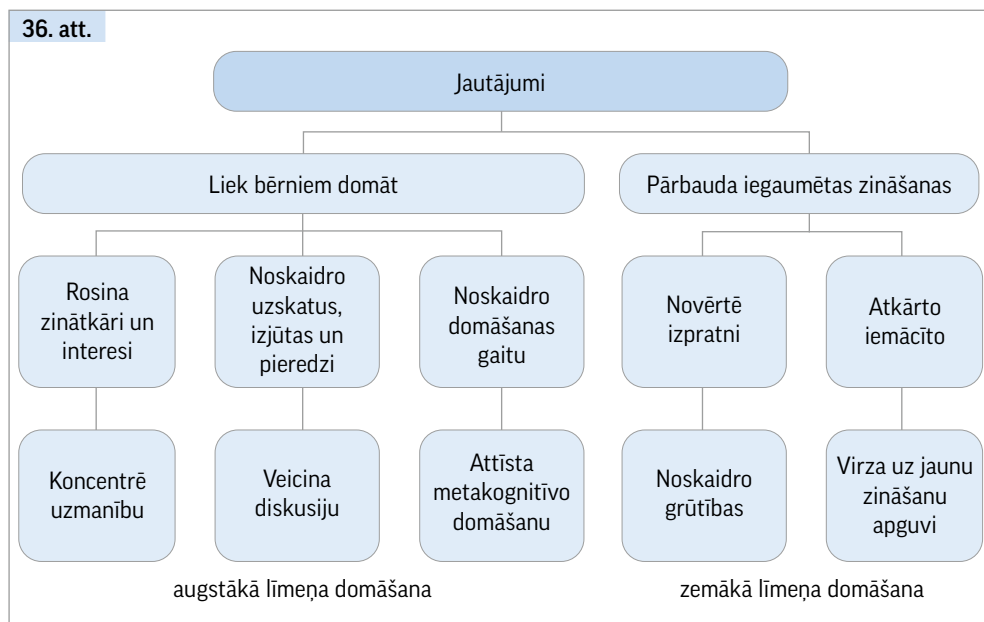
- skolotājs paredz iespējamus uzdevuma risinājumus,
- seko tam, kā skolēni risina uzdevumu,
- izvēlas skolēnu idejas un skolēnus, kuri ar tām dalīsies,
- mērķtiecīgi veido secinājumus par skolēnu risinājumiem,
- palīdz savienot skolēnu idejas un risinājumus ar “precīzu” matemātiku.

Šie nosacījumi ļauj skolotājam strukturēt stundas tā, lai veicinātu skolēnu mijiedarbību, novērstu izpratnes trūkumu un palīdzētu precīzāk lietot matemātiskos konceptus.

Sarunas matemātikas stundās ne tikai palīdz skolēniem reflektēt par savu izpratni, bet arī ļauj viņiem kritiski izvērtēt citu idejas. Tas veicina augstāka līmeņa domāšanas prasmes, piemēram, problēmu risināšanu, saikņu veidošanu starp matemātikas konceptiem. Turklāt sarunas attīsta skolēnu spēju izmantot matemātisko valodu, simbolus, attēlus, diagrammas vai digitālās tehnoloģijas, lai prezentētu un skaidrotu savas idejas.

Bieži matemātikas stundās sākumskolā novērojama atprasīšana, kad skolotājs uzdod jautājumu un gaida no skolēna vienu pareizo atbildi, neiedziļinoties skolēna domu gājienā vai risinājuma ceļā, uz kļūdu reaģē neitrāli vai nosodoši, visbiežāk pavaicājot atbildi citam skolēnam. Ja arī skolotājs vaicā, kā skolēns atrisinājis uzdevumu, visbiežāk atkal tiek gaidīts viens pareizais risinājuma ceļš. Šāda veida “saruna” skolotājam ļauj pārliecināties par viena skolēna zināšanām, bet, raugoties no skolēnu puses, nenotiek mācīšanās, nenotiek iedziļināšanās, labākajā gadījumā tiek panākta zināšanu aktualizēšana, t. i., no ilgtermiņa atmiņas tiek izgūtas zināšanas, kas būs nepieciešamas mācību stundā, lai jauno informāciju varētu sasaistīt ar iepriekšējām zināšanām, kas nepieciešams efektīvam mācību procesam un garantē lielāku iespējamību, ka skolēns jaunās zināšanas atcerēsies. Līdz ar to jāsaprot, kāds ir jautāšanas, diskusijas, sarunas mērķis stundā. Šim nolūkam var aplūkot Roberta Fišera (2005) jautājumu iedalījumu pēc mērķa un analizēt, cik bieži stundā uzdodam

36. att.



jautājumus, kas liek skolēnam domāt, un cik bieži tādus, kas pārbauda iegauvētās zināšanas. **36. att.**

Pētnieki norāda, ka dažkārt skolotājiem ir jāuzdod mazāk jautājumu, bet tādi, kas liek skolēniem domāt. Pētījumu dati liecina – ja pieaugušais uzdod daudzus un slēgtus jautājumus, tad skolēni jautā mazāk un atbildot neizsakās plaši (Myhill & Dunkin, 2004).

Ja saruna notiek stundas mācīšanās jeb apjēgšanas posmā, tad atprasīšana un jautājumi, kas pārbauda iegauvētās zināšanas, nebūs vietā un jāveido tāda saruna, kuras laikā skolēnam ir iespēja mācīties, skaidrot, spriest, iedziļināties. Lai izdotos mācību stundā veidot sarunu, kurā skolēni iedziļinās, skolotājam jālieto dažādi sarunas elementi, kas veicina savas idejas formulēšanu, ieklausīšanos citu idejās, dažādu paņēmieni apzināšanu un spriešanu par tiem (adaptēts no Chapin et al., 2009). **9. tabula**

Ir nepieciešams uzsvērt sarunas elementa “laiks domāt” nozīmi. Tas attiecas uz laika posmu pēc jautājuma uzdošanas, pirms skolēns sāk runāt, kad skolotājs ļauj skolēnam domāt, vai attiecas uz laiku, ko skolotājs gaida pēc tam, kad skolēns beidzis runāt, pirms skolotājs saka ko citu. Vidējais gaidīšanas laiks, ko skolotāji mēdz dot pēc jautājuma uzdošanas stundā, ir viena sekunde vai mazāk. Skolēniem, kuriem, pēc skolotāja domām, ir mācīšanās grūtības, tiek dots mazāks gaidīšanas laiks nekā tiem, kurus skolotāji uzskata par spējīgākiem. Jautājumiem, kas ietver zemāku kognitīvo darbību, vispozitīvāk ar sasniegumiem saistīts 3 sekunžu gaidīšanas laiks, savukārt īsāki vai garāki gaidīšanas laiki ir

9. tabula

Sarunas elementi	Skolotāja darbība	Ieguvums	Kā tas var skanēt
Skolotājs “atbalso” skolēna teikto	Atkārtō daļu vai visu no skolēna teiktā un tad jautā skolēnam, lai viņš apstiprina, vai teiktais ir vai nav patiess. Ja nepieciešams, precizē, formulē korekti.	Dod iespēju skolotājam pārliecināties par skolēna teikto, koriģēt, precizēt to, padarot ideju saprotamu citiem.	“Tātad tu teici, ka...” “Vai es pareizi sapratu, ka tu piedāvā šādu risinājumu...” “... Vai tas ir tas, ko tu domāji?”
Skolēns atkārto cita skolēna teikto saviem vārdiem.	Jautā kādam skolēnam atkārtot, ko teicis kāds cits skolēns.	Dod vairāk laika saprast ideju, sadzirdēt to citā veidā; pārliecināties, ka skolēns sapratis cita ideju; parāda skolēnam, ka viņa idejas ir svarīgas.	“Vai tu vari atkārtot to, ko viņš teica, ar saviem vārdiem?” “Vari pastāstīt, kā tu saprati Jāņa risinājumu?” “Izsekojāt Liānas domai? Padomāsim un parunāsim par to!”
Skolēns spriež par savu vai cita teikto.	Aicina skolēnus spriest pašiem, domājot par kāda cita idejām. Rosina argumentēt/skaidrot.	Sākumpunkts skolēnu domāšanas raisīšanai. Spriešanā iesaista vairāk skolēnu. Tā norāda, ka skolēnu idejas tiek uztvertas nopietni.	“Vai tu tam piekrīti vai nepiekrīti? Kāpēc?” “Ko tu domā par šo?” “Kāpēc tu tā domā?”
Skolēns papildina savu vai cita teikto.	Mudina skolēnus domāt dziļāk vai plašāk vai meklēt kopsakarības.	Mudina skolēnus izvērtēt idejas. Palīdz veidot ieradumu spriest par matemātikas ideju savienošanu un veidošanu.	“Vai kāds vēlas papildināt?” “Par ko jums tas lika aizdomāties?” “Redzu tavu pacelto roku, vai gribi papildināt?”

Laiks domāt.	Gaidīt klusējot (neļaujot kādam runāt no vietas ātrāk).	Dodot laiku domāšanai, rada iespēju sarunā iesaistīties vairāk skolēniem. Nodod vēstījumu, ka ikvienam ir svarīgas idejas, ko paust. Katra ideja un izpratne ir svarīga.	Pirms izsaukt skolēnu, skolotājs nogaida vismaz 10 sekundes. “Padomājam minūti, neceļot rokas!” “Nesteidzies, Katrīn, mierīgi izdomā!”
Īsa saruna pārī , nelielā grupā.	Aicina skolēnus apmainīties ar idejām, ko kopīgi risināt.	Dod iespēju visiem formulēt vārdos savu ideju. Nonāk pie risinājuma kopā. Iespēja uzdot un formulēt jautājumus.	“Vispirms pastāsti draugam!” “Aprunājies par to ar klasesbiedru!”

mazāk veiksmīgi. Jautājumiem, kas satur augstākās kognitīvās darbības, nav noteikta gaidīšanas laika sliekšņa – jo ilgāk skolotājs ir gatavs gaidīt, jo skolēni sarunā iesaistās arvien vairāk un labāk.

Ieguvumi, ja gaidīšanas laiks sarunā tiek palielināts virs 3 sekundēm (A NSW Government website-Education):

- uzlabojas skolēnu sasniegumi,
- uzlabojas skolēnu zināšanu noturība,
- palielinās augstākās kognitīvās sarežģītības atbilžu skaits,
- palielinās skolēnu atbilžu garums,
- samazinās gadījumi, kad skolēni neatbild,
- pieaug skolēnu piedāvāto pierādījumu daudzums un kvalitāte, lai pamatotu savus secinājumus,
- palielinās skolēnu iesaiste,
- paplašinās skolēnu piedāvāto atbilžu dažādība,
- samazinās savstarpēja pārtraukšana,
- palielinās skolēnu savstarpējā mijiedarbība,
- pieaug skolēnu uzdoto jautājumu skaits.

Skolotājiem, domājot par to, kā viņi vada sarunu, ir iespēja vērot kolēģu stundas, fiksēt savu sarunas gaitu stundā, izmantot citu kolēģu stundu transkripcijas.

Nākamajā piemērā varam analizēt, kādus sarunas elementus savā stundā ir izmantojis skolotājs.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Ildze vēlas pagatavot persiku kūksņus saviem draugiem. Katram kūksņam ir nepieciešamas divas trešdaļas no persika. Viņai ir 10 persiki. Cik smalkmaizīšu viņa var pagatavot no saviem persikiem?

Skolotāja skolēniem dod 10 minūtes problēmas risināšanai. Kad 10 minūtes ir pagājušas, viņa nezina skolēnu risinājumus, jo klasē bija negaidīts viesis un viņai nebija iespējas izstaigāt klasi un aplūkot skolēnu risinājumus. Viņa domā, ka dažiem skolēniem būs grūtības ar problēmsituācijas izprašanu, citiem ar problēmas un risinājuma atspoguļošanu un vēl citiem – ar aprēķiniem.

Saruna (Chapin et al., 2009)

Skolotāja: Kurš gribētu pastāstīt savu risinājumu? Gribu redzēt jūsu rokas. Aiziet, Mark!

Marks: Nu, vispirms es paskatījos uz tiem visiem un tad savilku līnijas katrā, un tad skaitīju.

Skolotāja: Mark, es neesmu droša, ka izsekoju tavai domai. Izklausās, ka tu uzzīmēji kūksņus un persikus, vai tā?

Marks: Nu, jā.

Skolotāja: Mums neizdodas izsekot tam, ko saki par savu risinājumu, kamēr mums prātā neveidojas bilde. Jāstāsta tā, lai, klausoties tevī, mēs pareizi saprotam, ko tu apraksti. Vari, lūdzu, vēlreiz pastāstīt, ko tu zīmēji?

Marks: Emmm, labi. Es uzzīmēju 10 persikus un tad sagriezu tos trīs daļās. Tad es saskaitīju visas daļas. Sanāca 30 daļas. Un uzdevumā teikts, ka katram kūksņam vajag divas trešdaļas no persika.

Skolotāja: Pagaidi, lūdzu, man palika dažas neskaidrības. Mmmm, tu teici, ka vajag divas daļas no persika un ar to pietiks kūksņam, vai tā?

Marks: Nū, divas no trijām daļām, jā.

Skolotāja: Labi, paskatīsimies, vai man izdosies uzzīmēt to, ko tu aprakstīji. Tā, šeit ir mani 10 persiki, un katru sadalu trīs daļās (*skolotāja katru persiku dala atšķirīga izmēra daļās* – 37. att.). Vai kāds uzzīmēja šādi?

Skolēni: Nēēēē! Paga! Ne tā!

Skolotāja: Nē? Kā tā, kas manam zīmējumam vainas? Esmu katru persiku sadalījusi trīs daļās.

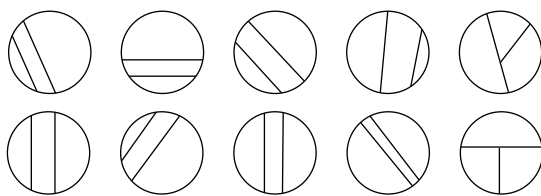
Jūlija: Nē, tām ir jābūt vienādām, citādi tās nebūs trešdaļas.

Skolotāja: Ā, uzdevumā teikts, ka tām ir jābūt trešdaļām, vai pareizi?

Jūlija: Jā!

Skolotāja: Aha, Mark, vai vēlies papildināt savu skaidrojumu?

Marks: Jā, labi. Es uzzīmēju 10 persikus un tad līnijas, lai sagrieztu tos trīs vienādās daļās. Un tad es uzzīmēju 10 kūksņus un savienāju tos.



Skolotāja: Vai kāds var atkārtot to, ko par savu risinājumu līdz šim ir pastāstījis Marks? Šarlote?

Šarlote: Man šķiet, viņš teica, ka uzzīmēja 10 ķeksīņus. Un tad, ka uzzīmēja 10 persikus. Tad Marks sagrieza ķeksīņus trīs daļās. Un tad viņš tos ar līnijām savienoja ar persikiem.

Skolotāja: Labi, vai visi piekrīt Šarlotes versijai par to, ko Marks teica? Vai Marks teica tieši to? Kurš vēlas pateikt savas domas? Jūlij, lūdzu!

Jūlija: Nu, tas ir gandrīz tas pats, bet Šarlote teica, ka Marks uzzīmēja 10 ķeksīņus un tos sagrieza 3 daļās. Man šķiet, viņš teica, ka uzzīmēja 10 persikus un tos sagrieza katru trīs daļās.

Skolotāja: Mark, vai tu varētu ieviest skaidrību? Kā tu darīji? Vai savā attēlā tu dalīji trīs vienādās daļās ķeksīņus vai persikus?

Marks: Hmm, es vairs neesmu pārliecināts.

Skolotāja: Labi, kurš var palīdzēt? Vai vēl kādam ir attēls, kurā ķeksīņi vai persiki dalīti trešdaļās? Tīna?

Tīna: Es uzzīmēju 10 persikus. Un... hm... tā kā... Es domāju, ka tas bija jādara, jo ir jāparāda trešdaļas no persikiem. Jo tas ir jāizdomā, lai saprastu, cik ķeksīņi... Nevis otrādi.

Skolotāja: Aha, vai kāds var atkārtot, ko Tīna tikko teica? Kārlis, vari atkārtot ar saviem vārdiem?

Kārlis: Es domāju, viņa teica, ka mums jāuzzīmē 10 persiki, lai varam uzzīmēt katrā persikā trešdaļas. Viņa teica, ka mums nav jāzīmē ķeksīņu trešdaļas. Bet es vispār nezīmēju persikus.

Skolotāja: Tātad tu risināji citādāk? Vai pastāstīsi, kā tu sāki?

Kārlis: Es uzrakstīju trīs trešdaļas un uzrakstīju to priekš katra persika. Tā es sapratu, cik trešdaļas man ir. Es zināju, ka katram ķeksīnam vajag divas trešdaļas. Tad es sadalīju divi ar 30 un ieguvu 15. Tā es sapratu, ka būs 15 ķeksīņi.

Galvenās idejas, kas ir būtiskas sarunu organizēšanai stundā

Lai noskaidrotu, kāda ir skolēnu izpratne un spēja spriest par kādu matemātikas konceptu, skolotājam ir jāizmanto dažāda veida jautājumi atkarībā no mācību

aktivitātes mērķa – iegūt informāciju, salīdzināt risinājumus, padarīt skolēnu domāšanu “redzamu”, rosināt matemātisku spriešanu vai pamatošanu.

Skolotājam ir jābūt piesardzīgam, veidojot sarunu modeļus ar skolēniem, lai diskusijas nepārvērstos tikai par atprasīšanu vai lai tās mudinātu sniegt skolotājam vēlamās atbildes. Skolotājam ir jāfokussējas uz skolēnu piedāvātajām idejām un argumentēšanas veidiem.

Jautājumi, kas liek skolēniem papildināt citu skolēnu vai savas idejas, izteikt kāda cita skolēna ideju ar saviem vārdiem, piekrist vai nepiekrist citu teiktajam, veicina to, ka skolēni klausās un aktīvāk piedalās stundā un kopīgā ideju vai risinājumu veidošanā. Tādējādi tiek veidoti skolēnu uzskati par to, ko nozīmē jēgpilni risināt matemātiskas problēmas.

Jautājumu izvērtēšana ir svarīgs skolotāja instruments, lai iegūtu informāciju par skolēnu idejām un izpratni un lai palīdzētu skolēniem daļēji vai pilnībā sasniegt stundā paredzētos rezultātus (Huinker & Bill, 2017).



Jautājumi pārdomām

Kādi sarunas elementi var veicināt klasē tādu sarunu, kas palīdz skolēniem iedziļināties?

Kurus sarunas elementus jūs varējat saskatīt dotajā sarunas piemērā?

Kurus elementus jau regulāri lietojat, sarunājoties ar skolēniem, un kurus vajadzētu iedzīvināt savās stundās?

Kādēļ nepieciešams ieturēt pauzes pēc jautājumu uzdošanas?

Literatūra tālākai uzziņai

Andrews, D. R., & Bandemer, K. J. (2018). Refining Planning: Questioning with a Purpose. *Teaching Children Mathematics*, 25(3), 166–173.

Chapin, S. H., O'Connor, C., & Anderson, N. C. (2009). *Classroom Discussions: Using Math Talk to Help Students Learn*. Math Solutions. Sausalito, CA.

A NSW Government website-Education. <https://education.nsw.gov.au/teaching-and-learning/professional-learning/teacher-quality-and-accreditation/strong-start-great-teachers/refining-practice/teacher-questioning/key-questioning-strategies>

Fišers, R. (2005). *Mācīsim bērniem domāt*. Rīga: RaKa.

Huinker, A. De, & Bill, V. (2017). *Taking Action: Implementing Effective Mathematics Teaching Practices in K-Grade 5*. National Council of Teachers of Mathematics.

Myhill, D., & Dunkin, A. (2004). The Influence of Teachers' Questioning on Pupils' Learning. *Educational Psychology*, 24(1), 31–46.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2018). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions*. 2nd edition. National Council of Teachers of Mathematics.

1.4. Problēmu risināšana un matemātiskā modelēšana

Vārdam “problēma”, tāpat kā daudziem citiem vārdiem, ir dažādas nozīmes atkarībā no konteksta. Ar problēmrisināšanu mēdz saprast situāciju, kad īsti nezinām, kā rīkoties. Problēmuzdevums parasti ir kompleksāks nekā vingrināšanās uzdevums, to ir grūtāk atrisināt, jo nav zināms iepriekš izdomāts risināšanas algoritms. Frenks Lesters (Lester, 1983) matemātikas problēmu aprakstījis kā uzdevumu, kuru kāds individuāli vai grupa vēlas risināt vai kuram ir jāatrod risinājums, bet risināšanai nav viegli pieejama procedūra, kas garantē vai pilnībā nosaka risinājumu.

1.4.1. Problēmrisināšanas process

Šajā darbā autori lieto vārdu “problēma”, lai aprakstītu uzdevumus, ar kuriem skolēns iepriekš nav sastapies un kurus uzreiz neprot atrisināt. Strādājot ar skolēniem, ir jāatceras, ka var būt vairākas stratēģijas, ko varam lietot, lai atrisinātu uzdevumu. Skolotāji bieži ir pārsteigti, ka, dodot iespēju skolēniem izdomāt risinājumus, viņi paši izgudro radošus veidus, kā atrisināt problēmu. Skolēni bieži nedomā tāpat kā pieaugušie, tomēr risinājumi var būt tikpat pareizi un korekti, kā izvēloties tradicionālu risināšanas veidu.

Problēmrisināšanu kā prasmi lietojam gan tikai matemātiskā, gan citos kontekstos. Procedūru raitums un konceptuālā izpratne kopā var sekmēt to, lai skolēni kļūtu par veiksmīgiem problēmrisinātājiem (McGrane & McCourt, 2020).

Ungāru matemātiķis George Poja (*George Pólya*) aprakstījis problēmrisināšanas principus un formulējis desmit ieteikumus skolotājiem:

1. Esiet ieinteresēti sava priekšmeta mācīšanās.
2. Ziniet savu priekšmetu.
3. Mēģiniet nolasīt savu skolēnu domas, ieraudzīt, ko viņi var, un viņu grūtības, iedomājieties sevi viņu vietā.
4. Labākais veids, kā iemācīties kaut ko jaunu, ir pašam to atklāt.
5. Dodiet saviem skolēniem ne tikai informāciju, bet arī sapratni, kā to zināt, domāšanas paņēmienus, ieradumu strādāt metodiski.

6. Ļaujiet viņiem mācīties minēt.
7. Ļaujiet viņiem mācīties pierādīt.
8. Skatieties ārpus konkrētā uzdevuma risinājuma – mēģiniet saskatīt risināšanas principu, ko izmantojāt citās situācijās.
9. Neatklājiet visu nezināmo uzreiz – ļaujiet viņiem meklēt risinājumu, cik tālu vien viņi var.
10. Ieteikums – neuzspiediet savu informāciju (Pólya, 1945).

Lina Ingliša (*Lyn English*) (2006) un citi pētnieki nošķir problēmu risināšanu un matemātisko modelēšanu, atzīmējot, ka problēmu risināšanas uzdevumi sākas ar matemātisku problēmu vai reālās pasaules problēmas idealizētu versiju, kurai tiek piemērota matemātika. Turpretim modelēšana sākas ar faktisku reālās pasaules problēmu, kas jāizsaka matemātiski, un rezultāti tiek izmantoti sākotnējās reālās pasaules problēmas risināšanai.

Savukārt PISA 2022 matemātikas jomas ietvars nosaka saistību starp matemātisko spriešanu, problēmrisināšanas ciklu, matemātikas saturu, kontekstiem un 21. gadsimta prasmēm (<https://pisa2022-maths.oecd.org/ca/index.html>).

Tipisks problēmrisināšanas uzdevums, ko mācību grāmatās vai vērtēšanas darbos sastop pamatskolas skolēni Singapūrā (Kaur et al., 2009):

Paulam ir par 30 bumbiņām vairāk nekā Pēterim. Kad Pēteris iedeva Paulam 15 savas bumbiņas, Paulam bija divreiz vairāk bumbiņu nekā Pēterim. Cik daudz bumbiņu viņiem abiem bija kopā?

Savukārt nākamā uzdevuma mērķis ir pārliecināties par skolēnu spēju atpazīt matemātikas jēdzienus “tilpums”, “laukums” un spēt lietot dažādas mērvienības.

Kravas konteineram ir taisnstūra paralēlskaldņa forma, tas ir 6,06 m garš, 2,44 m plats un 2,59 m augsts. Aprēķini tā virsmas laukumu kvadrātmetros un kvadrātkilometros! Aprēķini tā tilpumu kubikmetros un kubikcentimetros!

Lai atrisinātu problēmu, mums ir jāsaprot divas lietas: pats uzdevums un tajā dotā informācija. Tālāk ir labi, ja atpazīstam stratēģiju, ar kuras palīdzību varētu risināt uzdevumu. Kad esam ieguvuši atrisinājumu, tad jāpārliecinās par tā pareizību un jēgu. Šo procesu Poja apraksta kā četru soļu problēmrisināšanas procesu (Billstein et al., 2001).

Problēmrisināšanas procesa soļi

1. Izproti problēmu:

- Vai tu vari izstāstīt problēmu ar saviem vārdiem?
- Ko tu mēģināsi noskaidrot vai darīt?
- Kas nav zināms?
- Kādu informāciju tu vari iegūt no dotās problēmas?
- Vai ir kāda informācija, kas vēl nepieciešama?

2. Veido plānu:

- Pārskati zināmās problēmrisināšanas stratēģijas (sk. 86. lpp.).

3. Izmanto savu plānu:

- Izmanto izvēlēto risināšanas stratēģiju vai stratēģijas un risini.
- Pārlicinies par katra matemātiskā soļa pareizību. Tā var būt intuitīva pārskatīšana vai arī katra soļa pamatošana.
- Precīzi un korekti pieraksti savu risinājumu.

4. Izvērtē:

- Pārbaudi, vai rezultāts atbilst sākotnēji formulētajai problēmai (dažkārt ir nepieciešams pierādījums).
- Interpretē dotās problēmas atrisinājumu. Vai atbilde ir ticama? Vai esi atbildējis uz jautājumu, kas tika uzdots?
- Izvērtē, vai ir vēl kāda cita metode, ar kuras palīdzību varētu meklēt risinājumu.
- Ja iespējams, izvērtē, kādas citas līdzīgas vai vispārīgākas problēmas varētu risināt līdzīgi.

Latvijā matemātikas pedagogi Konstantīns Dukurs un Jānis Mencis (sen.) ieteica skolotājiem uzsvērt trīs posmus teksta uzdevumu risināšanā:

- 1) uzdevuma nosacījumu izpratne,
- 2) atrisinājuma plāna izveidošana,
- 3) atrisināšana (Dukurs, Mencis, 1965).

Kaut gan matemātiķi un matemātikas pedagogi ir līdzīgās domās par to, kā sadalīt problēmas risināšanas gaitu un sekmīgi atrisināt uzdevumus, paliek jautājums, kā šos paradumus ieaudzināt skolēnos un veidot viņu kompetenci matemātikā. Problēmu risināšanas prasmju attīstība prasa ilgu laiku un vingrināšanos, bet tā dod skolēniem izpratni. Roberts Deiviss (*Robert B. Davis*) skaidro, ka, dodot iespēju, skolēni izstrādās savus izpratnes veidus un reprezentācijas, pamatojoties uz iepriekšējām zināšanām un pieredzi. Tomēr viņš norāda, ka tas, ko skolēni iemācās, balstās uz viņu izpratni un ka turpmāko mācīšanos var ierobežot arī iepriekšējā izpratne. Izpratne tiek panākta, ja cilvēks spēj iekļaut jaunu ideju plašākā agrāk konstruēto ideju struktūrā. Deivisa izpratnes teorija atzīmē: "Izpratnes sajūta rodas tad, kad jaunu ideju var iekļaut plašākā iepriekš apkopotu ideju ietvarā." (Davis, 1992)

Iemācoties tikai problēmu risināšanas soļus, nav garantijas, ka skolēni kļūst par veiksmīgiem problēmu risinātājiem.

Skolēns var iemācīties prasmes, kā, piemēram, pareizi sekot mācīšanās algoritmam "es (skolotājs) daru, mēs darām, tu dari," bet tā viņš nevar iemācīties, kā veiksmīgi risināt problēmas. Vienkārši rādot skolēniem, kā risināt problēmas, tas neattīstīs viņu spējas problēmu risināšanā. Skolēni arī daudz ātrāk aizmirsīs iemācīto saturu un nebūs spējīgi iemācīto lietot vēlāk. Lai skolēni spētu atrisināt

agrāk nesastaptas problēmas, viņiem ir jābūt iedziļinoties – pašiem aktīvi jāpiedalās problēmu risināšanā.

Elans Šēnfelds (*Alan Schoenfeld*) uzver, ka būtiski ir veicināt skolēnu metakognitīvo attīstību. Tabulā apkopotas skolotāja darbības, kas ir uzsvērtas mācību procesā, pievērsties problēmrisināšanai, lai veicinātu skolēnu metakognīcijas attīstību (Schoenfeld, 1992). **10. tabula**

10. tabula

Mācību aktivitātes problēmu risināšanas procesā	
Mācību darbības	Mērķis
Pirms	
1. Izlasiet problēmu – pārrunāiet vārdus vai frāzes, kuras, iespējams, skolēniem nav skaidras.	Ilustrēt, cik svarīgi ir rūpīgi lasīt; koncentrēties uz īpašu vārdu krājumu.
2. Izmantojiet visas klases diskusiju, lai koncentrētos uz problēmas izpratni.	Koncentrēties uz būtiskākajiem datiem, procesa skaidrošanu.
3. (Pēc izvēles) Visas klases diskusija par iespējamām stratēģijām, lai risinātu problēmu.	Izteikt idejas par iespējamām problēmas risināšanas veidiem.
Procesā	
4. Novērojiet skolēnu darbību un jautāiet viņiem, lai noteiktu, kur viņi atrodas savā risinājumā.	Diagnosticēt stiprās un vājās skolēnu prasmju puses.
5. Ja nepieciešams, sniedziet padomus.	Palīdzēt skolēniem pārvarēt grūtības risinājuma gaitā.
6. Ja nepieciešams, nodrošiniet problēmas papildinājumus – paplašināšanu.	Tos skolēnus, kuri jau pabeiguši risināt, aicināt veidot vispārinājumus.
7. Atgādiniet skolēniem, kuri atrisinājuši uzdevumu, pārliecināties, vai ir atbildēts uz problēmas jautājumu.	Rosināt skolēnus pārskatīt savu darbu un pārliecināties, ka tas atbilst dotajai problēmai.
Pēc	
8. Dalieties un apspriediet risinājumus.	Parādīt un nosaukt dažādas stratēģijas.
9. Saistiet risinājumus ar iepriekš atrisinātām problēmām vai skolēnu veidotajiem vispārinājumiem.	Demonstrēt problēmu risināšanas stratēģiju vispārēju pielietojamību.
10. Apspriediet īpašos risinājumu elementus, piemēram, attēlus.	Parādīt, kā dažādi līdzekļi var ietekmēt risinājuma pieeju.



Svarīgi paturēt prātā

- Skolotājiem ir jādod iespēja skolēniem domāt un diskutēt. Svarīgi ir novērst skolēnu vēlēšanos sākt rēķināt, pirms uzdevums ir saprasts un pārrunāts. Skolēniem palīdz tas, ja uzdevums ir reāls, ar personīgi nozīmīgu saturu un ja to var attēlot ar objektiem vai parādīt darbību, kas tiks izmantota.
- Skolotāja attieksme pret matemātiku, kas tiek demonstrēta skolēniem, ir ļoti svarīga. Skolotājam ir jādod iespēja skolēniem saprast, ka matemātika ne vienmēr ir viegla un ir jāpieliek noteiktas pūles, kas ar laiku rada iespēju nokļūt līdz izpratnei.
- Jāizvēlas tādi uzdevumi, kas liek skolēniem domāt, bet tai pašā laikā ir piemēroti skolēnu izziņas darbības līmeņiem. Skolotājam ir jāatceras dot skolēniem laiku domāt un diskutēt un neskaidrot pārāk ātri. Ir jāatrod balanss, cik ilgi ļaut skolēniem pašiem mēģināt saprast, tai pašā laikā nenovedot situāciju tālāk, ka skolēni zaudē interesi un pacietību.
- Ja skolēni ir pieraduši risināt problēmas, tad var uzreiz strādāt grupās. Ja nav, skolotājs var vadīt sarunu ar visu klasi vai sadalīt grupās un uzdot jautājumus, ko pārrunāt, un tad var spriest visi kopā.

JAUTĀJUMU PIEMĒRI

No sākuma var jautāt un pēc katra jautājuma dot skolēniem laiku sarunāties grupās:

Vai visi vārdi ir saprotami?

Ko mēs zinām? Ko mēs meklējam?

Vai kādas informācijas trūkst? Kā to zinām?

Vai varam izmantot reālus priekšmetus, lai attēlotu darbību? Kāpēc?

Kā saprotam, vai esam risinājuši līdzīgu uzdevumu?

Kādu stratēģiju varam lietot, lai risinātu šo uzdevumu? Vai ir cita stratēģija?

Kamēr skolēni strādā, skolotājs var apstaigāt grupas. Ir svarīgi atbildēt uz jautājumiem, kuri attiecas uz uzdevuma saprašanu, bet neatbildēt uz jautājumiem, piemēram, “vai mūsu atbilde ir pareiza?”.

Kad skolotājs jūt, ka pietiekami ilgi ir strādāts grupās, var lūgt vairākām grupām skaidrot savus risinājumus un atbildes.

Jautājumi, ko var uzdot pēc tam, kad skolēni ir pateikuši savas atbildes:

Kā mēs varam būt pārliecināti, ka atbilde ir pareiza?

Kā tikāt pie atbildes? Kādas stratēģijas lietojāt?

Ko domā pārējie? Vai piekrītat?

- Ļoti svarīgi ir beigās kopīgi pārskatīt uzdevumu, kā tas tika risināts un kuri matemātikas jēdzieni tika lietoti. Ir svarīgi lūgt skolēniem uzrakstīt atbildi un to, kā viņi pie tās nonākuši. Tas dod skolēniem iespēju pārdomāt savu darbību, savukārt šādas pārdomas veido izpratni. Skolēni, iespējams, redzēs,

ka varēja risināt arī citādāk, vai pat atradīs kļūdas. Pierakstot problēmu risināšanas procesu, skolēni labāk sagatavojas izstāstīt citiem, kā viņi risinājuši uzdevumu, un pieraksts ir atgādinājums, kā uzdevums risināts, ko var vēlāk atkārtot.

Skolotāji bieži grib saīsināt šo procesu laika trūkuma dēļ. Ir svarīgi atcerēties, ka problēmu risināšanas process būs vieglāks un ātrāks, ja tiks regulāri praktizēts.

Pēters Liljedāls (*Peter Liljedahl*), Kanādas matemātikas skolotājs un pētnieks, dod dažādus ieteikumus, kā veicināt skolēnu domāšanu un tā rezultātā spriešanu par problēmām, kas ir balstītas pētījumu rezultātos (Liljedahl, 2021).

Lietderīgs veids, kā veicināt problēmu risināšanas prasmes, ir skolēnu darbs grupās. Tas iemāca arī, ka citās situācijās un nākotnē būs jāsadarbojas ar kolēģiem. Diemžēl, neprasmīgi organizējot darbu grupās, bieži vien daži skolēni nepiedalās vai tikai pieraksta citu skolēnu domas. Liljedāls atklāja, ka 80% šo skolēnu jau no paša uzdevuma sākuma ir pārliecināti, ka viņiem nebūs nekā vērtīga, ko piedāvāt grupas darbā. Pētot šo pārsteidzošo atklājumu tālāk, Liljedāls konstatēja, ka tas, kā grupas ir izveidotas, ir svarīgākais faktors. Skolotāji bieži saliek vienā grupā vai nu skolēnus ar līdzīgām spējām, vai vājākus ar stiprākiem. Skolēni jau paši zina, kuri ir vājākie un kuri stiprākie. Vājākie bieži pieņem, ka viņi nevarēs palīdzēt, un pārstāj domāt par uzdevumu.

Liljedāls atklāja, ka tad, ja skolēnu grupas (parasti līdz 3 skolēniem grupā) tiek veidotas pēc nejaušības principa – izlozējot, izmantojot spēļu kārtis u. c. –, ļoti mainās grupas dinamika. Pētījumi atklāja, ka gandrīz 100% skolēnu šajā situācijā domā, ka arī viņi var dot idejas, kas palīdzēs atrisināt uzdevumu. Šādā veidā skolēni turpina būt iesaistīti problēmu risināšanas procesā un attīsta savas problēmu risināšanas spējas. Turklāt ļoti pieauga skolēnu vispārējās pozitīvās domas par matemātiku un matemātikas mācīšanos.

Liljedālam ir vēl vairāki praktiski padomi skolotājiem. Piemēram, skolēni, strādājot grupās, parasti sēž solos. Pētījumi atklāja, ka skolēni daudz vairāk runā un ir iesaistīti procesā, ja stāv pie tāfelēm. **38. att.** Svarīgi ir tas, ka skolēni var dzēst un pārrakstīt savas idejas un risinājumus, apskatīt citu grupu risinājumus. Grupai ir tikai viens flomāsters vai krīts, un ir noteikums, ka visiem grupas dalībniekiem ir jāpiedalās ideju radīšanā un realizēšanā. Skolotājs ļoti labi pārredz procesu un var viegli vadīt kopējo sarunu ar skolēniem (Liljedahl, 2021).

Lai šādu praksi varētu ieviest, skolotājam savās stundās ir būtiski pašam to izmēģināt, reflektēt ar kolēģiem par pozitīvo un iespējamajiem riskiem. Profesionālā pilnveide, kas vērsta uz praktisku darbību, dod iespēju skolotājam veiksmīgi sagatavoties šāda veida mācību procesam arī klasē.



Jautājumi pārdomām

Kā jūs raksturotu problēmrisināšanas procesu?

Kā palīdzēt skolēniem attīstīt metakognitīvās prasmes, risinot problēmas?

Kāpēc ir būtiski nesaīsināt risināšanas un spriešanas procesu, taupot laiku?

Izvērtējiet un diskutējiet ar kolēģiem par G. Poja aprakstītajiem desmit principiem skolotāja darbībā!

Kādas P. Liljedāla idejas jums ir aktuālas savās mācību stundās?

Literatūra tālākai uzziņai

Billstein, R., Libeskind, S., & Lott, J. W. (2001). *A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers*. Addison Wesley Longman.

Davis, R. B. (1992). Understanding "Understanding". *Journal of Mathematical Behavior*, 11, 225–241.

Dukurs, K., Mencis, J. (1965). *Aritmētikas metodika*. Rīga: Liesma.

English, L. D. (2006). Mathematical Modeling in the Primary School: Children's Construction of a Consumer Guide. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 303–323.

Kaur, B., Har, Y. B., & Kapur, M. (2009). *Mathematical Problem Solving*. Yearbook 2009. Association of Mathematic Educators, National Institute of Education, Singapore.

Lester, F. K. (1983). Trends and Issues in Mathematical Problem-Solving Research. In F. K. Lesh, & M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes* (pp. 229–261). Orlando, FL: Academic Press.

Liljedahl, P. (2021). *Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K-12: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning*. Corwin Mathematics Series.

McGrane, C., & McCourt, M. (2020). *Mathematical Tasks – The Bridge Between Teaching and Learning*. A John Catt Publication.

Pólya, G. (1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In D. A. Grows (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). Macmillan.

1.4.2. Problēmrisināšanas stratēģijas



Svarīgi paturēt prātā

- Problēmrisināšanas stratēģijas nav atsevišķa matemātikas nozare vai nodaļa mācību plānā, bet tās iederas katrā matemātikas stundā. Problēmrisināšanas stratēģijas dod iespējas skolēnam domāt, kā efektīvāk un sekmīgāk risināt uzdevumus un lietot matemātikas zināšanas.
- Skolēniem ir jāatgādina, ka būtiski ir sekot līdzi savai risinājuma gaitai un noteikti pārbaudīt rezultātus. Kopumā ir jāpadomā, vai atbilde ir loģiska un iespējama.
- Problēmu risināšanā bieži kombinē stratēģijas, piemēram, veido tabulu līdz ar citu stratēģiju.

Problēmu risināšanas stratēģijas, ko uzsāk apgūt un lieto jaunākajās klasēs

(Hatfield et al., 2005; Johnson & Herr, 2001; Billstein, 2001).

1. Veic konkrētus mēģinājumus – mini un pārbaudi!
2. Risini no beigām!
3. Izveido izteiksmi!
4. Apskati visus gadījumus!
5. Veido situācijas modeli!
6. Veido shematisku zīmējumu!
7. Veido tabulu!
8. Apskati vienkāršāku problēmu!
9. Vispārini!

Aplūkosim šīs stratēģijas un atsevišķus piemērus, lai demonstrētu stratēģijas būtību.

1. Stratēģija “veic konkrētus mēģinājumus” jeb mini un pārbaudi

Šo stratēģiju var izmantot, ja

- ir ierobežotas iespējas, kā var iegūt atbildi,
- ir vēlme labāk izprast doto uzdevumu,
- ir laba ideja, kāda varētu būt atbilde,
- var sistemātiski mēģināt pārbaudīt versijas, lai iegūtu atbildi,
- izvēles ir sašaurinātas, izvēloties citu stratēģiju,
- nav citas acīmredzamas stratēģijas, ko varētu mēģināt izmantot.

Bieži skolēns var būt situācijā, kad nezina, ko darīt. Viņam nenāk prātā ne zināms algoritms, ne kāds konkrēts paņēmieni, un varbūt tāda nav. Šādos gadījumos vislabākā stratēģija ir domāt par situāciju, to izvērtēt un tad mēģināt veidot konkrētu piemēru un skatīties, vai tas ved uz atrisinājumu. Ja pirmā atbilde nav pareiza,

tad jāpārdomā, kā to varētu izmantot vai pielāgot tālākam risinājumam. Bieži vien sākumā izvēlamies mazākus skaitļus, atsevišķas darbības, un tad, aplūkojot pietiekami daudz ideju, tās var vispārināt.

Skolēni ir jāmudina darboties: ja uzreiz nezini, ko tieši darīt, mēģini, dari kaut ko! Viens no veidiem ir rosināt skolēnus sākt mēģināt ar atsevišķiem piemēriem (skaitļiem), veidot modeli vai zīmējumu. Šo stratēģiju izmanto, ja atbildei ir zināmi nosacījumi vai kritēriji.



Aktivitāte skolēniem

Piedāvājot šo aktivitāti skolēniem, skolotāja mērķis ir dot iespēju spriest: kā mācāties atpazīt, kā darīsim? Kā mācāties pierakstīt savu domu?

UZDEVUMA PIEMĒRS

Nadīnai ir 10 centu un 5 centu monētas, kopā 13 monētas. Visu monētu vērtība ir 1 eiro. Noskaidro, cik Nadīnai ir 10 centu monētu un cik 5 centu monētu!

Plānotais skolēna sniegums

Domājam pie sevis: desmit 10 centu monētas veido 1 eiro, bet zinām, ka ir 13 monētas. Samazinām monētu skaitu – ņemam astoņas 10 centu monētas un atlikušās piecas 5 centu monētas. Tad iegūstam 80 centi + 25 centi = 105 centi. Tas ir mazliet par daudz. Ja ņemam septiņas 10 centu monētas un sešas 5 centu monētas, tad vērtība ir 70 centi + 30 centi = 100 centi = 1 eiro.

Būtiski ir rosināt skolēnus lietot piemērotu stratēģiju un tad pārrunāt tās. Piemēram, attēlā redzams, ka varam izmantot zīmējumu, veidot izteiksmi vai informāciju apkopot tabulas veidā.

39. att.

Left method (Diagram and Arithmetic):

Diagram showing 10-cent coins (10) and 5-cent coins (5):

$$\begin{array}{ccccccc}
 (10) & (10) & (10) & (10) & (10) & (10) & (10) & 70c \\
 (5) & (5) & (5) & (5) & (5) & (5) & & 30c \\
 \hline
 & & & & & & & 1\text{€}
 \end{array}$$

Arithmetic steps:

$$\begin{aligned}
 13 \cdot 5 &= 65 (c) \\
 100 - 65 &= 35 (c) \\
 35 : 5 &= 7 (m) \quad 10c \\
 13 - 7 &= 6 (m.) \quad 5c.
 \end{aligned}$$

Right method (Table):

10 cent	5	6	7
5 cent	8	7	6
Summa	50 + 40 = 90	60 + 35 = 95	70 + 30 = 100

Final result: 7 x 10 cent, 6 x 5 cent.

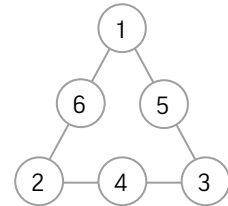
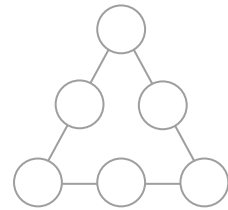


Aktivitāte skolēniem

Skaitļus 1, 2, 3, 4, 5 un 6 saliec tā, lai uz katras trijstūra malas izvietoto skaitļu summa ir 9! Skaitļus nedrīkst atkārtot.

Veicot šo uzdevumu, skolēnus mudina domāt, kā varētu atvieglot domāšanas procesu – piemēram, skaitļus uzrakstīt uz papīra lapiņām, jo tad tos var viegli pārvietot.

Kad skolēni ir atraduši atbildi, tad salīdzina un spriež, vai visiem ir tieši šāds skaitļu sakārtojums (var būt apgriezta jeb spoģuļa simetrija).



Vai ir citas atbildes? Kāpēc jūs tā domājat?

Var turpināt iedziļināties uzdevumā un lietot citu stratēģiju – **apskati visus gadījumus** – un jautāt:

Kā veidojas summa, kas ir 9? Kā zinām, ka visas iespējamās summas ir atrastas? Ņemsim visas iespējas pēc kārtas. Ja sākam ar 1 + 2, tad trešajam skaitlim ir jābūt 6.

$$1 + 2 + 6 = 9$$

Sākam ar 1 + 3: jāpieliek vēl 5, tas ir $1 + 3 + 5 = 9$

Turpinām: 1 + 4: redzam, ka nevaram sākt ar 1 + 4, jo trūkst vēl 4 un skaitļus nevar atkārtot.

Nākamā kombinācija ir 1 + 5, bet tā mums jau ir.

Sākam ar 2, proti, 2 + 3, trūkst 4.

$$2 + 3 + 4 = 9$$

Turpinām, kamēr ir skaidrs, ka visas iespējamās kombinācijas ir atrastas:

$$1 + 2 + 6$$

$$1 + 3 + 5$$

$$2 + 3 + 4$$

Vecākajās klasēs var vērst skolēnu uzmanību uz to, ka skaitļi 1, 2 un 3 ir katrs divās izteiksmēs, bet 4, 5 un 6 ir tikai vienā. Tā mēs varam secināt, ka 1, 2 un 3 ir jābūt trijstūra virsotnēs, bet 4, 5 un 6 būs novietoti pa vidu.

2. Stratēģija “risini no beigām”

Šo stratēģiju var izmantot, ja

- gala rezultāts ir skaidrs, bet jānoskaidro problēmas sākotnējā daļa,
- problēmas sarežģītība mazinās, ja to apskata no beigām,
- risinot tieši, ir nepieciešama komplicēta izteiksme vai vienādojums,
- problēma ietver reversu darbību secību.

Ja ir zināms, ar ko situācija beidzas, bet jautājums ir par to, ar ko tā sākās, tad soli pa solim sāk no beigām un veic pretējo darbību. Piemēram, ja tekstā pieskaitīts zināms skaitlis, tad risinājumā atņem to pašu skaitli.

Nākamajos piemēros doti uzdevumi par laiku – kad darbība bija jāsāk, ja zināms, cik process beidzies.



Aktivitāte skolēniem

Skolēniem piedāvā situācijas aprakstu un liek padomāt, kā tekstu varētu strukturēt, lai sāktu spriest par risinājumu.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Kalvis brauc uz kino. Filma sāksies plkst. 19.00. Kalvis zina, ka vajag ierasties 15 minūtes agrāk, lai nopirktu biļeti, popkornu un ieņemt vietu. Kino atrodas 10 minūšu attālumā no autobusa pieturas punkta. Brauciens ilgst 25 minūtes. Kalvim jāiet 5 minūtes līdz autobusa pieturai pie savām mājām. Cik Kalvim jāiziet no mājām, lai nenokavētu filmas sākumu?

Rosinām skolēnus uzrakstīt notikumus, kas iesaistīti situācijā, vai atzīmēt tos tekstā.

- *Sāksies plkst. 19.00*
- *Vajag ierasties 15 minūtes agrāk*
- *Atrodas 10 minūšu attālumā no autobusa pieturas*
- *Brauciens ilgst 25 minūtes*
- *Jāiet 5 minūtes līdz autobusa pieturai*
- *Cikos Kalvim jāiziet no mājām?*

Veido risinājumu, spriežot no beigām:

Cikos būtu jāierodas: no 19.00 atņem 15 minūtes un iegūst 18.45.

Jābūt autobusa pieturā pie kino: no 18.45 atņem 10 minūtes un iegūst 18.35.

Jābūt autobusa pieturā pie mājām: no 18.35 atņem 25 minūtes un iegūst 18.10.

Jāiziet no mājām: no 18.10 atņem 5 minūtes un iegūst 18.05, tas nozīmē, ka Kalvim jāiziet plkst. 18.05.

Šajā uzdevumā skolēni var spriest arī citādi: saprast, ka var saskaitīt visus laikus kopā: $15 + 10 + 25 + 5 = 55$ minūtes un tad atņemt no 19.00, iegūstot to pašu rezultātu – 18.05.

Šāda veida uzdevumos ir būtiski spriest arī par reālo dzīvi, vai reālajā dzīvē ar šādiem aprēķiniem pietiks, kas vēl būtu jāņem vērā.

Piemēram, šāds aprēķins derēs, ja autobuss kursēs tieši tajā laikā, kad tam ir plānots būt autobusa pieturā.



Aktivitāte skolēniem

Anmarijai bija jādodas ceļojumā. Viņas lidmašīna uz Romu izlido 16.50. Lai paspētu nodot bagāžu un izietu drošības kontroli, lidostā ieteicams ierasties 2 stundas pirms lidmašīnas pacelšanās. Līdz lidostai jābrauc pusstunda. Somu sakārtošanai ir ielānota viena stunda. Pusdienu gatavošana aizņems 1 stundu un 20 minūtes, pusdienošana – 30 minūtes. Cikos Anmarijai jāsāk gatavot pusdienas, lai paveiktu plānoto un paspētu uz lidmašīnu?

Varam spriest: ja lidmašīna izlido 16.50, tad 2 stundas agrāk ir 14.50. Pusstundas brauciens nozīmē, ka ir jāizbrauc 30 minūtes pirms 14.50, kas ir 14.20. Lai būtu viena stunda somu sakārtošanai, tas jāsāk darīt 13.20. Vēl ir jāpaeļ pusdienas: no 13.20 atņemam 30 minūtes, iegūstam 12.50, bet stunda un 20 minūtes nepieciešamas, lai sagatavotu pusdienas: no 12.50 atņemam 1 stundu un 20 minūtes, iegūstot 11.30. Tātad Anmarijai ir jāsāk gatavot pusdienas 11.30.

Spriešanu no beigām iespējams vingrināt arī ar uzdevumiem, kuriem ir tikai matemātikas konteksts.

Rosinām skolēnus domāt galvā un jautāt, vai viņi var pateikt iedomāto skaitli.

Iedomāto skaitli reizinām ar 3 un tad dalām ar 2. Kad pieskaita 4, rezultāts ir 13. Cik liels ir iedomātais sākuma skaitlis?

Kā var spriest: no rezultāta 13 atņemam 4, tas ir 9. Tad 9 reizina ar 2, iegūst 18 un to dala ar 3, iegūst 6.

Pārbaudām savu izdomāto skaitli: $6 \cdot 3 : 2 + 4 = 18 : 2 + 4 = 9 + 4 = 13$.

Varam aicināt skolēnus pašus izdomāt līdzīgus uzdevumus un tad tos uzdot klasesbiedriem.

3. Stratēģija “izveido izteiksmi”

Šī ir svarīga stratēģija, jo tā ļauj skolēnam no viena attēlojuma (uzdevuma, kas dots ar tekstu rakstiski vai runātā valodā) pāriet uz citu, piemēram, simbolisku attēlojumu – izteiksmi ar skaitļiem. Skolēniem ir jābūt spējīgiem pārveidot vārdus matemātiskās darbībās. Piemēram, Jānim ir 5 eiro, un viņš nopelnīja vēl 2 eiro. Skolēnam ir jāsaprot, ka to var tulkot kā izteiksmi $5 + 2$. Pierakstot kā izteiksmi, skolēns lieto savas zināšanas par simboliem, lai aprēķinātu izteiksmes vērtību un lai vieglāk atrisinātu sākotnējo uzdevumu. Sarežģītāk mēdz būt situācijās, kurās ir nepieciešamas iekavas.



Aktivitāte skolēniem

Sākot mācīties pierakstīt izteiksmes, skolotājs lasa tekstu un aicina skolēnus risināt šo situāciju, modelējot vai rēķinot galvā, un tad pierakstīt.

Parkā spēlējās 7 bērni. 4 drīz aizgāja mājās, bet atnāca vēl 5 bērni. Cik bērnu tagad spēlējas parkā?

Risināšanas veidi varētu būt dažādi. Pirmkārt, varam sākt ar klucīšiem vai citiem priekšmetiem (ko var saukt par modelēšanu vai stratēģiju “veido situācijas modeli”), lai parādītu 7 bērnus. Tad modelējam, ka aiziet 4 bērni, bet 5 atnāk klāt. Daļa skolēnu to varētu izdomāt galvā, tad ir jājautā, kā to pierakstīt, lai skaidrotu savu risinājumu. Kad skolēni ir gatavi, var pāriet uz simboliem un pierakstīt darbību:

$$7 - 4 + 5 = 8 \text{ bērni.}$$



Aktivitāte skolēniem

Skolotājs aicina skolēnus izlasīt tekstu un to modelēt vai uzreiz izdomāt, kā to pierakstīt ar izteiksmes palīdzību, kādus matemātiskos simbolus vajadzēs izmantot.

Robertam ir 8 gadi. Pēc 4 gadiem Roberta tēvs būs trīs reizes vecāks nekā dēls.

Cik gadu būs Roberta tēvam pēc 4 gadiem? Cik gadu viņam ir tagad?

Varam spriest, ka zinām: Robertam ir 8 gadi. Pēc 4 gadiem Robertam būs $8 + 4$ gadi, bet Roberta tēvam būs trīs reizes vairāk: $3 \cdot (8 + 4) = 3 \cdot 12 = 36$ gadi. Te noteikti rodas jautājums, kā to matemātiski korekti pierakstīt – lietojam iekavas, izmantojot to jēgu: iekavas atdala summu, kas būs jāreizina.

Tad varam spriest par tēva gadu skaitu tagad: pēc 4 gadiem viņam būs 36, tātad tagad ir 32 gadi.

4. Stratēģija “apskati visus gadījumus” jeb pilnā pārļase

Šī stratēģija vingrina prasmi veidot secīgus spriedumus un pierakstus, secīgi aplūkot informāciju. Skolēnam ir jādomā, kā organizēt informāciju, lai neizlaistu kādu gadījumu vai citu nejauši nepierakstītu vairākas reizes. Vislabāk ir aicināt skolēnus pierakstīt visas iespējas noteiktā secībā. Šo stratēģiju izmanto situācijās, kad ir vairāki spriešanas soļi un pie katra soļa ir vairākas izvēles.



Aktivitāte skolēniem

Pusdienu komplektā ietilpst pamatēdiens un saldaiss. Tiek piedāvāti 2 pamatēdieni: cepts cālis vai dārzenų sacepums. Saldajā ir 3 izvēles: zemeņu saldējums, augļu kārtojums vai ābolmaize. Cik dažādas pusdienu izvēles apmeklētājs var izveidot?

Varam sākt ar pamatēdienu: ja izvēlamies ceptu cāli, tad ir 3 saldā ēdiena izvēles: cepts cālis un saldējums, cepts cālis un augļu kārtojums vai cepts cālis un ābolmaize.

Ja izvēlamies dārzeņu sacepumu, tad iespējamās pusdienas ir: dārzeņu sacepums un saldējums, dārzeņu sacepums un augļu kārtotums vai dārzeņu sacepums un ābolmaize.

Tātad kopā ir 6 iespējamās pusdienu izvēles.

Lai veicinātu domāšanu, var piedāvāt skolēniem zīmēt situāciju, izmantojot grafu.



Aktivitāte skolēniem

Sandrai makā ir 16 centi. Viņai ir tikai 5 centu un 1 centa monētas. Kādas un cik monētas varētu būt Sandras makā?

Rosinām skolēnus spriest un veidot sarakstu, kurā iekļausim visus iespējamus gadījumus. Domājam jeb fiksdējam vienu no monētu veidiem, piemēram, 5 centu monētas. Ir iespējams, ka viņai ir 0, 1, 2 vai 3 piecu centu monētas. Veido sarakstu (vai tabulu).

11. tabula

5 centu monētu skaits	5 centu monētu naudas daudzums	1 centa monētas, naudas daudzums
0	0	16
1	5	11
2	10	6
3	15	1
4 nevar būt	20	

5. Stratēģija “veido situācijas modeli”

Šo stratēģiju parasti lieto tad, kad vēlas atdarināt uzdevumā aprakstītās darbības no reālās dzīves, lai procesu attēlotu matemātiski un atrisinātu problēmu. Skolotāji var mudināt skolēnus modelēt darbības – ar konkrētiem objektiem vai zīmējot (sk. iepriekš uzdevumu par monētām). Bieži palīdz tas, ka izveidojam modeli un tad uzzīmējam. Papīra locīšana ir viens veids, kā modelēt situācijas, kad tiek izmantoti daļu rēķini.



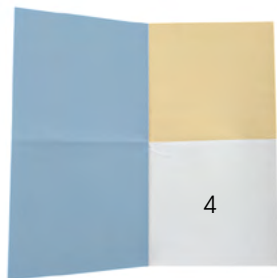
Aktivitāte skolēniem

Aicinām skolēnus veidot atbilstošu modeli, izmantojot papīra lapu un locīšanu.

Māris jūrmalā lasīja gliemežvākus. Vēlāk Māris iedeva pusi no savāktajiem gliemežvākiem mātai. Kad atnāca draugs, Māris iedeva viņam pusi no atlikušajiem

gliemežvākiem. Tad Māris atklāja, ka viņam palikuši tikai 4 gliemežvāki. Cik gliemežvākus Māris bija paņēmis jūrmalā?

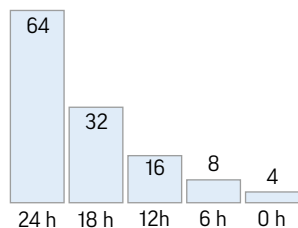
Atceramies, ka varam izmantot stratēģiju “spriežu no beigām”, un, lai to veiksmīgi darītu, veidojam modeli. Sākam ar veselo – šinī gadījumā tie ir visi gliemežvāki. Lietojam papīra lapu. Māris atdod pusi no gliemežvākiem mācai – varam pārlocīt papīru uz pusēm un iekrāsot zilu to pusi, kas tika atdota. Tālāk zinām, ka Māris pusi no atlikušā iedeva draugam. Lokām papīru uz pusēm vēlreiz tā, lai atlikusī daļa ir pārlocīta uz pusi. Redzam, ka tā būs puse no puses gliemežvākiem jeb ceturtdaļa no sākotnējā daudzuma. Iekrāsojam šo daļu dzeltenu. Ceturtdaļa no lapas ir palikusi neiekrāsota. Tā attēlo 4 gliemežvākus. Varam secināt, ka puse no savāktajiem gliemežvākiem ir 8, tātad kopā ir 16 gliemežvāki.



Aktivitāte skolēniem

Baktēriju skaits dubultojās katras 6 stundas. Pēc vienas diennakts tika saskaitītas 64 baktērijas. Cik baktēriju bija sākumā?

Zīmējam taisnstūri, kas attēlo 64 baktērijas, kuras ir radušās pēc 24 stundām. Uz pusi mazāks taisnstūris reprezentē baktēriju skaitu, kas bija 6 stundas agrāk jeb pēc 18 stundām no sākuma laika. Turpinām zīmēt, līdz sasniedzam sākumu, kur ir 4 baktērijas.



6. Stratēģija “veido shematisku zīmējumu”

Shematisku zīmējumu mācām izmantot, lai situāciju uzdevumos tos vispirms vizualizētu ar domu, ka tas atvieglo skolēniem matemātiskā modeļa – izteiksmes – veidošanu. Shematisks zīmējums var būt arī diagramma vai situācijas modelis abstraktā formā. Bieži izmanto arī bultiņas, lai rādītu sekojošos soļus un iespējamās ceļus, kur ir vairākas izvēles.

Lai veidotu shematisku zīmējumu, parasti izmanto taisnstūrus, ņem palīgā krāsas, strādājot ar tekstu. **40. att.**

40. att. Ilzei makā bija 94 centi. No rīta mēitene iztērēja 52 centus. Pēcpusdienā iztērēja vēl 8 centus. Cik centu Ilzei makā ir tagad?

Handwritten calculations on grid paper:

$$94 - 52 = 42$$

$$42 - 8 = 34 \text{ (centi)}$$

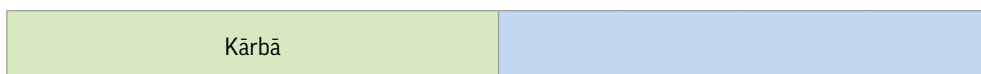
$$94 - (52 + 8) = 94 - 60 = 34$$



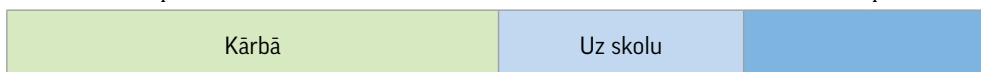
Aktivitāte skolēniem

Keita, gatavojoties dzimšanas dienas svinībām, kopā ar brāli un māsu izcepa ļoti daudz cepumu. Pusi no visiem izceptajiem cepumiem viņa ielika kārbā. Pusi no atlikušajiem cepumiem viņa iesaiņoja, lai tos paņemtu līdzī uz skolu. Pēc tam otru pusi no pāri palikušajiem cepumiem iebēra saldumu traukā. Tad Keita trīs piektdaļas no atlikušā cepumu daudzuma iedeva brālim un mātai. Un tad Keita izbrīnījās, jo lielajā bļodā bija palikuši tikai 10 cepumi. Cik cepumu Keita kopā ar brāli un māsu bija izcepusi pavisam?

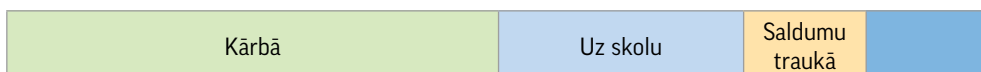
Lai risinātu šo uzdevumu, varam uzzīmēt taisnstūri un lietot to, rādot, kā sadala cepumus. Zinām, ka sākumā $\frac{1}{2}$ no cepumiem tika nolikta kārbā. Iekrāsotais rāda, kas ir nolikts.



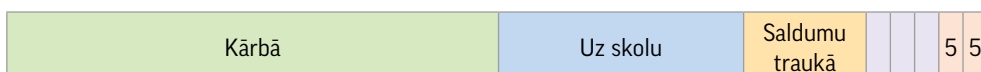
Puse no atlikušajiem cepumiem tiek iesaiņoti, lai paņemtu līdzī uz skolu. Tas nozīmē, ka $\frac{1}{4}$ no cepumiem tika paņemti līdzī uz skolu un paliek vēl $\frac{1}{4}$.



No pārpalikušā daudzuma pusi Keita iebēra saldumu traukā.



Zinām, ka no atlikušajiem cepumiem $\frac{3}{5}$ Keita iedeva brālim un mātai, palika $\frac{2}{5}$. Ja $\frac{2}{5}$ ir 10 cepumi, tad $\frac{3}{5}$ ir 15 cepumi.



Saldumu traukā tātad ir 25 cepumi, uz skolu paņēma $25 \cdot 2 = 50$, kārbā ielika $50 \cdot 2 = 100$ cepumus. Tātad sākumā bija $100 \cdot 2 = 200$ cepumi. Rosinām skolēnus pārliecināties par savu spriedumu pareizību, veicot pārbaudi. Lai pārbaudītu atbildi, ņemam $200 : 2 = 100$. 100 paliek kārbā. No pārpalikušās puses ņemam uz skolu $100 : 2 = 50$. No pāri palikušajiem 50 pusi ieberam saldumu traukā: $50 : 2 = 25$. No pārpalikušajiem 25 cepumiem $\frac{3}{5}$ jeb 15 cepumus iedodam brālim un māsa, bet 10 paliek bļodā. Tātad 200 ir pareizā atbilde. To varētu modelēt arī ar papīra locīšanu.



Aktivitāte skolēniem

Saimniekam jātiek pāri upei ar vistu, lapsu un auzu maisu. Laivā vieta ir tikai viņam un vienam citam. Kā saimnieks varētu pārvest visus pāri upei, ja:

- *lapsu un vistu nevar atstāt kopā, jo lapsa apēdīs vistu,*
- *vistu ar auzu maisu arī nevar atstāt kopā, jo vista apēdīs auzas.*

Šoreiz lietojam burtus S, V, L un A, lai modelētu Saimnieku, Vistu, Lapsu un Auzas. Skolēni var uzrakstīt S, V, L un A uz papīra lapiņām un modelēt pārvietošanos no viena krasta uz otru, ievērojot minētos nosacījumus. Skolēni var parādīt, kur ir upe, un tad demonstrēt, kā pārvieto priekšmetus no viena krasta uz otru. Pēc vairākiem mēģinājumiem atbilde kļūs redzama. Ir svarīgi, ka skolēni tad pieraksta savu domu gaitu un atbildi. Viens veids, kas skaidri parāda risinājumu, ir shematiskais zīmējums.

Ar bultu norādām ceļu no viena krasta uz otru.

S V L A	S V →	SV
	←S	V
S L A	S L →	S L V
	←S V	L
S V A	S A →	S L A
V	←S	L A
S V	SV →	S V L A

7. Stratēģija “veido tabulu”

Tabulas izmantošanas iespējas, risinot problēmuzdevumus:

- tabula ļauj sakārtot doto informāciju un idejas,
- tabulā dotā informācija ļauj labāk saskatīt sakarības,
- tabulā dotā informācija var palīdzēt veikt vispārinājumus.

Tabula palīdz skolēniem redzēt visu informāciju viegli salasāmā formātā un meklēt sakarības, attiecības vai skaitļu virknes. Tabulas bieži izmanto, ja ir daudz gadījumu vai daudz informācijas. Kā jau iepriekš redzējām uzdevumā

par monētām, tabulā var strukturēt informāciju, lai izmantotu stratēģiju “mini un pārbaudi”.

Skolēniem ir jāpalīdz veidot tabulas kolonnas un rindas tā, lai to kategorijas būtu vienādi sadalītas un informācija neatkārtotos.



Aktivitāte skolēniem

Kādas slimnīcas autostāvvietas noteikumos ir teikts: pirmā stunda ir bez maksas, pēc tam 2,00 EUR/h. Par 24 h jāmaksā 10,00 EUR. Maksa par 24 h ir par vienu stāvvietas sesiju.

Minimālā maksa: 2,00 EUR, apmaksas solis: 1,00 EUR.

Palīdzī Dagmārai apkopot šo informāciju, lai varētu ātri pateikt, cik būs jāmaksā, ja automašīna būs stāvējusi šajā stāvvietā 0,5 h, 3 h, 1,5 h, 10 h. Kā sakārtot un parādīt izmaksas par veselām stundām visas diennakts garumā?

Kopīgi ar skolēniem var spriest, kā informāciju apkopot. Ja izvēlas tabulu, tad kādus datus tajā rakstīt – izmaksas veselās stundās vai arī par pusi no stundas. Kamēr skolēni mācās veidot tabulu, var piedāvāt skolēniem izvērtēt jau dotas tabulas vai arī papildināt iesāktas tabulas.

Laiks, h	līdz 1	1–2	2–2,5	2,5–3	...	
Samaksa, EUR	0	2	3	4	...	

Laiks, h	līdz 1	1–2	2–3	3–4	...	
Samaksa, EUR	0	2	4	6	...	



Aktivitāte skolēniem

Delfinārijā parasti ar ūdeni piepilda $\frac{9}{10}$ baseina. Ja ūdeni baseinā lej 1 stundu, tad tiek piepildīta $\frac{1}{5}$ no visa baseina. Cik ilgs laiks vajadzīgs, lai baseinu piepildītu ar nepieciešamo ūdens daudzumu?

Kā divos dažādos veidos varētu risināt šo uzdevumu?

Viens veids, kā risināt, ir veidot tabulu. Jautāt skolēniem, kas ir zināms. Zinām, ka $\frac{1}{5}$ no visa baseina piepilda 1 stundas laikā. Tas nozīmē, ka būs nepieciešamas 5 stundas, lai piepildītu visu baseinu. Pierakstām šo informāciju tabulā.

Cik daudz no baseina piepildīts	Laiks (stundās)
$\frac{1}{5}$	1
1	5

Ievērojam: ja visu baseinu piepilda 5 stundās, tad $\frac{1}{10}$ no baseina piepilda $\frac{1}{2}$ stundā. Uzdevumā jautāts, cik ilgā laikā piepildītu $\frac{9}{10}$ no visa baseina. Reizinām $\frac{1}{10}$ ar 9 un attiecīgi $\frac{1}{2}$ ar 9. Iegūstam $\frac{9}{2}$ jeb 4,5 stundas jeb 4 stundas un 30 minūtes.

Cik daudz no baseina piepildīts	Laiks (stundās)
$\frac{1}{5}$	1
1	5
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{2} = 4,5$

Otrs risināšanas veids varētu būt izteiksmju veidošana un darbības ar daļām uzreiz.

Aprēķinām, cik stundās var piepildīt $\frac{9}{10}$ no baseina, tas ir, nepieciešamo ūdens daudzumu dalām ar $\frac{1}{5}$, jo tik daudz baseina piepilda vienā stundā.

$$\frac{9}{10} : \frac{1}{5} = \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{1} = \frac{9}{2} = 4 \frac{1}{2} \text{ (stundas)}$$

8. Stratēģija “apskati vienkāršāku problēmu”

Šo stratēģiju lieto tad, kad atrast uzdevumā prasīto liekas ļoti sarežģīti. Ir jāpārdomā, vai, aplūkojot to pašu jautājumu ar mazākiem skaitļiem, būs iespējams saprast, kā atrisināt uzdevumu. Piemēram, nākamajā aktivitātes uzdevumā neskaitām, cik rokasspiedienu vajadzīgs, ja ir 10 cilvēki, bet skaitām, cik reižu sarokosies 3 vai 4 cilvēki. Tas dod iespēju atrast sakarību starp cilvēku un rokasspiedienu skaitu.



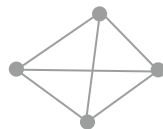
Aktivitāte skolēniem

Viesībās ieradās 10 viesi un sarokojās cits ar citu. Cik rokasspiedienu tika izdarīti?

Ar 10 viesiem ir grūti iesākt. Mēģinām mazākus skaitļus. Ja ir 1 viesis, tad būs 0 rokasspiedienu. Ja 2 viesi, tad 1 rokasspiediens.

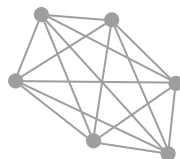
Kā ar 3 cilvēkiem? utt.

Te ir situācija, kur varam lietot arī citu stratēģiju – veidot zīmējumu. Katra virsotne ir viesis, un nogrieznis starp viesiem ir rokasspiediens. Piemēram, ja ir 4 viesi, redzam, ka būs 6 sarokošanās.



Skolēniem ir jādod laiks ieraudzīt: katrs cilvēks dod roku 3 citiem: $4 \cdot 3 = 12$. Bet tad katrs rokasspiediens tiktu pieskaitīts 2 reizes, tātad $12 : 2 = 6$.

Ja ir 6 cilvēki, domājam $6 \cdot 5 = 30$, kas jādala ar 2. Būs 15 rokasspiedienu.



Ar 10 nav jāzīmē. Domājam $10 \cdot 9 = 90$, bet puse no tā ir 45.

Aplūkosim vēl vienu piemēru, kur šī stratēģija tiek izmantota, veicot spriedumus pakāpeniski.



Aktivitāte skolēniem

Akcijas laikā automašīnas cena tika samazināta par 25%. Tās sākotnējā cena bija 23 495 eiro. Aprēķini, cik daudz tika samaksāts par automašīnu!

Skolēns var spriest pakāpeniski, sākumā domājot par vienkāršākiem skaitļiem, piemēram, kā aprēķināt atlaidi, ja cena ir 100 eiro.

Tātad varu spriest, ka jebkurai cenai, rēķinot atlaidi, domāju

$0,25 \cdot \text{sākuma cena}$

$0,25 \cdot 23\,495 = 5873,75$

un sākuma cena – atlaide = pārdošanas cena

$23\,495 - 5873,75 = 17\,621,25$

9. Stratēģija “vispārini”

Vispārīnāšana ir matemātikas stratēģija, kas ietver konkrētu piemēru un situāciju apskatīšanu un tad to paplašināšanu, lai izveidotu vispārīgus spriedumus. Tā palīdz skolēniem izprast matemātikas jēdzienus dziļāk un pielietot tos dažādās situācijās. Vispārīnāšana veicina skolēnu spēju domāt abstrakti. Bieži to izmanto

situācijās, kad skolēni veic pētnieciskus uzdevumus – cenšas paši atklāt matemātiskas sakarības.



Aktivitāte skolēniem

Dodam uzdevumu – virknes vizualizāciju – un jautājam skolēniem, kā viņi risinās šo uzdevumu, kā veidos risinājuma pierakstu.

Pirmajā figūrā ir viens kvadrāts, otrajā ir četri utt. Ja turpinām, cik kvadrātu ir vajadzīgs, lai izveidotu piekto figūru?



Vai varam izdomāt, cik kvadrātu būs vajadzīgi sestajai figūrai, ja to neveidojam? Kā ir ar desmito figūru? Vai varam izdomāt sakarību, kā aprēķināsim kvadrātu skaitu jebkurai virknes figūrai?

Pēc tam, kad skolēniem ir dots laiks sarunāties par šiem jautājumiem, lai apkopotu informāciju, skolotājs var piedāvāt pierakstīt informāciju tabulā, jo tabula bieži palīdz organizēt domas un ieraudzīt sakarības.

Figūras numurs	Kvadrātu skaits	Sakarība
1	1	$1 = 1^2$
2	4	$4 = 2^2$
3	9	$9 = 3^2$
4	16	$16 = 4^2$
5	25	$25 = 5^2$

Skolēni var spriest, strādājot nelielās grupās, kā varētu izdomāt, cik kvadrātu ir nepieciešams sestajai, desmitajai vai lielākai figūrai. Ievērojam, ka 1. figūrā ir 1 kvadrāts, 2. figūrā 4 utt. Lai uzzinātu, cik kvadrātu ir vajadzīgi konkrētajā figūrā, jāreizina figūras numurs ar sevi jeb jākāpina kvadrātā. Sestajā figūrā būs 36 kvadrāti, 10. figūrā būs 100 kvadrātu. Ja vispārinām vēl tālāk, tad secinām: lai izveidotu jebkuru figūru šajā virknē, figūras numura skaitlis ir jāreizina pats ar sevi jeb jākāpina kvadrātā.



Jautājumi pārdomām

Kā veidot mācību procesu, lai problēmrisināšana būtu katra skolēna spēkos?

Kuri ir būtiskākie problēmrisināšanas soļi, kā to iekļaut mācību procesā?

Kuras risināšanas stratēģijas jūsu skolēni pārvalda labāk, kāpēc?

Kā jūs izvēlaties konkrētā tematā, kuru no stratēģijām apgūsiet vai lietosiet?

Kā palīdzēt skolēniem atpazīt, kuru stratēģiju izvēlēties konkrētā uzdevuma risināšanā?

Literatūra tālākai uzzīņai

Billstein, R., Libeskind, S., & Lott, J. W. (2001). *A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers*. Addison Wesley.

Hatfield, M. M., Edwards, N. T., Bitter, G. G., & Morrow, J. (2005). *Mathematics Methods for Elementary and Middle School Teachers*. John Wiley & Sons, Inc.

Johnson, K., & Herr, T. (2001). *Problem Solving Strategies: Crossing the River with Dogs*. Key Curriculum Press.

1.4.3. Matemātiskās modelēšanas elementi

Skolēna matemātikas izglītības gaitā vārds “modelis” tiek lietots bieži, piemēram, modeļi – skaitīšanas bloki, daļu sloksnītes u. c., demonstrējumi, lomu modelēšana un matemātikas konceptuālie modeļi – ir vērtīgi mācīšanās rīki. Tomēr tie atšķiras no matemātiskās modelēšanas prakses. Matemātiskā modelēšana gan darbavietā, gan skolā izmanto matemātiku, lai atbildētu uz lieliem, sarežģītiem, realitātē balstītiem jautājumiem.

Matemātiskās modelēšanas process

Termins “**matemātiskā modelēšana**” tika aktualizēts jau 20. gadsimta 70.–90. gados. Matemātiskās modelēšanas process gadu laikā ir skaidrots dažādi, tomēr kā kopīgo saskatām to, ka, pirmkārt, matemātiskās modelēšanas pamatā ir reāla problēma, kura tiek cikliski risināta, otrkārt, procesa laikā ir jāizdara pieņēmumi, kas nepieciešami uzdevuma risināšanai, treškārt, procesa laikā ir jāveido matemātisks modelis, ceturtkārt, matemātiskās modelēšanas uzdevumos nav tikai viena pareiza risinājuma vai vienas pareizas atbildes (Smith, 1996). Matemātiskā modelēšana ir vairāk nekā tikai problēmu risināšana, jo tās pamatā ir reāla problēma (Kaur et al., 2009). Matemātisko modelēšanu definējam un konceptualizējam kā reālās dzīves problēmu risināšanas procesu, kas ietver tādas matemātiskus procesus kā neatlaidība, rīku izmantošana, struktūras saskatīšana, kritiskā domāšana un efektīva komunikācija (Asempapa et al., 2023).

Pētījumi rāda, ka sākumskolas vecuma bērni ir spējīgi strādāt ar matemātiskās modelēšanas uzdevumiem, tomēr dažkārt skolotāji šādus uzdevumus nemaz nepiedāvā, jo uzskata, ka skolēni nebūs spējīgi tos atrisināt. Turklāt skolēnu iesaistīšanās matemātiskajā modelēšanā ne tikai piedāvā interpretācijas, argumentācijas un problēmu risināšanas iespējas, bet arī ietekmē viņu attieksmi pret matemātiku (Brady & Lesh, 2021; English, 2021).

Matemātiskā modelēšana ir **process**, kurā matemātiku izmanto, lai **prognozētu, analizētu, prezentētu** vai kā citādi sniegtu ieskatu reālās pasaules parādībās (Bliss et al., 2014).

Matemātiskā modelēšana ir atvērts process:

- atvērta tam, kā modelētājs formulē matemātikas problēmu,
- atvērta risināšanas metodei,
- atvērta gala atrisinājumam (Reuben et al., 2022).

Matemātiskā modelēšana (reāla problēma → matemātiskais modelis → matemātiskais atrisinājums → reālās problēmas atrisinājums) ir matemātikas saturs, ko nosaka mācību priekšmeta standarts (Ministru kabinets, 2018). Sākam ar to, ka skolēni spēj pēc norādēm individuāli vai grupā veikt atsevišķus

matemātiskās modelēšanas soļus zināmās vai jaunās situācijās, līdz tie jaunā situācijā individuāli vai sadarbojoties (arī ar skolotāja palīdzību) spēj izpildīt matemātiskās modelēšanas soļus.



Svarīgi paturēt prātā

Matemātiskā modelēšana

- palīdz skolēniem labāk izprast pasauli,
- ir atbalsts matemātikas mācīšanās procesā (motivācija, koncepti, jēgas iegūšana...),
- attīsta matemātikas prasmju lietojumu un attieksmju veidošanos,
- sniedz atbalstu lielo matemātikas ideju apguvē un dziļu, integrētu izpratni.

Modeļu, piemēram, sloksnišu, klucīšu u. c., izmantošana kāda matemātikas koncepta skaidrošanai nav matemātiskā modelēšana.

Literatūrā matemātiskās modelēšanas apraksti atšķiras. Kārenas Blisas (*Karen Bliss*) un Džesikas Libertini (*Jessica Libertini*) (GAIMME, 2019) aprakstītais modelēšanas cikls parāda modelēšanas procesa ciklisko raksturu. **41. att.** Tas sākas ar problēmu, kas skolēniem ir jāformulē, izmantojot matemātikas rīkus, un jāanalizē, pārdomājot procesu, kā tas notiek, vienlaikus to uzlabojot pēc vajadzības.

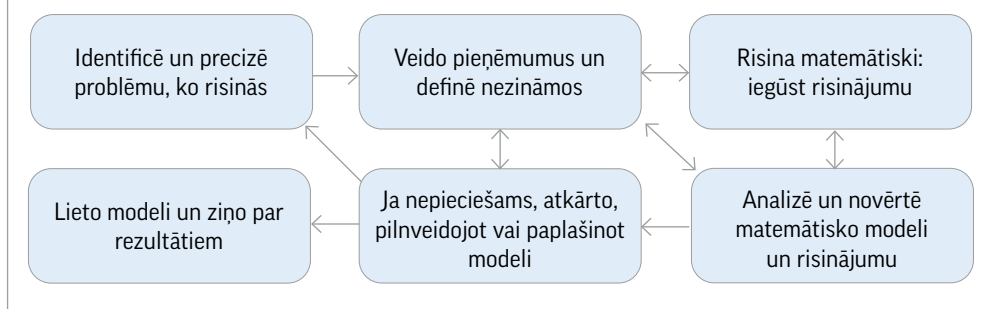
Savukārt Verners Blūms (*Werner Blum*) un Rita Ferija (*Rita Ferri*) parādiņa modelēšanas procesa ciklu, to sadalot 7 soļos:

- 1) situācijas (problēmas izpratne),
- 2) vienkāršošana/strukturēšana,
- 3) matemātiskā modeļa izveide,
- 4) matemātiska risināšana,
- 5) interpretācija,
- 6) pārbaude,
- 7) atbildes prezentācija (Blum & Ferri, 2009).

Situācijas/problēmas izpratne. Lai sāktu matemātiskās modelēšanas procesu, skolotājs iepazīstina skolēnus ar reālo problēmu, kura jārisina, vai arī skolēni paši izvēlas situāciju, kurai meklēs risinājumu, izmantojot matemātiku. Skolēniem tiek dots laiks pārdomāt situāciju, izpētīt to un apspriest. Skolēniem ir jāsaprot problēmas būtība vai pat jārada savas problēmas, balstoties uz doto situāciju. Jebkurā gadījumā skolēni ir jā mudina izpētīt reālo situāciju. Pēc tam, kad skolēni ir izpratuši problēmu, viņiem jāpārdomā, kāds varētu būt rezultāts.

Vienkāršošana/strukturēšana, t. sk. pieņēmumu izdarīšana. Lai izveidotu matemātisko modeli, skolēniem ir jāizdara pieņēmumi (Bliss et al., 2014). Kad skolēni ir izpratuši reālo problēmu, viņi, izmantojot prāta vētru, formulē, kuri fakti ir svarīgi, kurus var ignorēt un kādas nepieciešamās informācijas vēl trūkst.

41. att.



Ideju ģenerēšana problēmas risināšanai dod iespēju precizēt problēmu, ko risināt, un formulēt pamatotus pieņēmumus par galvenajiem faktoriem, kas ietekmē risināmo problēmu. Šos pieņēmumus var mainīt nākamajā modelēšanas atkārtotumā, tāpēc sākotnējie pieņēmumi tiek veikti, lai modelis būtu pēc iespējas vienkāršāks.

Matemātiskā modeļa izveide. Skolēni izveido matemātisku modeli, kas apraksta reālo problēmu ar matemātikas palīdzību, lai iegūtu paredzamos rezultātus. Sākumskolā matemātiskais modelis var būt skaitliska izteiksme, vizualizācija, reāli modelīši, spriedumu virkne, ģeometrisks zīmējums vai to kombinācija.

Šos trīs modelēšanas soļus var veikt jebkurā secībā. Piemēram, skolēni var sākt ar matemātiskā modeļa identificēšanu, vienlaikus izdarot pieņēmumus. Turklāt skolēni var – un bieži vien to arī dara – precizēt savus pieņēmumus un matemātiskos modeļus turpmākajos modelēšanas procesa atkārtojumos.

Risināšana. Šajā procesa posmā skolēni veic matemātiskas darbības vai spriedumus, izmantojot pašu izstrādāto modeli.

Interpretācija. Pēc tam skolēni saista aprēķinu posma rezultātus ar reālo problēmu. Tādējādi viņi iegūst rezultātus, kas interpretēti sākotnējās problēmas kontekstā.

Novērtējums. Pēc tam skolēni pārbauda sava modeļa un procesa kvalitāti. Viņi domā, vai matemātiskā atbilde ir jēgpilna sākotnējās situācijas kontekstā. Piemēram, negatīvs rezultāts, ja tas ir garums, nav atbilstošs. Turklāt skolēni apsver, kā mainītos rezultāti, ja viņi mainītu savus pieņēmumus vai modeli. Pēc novērtēšanas skolēni izlemj, vai pārveidot savu modeli vai ziņot par saviem atklājumiem. Pieredze un pētījumi liecina, ka novērtēšana var notikt jebkurā modelēšanas procesa posmā.

Ziņojums. Kad skolēni ir apmierināti ar iznākumu, viņi dalās ar savu problēmas risinājumu un tā pamatojumu. Viņi paskaidro savus pieņēmumus, kā izvērtējuši modeļus un kādas grūtības bijušas modelēšanas procesa laikā.

Blisa un Libertini (GAIMME, 2019) ir aprakstījušas arī procesu, kā matemātiska satura uzdevumu pārveidot par modelēšanas problēmu, tātad situāciju uzdevumi un reālu situāciju jeb autentiski uzdevumi var noderēt kā starpposma uzdevumi līdz matemātiskās modelēšanas uzdevumam, kas ietver matemātiskās modelēšanas cikla elementus.

Kā nonākam līdz matemātiskās modelēšanas uzdevumam?

Aplūkosim, kā matemātisku problēmu var pārveidot par matemātiskās modelēšanas problēmu. Ir svarīgi saprast, ka nepietiek pievienot objektus, piemēram, bumbiņas, uzdevumā, kurā jāizpilda saskaitīšana, lai notiktu matemātiskā modelēšana. Varbūt mazāk acīmredzams, bet svarīgs ir konteksts un nozīme, piemēram, veikalā esošo cenu izmantošana, bet ar to arī nepietiek. Matemātiskās modelēšanas uzdevumam ir jānodrošina skolēniem arī iespēja interpretēt problēmu un izvēlēties dažādas iespējas, kā to risināt. Viens veids, kā matemātiska satura uzdevumu pārveidot par matemātiskās modelēšanas uzdevumu, ir attēlots shēmā (GAIMME, 2019). 42. att.

1. Matemātisks saturs

SR Izpilda darbības ar decimāldaļām.

UZDEVUMA PIEMĒRS

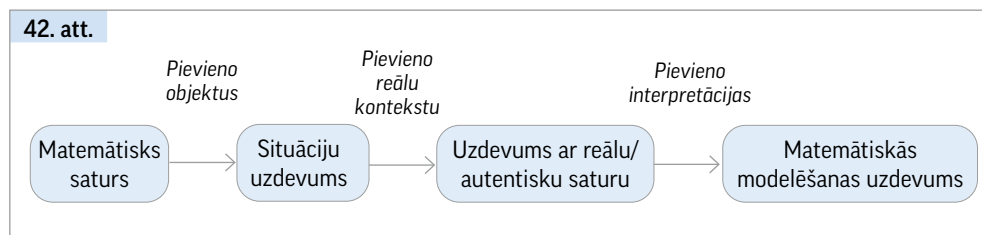
Aprēķini summu: $2,5 + 3$.

Jā matemātiska satura uzdevumam pievienojam objektus, iegūstam situāciju uzdevumu.

2. Situāciju uzdevums

Ar situāciju uzdevumu saprotam vārdiski pierakstītu situāciju kā vienu kopumu (varbūt minimālā) kontekstā, iekļaujot tekstā visu nepieciešamo informāciju un paredzot rezultātā vienu pareizo atbildi.

Lai atrisinātu situāciju uzdevumu, skolēniem ir jāinterpretē uzdevuma teksts, to lasot; jāatpazīst būtiskā informācija tekstā vai pievienotajā vizuālajā materiālā



(piemēram, grafikā vai diagrammā); jāizvēlas risināšanas veids – strukturējot informāciju ar grafiska organizatora palīdzību vai zīmējot shematisku zīmējumu; jāveido izteiksme vai spriedumi; jāveic aprēķini un jāpārbauda, vai atbilde ir pareiza. Grūtības jebkurā situāciju uzdevuma risināšanas daļā var novest pie nepareizām atbildēm.

SR Izmanto decimāldaļu saskaitīšanu reālos kontekstos.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Sarkana roze maksā 2,5 eiro, dzeltena roze – 3 eiro. Santa nopirka divas sarkanas rozes un vienu dzeltenu. Aprēķini, cik viņa samaksāja par pirkumu!

Mācoties risināt situāciju uzdevumus, būtiska, pirmkārt, ir skolēnu teksta izpratne – kā viņi mācās saprast, kas tekstā ir rakstīts un kā to pārvērst matemātiskā valodā. Mācām strādāt ar diviem attēlojumiem – teksts un simboli. Lai to paveiktu, dažkārt ņemam palīgā fizisko vai vizuālo attēlošanu – tekstu attēlojam ar modeli vai shematisku zīmējumu. Otrkārt, būtiska ir matemātisko prasmju lietošana, kad matemātiskais modelis ir izveidots. Treškārt, risinājuma analīze – vai iegūtā atbilde atbilst dotajam kontekstam, vai risinājums ir korekts.

Kognitīvi vadītas mācīšanas procesā Tomass Kārpenters (*Thomas Carpenter*) u. c. nodala dažādus situāciju uzdevumu tipus, kas prasa no skolēna citādu domāšanas veidu (Carpenter et al., 1996; Carpenter et al., 2015). Mācību procesā ir svarīgi, ka skolotājs pārzina šos dažādos uzdevumu tipus un spēj palīdzēt skolēniem saskatīt būtiskāko, lai uzdevumu atrisinātu.

12. tabulā redzams situāciju uzdevumu klasificēšanas piemērs, kur izmantota saskaitīšana un atņemšana (Carpenter et al., 2015).

Risinot situāciju uzdevumus, būtiski ir mācīt apzināti skolēnus strādāt ar tekstu un to, kā no teksta veidot matemātisko modeli – izteiksmi – jeb kā lietot kognitīvās stratēģijas, pievēršot uzmanību arī metakognitīvajiem procesiem, kas palīdz skolēniem veiksmīgi izprast situāciju uzdevumu no sākuma līdz beigām. Skolotājiem vajadzētu demonstrēt un izmantot metakognitīvās stratēģijas, lai palīdzētu skolēniem veidot situāciju uzdevuma risinājumu. Metakognitīvās stratēģijas palīdz skolēniem darboties atpazīstamā veidā, piemēram, iedziļināties, lasot tekstu, izveidot plānu, atrisināt problēmu un pārbaudīt risinājumu. Šim nolūkam skolēni var veidot savas atgādnas vai izmantot jau dotas atgādnas.

12. tabula

Uzdevuma veids															
Pievienošana	<i>(Rezultāts nezināms)</i> Katrīnai bija 5 bumbiņas. Hugo viņai iedeva vēl 8 bumbiņas. Cik bumbiņu Katrīnai ir kopā? 5 + 8 = ■	<i>(Mainīgais nezināms)</i> Katrīnai ir 5 bumbiņas. Cik vēl bumbiņu viņai vajag, lai kopā būtu 13 bumbiņas? 5 + ■ = 13 vai 13 – 5 = ■	<i>(Sākums nezināms)</i> Katrīnai bija dažas bumbiņas. Hugo viņai iedeva vēl 5 bumbiņas. Tagad viņai ir 13 bumbiņas. Cik bumbiņu Katrīnai bija sākumā? ■ + 5 = 13 vai 13 – 5 = ■												
Atdalīšana	<i>(Rezultāts nezināms)</i> Katrīnai bija 13 bumbiņas. Viņa iedeva 5 bumbiņas Hugo. Cik bumbiņu Katrīnai palika? 13 – 5 = ■	<i>(Mainīgais nezināms)</i> Katrīnai bija 13 bumbiņas. Viņa atdeva dažas Hugo. Tagad viņai ir 5 bumbiņas. Cik bumbiņu Katrīna atdeva? 13 – ■ = 5 vai 5 + ■ = 13 13 – 5 = ■	<i>(Sākums nezināms)</i> Katrīnai bija dažas bumbiņas. Viņa atdeva 5 bumbiņas Hugo. Tagad viņai ir 8 bumbiņas. Cik bumbiņu Katrīnai bija sākumā? ■ – 5 = 8 vai 8 + 5 = ■												
Daļa – daļa – kopā	<i>(Viss kopā nezināms)</i> Katrīnai ir 5 sarkanas un 8 zilas bumbiņas. Cik bumbiņu viņai ir kopā? 5 + 8 = ■ <table><tr><td colspan="2">?</td></tr><tr><td>Daļa</td><td>Daļa</td></tr></table>	?		Daļa	Daļa	<i>(Daļa nezināma)</i> Katrīnai ir 13 bumbiņas. 5 ir sarkanas, pārējās ir zilas. Cik zilu bumbiņu ir Katrīnai? 5 + ■ = 13 vai 13 – 5 = ■ <table><tr><td colspan="2">Kopā</td></tr><tr><td>?</td><td>Daļa</td></tr></table>	Kopā		?	Daļa	<i>(Abas daļas nezināmas)</i> Katrīnai ir zilas un sarkanas bumbiņas, kopā ir 13 bumbiņas. Cik ir zilo un cik sarkano bumbiņu? ■ + ■ = 13 <table><tr><td colspan="2">Kopā</td></tr><tr><td>?</td><td>?</td></tr></table>	Kopā		?	?
?															
Daļa	Daļa														
Kopā															
?	Daļa														
Kopā															
?	?														

Salīdzināšana	<i>(Starpība nezināma)</i> Katrīnai ir 13 bumbiņas. Hugo ir 5 bumbiņas. Par cik bumbiņu vairāk ir Katrīnai nekā Hugo? 13 – 5 = ■ vai 5 + ■ = 13 <table><tr><td colspan="2">Lielākais daudzums</td></tr><tr><td>Mazākais daudzums</td><td>↔</td></tr><tr><td></td><td>?</td></tr></table>	Lielākais daudzums		Mazākais daudzums	↔		?	<i>(Salīdzināmais daudzums nezināms)</i> Hugo ir 5 bumbiņas. Katrīnai ir par 8 vairāk nekā Hugo. Cik bumbiņu ir Katrīnai? 5 + 8 = ■ vai ■ – 8 = 5 <table><tr><td colspan="2">?</td></tr><tr><td>Mazākais daudzums</td><td>↔</td></tr><tr><td></td><td>starpība</td></tr></table>	?		Mazākais daudzums	↔		starpība	<i>(Sākotnējais nezināms)</i> Katrīnai ir 13 bumbiņas. Viņai ir par 5 bumbiņām vairāk nekā Hugo. Cik bumbiņu ir Hugo? 13 – 5 = ■ vai 13 = 5 + ■ <table><tr><td colspan="2">Lielākais daudzums</td></tr><tr><td>?</td><td>↔</td></tr><tr><td></td><td>?</td></tr></table>	Lielākais daudzums		?	↔		?
Lielākais daudzums																					
Mazākais daudzums	↔																				
	?																				
?																					
Mazākais daudzums	↔																				
	starpība																				
Lielākais daudzums																					
?	↔																				
	?																				



Skolēna atgāzne

Kā es saprotu tekstu – vārdu “jēga”?

Kā es saprasto tekstu māku attēlot/izstāstīt/pierakstīt citādi – matemātikas valodā?

Kā es risinu?

Kāda ir atbilde? Vai atbilde atbilst dotajai situācijai?

Vairākos pētījumos norādīts, ka atslēgvārdu stratēģijas izmantošana ne vienmēr ved uz jēgpilnu risinājumu (Powell et al., 2022). Izvairieties mācīt atsevišķus atslēgvārdus, kas saista konkrētus vārdus ar matemātiskām darbībām. Tikai atslēgvārdu lietošana novērš nepieciešamību lasīt un saprast visu tekstu kopumā un tā vietā virza skolēnus piemērot matemātisko darbību (saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu, dalīšanu), kas bieži vien ir nepareiza (Karp et al., 2019).

Piemēri, kad atslēgvārdi skolēniem dažkārt ir maldinoši jeb kad skolēni tos lieto aplami, ir aplūkojami tabulā (Fuchs et al., 2021). **13. tabula**

Vēl viena pierādījumos balstīta situāciju uzdevumu risināšanas stratēģija ietver grafisko organizatoru vai shematisko zīmējumu izmantošanu, lai izveidotu matemātisko modeli un atrisinātu uzdevumu. Atbilstoši dotajai situācijai skolēni var, piemēram, attēlot daļu un veselo, salīdzināt daudzumus, zīmēt modeļus, lai attēlotu situāciju, u. c. Vizualizācija palīdz labāk izprast tekstu un to pārvērst matemātiskā modelī.

13. tabula

Atslēgvārds	Darbība, kas it kā saistīta ar atslēgvārdu	Piemērs, kurā atslēgvārds var būt maldinošs	Kļūdainā skolēna darbība
Kopā	Saskaitīšana	Alise nopirka 4 olu kastes, katrā kastē ir 12 olas. Cik olu Alisei ir kopā ?	$4 + 12$
Vairāk	Saskaitīšana	Kolinam bija daži krītiņi. Tad viņš nopirka vēl par 12 krītiņiem vairāk , nekā viņam bija. Tagad viņam ir 90 krītiņi. Cik krītiņu Kolinam bija sākumā?	$12 + 90$
Mazāk	Atņemšana	Pauls un Zane lasīja ābolus. Zane salasīja par 12 āboliem mazāk nekā Pauls. Ja Zane salasīja 20 ābolus, cik ābolu salasīja Pauls?	$20 - 12$
Palika	Atņemšana	Liza sadalīja 56 konfektes vienādi ar 3 saviem draugiem. Cik konfekšu palika pāri pēc sadalīšanas?	$56 - 3$
Katrs	Reizināšana	Celtniekiem bija 3 paletes ar celtniecības blokiem. Katrā paletē bija vienāds skaits bloku. Ja kopā bija 75 bloki, cik bloku bija katrā paletē?	$75 \cdot 3$
Divreiz	Reizināšana	Margo nopirka divreiz vairāk piparkūku nekā viņas māsa. Margo nopirka 12 piparkūkas. Cik piparkūku nopirka viņas māsa?	$12 \cdot 2$
Sadalīt	Dalīšana	Katrīnai bija 5 krāsainā papīra lapas. Viņa katru sadalīja ceturtdaļās. Cik papīra gabalu Katrīnai ir tagad?	$5 : 4$

Aplūkosim, kā skolēns risinājis divus uzdevumus, izmantojot vizualizāciju. Redzams, ka viņš izmanto krāsas, tekstā fiksējot būtisko informāciju, parāda, kā konkrēto tekstu attēlo shematiskā zīmējumā, un pēc tam pieraksta kā matemātisku izteiksmi. 43. att.

3. Reāla/autentiska satura uzdevums

Ja situāciju uzdevumā saturs tiek personalizēts vai dotā informācija ir reāla/autentiska, pielāgota esošajai situācijai, piemēram, cenas, reāli attālumi, dati par

43. att.

1. Zēnu koris koncertam sagatavoja 12 dziesmas, bet meiteņu koris – par 3 dziesmām mazāk. Cik dziesmu tika sagatavots koncertam?

1) $12 - 3 = 9$ (meiteņu)
 2) $12 + 9 = 21$

$12 + (12 - 3) = 9$

2. No Rīgas uz koncertu Cēsu koncertzālē skolēni brauca divos autobusus. Vienā autobusā bija 35 skolēni, otrā autobusā – par 5 skolēniem vairāk. Cik skolēnu pavisam brauca uz koncertu?

$35 + (35 + 5) = 75$

kādu skolu vai pilsētu u. tml., iegūstam uzdevumu ar reālu/autentisku saturu. Parasti šādam uzdevumam ir viena vai vairākas konkrētas atbildes, nereti ir jāveic novērtējums.

SR Novērtē reālo situāciju, izmantojot darbības ar decimāldaļām.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Tu ar savu draugu esi Rīgā. Sabiedriskā transporta biļetes cena ir 1,50 eiro.

44. att. Jums katram jāpērk 2 biļetes. Jums kopā ir 5 eiro. Paskaidro, vai jums pietiks naudas, lai nopirktu šīs biļetes! (Rīgā sabiedriskā transporta biļetes 2025. gadā maksā 1,50 eiro.)

44. att.	
Biļetes veids	Cena EUR
Viena 90 minūšu biļete	1.50
Divas 90 minūšu biļetes	3.00
Desmit 90 minūšu biļetes	15.00

<https://www.rigassatiksmelv.lv/biletas/bilesu-klasts-un-cenas-1/laika-bilete/>

4. Matemātiskās modelēšanas uzdevums

Ja uzdevumā ir jārisina reāla problēma, ja ir iespējamās interpretācijas, jāprecizē vai jānoskaidro papildu informācija, jāizvēlas risināšanas metode, iespējamās vairākas atbildes, tad iegūstam matemātiskās modelēšanas uzdevumu.

Matemātiskās modelēšanas uzdevuma raksturojums:

- aktuāls temats, problēma no reālās dzīves,
- atrisināšanai nepieciešams matemātiskais modelis,
- nav dota visa informācija,
- iespējami vairāki risinājumi, to ceļi,
- iespējami vairāki atrisinājumi – piedāvājumi problēmas risinājumam.

SR Lieto matemātisko modelēšanu reālas situācijas risināšanai.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Tu ar savu draugu esi Rīgā. Jums ir jānopērk sabiedriskā transporta biļetes. 24 h biļete maksā 5 eiro, 90 minūšu biļete maksā 1,50 eiro. Jūs plānojat apmeklēt trīs pasākumus. Jūs varat izvēlēties pasākuma vietu: Rīgas Zooloģisko dārzu, Latvijas Nacionālo bibliotēku, Latvijas Nacionālo mākslas muzeju vai Latvijas Nacionālo teātri, kur vakarā ir izrāde. Kādas transporta biļetes jūs iegādāsieties un kāpēc?

Risinājuma strukturēšanai sākotnēji var izmantot matemātiskās modelēšanas soļus un jautājumus, ko tie ietver, strukturēt var visu vai daļu no risinājuma, izmantojot **14. tabulu**.

Matemātisko modelēšanu ieteicams sākt mācīt ar vienkāršākām situācijām, problēmu var piedāvāt skolotājs un ļoti apzināti kopā ar skolēniem fiksēt un reflektēt, kuru modelēšanas soli lieto. Mācību procesā var izmantot arī atsevišķus soļus, piemēram, mācīties veidot pieņēmumus, izmantojot vairākus uzdevumus, tos var nerisināt. Būtiski ir saprast skolotāja un skolēnu sadarbību, mācoties matemātiski modelēt. Skolotājs pamatā būs procesa koordinators.

Ar matemātiskās modelēšanas uzdevumu palīdzību var veicināt starppriekšmetu saikni. Piemēram, uzdevuma ideju var izmantot arī dizaina un tehnoloģiju un latviešu valodas priekšmetos.

14. tabula

Raksturo reālo situāciju.	Kas zināms?	24 h biļete maksā 5 eiro. 90 minūšu biļete maksā 1,50 eiro. Apmeklēs trīs pasākumus. Izvēle: Rīgas Zooloģiskais dārzs, Latvijas Nacionālā bibliotēka, Latvijas Nacionālais mākslas muzejs, Latvijas Nacionālais teātris.
	Kas jānoskaidro?	Kādas transporta biļetes jūs iegādāšities un kāpēc?
Matemātiskais modelis.	Precizējam situāciju, ko risināt. Izdarām pieņēmumus.	Uz Rīgu atbraucam ar autobusu. Veidosim divus plānus – labiem laika apstākļiem un lietaim laikam. Sliktos laika apstākļos nebraucam uz zoodārzu, dodamies uz bibliotēku, tad uz mākslas muzeju un teātri. Labā laikā dodamies uz zoodārzu, muzeju un tad teātri, lai visu paspētu.
	Iegūstam papildus nepieciešamo informāciju.	Jāizpēta Rīgas sabiedriskā transporta karte, kā var nokļūt uz plānotajiem objektiem un cik ilgu laiku tas prasīs. No muzeja uz teātri var aiziet kājām – nevajag transporta biļetes.
	“Tulkojam” matemātiski.	braucienu skaits · biļetes cena < 5 eiro
Modeļa atrisinājums.	Risinām.	Lietamos apstākļos līdz bibliotēkai, tad uz muzeju var aizbraukt ar vienu laika biļeti, no teātra uz autoostu var aiziet kājām. $1,5 \cdot 2 = 3 < 5$ Labā laikā var braukt uz zoodārzu, no zoodārza uz muzeju, tālāk vairs sabiedrisko transportu neizmantosim. $1,5 \cdot 2 = 3 < 5$
Atrisinājuma izvērtēšana.	Vai atrisinājums der?	Jā, esam aplūkojuši plānoto maršrutu izmaksas. Ja nebūtu izpētījuši objektu atrašanās vietu, tad braucienu skaits atšķirtos. Sākotnēji likās, ka dienas biļeti pirkt būs izdevīgāk.
	Novērtējam savu matemātisko modeli.	Izveidotais modelis ļauj ātri aprēķināt izmaksas, ja ir zināms braucienu skaits (braucienu skaits · biļetes cena < 5 eiro), un izlemt, kāda veida biļetes pirkt.
Ziņo par atrisinājumu un atbildi.	Atbildam.	Abos izvēlētajos maršrutos jāpērk laika biļetes, jo tā izmaksās lētāk nekā dienas biļete. Ja plāni mainītos un būtu vajadzīgi vismaz 4 braucieni, izdevīgāk būtu pirkt dienas biļeti.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Skolēniem ir jārisina problēma (adaptēts no <https://www.immchallenge.org.au/supporting-resources/what-is-mathematical-modelling>):

Elza Cukurvītola plāno jaunu pavārgrāmatu, kurā visas receptes būs paredzētas 6–9 cilvēkiem. Viņa vēlētos padomu, kā vajadzētu mainīt šokolādes musa recepti, kas domāta 4–6 porcijām. Savus priekšlikumus sagatavojiet, lai tos varētu nosūtīt viņai e-pasta vēstulē!

Šokolādes muss



185 g tumšās šokolādes

$\frac{1}{4}$ glāze karsta ūdens

1 tējkarote vaniļas esences

5 lielas olas

$1\frac{1}{2}$ glāze saldā krējuma

Izkausē šokolādi. Sakul olas. Saputo krējumu. Visas sastāvdaļas sajauc kopā. Atdzesē ledusskapī 1 stundu. Pasniedz 4–6 cilvēkiem.

Skolotāja izvēlējās dot šo uzdevumu skolēniem un būt tikai konsultante tā risināšanas procesā, tāpēc ir sagatavota darba lapa, kas ietver visus matemātiskās modelēšanas soļus. Skolēniem bija jāveic aprēķini, pašiem arī jāizmēģina sava recepte un beigās jānosūta Elzai e-pasta vēstule.

Skolēni, veicot darbu, varēja secināt, kurus modelēšanas soļus viņi veic konkrētajā uzdevumā un kurus ne. Skolēnu risinājuma piemērs redzams **45. att.**

45. att.

Raksturo-reālo situāciju	Kas zināms?	<u>4–6 porcijām:</u> 5 185 g tumšā šokolāde $\frac{1}{4}$ glāze karsta ūdens 1 tējkarote vaniļas esences 5 lielas olas $1\frac{1}{2}$ glāze saldā krējuma
	Kas jānoskaidro?	Cik vajag 6–9 personām? daudz katru sastāvdaļu
Matemātiskais modelis	Precizējam situāciju, ko risinās. Izdarām pieņēmumus.	Pieņemam, ka gatavā recepte ir 5 personām. Pieņemam, ka būs 9 viesi. 1 glāze – 200 ml Risinām jauno recepti 9 personām. 5 ml – 1 tējk.
	Iegūsti papildus nepieciešamo informāciju.	
	“Tulko” matemātiski.	1) Aprēķināsim cik 1 cilvēk. vajag? 2) Aprēķinām cik 9 personām vajag?

Modela atrisinājums	Risini.	$1) 185 : 5 = 37g$ - vienai personai $\frac{1}{4} : 5 = \frac{1}{20} = 0,05$ glāze - 1 personai $1 : 5 = 0,2$ tējkarotes vaniļas esences $5 : 5 = 1$ ola - vienai personai $1\frac{1}{2} : 5 = \frac{3}{2} : 5 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$ glāze saldo krējuma
	Risini.	$2) 37 \cdot 9 = 333g$ - 9 pers. $0,05 \cdot 9 = 0,45$ glāze ūdens $0,2 \cdot 9 = 1,8$ tējkarotes vaniļas esence $1 \cdot 9 = 9$ olas $0,3 \cdot 9 = 2,7$ glāzes saldo krējuma
Vai atrisinājums der reālajā situācijā?		Olas - 2,49€ tumšā šokolāde - $0,99€ \cdot 4 = 3,96€$ Vaniļas esence - 3,99€ Saldais krējums - $1,09€ \cdot 3 = 3,27€$
Novērtē savu matemātisko modeli.		Manuprāt šis modelis pietiks ar jebcik viesiem, ja aprēķinās tāpat kā mēs rēķinājām.
Ziņo par atrisinājumu un atbildi.	Raksti priekšlikumus Elzai, iekļaujot: ☒ kādi bija pieņēmumi; ☒ kādus aprēķinus veici; ☒ par ko vēl būtu jādomā pavāram; ☒ tava piedāvātā recepte.	Pēc izteiktās receptes priekš 9 cilvēkiem iznāca 8 porcijas (varbūt vajag mazākus traukus) Pieņēmumi - 1 glāze ir 200ml, 1 tējkarote - 5g-10g Aprēķini - sākumā izrēķinājām cik katru sastāvdaļu vajag 1 cilvēkam un pēc tam cik daudz 9 cilvēkiem. Vajadzētu pievienot želatīnu, jo bija pārāk šķidra mīkta masa Vēstule: Labdien, es esmu izveidojusi Jūsu šokolādes musa recepti 9 personām un šeit ir atziņa. Pieņēmumi man bija šādi: 1 glāze ir 200ml un 1 tējkarote - 5g-10g. Recepte 9 personām: 333g tumšā šokolāde Apmēram 0,45 pusglāze ūdens jeb 100ml 1,8 tējkarote vaniļas esence jeb 18ml 9 olas Apmēram 2,7 glāzes ar saldo krējumu jeb 540ml Mana piedāvātā recepte būtu tāda pati, bet vēl pievienot želatīnu lai nav tik šķidra masa. Ar cieņu Sofija un Sāra.

Šokolādes musa recepte

Labdien!

Mēs esam pielāgojušas Jūsu veidoto recepti 9 personām. Pielāgotā recepte:

333g tumšā šokolādes

Apmēram 100ml ūdens

18ml vaniļas esences

9 olas

Apmēram 500ml saldaiss krējums

Secinājumi pēc pielāgotās receptes pagatavošanas: manuprāt, vajadzētu pievienot želektīnu vai kādu citu sastāvdaļu, jo šokolādes muss iznāca diezgan šķidrā masā.

Šokolādes musa recepte

Labdien!

Mēs veidojam jūsu šokolādes musu, un mums ir daži ieteikumi.

Mēs veidojam recepti 9 personām.

Mūsu pārveidotā recepte:

333g šokolādes,

9 olas,

648ml saldaā krējuma,

2 tējķ. vaniļas esences.

Kopumā recepte sanāca, bet tāpēc, ka nebija rakstīts kā atdzesēt, mēs kļūdījāmies un visu ielikām vienā lielā traukā, tāpēc atdzesēšana aizņēma daudz vairāk laiku, tāpēc iesakām jūsu recepti izstrādāt detalizētāk.

Skolēni, sūtot reālu e-pasta vēstuli, apgūst ne tikai šāda veida vēstules rakstīšanu, bet arī praktizējas digitālo tehnoloģiju lietošanā. Skolēniem ir iespēja pašiem izlemēt, kāda veida informāciju viņi iekļaus savā beigu ziņojumā, kas šajā gadījumā ir e-pasta vēstule. Skolēni parāda saistību starp saviem aprēķiniem, reālo musa gatavošanas procesu un piedāvā savus ieteikumus, kā uzlabot recepti. **46. att.**

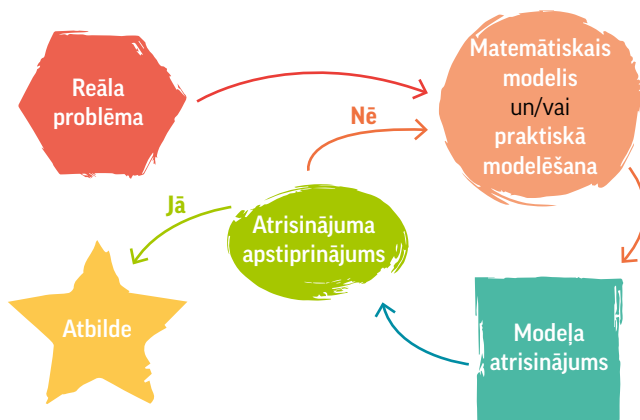
Sākumskolas skolēniem var izmantot 5 matemātiskās modelēšanas soļus. Lai skolēni sekotu līdz uzdevumu risināšanas procesam, ieteicams izmantot pašu veidotās vai gatavas atgātnes* (Namsone et al., 2020). Atgātnes ieteicams novietot arī klases telpā redzamā vietā, lai skolēni tās varētu lietot. Sākotnēji skolēniem ir jāmācās saprast, ko nozīmē katrs modelēšanas solis, kādus jautājumus viņi sev uzdod domāšanas un risināšanas procesā. **47. att.**

* <https://www.siic.lv/resursi/gramatas/atgadnes-skolotajam-kurs-macas/>

Modelēšanas soļi



Modelē kā matemātiķis



Lai skolēns varētu sekot līdzi savam mācīšanās procesam, var izmantot snieguma līmeņu aprakstu. Sākotnēji to var lietot tikai atsevišķu prasmju apguvei jeb sekot līdzi konkrētā modelēšanas soļa apguvei. 48. att.

Modelēšanas soļi	Sācis apgūt	Turpina apgūt	
Reāla problēma	Dota reāla problēma. Varu pamanīt matemātiskos lielumus.	Dota reāla problēma. Uzrakstu dotos lielumus un saprotu, kas jānoskaidro.	
Matemātiskais modelis un/vai praktiskā modelēšana	Varu saskatīt vienu matemātisku sakarību, kuru vajadzēs izmantot, cenšos to precīzi pierakstīt. Iesāku veidot vienkāršu praktisku modeli vai skici, ja man palīdz.	Varu saskatīt vairākas matemātiskas sakarības, kuras vajadzēs izmantot, cenšos tās precīzi pierakstīt. Veidoju vienkāršu praktisku modeli vai skici, tajā izmantota daļēji zināmā informācija.	
Modeļa atrisinājums	Izpildu atsevišķas darbības vai spriedumus par savu skici vai praktisko modeli.	Secīgi izpildu darbības, lai iegūtu atspoguļojumu. Pieraksts daļēji saprotams. Uzrakstu vairākus spriedumus, izmantojot skici vai praktisko modeli. Atrisinājumā ir kāda neprecizitāte vai atspoguļojums nav pabeigts.	
Atrisinājuma apstiprinājums	Nepārbaudu, vai iegūtais rezultāts atbilst dotajai problēmai.	Zinu, ka ir jāpārbauda, vai iegūtais rezultāts atbilst dotajai problēmai, daļēji to izdaru.	
Atbilde	Nerakstu atbildi risinātajai problēmai.	Uzrakstu atbildi risinātajai problēmai.	

Matemātiskās modelēšanas organizēšana: mijiedarbība starp skolotāju – koordinatoru un skolēniem – modelētājiem

Pētnieki (Suh et al., 2021) norāda: lai skolotāji un skolēni sākumskolas klasēs veiksmīgi īstenotu matemātisko modelēšanu, nepieciešams skolotājiem prasmīgi vadīt modelēšanas ciklu un skolēniem tajā aktīvi iesaistīties.

Ir piecas nozīmīgas skolotāja darbības:

- nodrošināt autentisku un personīgi nozīmīgu kontekstu skolēniem, kurā var saskatīt matematiku starpdisciplinārās situācijās;
- nodrošināt matemātiskas diskusijas, lai, izmantojot matemātisko modelēšanu, aprakstītu, optimizētu, prognozētu reālās dzīves situācijas un pieņemtu lēmumus, izmantojot matematiku;



	Apguvis	Apguvis padziļināti
	Dota reāla problēma, varu to precizēt. Izvērtēju, kuri lielumi jāizmanto, lai atrisinātu problēmu. Izvērtēju, vai man pietiek informācijas. Trūkstošās informācijas meklēšanā man nepieciešama palīdzība.	Spēju ieraudzīt un formulēt reālu problēmu, kurai nepieciešams risinājums. Saprotu, vai man pietiek informācijas, lai atrisinātu problēmu. Protu atrast trūkstošo informāciju.
	Lai risinātu problēmu, izmantoju doto un papildus sameklēto informāciju matemātisku izteiksmju vai praktiska modeļa izveidošanai, izveidoju tos.	Ja nepieciešams, aplūkoju vairākas risināšanas iespējas – izteiksmes, skici vai praktisku modeli, izvēlos vienkāršāko un precīzāko. Atkarībā no izmantotās informācijas veidoju problēmai dažādus risinājumu modeļus. Varu izdomāt citu reālu situāciju, kurai derēs šis vai līdzīgs plānotais risinājums.
	Izmantojot skici vai praktisko modeli, secīgi izpildu darbības, veidoju spriedumus, lai iegūtu atrisinājumu. Protu pamatot savu risinājumu. Pieraksts citiem saprotams.	Analizēju dažādo matemātisko modeļu risinājumus, ja tādi bija iespējami.
	Pārbaudu un pamatoju, ka iegūtais atrisinājums atbilst dotajai problēmai, rezultāts ir ticams. Ja nepieciešams, pieņemu lēmumu veidot citu risinājumu.	Analizēju dažādo risinājumu efektivitāti, pārbaudu un pamatoju, cik labi iegūtais atrisinājums atbilst dotajai problēmai, tās nosacījumiem. Pamatoju, ka iegūti labākie iespējamie atrisinājumi.
	Varu izskaidrot savu iegūto atbildi un risinājumu citiem saprotami.	Varu uzrakstīt aprakstu un ieteikumus problēmas risinājumam, izmantojot savus aprēķinus un iegūtos rezultātus.

- plānot atbalstu skolēniem, lai palīdzētu viņiem pārskatīt un pilnveidot matemātiskās idejas, lietojot matemātiskās modelēšanas ciklu;
- iepazīstināt ar atvērtu matemātikas problēmu veidošanu, kurās ir dažādi sākuma nosacījumi un ir iespējami radoši risinājumi;
- izveidot iespējas skolēniem sadarboties, aktīvi piedalīties un piedāvāt viņiem arī izaicinājumus.

Līdzīgi varam paskatīties uz skolēnu papildu līdzdalības nosacījumiem. Viņi

- 1) var veidot sasaisti ar reālās dzīves situācijām un matemātiku, ko iemācās skolā;
- 2) zina matemātiku, kas palīdz risināt reālās dzīves problēmas un kas ietver daudzveidīgas matemātikas prasmes;

- 3) prot uzdot jautājumus, kas rosina pārskatīt, pilnveidot matemātikas idejas un reflektēt par tām;
- 4) jūtas ērti, risinot kompleksus atvērtus uzdevumus, var būt radoši un kritiski problēmu risinātāji;
- 5) prot klausīties, komentēt un jautāt saviem klasesbiedriem, būt cieņpilni un neatlaidīgi, saskaroties ar grūtībām (Suh et al., 2021).

Skolotāja un skolēna sadarbība matemātiskās modelēšanas procesā redzama 49. att. (Suh et al., 2021).

Saskaņā ar Galbraitu (1989; minēts Arseven, 2015) modelēšanā pastāv 3 dažādas mācību pieejas:

- lietojuma pieeja koncentrējas uz konkrētu lietojumu. Parasti **skolotājs iepazīstina** ar modeli un **skolēni to lieto kontrolētā veidā**. Šī pieeja ietver modelēšanas procesa soļus – risināšanu un risinājuma interpretāciju –, un tiek pārbaudīti reāli rezultāti ikdienas dzīvē;
- struktūras modelēšanas pieeja izmanto reālās dzīves situācijas un aptver visus modelēšanas procesa posmus no sākuma posma, kad skolēnam ir jāsaņem prot problēma, līdz beigu posmam, kad tiek piedāvāti iespējamie problēmas risinājumi. **Skolotājs daudz piedalās**, lai tiktu izveidots matemātiskais modelis;
- atvērtā modelēšanas pieeja, kad **skolēni strādā un skolotājs konsultē**, risinot problēmu, jo skolotājam nav jākontrolē skolēni. Pagaidām praksē šī pieeja netiek plaši izmantota (Arseven, 2015).

Mācību pieeju izmantošanu nosaka skolotāja un skolēnu pieredze. Visveiksmīgāk matemātikas modelēšanu būtu mācīties, kopīgi nonākot no pirmās pieejas līdz trešajai, kur skolēniem ir pietiekamas prasmes plānot, komunicēt, kritiski domāt un izmantot matemātikas konceptus, lai risinātu reālas problēmas.



Jautājumi pārdomām

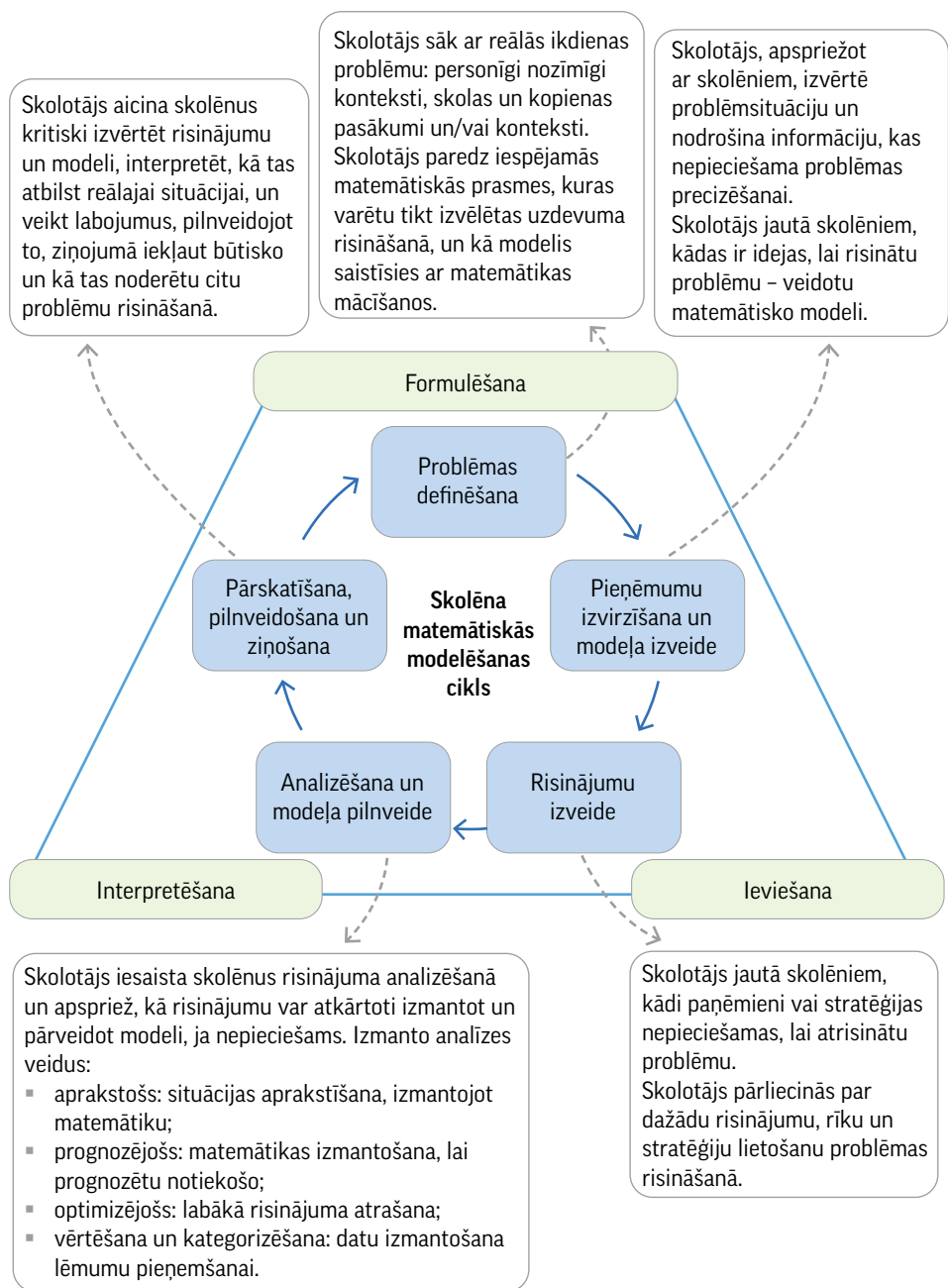
Kā mācīt skolēnu strādāt ar atslēgvārdiem?

Kā veicināt skolēnu prasmes veidot matemātisku modeli, risinot situāciju un matemātiskās modelēšanas uzdevumus?

Kāpēc matemātiskā modelēšana skolēniem ir nozīmīga?

Kurus matemātiskās modelēšanas soļus ietver situāciju uzdevums?

Kāpēc varam teikt, ka, risinot situāciju uzdevumus, skolēns demonstrē tikai daļu no matemātiskās modelēšanas prasmju klāsta?



Cik bieži mācību procesā būtu jāiekļauj matemātiskās modelēšanas uzdevumi, ar kādu mērķi?

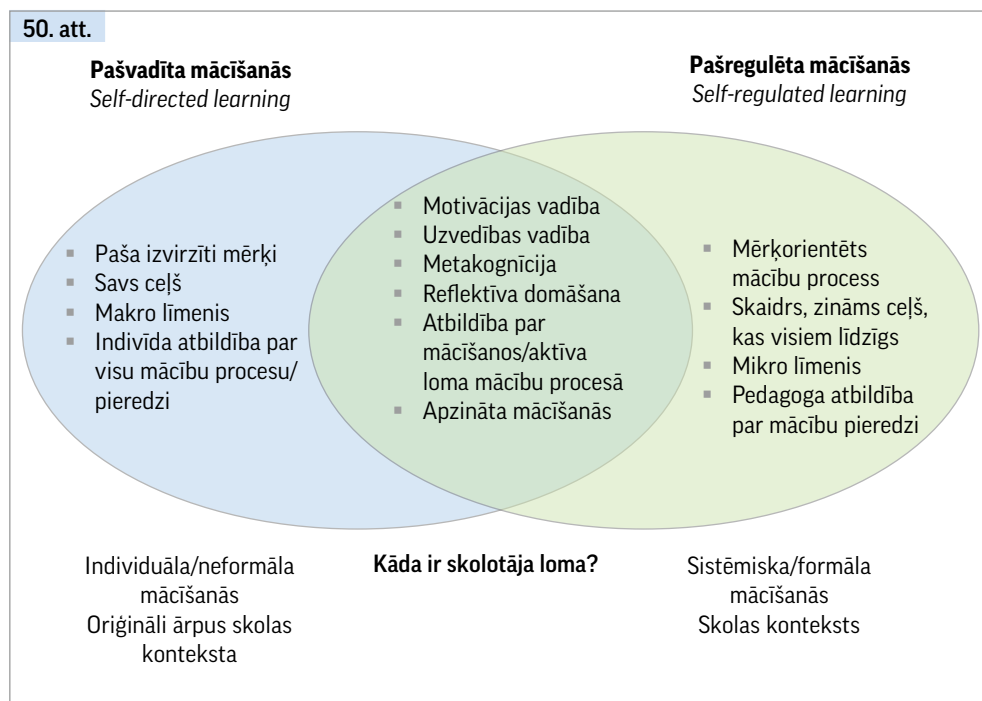
Literatūra tālākai uzziņai

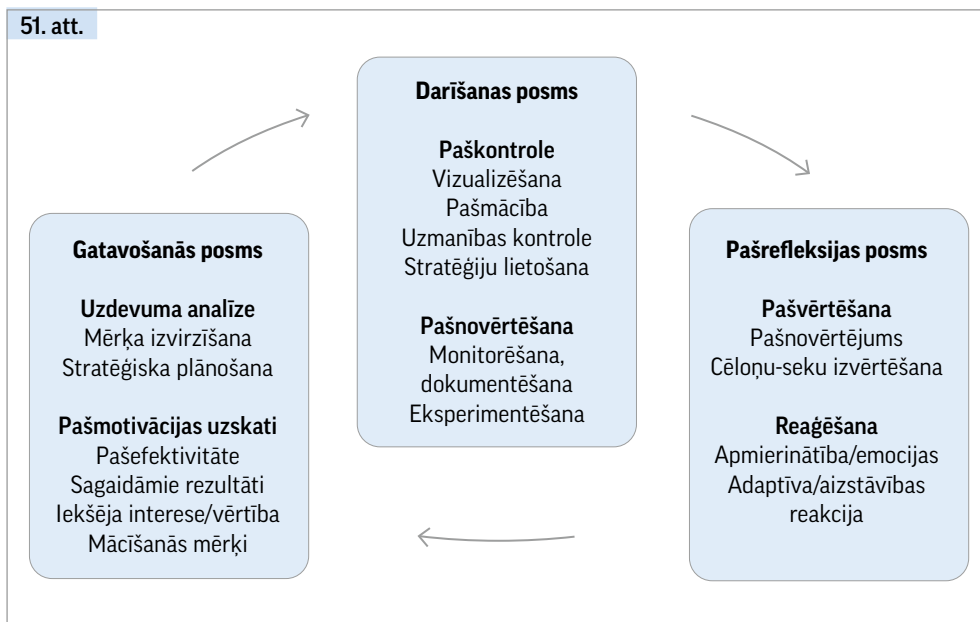
- Arseven, A. (2015). Mathematical Modelling Approach in Mathematics Education. *Universal Journal of Educational Research*, 3(12), 973–980. https://www.hrpub.org/journals/article_info.php?aid=3109
- Asempapa, R. S., Sturgill, D. J., & Gunpinar, Y. (2023). Mathematical Modeling through the Eyes of Elementary and Middle Preservice Teachers. *Journal of Mathematics Research*, 15(4), 62–74. <https://ccsenet.org/journal/index.php/jmr/article/view/0/49067>
- Bliss, K. M., Fowler, K. R., & Galluzzo, B. J. (2014). *Math Modeling: Getting Started and Getting Solutions*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58. https://www.researchgate.net/publication/279478754_Mathematical_Modelling_Can_It_Be-Taught_And_Learnt
- Brady, C., & Lesh, R. (2021). Development in Mathematical Modeling. In J. M. Suh et al. (eds.), *Exploring Mathematical Modelling with Young Learners* (pp. 95–110). Switzerland: Springer Nature.
- Carpenter, T. P., Fennema, E., & Franke, M. L. (1996). Cognitively Guided Instruction: A Knowledge Base for Reform in Primary Mathematics Instruction. *The Elementary School Journal*, 97(1), 3–20. <http://www.jstor.org/stable/1001789>
- Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. (2015). *Childrens Mathematics: Cognitively Guided Instruction*. Heinemann. [Adapted from Teaching Student-Centered Mathematics, Van de Walle/Lovin/Karp/Bay-Williams, 2018.]
- English, L. D. (2021). Mathematical and Interdisciplinary Modeling in Optimizing Young Children's Learning. In J. M. Suh et al. (eds.), *Exploring Mathematical Modelling with Young Learners* (pp. 3–23). Switzerland: Springer Nature.
- Fuchs, L. S., Newman-Gonchar, R., Schumacher, R., Dougherty, B., Bucka, N., Karp, K. S., Woodward, J., Clarke, B., Jordan, N. C., Gersten, R., Jayanthi, M., Keating, B., & Morgan, S. (2021). *Assisting Students Struggling with Mathematics: Intervention in the Elementary Grades (WWC 2021006)*. Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance (NCEE), Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. <http://whatworks.ed.gov/>
- GAIMME: Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education. (2019). S. Garfunkel & M. Montgomery (eds.). Second edition. COMAP and SIAM, Philadelphia.
- Karp, K. S., Bush, S. B., & Dougherty, B. J. (2019). Avoiding the Ineffective Keyword Strategy. *Teaching Children Mathematics*, 25(7), 428–435. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1217255>
- Kaur, B., Har, Y. B., & Kapur, M. (2009). *Mathematical Problem Solving*. Yearbook 2009. Association of Mathematic Educators, National Institute of Education, Singapore.
- Ministru kabinets. (2018). Ministru kabineta noteikumi Nr. 747: "Noteikumi par valsts pamatizglītības standartu un pamatizglītības programmu paraugiem". Latvijas Vēstnesis, 249, 19.12.2018. <https://likumi.lv/ta/id/303768-noteikumi-par-valsts-pamatizglitibas-standardu-un-pamatiz-glitibas-programmu-paraugiem>

- Namsone, D., Čakāne, L., France, I. (2020). *Skolotājs Prātnieku laboratorijā. Atgātnes skolotājam, kurš mācās*. LU Starpnozaru izglītības inovāciju centrs. Rīga: LU Akadēmiskais apgāds.
- Powell, S. R., Namkung, J. M., & Lin, X. (2022). An Investigation of Using Keywords to Solve Word Problems. *The Elementary School Journal*, 122(3), 452–473. <https://doi.org/10.1086/717888>
- Reuben, S. Asempapa, R., & Brooks, G. (2022). Factor Analysis and Psychometric Evaluation of the Mathematical Modeling Attitude Scale for Teachers of Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 25, 131–161. <https://doi.org/10.1007/s10857-020-09482-0>
- Smith, J. (1996). Mathematical Modelling. *Mathematics in School*, 25(4), 14–17.
- Suh, J. M., Wickstrom, M. H., & English, L. D. (2021). *Elementary Teachers' Enactment of the Core Practices in Problem Formulation through Situational Contexts in Mathematical Modeling*. Exploring Mathematical Modeling with Young Learners. Early Mathematics Learning and Development. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63900-6_6

1.5. Pašregulēta mācīšanās un metakognīcija

Šobrīd Latvijā kā viena no būtiskām 21. gadsimta prasmēm ir apgūstama pašvadīta mācīšanās. Tomēr, sarunājoties ar skolotājiem un skolu vadību vai aplūkojot sabiedrisko mediju telpu, redzams, ka ir ļoti daudz dažādu interpretāciju par šo jēdzienu. Kāds to uztver kā pilnīgu atbildības nodošanu skolēnam par visu mācību procesu, cits ar to saprot patstāvīgu mācīšanos, kur skolēnam netiek piedāvāts nekāds atbalsts, pašam jātiek galā, jo tā tiek “attīstītas” mācīšanās prasmes, kāds cits zina, ka tāda pašvadīta mācīšanās ir, bet godīgi atzīst, ka nezina, kas tas ir un ko ar to darīt. Iespējams, šim mulsumam ir pamatots iemesls, un ar tādu saskaras ne tikai Latvijas pedagogi. Pētniecībā pēdējos gados parādās publikācijas, kurās autori cenšas ieviest skaidrību terminos, kas saistīti ar pašvadītu mācīšanos (Gandomkar & Sandars, 2018; Voskamp et al., 2020; Linkous, 2021; Jossberger et al., 2010). **50. att.**





Jēdziens “**pašvadīta mācīšanās**” tiek lietots, domājot par pieaugušo mācīšanos, kur mērķus un procesu pilnībā izvēlas un par kuru atbild pats indivīds. Tas pilnībā neatbilst skolas kontekstam, kur mācīšanās mērķus nosaka standarts, programma un skolotājs.

Pašregulēta mācīšanās bieži tiek izprasta kā ciklisks process: plānošana – uzraudzīšana – novērtēšana. Arī Skola2030 materiālos (<https://www.skola2030.lv/lv/jaunumi/blogs/pasvadita-macisanas-kas-tas-ir>) skolotājiem priekšplānā ir šis skaidrojums (lai gan ar nosaukumu “pašvadīta mācīšanās”). Lai izvairītos no vispārinātas šo soļu lietošanas (skolēns pats izvirza individuālus mācīšanās mērķus, plāno visu savu mācīšanos, ir pilnīgi atbildīgs par savu mācīšanos, tajā skaitā pielāgojot mācīšanos, reaģējot uz savām vajadzībām, izpratni, grūtībām, t. i., pieaugušo izglītības perspektīva), skolas kontekstā pašregulēta mācīšanās īstenojama daudz mazākā amplitūdā, mikrolīmenī, ar mazākiem soļiem. Šobrīd labpatiktos lietot citus trīs Berija Zimmermena (*Barry Zimmerman*) definētā cikla pašregulētas mācīšanās posmus: sagatavošanās posms (*the preparatory forethought phase*), darīšanas posms (*the implementation phase*) un pašrefleksijas posms (*the self-reflection phase*) (Zimmerman, 2002), kas ļauj paskatīties uz šo procesu plašāk. 51. att.

Efektīva skolēna paša mācīšanās plānošana, uzraudzīšana un novērtēšana ir skolā realizētas pašvadītas mācīšanās prasmju apguves rezultāts. Ar šīm prasmēm saprot (meta)kognitīvu stratēģiju apzinātu lietošanu, motivāciju uz uzvedības regulāciju (Boekaerts, 2011). Pašregulācijas prasmes ir priekšnosacījums, lai

varētu mācīties pašvadīti, bet pašvadīta mācīšanās nav priekšnosacījums, lai mācītos pašregulēti (Saks & Leijen, 2014).

Skolotāja darbības, lai attīstītu pašregulētu mācīšanos skolēniem:

- skolotājam jāklūst par mācīšanās ekspertu – t. i., jāpapildina zināšanas par to, kā cilvēka prāts mācās, kā atceras, kādas mācīšanās, atcerēšanās un dažādiem priekšmetiem specifiskas stratēģijas ir aktuālas, kuras no tām ir efektīvas;
- ikdienas mācību process jāpadara caurskatāms – skolēnam skaidri jāierauga mācību mērķis, jēga, process, vērtēšana. Mācīšanās stratēģiju izvēle jāpadara apzināta;
- skolēnam jāpalīdz ieraudzīt, kā viņš mācās, to, kas notiek viņa galvā. Jārosina domāt par domāšanu. Pirmais solis uz to ir “skaļā domāšana” – skolotājs modelē savu domāšanu un mācīšanos, stāstot, kā viņš domā; otrais – aicināt skolēnus dalīties ar to, kas notiek viņu prātā, kā viņi mācās, kā atceras;
- jāsniedz skolēnam zināšanas par mācīšanos, piemēram, ka zināšanas, prasmes un intelekts ir mainīgi, neatlaidībai bieži ir lielāka nozīme nekā intelektam, ka labāk iemācāties, mācoties bieži un nedaudz, kāda ir miega nozīme, kāds ir labs mērķis u. c. zināšanas par zināšanu;
- jāmaca konkrētas mācīšanās stratēģijas un dažādiem priekšmetiem specifiskas stratēģijas. Skolēniem jāprot tās arī konsekventi pielietot. Marks Makdaniels (*Mark McDaniel*) un Džailss Ainstains (*Gilles Einstein*) iesaka izmantot četrus soļus – zināšanas, uzskatus, apņemšanos un plānošanu –, lai ne tikai apgūtu stratēģijas, bet arī tās lietotu bez pieaugušā vadības, veidojot ieradumu (McDaniel & Einstein, 2020).

Domājot par iekļaujošu izglītību, kur klasē ir arī skolēni ar īpašām mācīšanās vajadzībām, mācīšanās prasmju mācīšana kļūst vēl nozīmīgāka (Aubin, 2022). Mēs, pieaugušie, esam dzīves laikā uzkrājuši zināšanas par to, kā labāk iemācāties. Mums nevajadzētu gaidīt, ka ar laiku skolēni paši to sapratīs (skolēni ar mācīšanās grūtībām var līdz tam arī nenonākt). Skolotājam ir jāpalīdz ieraudzīt ne tikai priekšmeta saturu, bet arī veidus, kā atcerēties, kā mācīties, un šos veidus arī izmēģināt, pielietot un stiprināt.

Kāpēc vispār domājam par pašregulētu mācīšanos? Mācīšanos var uzlabot, padarīt efektīvāku, ja prot kontrolēt savu domāšanu, motivāciju un emocijas. Mācīšanās stratēģiju intervences, kas vērstas uz to, lai uzlabotu skolēnu pašregulētu mācīšanos un metakognīcijas apzinātību, palīdz sasniegt labākus mācību rezultātus. Domājot par izglītības ilgtspēju, pašregulēta mācīšanās ir liels atbalsts skolēna nākotnes izglītībā un profesijā, tā ir būtiska prasme šī brīža mainīgajā un uz attīstību vērstajā darba vidē.

15. tabulā redzami ar pašregulētu mācīšanos saistīti ietekmes faktori un to ietekme uz skolēnu sniegumu, tie atrodami Džona Hetija (*John Hattie*) vērienīgajā

15. tabula

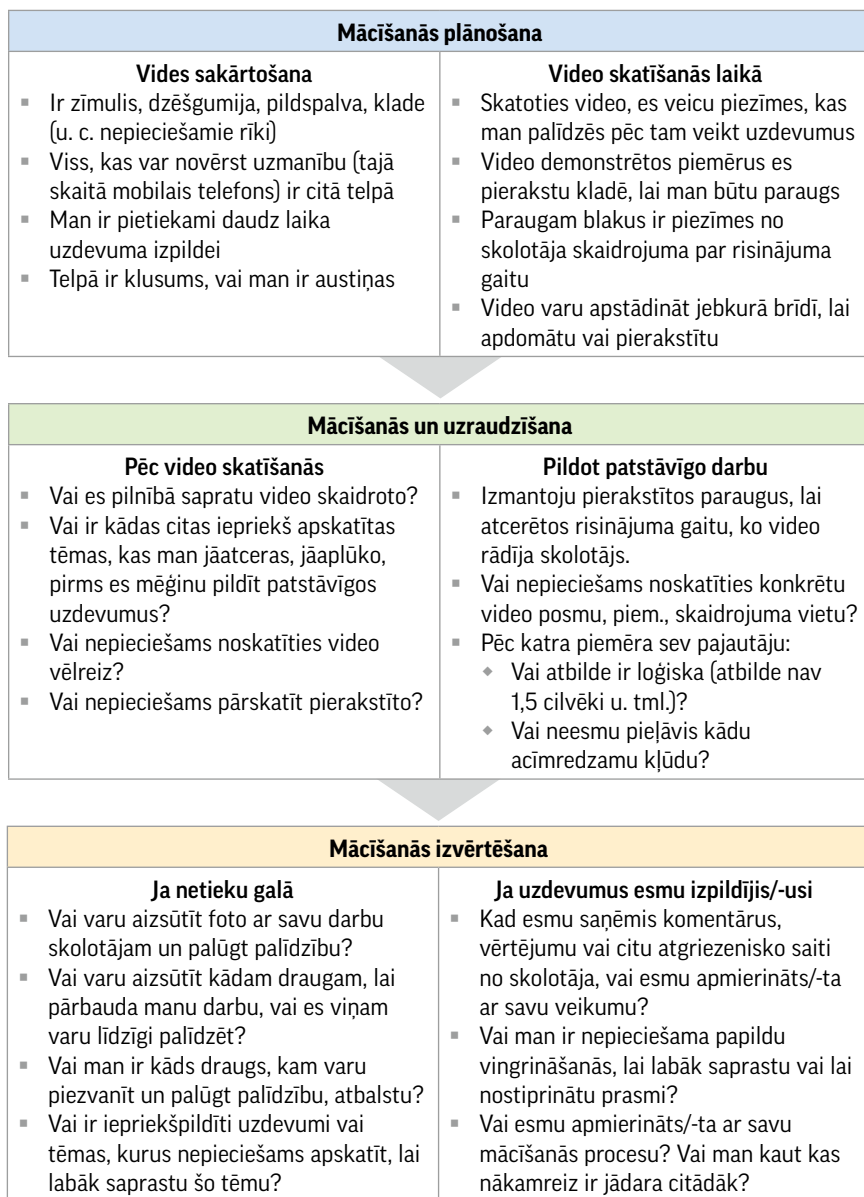
Ietekmes faktors	Īss raksturojums	Ietekmes lielums
Pašvadīta mācīšanās	Mācīšanās, kad skolēns uzņemas atbildību par mācīšanos, meklē informāciju un izstrādā risinājumus	0,67
Palīdzības meklēšana	Adaptīvs process, kurā persona meklē ārēju atbalstu, lai veicinātu savu mācīšanos. Efektīva palīdzības meklēšana prasa, lai skolēni attīstītu metakognitīvās prasmes (domāt par savu mācīšanās procesu) un pozitīvu pašapziņu	0,85
Metakognitīvas stratēģijas	Metakognīcija ir domāšana par domāšanu; ietver metodes, kas palīdz skolēniem saprast, kā viņi mācās	0,59
Sarunāšanās ar sevi, sevis izjautāšana	Pašverbalizācija (runāšana ar sevi par sarežģītu intelektuālu uzdevumu) un pašjautāšana (sevis iztaujāšana par sastapto informāciju) ir kognitīvi rīki, un to abu lietošana tiek saistīta ar labāku izpratni.	0,53
Pašrefleksija, pašvērtēšana	Skolēna prasme reflektēt par savu darbu, spriest par to saskaņā ar kvalitātes kritērijiem, izdarīt pašvērtējumu	0,85
Skolēna gaidas par savu sniegumu	Prakse, kurā skolēni novērtē sava darba kvalitāti vai savu apguves līmeni noteiktā jomā pret konkrētu mērķi, pirms uzsāk savu darbu	1,02
Mērķorientēta izglītība	Rezultātos balstīta izglītība ir balstīta uz vēlamu izglītības rezultātu attīstīšanu un sagaidīšanu, ka visi skolēni sasniegs šos etalonmērķus	0,97

pētījumā *Visible learning* (Hattie, n.d.). Ietekmes faktorus, kuri ir lielāki nekā 0,4, ir vērts iekļaut savā praksē, jo tie uzlabo skolēna mācīšanos.

Atgādņu piemēri pašregulētas mācīšanās prasmju apguvei matemātikā doti 52. un 53. att. .

Domāt par savu domāšanu

Sākumskolā ir nepieciešams iemācīt bērniem izsekot savai domu gaitai, to var darīt jau no 1. klases (un agrāk). Tas nepieciešams, lai skolēns, risinot kādu uzdevumu, formulējot, verbalizējot paņēmieni, kā ir risinājis un nonācis pie atbildes, nākamajā reizē, saskaroties ar līdzīgu uzdevumu vai problēmu, to jau apzināti varētu risināt ar zināmo paņēmieni. Tas ļauj izvairīties no lielākas kognitīvās slodzes un citu līdzīgu uzdevumu neuztvert kā nezināmu problēmu, “gudrojojot divriteni no jauna”. Skolēna prasme izstāstīt savu domu gaitu nepieciešama arī,

Adaptēts no educationendowmentfoundation.org.uk

Jautājumu piemēri, ko sev uzdot, risinot uzdevumu matemātikā

Kad ieraugu uzdevumu	Kamēr risinu uzdevumu	Pēc uzdevuma izpildes
- Kas man tiek prasīts? Ko šis uzdevums «prasa»? - Kur esmu saskāries ar līdzīgu uzdevumu? - Kas no matemātikā apgūtā man varētu palīdzēt? - Kura informācija šeit ir būtiska? Kura ne tik būtiska? - Vai man varētu palīdzēt zīmējums?	- Vai manis izvēlēta stratēģija/paņēmiens strādā? - Vai ir kāds cits veids, kā šo risināt? - Vai palikt pie esošā paņēmiena vai meklēt citu veidu? - Kas no tā, ko teica skolotājs, man varētu noderēt? - Varbūt pajautāt klasesbiedram, lai aplūko manu darbu, kā viņam šķiet...	- Vai atbilde ir loģiska? - Kā es varētu pārliecināties par savas atbildes pareizību? - Vai esmu atbildējis uz to, kas prasīts? Varbūt man jāpārlasa dotais uzdevums. - Vai cits skolēns saprastu manu uzrakstīto? - Vai es varētu izskaidrot, ko un kā darīju? - Vai risināt citādi būtu bijis veiklāk? Nākamreiz risinātu tāpat?

lai skolotājs varētu izsekot skolēna risinājumam un izvērtēt viņa prasmes un zināšanas vai to trūkumu, ko tikai atbilde bieži vien nevar sniegt.

Lai skolēni iemācītos izsekot savai domu gaitai un to prastu izstāstīt, skolotājs var rosināt skolēnus ikdienā to darīt un piešķirt tam vērtību klasē. Ir pieņemts skolēniem prasīt atbildes pilnos teikumos (piemēram, Annai bija 15 konfektes), bet tā vietā var lūgt savu atbildi papildināt ar to, kā līdz tai nonāks ("15 konfektes, jo es zinu, ka divreiz pieci ir desmit, un tad man jāpieliek vēl viens piecinieks"). Vispirms skolēni var nesaprast, kas no viņiem tiek sagaidīts, bet skolotājs, rādot paraugu, modelējot savu domāšanu klases priekšā un komentējot, kā risinājis, var palīdzēt skolēniem saprast, kā tas darāms. Ļoti ātri klasē var iedibināt ieradumu izstāstīt savu domu gaitu kā daļu no atbildes.

Jautājumi skolotāja ikdienas darbā:

- Kā tu to zināji?
- Kā tu izdomāji?
- Kāpēc tu tā domā?
- Vai ir vēl kāds veids, kā to aprēķināt/izdomāt?
- Kā tu zini, ka tava atbilde ir pareiza?
- Ja kāds teiktu, ka tava atbilde ir nepareiza, kā tu viņam paskaidrotu, kāpēc tā ir pareiza?

- Vai un kā tu vari izskaidrot citādāk?
- Vai un kā vari uzzīmēt, uzrakstīt to, kā risināji?
- ...

Tālāk daži piemēri, kā skolēni skaidro savu domu gaitu, un iespējamie skolotāja secinājumi.

Leo

3 + 8

“Tas ir 11. Es nošpikoju no iepriekšējā (7 + 2) un pieliku klāt 1 un 1.”

Stāstot savu domu gaitu, Leo demonstrē gan izpratni par saskaitīšanas pārvietojamības īpašību, gan prasmi izmantot zināmu summu jaunas aprēķināšanai.

Lita

8 + 5

Lita izmanto divkrāsu žetonus saskaitīšanai. Viņa noliek 8 žetonus un vēl 5, sabīda tos visus kopā. Sāk skaitīt no 1, skaitot izlaiž 1 žetonu.

Lita saskaitīšanas stratēģijas izmanto haotiski, neapzināti. Viņai būtu jāpalīdz attīstīt prasmi izvēlēties atbilstošāko paņēmienu konkrētai situācijai, kā arī mācīties sistemātiski skaitīt (skaitot katru žetonu pārvietot atsevišķi vai iztēloties saskaitīšanas “taciņu”, darīt to apzināti).

Liene

3 + 8

Liene: “Paņēmu 3 un tad pieskaitīju pusi no 8 divas reizes, bet tad es neatcerējos, ka man tie 3 arī jāpieskaita.” (*Skolēns vēlas izmantot paņēmienu, kad vispirms veido 10, bet to neizprot, tāpēc 8 dala uz pusēm, nevis tā, lai kopā ar 3 izveidotu 10.*) Skolotāja: “Mēģinām vēlreiz, varbūt varam kopā izdomāt.”

Liene atliek 3 ar pirkstiem, ceļ pa vienam pirkstam 4 un vēl 4.

Lienei nepieciešams atkārtoti modelēt darbības ar priekšmetiem (piemēram, 10 rāmi), izmantot paņēmienu “veido desmit”.

Bez sarunas klasē skolēniem nepieciešams arī mācīties dažādi fiksēt savu domu gaitu, vispirms ar zīmējumiem, vēlāk jau ar izteiksmēm. Ir vērtīgi arī aplūkot citu skolēnu darbus un mēģināt saprast, kā ir domājis cits skolēns. **54. att.**

54. att.

Uzraksti vai uzzīmē, kā var veikli atņemt!



Uzraksti, vai uzzīmē, kā var veikli saskaitīt!



Jautājumi pārdomām

Kā jāsaprot jēdziens "pašregulēta mācīšanās"?

Kāpēc ir būtiski skolēniem mācīt pašregulētas mācīšanās prasmes?

Kā šo prasmju mācīšanu un lietošanu varu iedibināt savā ikdienas praksē?

Kāpēc jādoma par savu domāšanu?

Literatūra tālākai uzziņai

Aubin, G. (2022). *The EEF's SEND Specialist Gary Aubin Explores how Teachers Can Support Pupils with SEND in Their Daily Practice*. <https://educationendowmentfoundation.org.uk/news/eef-blog-five-a-day-to-improve-send-outcomes>

Boekaerts, M. (2011). Emotions, emotion regulation, and self-regulation of learning. In B. J. Zimmerman & D. H. Schunk (eds.), *Handbook of Self-Regulation of Learning and Performance* (pp. 408–425). Routledge.

Gandomkar, R., & Sandars, J. (2018). Clearing the Confusion about Self-Directed Learning and Self-Regulated Learning. *Medical Teacher*, 40(8), 862–863. <https://doi-org.datubazes.lanet.lv/10.1080/0142159X.2018.1425382>

- Hattie, J. (n. d.). *Visible Learning MetaX*. <https://www.visiblelearningmetax.com>
- Jossberger, H., Brand-Gruwel, S., Boshuizen, H., & Van de Wiel, M. (2010). The Challenge of Self-directed and Self-regulated Learning in Vocational Education: A Theoretical Analysis and Synthesis of Requirements. *Journal of Vocational Education and Training*, 62(4), 415–440.
- Linkous, H. M. (2021). Self-Directed Learning and Self-Regulated Learning: What's the Difference? A Literature Analysis. *Journal of Educators Online*, 18(2). <https://doi.org/10.9743/jeo.2021.18.2.3>
- McDaniel, M. A., & Einstein, G. O. (2020). Training Learning Strategies to Promote Self-Regulation and Transfer: The Knowledge, Belief, Commitment, and Planning Framework. *Perspectives on Psychological Science*, 15(6), 1363–1381.
- Saks, K., & Leijen, Ä. (2014). Distinguishing Self-Directed and Self-Regulated Learning and Measuring Them in the E-learning Context. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 112, 190–198.
- Voskamp, A., Kuiper, E., & Volman, M. (2020). Teaching Practices for Self-Directed and Self-Regulated Learning: Case Studies in Dutch Innovative Secondary Schools. *Educational Studies*, 48(6), 772–789. <https://doi-org.datubazes.lanet.lv/10.1080/03055698.2020.1814699>
- Zimmerman, B. (2002). Becoming a Self-Regulated Learner: An Overview. *Theory into Practice*, 41(2), 64–70.

1.6. Motivācija mācīties drošā vidē

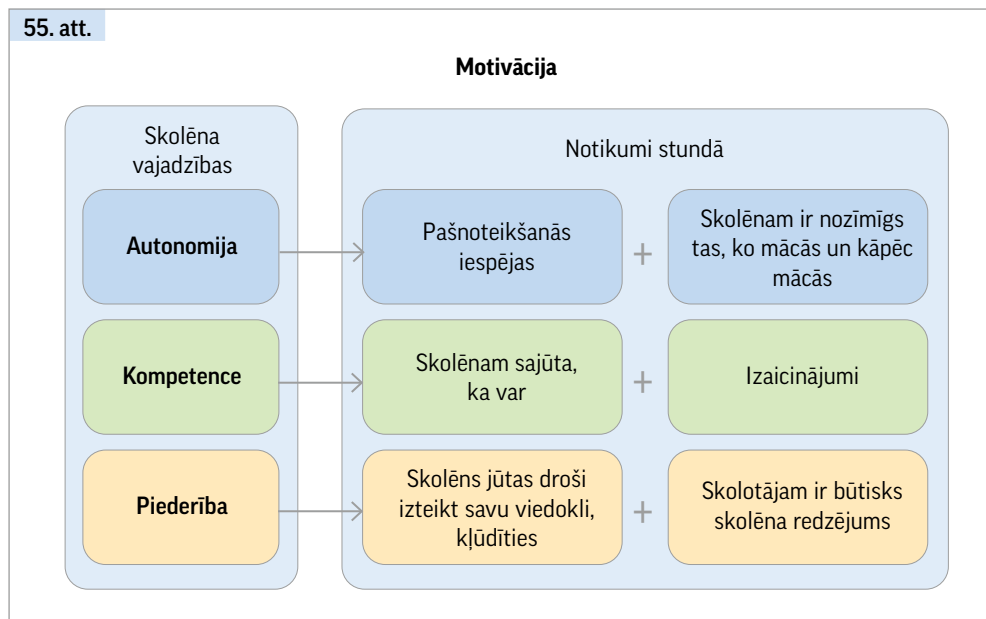
Zinām, ka motivācija ir ļoti būtisks aspekts veiksmīga mācību procesa norisē un ir saistīta ar skolēnu sniegumu (Michaelides et al., 2019), tomēr bieži to uztveram kā mītisku spēku, kas klasē vai nu ir, vai nav. Skolēns vai nu ir, vai nav motivēts, un skolotājam jāstrādā ar konkrēto skolēnu. Ir nepieciešams lauzt šo mītu: lai gan motivāciju nosaka kompleksu faktoru kopums, skolotāja darbības klasē būtiski ietekmē to, ar kādu motivāciju un intensitāti skolēni iesaistīties mācību procesā (Ahmadi et al., 2023; Reeve & Jang, 2006).

Cilvēks pēc būtības ir tendēts uz izaugsmi un iekļaušanos, tātad arī uz mācīšanos, centieniem pēc meistarības un saiknes ar citiem cilvēkiem (Ryan & Deci, 2020). Līdz ar to nav pārsteigums, ka skolēna motivācija ir atkarīga no psiholoģiskām vajadzībām – kompetences, piederības un autonomijas. **55. att.**

Kad radīti nepieciešamie apstākļi vajadzību apmierināšanai, ir daudz lielāka iespēja, ka skolēns būs motivēts.

Tagad nedaudz par to, ko varam darīt mācību stundā.

55. att.



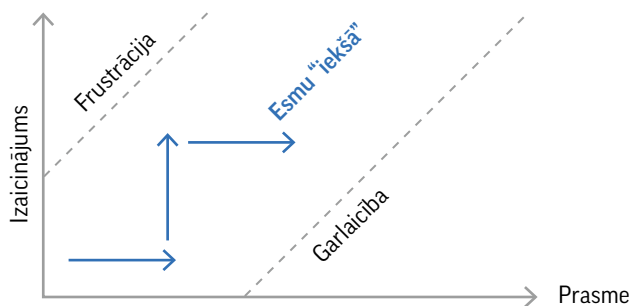
1.6.1. Kompetence

Lai apmierinātu vajadzību pēc kompetences izjūtas, skolēnam katrā stundā ir nepieciešams just, ka viņš var, ka viņam izdodas. Tas nozīmē, ka mācību procesam ir jābūt uzmanīgi būvētam tā, lai sākumā skolēns nezaudētu ticību saviem spēkiem un līdz ar to vēlmi darīt, ja tiks iedots pārāk sarežģīts uzdevums bez nepieciešamā atbalsta. Skolotājs var piedāvāt vai nu uzdevumus, kuru grūtības pakāpe pamazām pieaug, vai t. s. “zemās grīdas, augsto griestu” uzdevumus ar atbilstošu atbalstu (Liljedahl, 2020), tā mazinot skolēniem iespēju būt garlaikotiem vai gluži otrādi – frustrētiem, un, īstenojot virzītās mācīšanās maniere veidotu mācību procesu, lēnām var palielināt skolēnu atbildību par risināšanas gaitu. **56. att.**

Tomēr nepietiks tikai ar vienkāršiem tipveida uzdevumiem, kas var palīdzēt skolēnam radīt sajūtu “es varu”. Ir nepieciešami arī izaicinājumi, kas liek kārtīgi iekustināt domāšanu. Tiekot galā ar izaicinošiem uzdevumiem, rodam gandarījumu, kā arī zināšanas, turklāt izpratne, kas gūta, pašam atklājot (Liljedahl, 2020), ir daudz noturīgāka nekā tad, ja kāds atbildi/risinājumu pasaka priekšā (Mayer, 2009). Šis risinājums ir mūsu pašu, tādēļ to drīzāk atcerēsimes.

Katrs esam piedzīvojuši sajūtu, kad kāda nodarbe mūs “ievelk iekšā” (*flow*), tad ir interesanti, nemaz nemanām, kas notiek visapkārt. Skolotājam mācību stundā būtu jāpalīdz skolēnam noturēties šajā plūsmā, kad skolēns ir iesaistījies stundā, uzdevuma risināšanā. Skolotājs pēc nepieciešamības vai nu sniedz atbalstu, kad skolēnam izaicinājums ir pārlietu sarežģīts un viņš var nonākt frustrētā stāvoklī, vai dod papildu izaicinājumus vai mazāku atbalstu, lai skolēnu nenomāktu garlaicība. Skolēniem gan jāiemācās, ka matemātikas uzdevums, idejas var būt grūtas, ka var būt sajūta “ir grūti”, “es nesaprotu”, “es nevaru”, un tad ir jāiemācās apstāties, sociāli adekvāti izreaģēt savas dusmas/neapmierinātību un atgriezties pie uzdevuma. Bet, pārvarot šādas grūtības, mācāmies un, tikai pārvarot tās, gūsim gandarījumu un prieku, ka esam atraduši risinājumu.

56. att.



Lai izvairītos no situācijām, kad skolēnam ir pārāk liela kognitīvā slodze, jādomā, kā sabalansēt mācību saturu, lai vienas stundas laikā tiek piedāvāts apstrādājams informācijas apjoms. Vajadzētu izvairīties no prakses, ka temata sākumā tiek izklāstītas visas jaunās idejas un nākamajās stundās visas šīs idejas tiek reizē apskatītas. Temats izskaidrojams pamazām, pa nelieliem soļiem, lai jaunās informācijas pamatā būtu iepriekšējās zināšanas un prasmes.

1.6.2. Piederība

Vajadzība pēc piederības mācību stundās tiek apmierināta tad, ja skolēns jūtas droši, paužot savu viedokli, idejas, nebaidās kļūdīties. Īpaši jāpievērš uzmanība tam, kā reaģējam uz kļūdainām atbildēm. Ar to vien, ka skolēni netiek nosodīti par kļūdīšanos, nepietiek. Ja skolēns kļūdās un uzreiz pēc tam skolotājs pats sniedz vai aicina citu skolēnu sniegt pareizo atbildi, neiedziļinoties skolēna domu gaitā, kura novedusi līdz kļūdai, mēs netieši norādām, ka patiesībā nevis interesējamies par to, ko skolēns zina un saprot, bet gan, ka mums būtiski ir tikai sadzirdēt pareizo atbildi.

Tipiska matemātikas stundas aina. Skolotāja:

– Cik ir $25 + 16$? Jāni!

– 31.

– Nebūs gan, kurš var palīdzēt? Justīne!

– 41.

– Jā, pareizi, malacis!

Patiesībā mācīšanās šajā gadījumā ir nepieciešama Jānim, bet šī iespēja tiek pazaudēta, jo diezin vai, tikai izdzirdot pareizo atbildi, Jānis no tā ko iemācīsies. Arī Justīnei un pārējiem skolēniem nav nekāda labuma no šīs atprasīšanas (tikai savas atbildes apstiprināšana). Alternatīva saruna:

– Cik ir $25 + 16$? Jāni!

– 31.

– Tu domā, ka 31? Vari, lūdzu, pastāstīt, kā tu to izrēķināji?

– Nu, es izdomāju, ka $5 + 6$ ir 11, jo 5 un 5 ir 10, bet tas ir par vienu vairāk. Un tad saskaitīju desmitniekus – ir 30, un tad, ā... (domā), paga, paga, paga, es sapratu, es pieliku tikai vienu galā, bet vajadzēja 11, tas ir 41!

– Paldies, jā, tu izdomāji! Vai kāds klasesbiedrs var pastāstīt, kāpēc, viņaprāt, Jānis vispirms teica 31, nevis 41?

Pēc šādas sarunas skolēns saprot, ka skolotājam interesē, kā viņš domā, jo iedziļinās viņa atbildē, kā arī norāda, ka kļūda ir absolūti normāla daļa no mācību procesa, par ko mēs varam sarunāties. Turklāt visai klasei tika izgaismota tipiskā

klūda, jo ir iespējams, ka Jānis nebija vienīgais, kurš šādi kļūdījās. Vienkāršs tipveida piemērs tā var kļūt par jēgpilnas sarunas pamatu, pamazām būvējot drošu vidi klasē.

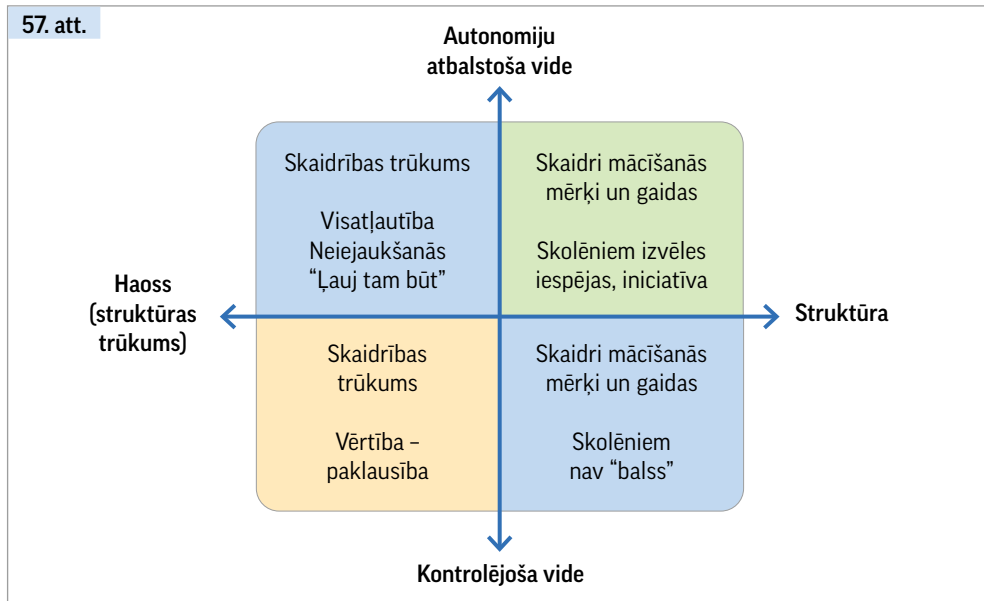
Vēl drošību kļūdīties klasē var palīdzēt veidot dzēšamu virsmu/tāfelu izmantošana ikdienas rēķinos, t. i., mazas baltās tāfelītes, laminētas baltas lapas, krīta tāfeles. Tas nepieciešams, kad apgūstam jaunu saturu, jaunus konceptus, prasmes. Kad saskaramies ar jaunu problēmu, mūsu domāšana ir juceklīga, nelineāra, haotiska un nebūt ne sakārtota, bet pierakstu burtnīcā no skolēna tiek prasīti glīti, secīgi pieraksti. Apgūstot jaunas zināšanas un prasmes, labāk izmantot dzēšamas virsmas, tur varam atstāt savas juceklīgās domas, tās dzēst un lēnām sakārtot, šādi mūsu kļūdām nepaliek pēdas, tiek legalizēta nepieciešamība uzlabot un uzlabot savu domu. Pierakstus atstājam galveno ideju piefiksēšanai, vizualizēšanai u. tml. (Liljedahl, 2020). Mūsu īstermiņa (darba) atmiņa ir ļoti ierobežota, un šādu dzēšamu virsmu izmantošanu varam pielīdzināt ārējai atmiņai – mūsu īstermiņa atmiņa nevar apstrādāt tik daudz informācijas vienību (piemēram, kad mums lūdz saskaitīt $358 + 689$), nepieciešams fiksēt soļus “ārējā atmiņā”, šiem pierakstiem arī nav ilgstošas vērtības, un šeit atkal noder dzēšamas virsmas vai “ķēpu” lapas.

Pēc darba pie tāfelēm skolēniem ieteicams fiksēt savos pierakstos būtiskāko no paveiktā, galvenās idejas vai risinājumus.

1.6.3. Autonomija

Tas, ka droša vide un optimāla grūtības pakāpe atbalsta skolēna motivāciju, nevienam nepārsteidz, saprotam, kā tas ir saistīts, taču vajadzība pēc autonomijas, neapšaubāmi, ir ārkārtīgi būtiska, lai veidotu motivējošu vidi. Šī ir tā vajadzība, kuras nodrošināšana sākumskolas skolotājiem sagādā vislielākās grūtības. Viens no iemesliem tam varētu būt tas, ka Latvijā pedagogijas informācijas telpā nav uzsvērts, cik būtiska ir skolēnu autonomijas izjūtas nodrošināšana, un droši vien autonomijas nozīmi intuitīvi nav tik viegli apzināties kā kompetences un piederības nozīmi, skolotāji arī paši nav saskārušies ar šī fenomena spēku.

Autonomijas izjūtu Viljams Glāzers (*William Glasser*) savā “Izvēļu teorijā” sauc par brīvības izjūtu (Glasser, 1998), un klasē to skolēns var gūt, pieņemot lēmumus. Skolotājam jāpiedāvā izvēles iespējas, sākot ar nelielām – uzdevuma izvēle, risinājuma paņēmiena izvēle u. c. Tā skolēns uzņemas atbildību par savu mācīšanos un gūst sajūtu, ka viņam ir kaut neliela teikšana. Autonomijas izjūtu ietekmē arī tas, kā skolotājs sarunājas, sniedz instrukcijas. Piemēram, skolēns drīzāk jutīsies autonom, ja skolotājs formulēs savus ieteikumus kā piedāvājumus – “es izmantoju



šo paņēmieni, vari izmēģināt, vai tas strādās”, nevis pavēles – “jāizmanto šis paņēmieni”.

Šeit nonākam pie iemesla, kādēļ skolotāji savās mācību stundās izvairās no autonomiju veicinošiem elementiem – skolotāji jauc izvēles iespējas ar noteikumu/struktūras trūkumu un uztraucas, ka viņu stundas kļūs par haosu vai ka tā varētu izskatīties vērotājam no malas. Lai izvairītos no šī aplamā priekšstata, izceļam autonomijas un struktūras nepieciešamo sasaisti (Reeve, 2006). 57. att.

Skolēniem ir nepieciešama autonomija struktūrā. Visbiežāk vērojamas stundas, kurās ir struktūra, ir skaidri mācīšanās mērķi un gaidāmais sniegums, taču viss notiek ļoti kontrolētos apstākļos, kur skolēnam nav nepieciešamības un iespējas izteikties, paust savu viedokli, idejas; skolotājs vada procesu maziem, striktiem soļiem, sagaidot vēlamās atbildes, rezultātus. Mēdz būt arī stundas, kurās strikti noteikumi skolēniem un paklausība ir lielākā vērtība, taču nav līdz galam skaidrs, ko ir plānots iemācīties, skolēni pilda uzdevumus, ir klusums, visi darbojas, taču nav skaidrs, kāpēc tas tiek darīts. Ir vērojamas arī stundas, kurās skolēniem ir izvēles iespējas, bet tās robežojas ar visatļautību, un skolotājs ļaujas plūdumam, nav skaidru gaidu, stundas struktūras, plāna un sasniedzamā rezultāta. Būtu nepieciešams tuvoties tādai stundai, kurā skolotājam un skolēniem ir skaidri mērķi, struktūra, vēlamais sniegums u. tml., taču tiek atrasta iespēja skolēniem pieņemt lēmumus, paust idejas, gūt sajūtu, ka arī viņiem šajā klasē ir “balss”, ir iespēja ietekmēt notiekošo (Čakāne et al., 2024).

Vēl uz motivāciju ilgtermiņa mērķiem varam skatīties hronoloģiski, domājot par konkrētu mērķi, lai tas būtu par ierosmi sākt mācīties, turpināt to darīt un

mācīties intensīvi. Visbiežāk skolotājiem izdodas motivēt skolēnus sākt darboties, ieinteresēt, īpaši ja process ir novitāte. Skolotājs ir izdomājis piesaistīt skolēnu uzmanību, taču interese tikpat bieži ātri noplok. Taču palīdzēt turpināt strādāt nereti protam tikai ar “bakstīšanu”, pārmetumiem, draudiem, biedēšanu. Ir vērojams, ka skolotājiem trūkst zināšanu, kā skolēniem sniegt konstruktīvu atgriezenisko saiti, kā mācīt monitorēt savu sniegumu, palīdzēt ieraudzīt savu izaugsmi, izdošanos, kas stimulē motivāciju un palīdz turpināt mācīties.



Jautājumi pārdomām

Kādi faktori, jūsuprāt, veicina skolēnu motivāciju?

Kā jūs raksturotu savu skolēnu kompetenci, autonomiju un piederību savās mācību stundās?

Kādas darbības izmantojat savās stundās, lai veicinātu skolēnu kompetenci, autonomiju un piederību?

Literatūra tālākai uzziņai

- Ahmadi, A., Noetel, M., Parker, P., Ryan, R. M., Ntoumanis, N., Reeve, J., Beauchamp, M., Dicke, T., Yeung, A., Ahmadi, M., Bartholomew, K., Chiu, T. K. F., Curran, T., Erturan, G., Flunger, B., Frederick, C., Froiland, J. M., González-Cutre, D., Haerens, L., ... Lonsdale, C. (2023). A Classification System for Teachers' Motivational Behaviors Recommended in Self-Determination Theory Interventions. *Journal of Educational Psychology*, 115(8), 1158–1176. <https://doi.org/10.1037/edu0000783>
- Čakāne, I., France, I., & Cīrulis, A. (2024). Making Math Reform a Reality in Elementary School Classrooms. *ICMI-15* (Starptautiskais kongress matemātikas mācīšanā). <https://icme15-c10000.eorganiser.com.au/data/clients/1/773/submissions/172356/abstract.pdf>
- Glasser, W. (1998). *Choice Theory: A New Psychology of Personal Freedom*. Harper Perennial.
- Liljedahl, P. (2020). *Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K-12: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning*. Corwin Press.
- Mayer, R. E. (2009). *Multimedia Learning*. Second edition. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511811678>
- Michaelides, M. P., Brown, G. T. L., Eklöf, H., & Papanastasiou, E. C. (2019). The Relationship of Motivation with Achievement in Mathematics. In *Motivational Profiles in TIMSS Mathematics. IEA Research for Education*, vol 7. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-26183-2_2
- Reeve, J. (2006). Teachers as Facilitators: What Autonomy-Supportive Teachers Do and why Their Students Benefit. *The Elementary School Journal*, 106(3), 225–236.
- Reeve, J., & Jang, H. (2006). What Teachers Say and Do to Support Students' Autonomy during a Learning Activity. *Journal of Educational Psychology*, 98(1), 209.
- Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2020). Intrinsic and Extrinsic Motivation from a Self-Determination Theory Perspective: Definitions, Theory, Practices, and Future Directions. *Contemporary Educational Psychology*, 61, 101860.

1.7. Mācīt tā, lai visi skolēni ir iekļauti

1.7.1. Iekļaujošā izglītība

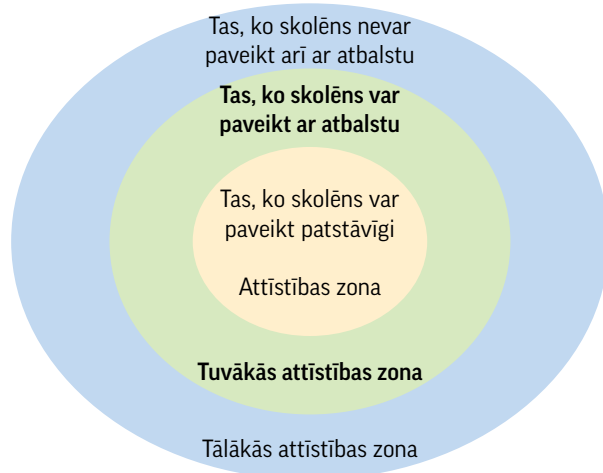
Iekļaujošā izglītība ir mūsdienīga pedagoģiskā pieeja, kas vērsta uz to, lai katram skolēnam būtu iespēja piedalīties mācību procesā neatkarīgi no viņa spējām, veselības stāvokļa vai sociālās izcelsmes. Tomēr dažādos kontekstos pastāv būtiskas atšķirības iekļaujošās izglītības jēdziena konceptualizācijā, kā rezultātā rodas atšķirības tā īstenošanā praksē (Boyle & Anderson, 2020; Qvortrup & Qvortrup, 2018). Pasaulē nav vienotas iekļaujošās izglītības definīcijas (Dally et al., 2019), pat pētījumos, kuros analizēta skolotāju iekļaujošā prakse (Finkelstein et al., 2021). Šīs atšķirības ir svarīgas, aplūkojot cilvēku attieksmi pret iekļaujošās izglītības politiku un praksi un līdz ar to arī iekļaujošās izglītības prakses spēju attīstīties vai pat nostiprināties. Latvijā iekļaujošā izglītība ir definēta kā process, kurā tiek nodrošinātas visu skolēnu daudzveidīgās vajadzības, palielinot ikviena skolēna līdzdalības iespējas mācību procesā, kultūrā un dažādās kopienās un samazinot iespējas būt izslēgtiem no izglītības ieguves procesa (Valsts izglītības satura centrs, 2020). Praksē iekļaujošās izglītības izaicinājums ir tās īstenošanas grūtības. UNESCO "Pasaules izglītības monitoringa ziņojuma 2020: iekļaušana un izglītība" dokumentā *All Means All* uzsverta nepieciešamība pēc visas skolas iekļaujošās izglītības sistēmas, lai visiem bērniem un jauniešiem nodrošinātu visaptverošu un kvalitatīvu izglītību. Tas norāda, ka iekļaušana attiecas ne tikai uz skolēniem ar papildu speciālās izglītības atbalsta vajadzībām, bet uz skolēniem ar visu veidu atbalsta vajadzībām (piemēram, imigrantu bērniem, nelabvēlīgā situācijā esošām grupām – bērniem no ekonomiskās grūtībās nonākušām ģimenēm u. c.). Šī perspektīva uzsver, ka izglītība **visiem** ir pamats izglītības iekļaušanas jomā.

Pastāv dažādi atšķirīgi viedokļi par iekļaušanu. Uz personu vērstās pieejas, kas koncentrējas uz vispārējās izglītības nodrošināšanu izglītojamajiem ar papildu vajadzībām parastā klasē, rāda, ka cilvēku dažādība ir jāuzlūko kā resurss, nevis kā izglītības izaicinājums. Alternatīva perspektīva uzsver nepieciešamību mainīt skolas struktūras vai praksi, lai tā būtu iekļaujošāka, tādējādi mazinot uzmanību uz konkrētu skolēnu individuālajiem profiliem. Mels Einskovs (*Mel Ainscow*) ar kolēģiem (2006) apgalvoja, ka iekļaujošajai izglītībai jāšķīst par skolas pilnveides procesu sastāvdaļu, tādējādi uzsverot nepieciešamību apsvērt visas skolas kopienas lomu iekļaujošas kultūras un prakses attīstīšanā. Tomēr, neraugoties

uz to, ka iekļaušana ietver vienlīdzīgu izglītību visiem, literatūrā vai praksē tā bieži vien ir šauri orientēta uz skolēniem ar mācīšanās traucējumiem vai “īpašām mācīšanās vajadzībām” vai tiek sajaukta ar tiem (Ainscow, 2020). Lai veidotu iekļaujošu kultūru, skolotājiem ir jāsaprot, ka šķēršļus mācībām un līdzdalībai var izjust jebkurš skolēns, ne tikai tie, kurus uzskata par skolēniem ar “īpašām mācīšanās vajadzībām” (Booth & Ainscow, 2011).

Pētījumi liecina, ka mācīšanās klasē, kurā skolēniem ir dažādas spējas un vajadzības, veicina akadēmisko un sociālo attīstību visiem skolēniem. Skolēni paplašina savu izpratni par citiem cilvēkiem un pierod pie dažādības (Roldan et al., 2021). Augstas gaidas un atbilstošs grūtības līmenis ir viens no sešiem faktoriem, kam ir lielākā ietekme uz skolēna rezultātiem, ko parādīja *Visible learning* pētījums. Tātad skolēnus ir nepieciešams iesaistīt tādā mācību procesā, kas ir izaicinošs, bet sasniedzams – ne par grūtu, ne par garlaicīgu. Kad ir panākti šādi optimāli izaicinoši apstākļi, tad skolēni biežāk ir ieinteresēti un iesaistās, ir motivēti mācīties un spējīgi mācīties produktīvāk (Hattie & Hamilton, 2020). Psiholoģijas nozarē tā zināma kā tuvākās attīstības zona jeb potenciālās attīstības zona (Voisiner & van der Veer, 2013), šo konceptu attīstīja Ļevs Vigotskis (*Лев Выготский*). Skolēnam ir vēlams atrasties tuvākās attīstības zonā, tātad risināt uzdevumus un problēmsituācijas, kas ir izaicinoši, bet ir atrisināmi ar atbalstu (piemēram, paraugs, informācija, klasesbiedrs, skolotājs, strukturēti uzdevumi). Ja tā nav, tad nenotiek izaugsme, attīstība, turklāt, ja uzdevumi nav mākslīgi padarīti aizraujoši (ar spēles elementiem, digitālajām tehnoloģijām, sāncensību), tie ir garlaicīgi un skolēns ar vājākām pašregulācijas prasmēm meklēs aizraujošākas aktivitātes ārpus skolotāja piedāvātā, kas varētu būt nevēlami. Savukārt, iemesti tālās attīstības zonā, skolēni nespēs tikt galā ar izaicinājumiem, viņi var zaudēt pašpārlicību, secināt, ka nav matemātikai piemēroti, vai meklēt citas blakus nodarbes, potenciāli veidojot klasvadības problēmas, un atkal – izaugsmes nav. Tālākās attīstības zona ir labs ceļa rādītājs, kurp jānokļūst un kādēļ jau iegūtās un apgūstamās prasmes būs svarīgas vēlāk. **58. att.**

Izaugsme notiek, pārvarot distanci starp pašreizējām prasmēm un augstākām. Lai skolēns varētu atrasties savā tuvākās attīstības zonā, ir nepieciešama “dinamiska mācīšanās potenciāla vērtēšana, jo šī zona nav statiska, bet ir nemitīgi plūstoša” (Voisiner & van der Veer, 2013).



1.7.2. Matemātikas mācīšanas risinājumi skolēnu iekļaušanai

Matemātikas mācīšanā skolēni saskaras ar dažādiem faktoriem, kas var kavēt vai veicināt mācīšanos, piemēram, ar kognitīvo un metakognitīvo domāšanu, darba atmiņu, uzmanības deficītu, uzvedības problēmām, pasivitāti, matemātisko trauksmi (Witzel & Little, 2016; Ho et al., 2000).

Metodoloģija visu skolēnu iekļaušanai klasē ietver vairākus elementus.

1. Šķēršļi, kas traucē skolēniem mācīties. Tradicionālā, rietumnieciskā pieeja izglītībai un pašreizējās skolu un klašu struktūras, kur no viena skolotāja tiek sagaidīts, lai dažādas skolēnu grupas sasniegtu vienādus rezultātus, padara daudzveidību par problēmu. Meklējot un izprotot mācību šķēršļus, ir svarīgi ņemt vērā mācību programmu, mācīšanas stratēģijas un klases organizāciju un nemeklēt vainu individuālā skolēnā.
2. Iekļaujošas mācību stundas elementi: augstas prasības, attiecību veidošana un laba skolēnu prasmju, vajadzību, interešu pazīšana, iekļaujoša mācību vide – klases kultūra, vecumam, interesēm un spējām atbilstošs mācību saturs, kvalitatīva atgriezeniskā saite, iesaistīšana, izmantojot praktisku pieeju, jautājumu uzdošana un modelēšana, izaicinājumu radīšana, aktīvas mācīšanās veicināšana, pašvadītas/pašregulētas mācīšanās prasmju attīstīšana.
3. Proaktīva pieeja universālam mācību dizainam, izstrādājot daudzveidīgas un elastīgas mācīšanās iespējas. Tā ietver nodrošinātas pašregulācijas, izpratnes, saziņas, interešu piesaistes, uztveres, fiziskas rīcības iespējas.

4. Plānošana, kurā mērķtiecīgi jau no sākuma tiek domāts par visu skolēnu iesaisti, nevis par lielāko daļu klases skolēnu un tad pievienotas aktivitātes ļoti zinošiem skolēniem un tiem, kuriem nepieciešams atbalsts. Izmantojot šo elementu, ir ieteicama atpakaļvērstā mācību plānošana. **16. tabula**
5. Mācību procesa diferencēšana. **17. tabula**
6. Videi ir jābūt tādai, ka visi skolēni izjūt piederības sajūtu.

16. tabula

Atpakaļvērstā mācību plānošana		
1. Identificēt vēlamu rezultātu. →	2. Noteikt, kādi dati nepieciešami pierādījumiem. →	3. Plānot mācīšanās pieredzi un mācības.
Lielās idejas un prasmes	Uzdevums novērtēšanai	Mācību aktivitātes
Ko skolēniem vajadzētu dzirdēt, lasīt, apskatīt, izpētīt un ar ko sastapties?	Kā es zināšu, vai skolēni ir sasnieguši vēlamu rezultātu?	Kādi pasākumi nodrošinās skolēniem nepieciešamās zināšanas un prasmes?
Kādas zināšanas un prasmes skolēniem jāapgūst?	Ko es pieņemšu kā pierādījumu par skolēnu izpratni un prasmēm?	Kādi materiāli un resursi ir vispiemērotākie šo mērķu sasniegšanai?
Kādām svarīgām idejām un izpratnei skolēniem vajadzētu izveidoties?		

17. tabula

Saturs	Process	Procesa rezultāts	Vide
Satura pielāgošana skolēnu interesēm, vecumam, akadēmiskajai sagatavotībai un valodas zināšanām.	Individuāli, pāri, mazā grupā, lielā grupā	Videoklipi, fotoattēli, rakstiski, mutiski, prezentācija, grafiskais organizators, projekti	Droša vide, skolēni var brīvi kļūdīties, jūtas pieņemti, saņem pozitīvu atgriezenisko saiti.
↓	↓	↓	↓
Kā es diferencēšu mācāmo saturu?	Kādas aktivitātes veicinās mācīšanos?	Kā visi skolēni dažādos veidos demonstrēs savas zināšanas?	Kā izveidot atbalstošu un pieejamu vidi klasē?

Lai panāktu diferencētu mācīšanu un pārvarētu izaicinājumus, skolotāji var izmantot metodiski pamatotas pieejas, piemēram, papildus atkārtot agrāk mācīto, mainīt uzdevuma kompleksumu, rādīt piemērus un “ne-piemērus” (*non-example*), bieži uzdot jautājumus, palīdzēt skolēniem apzināti integrēt iepriekš mācīto ar jauno saturu, palīdzēt sadalīt apgūstamo vai darāmo mazākos soļos, saprast secību (Witzel & Little, 2016). Iekļaujošā matemātikas apgūvē efektīvi ir uzdevumu risināšanā izmantot shematiskos zīmējumus (Witzel & Little, 2016), skolotāja virzītu uzdevumu risināšanu, kad skolotājs soli pa solim vada skolēnu domāšanu un palīdz izprast jēdzienus (Van de Walle et al., 2010), skaļš domāšanas stratēģiju, kad skolotājs, risinot matemātikas uzdevumu, stāsta, kā pats domā (Witzel & Allsopp, 2007).

Uzdevuma sarežģītības modificēšana. Skolēniem ar mācīšanās traucējumiem vai grūtībām skolotājs var mainīt uzdevumu sarežģītības pakāpi, sadalot tos mazākos, vieglāk paveicamos soļos. Savukārt citiem skolēniem uzdevumus var padarīt izaicinošākus (kognitīvās slodzes teorija).

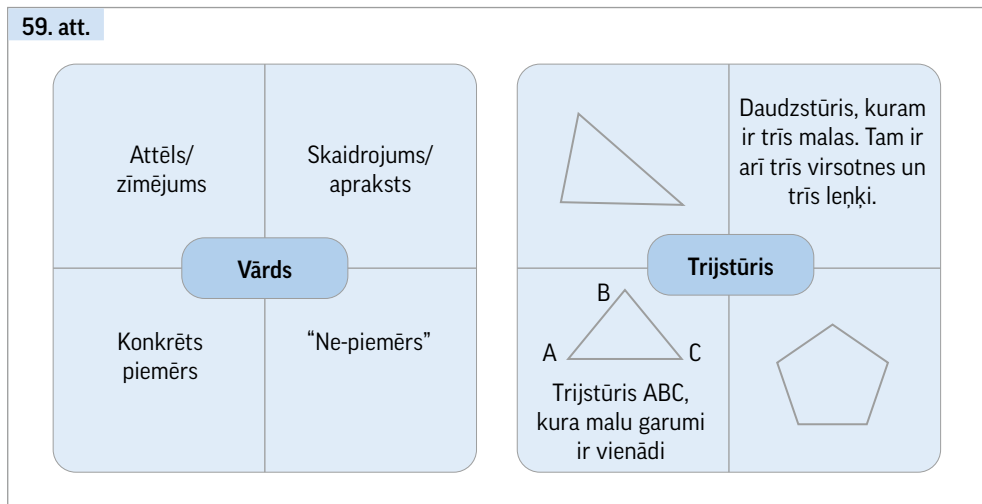
Skaidra un konsekventa instrukcija. Procesa organizācija – skolēniem paredzama kārtība, saprotamas vizualizācijas un labi strukturētas aktivitātes – var palīdzēt samazināt svešas, neparedzētas darbības kognitīvo slodzi, kas saistīta ar nenoteiktību un dezorganizāciju. To mazina arī skaidrs, pakāpenisks matemātisko jēdzienu un darbību skaidrojums.

Viens veids, kā palīdzēt skolēniem padziļināt izpratni par jēdzienu, ir lietot grafiskos organizatorus, piemēram, *Fray* modeli. To veido četras sadaļas, kas atspoguļo vispārīgu jēdzienu vai vārdu organizatora centrā: definīcija, apraksts/skaidrojums, piemēri un ne-piemēri (dažreiz skolēniem var būt noderīgi zināt ne tikai to, kas kaut kas ir, bet arī to, kas tas nav). Skolēniem pašiem ir jāaizpilda šī shēma, parādot izpratni par doto jēdzienu, piemēram, “daļa”, “kvadrāts”, “neīsta daļa” u. c. (Witzel & Little, 2016). **59. att.**

Informācijas sadalīšana pa daļām notiek, grupējot informāciju jēgpilnās daļās (veidojot vienu vienību). Tā var uzlabot darba atmiņas kapacitāti. Informācijas dalīšana pa daļām palīdz pārvarēt īstermiņa atmiņas ierobežojumus, sakārtojot informāciju pārvaldāmos gabaliņos, kas ir labāk saprotami, tā ir vieglāk atcerēties un izprast.

Skolotājs palīdz skolēniem risināt uzdevumus, iesakot, kā rīkoties soli pa solim. Šo stratēģiju var izmantot, strādājot ar visu klasi, grupās vai individuāli. Laika gaitā skolotājs samazina savu lomu, dodot skolēniem iespēju patstāvīgi veikt uzdevumus, kas palīdz attīstīt arī kritisko domāšanu. Svarīgi, ka skolēnus rosina domāt par iepriekš lietotiem jēdzieniem un uzdevumiem (Van de Walle et al., 2010). Skolotājs var lūgt skolēnam lēnām izlasīt uzdevumu un uzdot jautājumus, piemēram:

- Kas mums ir zināms?



- Kas mums ir jāatrod?
- Ko mēs esam mācījušies, kas varētu palīdzēt atrisināt uzdevumu?
- Kā mēs varētu sākt? Varbūt lietot klucīšus, daļskaitļu sloksnītes vai citus rīkus? Varbūt varam zīmēt attēlu? Ierakstīt informāciju tabulā?
- Vai ir kāda problēmu risināšanas stratēģija, kas būtu piemērota?
- Kas ir jādara, lai atbildētu uz uzdoto jautājumu?
- Kā lai mēs pierakstām iegūto atbildi?
- Vai mūsu atbilde ir pareiza?

Multimodāla un multisensora apmācība. Multimodāla apmācība nozīmē, ka tiek izmantoti dažādi mācību veidi, piemēram, vizuālie materiāli (attēli, video), audiālie materiāli (skaņas, runa) un kinestētiskie materiāli (praktiski uzdevumi, kustības). Šī pieeja nodrošina lielāku iespēju, ka tiks izprasti jēdzieni un matemātikas koncepti. Multisensora apmācība ietver dažādu maņu izmantošanu – redzi, dzirdi, tausti, smaržu un garšu –, lai padarītu mācību procesu daudzveidīgāku un efektīvāku. Piemēram, skolēniem varētu būt vieglāk iemācīties skaitļus, ja viņi tos redz, dzird un var izveidot no plastilīna. Ar multisensoro pieeju matemātikas mācīšanās var iesaistīt skolēnus ar atšķirīgām kognitīvajām spējām, iekļaujot dažādu maņu izmantošanu, lai uzlabotu mācīšanos (Cuturi et al., 2022).

Reprezentācijas jeb dažādi attēlojumi (sk. 1.3.1. nodaļu). Visiem skolēniem ieteicams lietot priekšmetiskās darbības rīkus, piemēram, klucīšus vai ripiņas, bet it sevišķi tiem, kuriem ir mācīšanās grūtības. Pētījumi rāda, ka skolēni attīsta dziļāku izpratni par darbībām, ja viņiem ir iespēja lietot konkrētus objektus, risinot uzdevumus (Witzel & Allsopp, 2007).

Var izmantot priekšmetus, piemēram, skaitļu klucīšus, sloksnītes u. c., lai palīdzētu skolēniem vizualizēt un manipulēt ar matemātiskiem jēdzieniem; iekļaut

praktiskas aktivitātes, kas ļauj skolēniem fiziski mijiedarboties ar matemātiskām idejām, piemēram, tangramu, lai pētītu sakarības ģeometrijā, vai daļu sloksnītes, lai izprastu daļas (Faragher et al., 2016).

Vizuālais attēlojums. Diagrammas un grafiskie organizatori var būt īpaši noderīgi skolēniem ar dažādām vajadzībām, kuriem ir grūtības ar simbolisku reprezentāciju. Piemēram, izmantojot skaitļu taisni, laukumu modeļus un shematiskus zīmējumus, skolēni varēs labāk izprast matemātiskās sakarības ne tikai situāciju uzdevumos.

Shematiskā zīmēšana var būt būtiska skolēnu izpratnei (Witzel & Little, 2016).

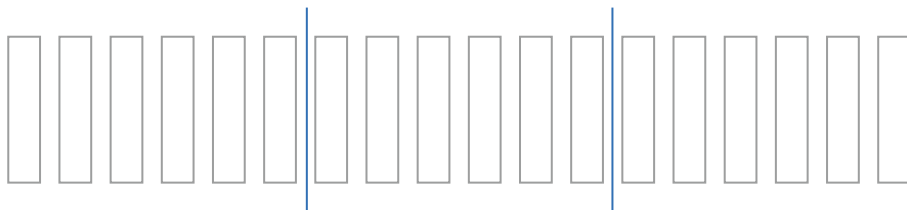
UZDEVUMA PIEMĒRS

Uz galda ir 18 klucīši, $\frac{2}{3}$ no tiem ir sarkani, pārējie zili. Cik ir sarkano klucīšu?

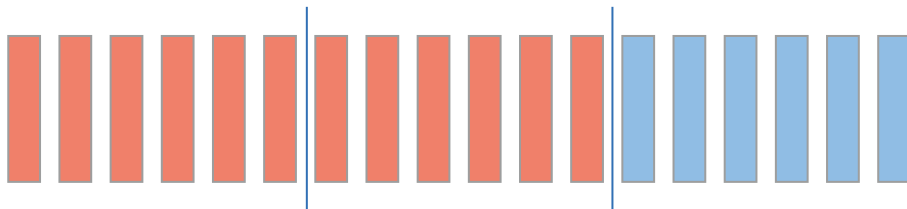
Ja skolēns pats nesāk zīmēt, skolotājs var ieteikt skolēnam uzzīmēt mazus klucīšus vienā rindā.



Zināms, ka $\frac{2}{3}$ klucīšu ir sarkani, bet mēs nezinām, cik to ir. Varam jautāt, ko nozīmē $\frac{2}{3}$? Ko daļas pierakstā nosaka saucējs un ko nosaka skaitītājs? Ja skolēnam ir grūtības ar $\frac{2}{3}$, var jautāt līdzīgi par $\frac{1}{2}$, līdz skolēns saprot, ka klucīši ir jāsadala 3 vienādās daļās.



Uzdevumā ir $\frac{2}{3}$, tātad skaitām, cik ir 2 daļas. Sanāk, ka ir 12 sarkani un 6 zili klucīši.



Izmantojiet krāsas, žestus un vizuālus norādījumus, lai izceltu matemātisko saturu, padarot to skolēniem vieglāk uztveramu, lai būtu vieglāk atcerēties informāciju. Iekļaujot vizuālus attēlojumus matemātikas mācību procesā, skolotājs var samazināt kognitīvo slodzi, kas saistīta ar abstraktiem jēdzieniem, un matemātiskās idejas padarīt skolēniem pieejamākas un taustāmākas.

Audiāls un verbāls pastiprinājums. Sniedziet audiālu atbalstu, piemēram, matemātiskas dziesmas un rēbusi var palīdzēt atcerēties matemātiskos jēdzienus, īpaši tiem skolēniem, kuriem ir zems iepriekšējo zināšanu līmenis. Mūzika, ritms un dzejoļi var palīdzēt atcerēties matemātisko procedūru un veidot faktu izpratni (Clerk et al., 2011).

Iekļaujiet mācību procesā skaļu domāšanu. Skolotājs modelē, kā viņš risina uzdevumu, skaļi pasakot, kā viņš domā. Piemēram, ja ir jāsaskaita

$$\begin{array}{r} 56 \\ +38 \\ \hline \end{array}$$

skolotājs skaļi saka: “Man ir 6 vieni un 8 vieni, vispirms saskaitīšu tos. Kopā ir 14 vieni. Pierakstu 4 vienu kolonnā un 1 desmitu desmitu kolonnā. Tad sakaitu desmitus – 5, 3 un 1 kopā sanāk 9 desmiti. Pierakstu 9. Atbilde ir 94.”

$$\begin{array}{r} 1 \\ 56 \\ +38 \\ \hline 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 56 \\ +38 \\ \hline 94 \end{array}$$

Skolotājs arī skolēnus aicina skaļi domāt. Šī stratēģija palīdz skolēniem organizēt savas domas un sadalīt risināšanas procesu mazos soļos (Witzel & Allsopp, 2007). Aiciniet mutiski skaidrot un diskutēt, lai skolēni izstāsta savu matemātisko domāšanu un problēmu risināšanas procesu. Verbālie skaidrojumi var palīdzēt skolēniem nostiprināt viņu matemātisko jēdzienu izpratni un veidot valodas saikni ar matemātiskām idejām (sk. 1.8. nodaļu).

Digitālo tehnoloģiju integrācija. Mūsdienās digitālie rīki var ievērojami atvieglot matemātikas mācīšanos. Interaktīvas tāfeles, izglītojošas lietotnes un vizualizācijas rīki palīdz padarīt abstraktus jēdzienus saprotamus visiem skolēniem, tostarp tiem, kuriem ir mācīšanās grūtības. Izmantojiet matemātikas rīkus, spēles, kas iesaista dzirdes, redzes un kinestētisko modalitāti, digitālos rīkus, kas nodrošina audio atgriezenisko saiti, vizuālo modelēšanu un interaktīvas simulācijas, lai atbalstītu skolēnus (Faragher et al., 2016).

Reāli lietojumi. Skolēns iesaistās aktīvāk, ja pats matemātiskos jēdzienus sasaista ar reālo dzīvi, pasaules kontekstu un savu pieredzi. Tātad ļaujiet skolēniem iesaistīt savas maņas praktiskā darbībā, matemātikas pielietojumā. Piemēram, izmantojiet ēdiena gatavošanas procesu, lai mācītu par daļām, mērījumiem

un attiecībām, vai aizvediet skolēnus “ģeometrijas medībās”, lai atpazītu figūras un leņķus apkārtējā vidē (Casey, 2013).

Iepazīstiet savus skolēnus (individuālie skolēnu profili)! Skolotājs var skolēniem ar dažādām vajadzībām piedāvāt pamudinājumus, norādes un diferencētu atbalstu, pamatojoties uz individuālajiem mācību profiliem. Šāds atbalsts palīdz skolēniem panākt patstāvību problēmu risināšanā (Lindner & Schwab, 2020).

Individuālie izglītības plāni. Izstrādājiet individuālo izglītības plānu skolēniem ar atšķirīgām kognitīvajām spējām vai citām atbalsta vajadzībām, lai varētu sniegt mērķtiecīgu atbalstu. Šajos plānos ietveriet konkrētu atbalstu, diferencēšanas iespējas un mērķi, kas pielāgots katra skolēna vajadzībām, kognitīvajām stiprajām pusēm un izaicinājumiem, nodrošinot, ka viņi saņem nepieciešamo atbalstu, lai sekmīgi apgūtu matemātiku (Hott et al., 2021).

Sadarbība. Veiciniet mācīšanos sadarbojoties, piemēram, organizējiet problēmu risināšanas aktivitātes grupā un mācības ar klasesbiedriem. Mācīšanās sadarbojoties sniedz iespējas skolēniem dalīties ar idejām, atbalstīt citam citu un gūt dažādu pieredzi matemātisko problēmu risināšanā. Elastīgas grupēšanas stratēģijas ļauj skolēniem strādāt sadarbojoties, vienlaikus nodrošinot, ka viņi saņem atbalstu, pamatojoties uz savām spējām. Skolotājs var izveidot mazas grupas vai pārus, pamatojoties uz skolēnu vajadzībām, veidojot grupas, kurās ir skolēni ar dažādām spējām, lai sniegtu savstarpēju atbalstu un ļautu skolēniem atbalstīt citam citu un mācīties atbilstošā tempā.

Sadarbībai ir jābūt pārdomātai, un tā nav tikai skolēnu grupēšana, lai kopā izpildītu vienkāršus uzdevumus. Mērķtiecīgi veidojot heterogēnas grupas un nosacījumus darbam, kas paredz atbildību par citu skolēnu mācīšanos, skolotājs var veicināt vienlīdzību un pozitīvu pieredzi neatkarīgi no atšķirībām. Tas var palīdzēt skolēniem attīstīt izjūtu, ka ir vairāk nekā viens veids, kā domāt par problēmu un to risināt (Garcia-Melgar et al., 2022).

Universālā mācību dizaina ieviešana. Universālais mācību dizains, kas ir cieši saistīts ar kognitīvās slodzes teoriju, uzsver nepieciešamību pēc elastīgām mācību metodēm un materiāliem, lai pielāgotos dažādiem skolēniem. Skolotājs var piemērot šos principus, nodrošinot skolēniem ar dažādām vajadzībām iespēju demonstrēt savas zināšanas un prasmes, izpratni par matemātikas saturu tādā veidā, kas atbilst viņu stiprajām pusēm un vēlmēm (Novak, 2022).

Metakognitīvo stratēģiju mācīšana. Veicinot metakognitīvo apzināšanos, skolēni var kļūt prasmīgāki, lai atpazītu, kad kognitīvā slodze ir pārmērīga, un to novērstu. Skaidri mācot un nostiprinot metakognitīvās stratēģijas, skolotājs var nodrošināt, ka skolēni kļūst patstāvīgāki. Tas ir īpaši svarīgi skolēniem ar atšķirīgām vajadzībām, jo tas viņiem palīdz apgūt matemātikā lietotos paņēmienus, vieglāk un pārliecinošāk risināt uzdevumus (Kramarski & Mevarech, 2003).

Formatīvais vērtējums. Formatīvais vērtējums ļauj skolotājam redzēt skolēnu progresu un pielāgot mācības, pamatojoties uz viņu sasniegumiem. Ir jānodrošina savlaicīga un konstruktīva atgriezeniskā saite, kas vērsta ne tikai uz matemātiskajām zināšanām, to pareizību, bet arī uz to, kā skolēns veicis uzdevumu, plānojis savu laiku u. tml. Mudiniet skolēnus labot savu darbu, pamatojoties uz dziļāku izpratni par to, kā lietot jēdzienus un prasmes (Black & Wiliam, 2009).

Novērtēšanas iespējas. Piedāvāriet skolēniem dažādus veidus, kā demonstrēt savu izpratni un prasmes, piemēram, tradicionālos testus, projektus, prezentācijas vai portfolio. Tas ļauj skolēniem parādīt savas stiprās puses alternatīvos veidos (Faragher et al., 2016).

Papildu atbalsts. Ļaujiet skolēniem progresēt, apgūt mācību saturu savā tempā, nodrošinot papildu atbalstu vai uzdevumus, ja nepieciešams. Sniedziet atbalstu, izmantojot atgādnēs vai citus resursus, lai atcerētos vai veicinātu izpratni. Piedāvāriet kompleksākus uzdevumus tiem skolēniem, kuri jau ir apguvuši plānoto. Tas var palielināt viņu motivāciju.

Lai skolēni iekļautos klasē, videi ir jābūt tādai, lai visi skolēni jūtas piederīgi. Iekļaujoša mācību vide visiem skolēniem veicina piederības izjūtu – apziņu, ka attiecīgajā sabiedrībā, skolā un klasē viņi ir novērtēti un cienīti. Tā palīdz visiem skolēniem attīstīt savu identitāti kā kompetentiem un spējīgiem skolēniem. Skolēnu bažas par piederību un spējām var tieši un cēloņsakarīgi ietekmēt tuvākos un tālākos izglītības sasniegumus, tostarp motivāciju, noturību, veicot sarežģītus uzdevumus, vērtējumus, pārbaudījumu rezultātus un virzību uz skolas pabeigšanu (Prince & Hadwin, 2012). Pozitīvas un atbalstošas klases vides izveide ir būtiska, lai palīdzētu skolēniem ar dažādām vajadzībām. Veiciniet klases kultūru, kurā tiek pieņemta daudzveidība un kurā skolēni tiek mudināti apzināties savas individuālās stiprās puses un atšķirības. Veiciniet sadarbību, cieņu un empātiju skolēnu vidū, atvērtību, saziņu un izaugsmes domāšanu, kas var palīdzēt skolēniem justies novērtētiem un iesaistīties matemātikas apgūvē katram savā individuālajā līmenī (Monteiro et al., 2021).

1.7.3. Skolotāju loma skolēnu atbalstīšanā un mācību barjeru mazināšanā

Pašlaik Latvijā vispārizglītojošās klasēs iekļaujošā vidē mācās arī bērni ar speciālām vajadzībām. Skolēniem ar speciālām vajadzībām bieži ir grūtības ar koncentrēšanos, valodu, spriešanu, telpisko domāšanu un atmiņu (Dieker et al., 2012). Problēma, kā apgalvo vairāki pētnieki (Antoninis et al., 2020), ir tā, ka “iekļaušanu

nevar panākt, strādājot ar atsevišķām grupām". Uzmanība jāpievērš tam, lai mazinātu šķēršļus mācībās un līdzdalībā, ar kuriem var saskarties ikviens skolēns (Booth & Ainscow, 2011). Nemainīgs secinājums ir tas, ka dažādu skolotāju attieksme atšķiras. Speciālās izglītības skolotāji pastāvīgi ir bijuši vispozitīvākā grupa (Hernandez et al., 2016), savukārt vidējās izglītības vai mācību priekšmetu skolotāji ir negatīvāk noskaņoti nekā pamatskolas skolotāji. Pētījumi ir apstiprinājuši, ka skolu direktori ir pozitīvāk noskaņoti pret iekļaujošo izglītību nekā skolotāji (Boyle et al., 2013). Iekļaut skolēnus ar papildu atbalsta vajadzībām ir izaicinoši, un bieži vien tas skolotājiem rada stresu, jo nav universālas iekļaujošās izglītības definīcijas, un izpratne par to atšķiras.

Daži biežākie izaicinājumi

Procedūru sajaukšanas problēma. Skolēniem, kuri ir pieraduši atkārtot vienu matemātisku procedūru vairākos kontekstos, parasti ir grūtības pārslēgties starp procedūrām. Viņi, visticamāk, jauc agrāk matemātikā apgūtu procesu ar jauno informāciju (piemēram, pārejot no reizināšanas uz daļskaitļu dalīšanu).

Valoda. Skolēni ar valodas lietošanas grūtībām matemātikas stundās ne vienmēr ir pamanāmi. Valodas lietošanas problēmas visbiežāk rodas lasīšanā, runāšanā vai rakstīšanā.

Lasīšana: skolēniem, kuriem ir grūtības ar lasīšanas izpratni un veiklību, ir lielākas grūtības, strādājot ar matemātikas mācību grāmatu vai kompleksākiem uzdevumiem, jo lielākā daļa satura ir jāizlasa.

Rakstīšana: viena no matemātikas prasmēm, kas minēta standartā, ir spēja skaidrot savu stratēģiju vai risinājumu, to var veikt rakstiski. Arī risinājumu rakstīšana var radīt grūtības (piemēram, skaitļa pierakstīšana pareizajās kolonnās).

Runāšana: mācību stundā skolēna skaidrojums var būt mutisks, kas var radīt grūtības skolēniem, kuri jūtas neērti, kad viņiem lūdz runāt. Lai veidotu izpratni, arvien vairāk mācību stundās ir nepieciešams rīkot grupu diskusijas un skaidrot risinājumus. Jāpatur prātā, ka izteikšanās grūtības var radīt uzvedības un pašapziņas problēmas.

Spriešanas prasmes. Skolēniem, kuriem trūkst spriešanas prasmju, būs grūti izvēlēties starp divām atbildēm vai interpretēt dziļa līmeņa uzdevumus, īpaši situāciju vai matemātiskās modelēšanas uzdevumus.

Uztveres prasmes. Šī problēma rodas, ja skolēniem ir grūtības ar iztēli un abstrakciju, piemēram, ģeometrijā ar figūru novietojumu vai formu, arī uzdevumi, kas saistīti ar simetriju, līdzību, var būt sarežģīti.

Atcerēšanos parasti var atbalstīt, ļaujot skolēniem izmantot atgādnēs vai formulu lapas, kalkulatoru.

Pētnieki (Dieker et al., 2012) min piemēru, kā speciālās izglītības skolotājs var sastrādāties ar priekšmeta skolotāju, lai palīdzētu skolēniem ar speciālām vajadzībām. **18. tabula**

18. tabula

Speciālā vajadzība	Speciālās izglītības skolotājs	Matemātikas skolotājs
Procedūru jaukšanas problēma	Atgādiniet skolēnam par matemātiskajām darbībām, kas var tikt sajauktas stundā. Centieties nostiprināt vienu konceptu līdz pilnībai, pirms lietot dažādas darbības (piemēram, pārejot no saskaitīšanas uz atņemšanu). Ja skolēns jauc darbības, mēģiniet izmantot viņam pazīstamas reālas situācijas.	Pielāgojiet mācību materiālu, lai uzdevumi būtu grupēti, izmantojot konkrētas darbības (nesajauciet uzdevumus). Palīdziet skolēniem, kad mainās konteksti un stratēģijas. Nodrošiniet skaidru palīdzību un atbalstu, kad mainās matemātiskās darbības (piemēram, pārejot no saskaitīšanas uz atņemšanu).
Valodas problēmas	Novērtējiet mācību grāmatas vai dotā materiāla lasāmību, lai paredzētu grūtības, ar kurām skolēns var saskarties, un dalieties ar vispārējās izglītības skolotāju. Apsveriet iespēju izmantot rīkus, kas var pārvērst matemātikas tekstu runā. Dodiet iespēju skolēniem strādāt kopā, kuri ir labāki lasīšanā, bet vājāki procedūrās (ja tā ir skolēna ar speciālām vajadzībām stiprā puse).	Nodrošiniet būtiskākos vārdus ar attēliem un terminu atkārtošanu, lai atbalstītu ar valodu saistītas grūtības. Dodiet vairāk laika valodas apstrādei un lasiet norādījumus skaļi.
Lasīšana		
	Izmantojiet digitālās tehnoloģijas, lai atbalstītu lasāmā materiāla pieejamību. Nodrošiniet mutiskus skaidrojumus pēc teksta izlasīšanas. Izmantojiet struktūru, piemēram, lai palīdzētu skolēniem ar lasīšanu: ko es zinu no šajā uzdevumā norādītās informācijas; kuru informāciju man nav nepieciešams zināt, lai atrisinātu šo uzdevumu; ko tieši šis uzdevums prasa man atrast; kuru stratēģiju vai darbību es izmantošu, lai atrisinātu šo uzdevumu?	

Rakstīšana		
	Apsveriet iespēju izmantot datorprogrammatūru, lai rakstītu matemātiskas izteiksmes.	Ļaujiet skolēniem mutiski atbildēt uz jūsu jautājumiem. Ja jums nav laika uzreiz, piedāvājiat izmantot ierakstu, lai jūs varat noklausīties viņu atbildes vēlāk. Nodrošiniat strukturētus vai daļēji iesāktus uzdevumus un lūdziet skolēniem aizpildīt trūkstošās vietas.
Runāšana		
	Apsveriet iespēju ļaut skolēniem praktizēt runāšanu nelielās grupās vai pāros, lai mazinātu stresu.	Skolēnam, kuram var būt runas problēmas, dodiet iespēju darboties grupās, kur klasesbiedri ir pacietīgi un atbalstoši.
Spriešanas izaicinājumi	Iepriekš māciet konceptus, kas var radīt neskaidrības kopumā. Nodrošiniat atbalstu, lai palīdzētu skolēniem saprast uzdevuma loģiku.	Izmantojiet kooperatīvo grupu darbu, lai skolēni varētu dzirdēt, kā spriež citi skolēni. Nodrošiniat skaidru komunikāciju un struktūru, lai palīdzētu skolēniem izvairīties no neskaidrībām.
Uztveres pras-mju trūkums	Izmantojiet alternatīvu mācīšanu, lai iepriekš mācītu to, kas varētu sagādāt uztveres grūtības, un dotu ilgāku laiku tā apguvei.	Meklējiet veidus, kā dotos materiālus padarīt skaidrāk saprotamus.
Atmiņa	Nodrošiniat, lai skolēniem būtu nepieciešamie rīki, kas atbalstītu viņu matemātiskas zināšanas.	Nodrošiniat, lai skolēni netiktu sodīti par lēnu matemātiskas apguvi, bet lai viņi meklētu dziļāku izpratni. Pārbaudes darbos dodiet mazāk uzdevumu, ļaujiet skolēniem izmantot atgādnas, lai samazinātu problēmas ar atcerēšanos.

Skolēniem ar papildu atbalsta vajadzībām bieži vien ir grūti piepildīt vajadzības, kas saistītas ar labbūtību skolā, proti, izjust piederību, iesaisti un saikni, – tas var novest pie skolēnu atstumtības, nevis iekļaušanas. Iekļaujošā izglītība ir ne tikai ideoloģija, bet arī process. Neatkarīgi no tā, kāds konkrēts skatījums uz iekļaušanu ir sistēmai, skolai un skolotājiem, un neatkarīgi no tā, vai galvenā uzmanība tiek pievērsta kādai konkrētai skolēnu grupai, šajā procesā ir jāiesaista visi darbinieki, skolēni un skolas kopiena (Hoppey & McLeskey, 2013). Vēlams samazināt šķēršļus mācībām un līdzdalībai visiem skolēniem, ne tikai skolēniem ar mācīšanās traucējumiem vai tiem, kuri ir klasificēti kā skolēni “ar īpašām mācīšanās vajadzībām”. To var izdarīt, mentorējot jaunos skolotājus, veicinot skolotāju profesionālo pilnveidi, nodrošinot kopīgu plānošanas laiku un citus resursus, izveidojot skaidru saziņu, atbalstot komandas darbu un veicinot skolotāju atbildību (*ownership*) par procesiem un rezultātiem (Florian, 2012; Smith & Tyler, 2011). Skolotājiem ir jātic, ka visi skolēni ir spējīgi mācīties, var piedalīties un dot savu ieguldījumu klases darbā (Sharma, 2012, p. 53). Viņiem ir jābūt elastīgiem, īstenojot mācību programmas, jābūt gataviem individualizēt mācīšanos atbilstoši dažādām vajadzībām, kur atšķirības tiek uzskatītas par daļu no cilvēcības (*part of the human condition*) (Osberg & Biesta, 2010, p. 605). Turklāt šajā procesā ir jāiesaista paši skolēni ar atbalsta vajadzībām (Messiou, 2012), kā arī pārējie klasesbiedri, citādi process ir izslēdzošs, koncentrējoties tikai uz skolēniem ar atbalsta vajadzībām, kaut gan arī pārējie ir daļa no procesa, lai visi justos pietiekami ērti un varētu piedalīties mācību stundās. Iekļaušanas process ir nevis lineārs, bet gan komplekss.

1.7.4. Skolēnu uzvedības veidošana

Kā jau iepriekš minēts, uzvedība ir viens no faktoriem, kas var veicināt vai bremzēt skolēnu mācīšanos. Iekļaujoša izglītība prasa ne tikai pielāgotas mācību metodes, bet arī efektīvu klasvadību, lai sagādātu skolēniem drošu un atbalstošu mācību vidi. Skolēnu uzvedība klasē ir viens no būtiskākajiem izaicinājumiem, ar ko ikdienā saskaras skolotāji. Uzvedība ir cieši saistīta ar skolēnu individuālajām vajadzībām, emocionālo stāvokli un mācīšanās motivāciju. Lai izveidotu **pozitīvu mācību vidi**, skolotājiem jāīsteno stratēģiskā plānošana un jāizmanto efektīvas pedagoģiskās pieejas, kas palīdz gan novērst, gan koriģēt nevēlamu uzvedību (Horner & Macaya, 2018).

Klases vadībā būtiska loma ir skaidriem uzvedības standartiem, kas nosaka skolēnu un skolotāju tiesības un pienākumus. Lai izvairītos no konfliktsituācijām un traucējumiem mācību procesā, skolotājiem jāizstrādā noteikumi, kurus skolēni

var viegli saprast un pieņemt. Izstrādājot uzvedības noteikumus, jāņem vērā to loģiskums un skaidrība – skolēni daudz labāk ievēro noteikumus, ja tie ir formulēti pozitīvā veidā un uzsver vēlamo rīcību, nevis tikai aizliegumus.

Viens no biežākajiem iemesliem, kāpēc skolēni pārkāpj uzvedības noteikumus, ir vēlme pēc skolotāja uzmanības. Daudzi skolēni cenšas pievērst sev uzmanību dažādos veidos – ar skaļu runāšanu, pārtraukšanu, pat agresīvu uzvedību. Šāda rīcība bieži vien rada skolotājos aizkaitinājumu vai dusmas, taču ir svarīgi saprast, ka nevēlamas uzvedības pamatā var būt skolēna vēlme tikt pamanītam un iesaistītam klasē. Ja skolotājs spēj piedāvāt alternatīvas, kā skolēni var iegūt uzmanību, piemēram, aktīvi iesaistoties mācību procesā, nevēlama uzvedība var būtiski samazināties (Dreikurs, 1968).

Vēl viens izaicinājums ir skolēnu vēlme demonstrēt varu. Daži skolēni uzskata, ka viņiem ir jākontrolē situācija klasē, un mēģina izaicināt skolotāja autoritāti, nepakļaujoties norādījumiem vai radot konfliktus ar citiem skolēniem. Šajā situācijā skolotājam ir svarīgi saglabāt mieru un izvairīties no spēka demonstrācijas, jo cīņa par varu bieži vien pastiprina nevēlamu uzvedību. Efektīvākā stratēģija ir piedāvāt skolēniem izvēles iespējas, ļaujot viņiem pašiem pieņemt atbildīgus lēmumus par savu rīcību. Tādējādi skolēni nejūtas piespiesti, bet gan tiek motivēti sadarboties.

Dažreiz skolēnu uzvedību nosaka vēlme atriebties – tas var izpausties kā agresīva vai destruktīva rīcība, kas vērsta pret skolotājiem vai citiem skolēniem. Šāda uzvedība bieži vien rodas situācijās, kad skolēns jūtas netaisnīgi sodīts vai nesaprasts. Skolotājam ir jāspēj atpazīt skolēnu emocijas un veidot komunikāciju, kas palīdz atrisināt konfliktus, nepadziļinot tos vēl vairāk. Skolēniem jādod iespēja izteikt savas sajūtas un apspriest problēmas mierīgā veidā.

Būtisks izaicinājums ir arī skolēni, kuri demonstrē nespēju vai atsakās sadarboties mācību procesā. Šādi skolēni var izvairīties no mācību uzdevumiem, jo nejūtas pietiekami spējīgi tos izpildīt vai baidās no neveiksmes. Šajā gadījumā skolotāja uzdevums ir radīt vidi, kurā skolēns jūtas drošs un motivēts pamēģināt, sniedzot atbalstu un uzmundrinājumu.

Lai skolotāji varētu efektīvi pārvaldīt skolēnu uzvedību, viņiem ir jāpārskata savas reakcijas uz nevēlamu rīcību. Bieži vien skolotāja reakcija var pastiprināt nevēlamu uzvedību – ja skolēns meklē uzmanību un skolotājs to sniedz, pat ar kritiku, skolēns var turpināt šādi uzvesties, jo ir sasniedzis savu mērķi. Dažkārt skolotāji izmanto ignorēšanu kā stratēģiju, taču tā darbojas tikai tad, ja tiek konsekventi pielietota un vienlaikus tiek sniegta pozitīva atsauksme par vēlamo uzvedību. Ignorēšana nedrīkst kļūt par vienīgo pieeju – ir svarīgi aktīvi stiprināt skolēnu pozitīvās sociālās prasmes, sniedzot viņiem iespējas sadarboties un gūt panākumus.

Uzvedības korekcijai efektīvas ir arī loģiskas sekas – tās palīdz skolēniem saprast, ka viņu rīcība ietekmē viņus pašus un apkārtējos. Piemēram, ja skolēns traucē

citiem mācīties, viņš tiek nosēdināts atsevišķi, lai neietekmētu klases dinamiku. Loģiskām sekām jābūt saprotamām un atbilstošām konkrētajai situācijai, pretējā gadījumā tās var radīt neizpratni vai pat pretestību.

Lai veidotu pozitīvu un disciplinētu klases vidi, skolotājam jāspēj radīt drošu telpu, kurā skolēni jūtas iesaistīti un motivēti. Diskusijas klasē var būt lielisks instruments, kas palīdz skolēniem saprast savas uzvedības ietekmi uz citiem. Svarīgi ir, lai skolēni aktīvi piedalītos noteikumu izstrādē un izprastu to nozīmīgumu. Skolēnu uzvedība nav vienkāršs jautājums, un tās korekcija prasa konsekventu un pārdomātu pieeju. Tas ir nepārtraukts mācīšanās un pielāgošanās process, kurā svarīga ir skolotāja spēja veidot cieņpilnas attiecības ar skolēniem, atbalstīt viņu izaugsmi un radīt motivējošu un respektējošu mācību vidi.

1.7.5. Matemātiskā trauksme

Pēdējā laikā aktuāls faktors, kas tiek pētīts un kas var kavēt mācīšanos, ir matemātiskā trauksme. Matemātiskā trauksme ir “stresa un trauksmes sajūta, kas traucē rēķināt un risināt matemātiskas problēmas dažādās ikdienas un akadēmiskās situācijās” (Richardson & Suinn, 1972). Tā sastāv no diviem komponentiem – matemātikas mācīšanās (saistīta ar matemātikas uzdevumu risināšanu, sekošanu skolotāja norādēm, sarunām ar klasesbiedriem par matemātiku) un matemātikas pārbaudījumu trauksmes (dažādi matemātikas testi, pārbaudes darbi u. c. procesi, kas saistīti ar vērtēšanu) (Hopko et al., 2003). Skolēni, kuriem ir matemātiskā trauksme, ir mazāk motivēti mācīties matemātiku un izvairās to darīt (Zhang et al., 2019). Matemātiskā trauksme ir viens no faktoriem, kas ietekmē skolēna sniegumu matemātikā (PISA 2022) (Dowker et al., 2016).

Matemātiskās trauksmes aizmetņi var parādīties gan pirmsskolā, gan skolas vecumā, tās intensitāte parasti pieaug ar katru nākamo izglītības gadu (līdz kulminē aptuveni vidusskolā) (Szczygieł & Pieronkiewicz, 2022). Matemātiskā trauksme vēlākos skolas gados var būt saistīta ar zemu motivāciju agrākos gados un var būt sekas izpratnes trūkumam par matemātikas jēgu. Taču pētnieki joprojām nezina, vai matemātiskā trauksme ir sekas vai cēlonis matemātikas izpratnes trūkumam, taču cēlonis un sekas ir nenoliedzami saistīti un veido lejupejošu spirāli – pieaugot trauksmei, paaugstinās izvairīšanās no matemātikas, un tas izraisa zināšanu un prasmju “robus, kas palielina neizdošanās sajūtu, kura palielina trauksmi”, un tā cikliski uz leju.

Faktori, kas var ietekmēt matemātiskās trauksmes veidošanos (Petronzi et al., 2019):

- negatīva pirmā pieredze matemātikā;
- negatīva pieredze matemātikas stundās, kas saistīta ar stingriem skolotāja noteikumiem un matemātikas likumiem;
- skolēna personība, īpaši kautrība un zema pašapziņa;
- intelektuālie faktori, tostarp attieksme, šaubas par sevi, pārliecība un matemātikas uzskatīšana par nevajadzīgu;
- saspringtas attiecības starp skolēniem un skolotāju, liels spiediens;
- tas, ka skolēni apzinās savu spēju trūkumu, sāk apzināties inteliģences hierarhiju;
- neveiksmju pieņemšana, bailes kļūdīties;
- sāncensība;
- matemātikas uzdevumu rēķināšana kā sods;
- kļūdišanās, vērtēšana klases priekšā.

Katra negatīvā pieredze, ko skolēns piedzīvo saistībā ar matemātiku, ir vēl viena kārtā, kas veido skolēna matemātiskās trauksmes slāņus, un, jo vairāk negatīvo pieredžu šajā priekšmetā, jo lielāka trauksme. Taču katram indivīdam pieredžu skaits, intensitāte un nozīmīgums, kas izraisa trauksmi, ir atšķirīgs.

Matemātisko trauksmi skolēnam var ietekmēt arī ārēji faktori – iespējams, negatīvu attieksmi skolēni var aizgūt no vecākiem (Gunderson et al., 2012), t. i., ja vecākiem nav padevusies matemātika un viņi pieņem, ka viņu bērniem arī neveiksies, vai ja pret bērniem nav nekādu gaidu saistībā ar matemātiku.

Būtiski, ka matemātiskā trauksme daudziem skolēniem neļauj parādīt savu potenciālu – ir skolēni ar matemātisko trauksmi, kuri var uzrādīt līdzīgu sniegumu kā vienaudži ar matemātiku nesaistītos domāšanas un spriešanas uzdevumos, taču uzrāda zemāku sniegumu matemātikas uzdevumos (Maloney & Beilock, 2012). Starptautiskā salīdzinājumā redzams, ka Latvijā ir vairāk 15 gadus vecu skolēnu ar mācību trauksmi matemātikā, nekā tas ir vidēji OECD dalībvalstīs (PISA 2022), kā arī 4. klašu skolēniem mazāk patīk matemātika nekā vidēji TIMSS2023 pētījuma dalībvalstu skolēniem.

Ja gribam palīdzēt skolēniem uzlabot viņu matemātisko pratību, ir vērts palīdzēt veidot pozitīvas attiecības ar matemātiku. To var darīt vairākos veidos (Turner et al., 2002):

- veidojot atbalstošas sarunas stundā – kur skolotājs izrāda augstas gaidas pret visiem skolēniem (skolēni redz, ka skolotājs tic viņu spējām) un kurās uzsvērta mācīšanās, prasmju uzlabošana un izpratne pretēji sarunām, kas ir tikai instruējošas un vērtējošas
- organizējot mērķorientētu mācību procesu, kur skolēnam ir zināms, kas jādara, kā jādara un kāpēc jādara. Kā mācīšanās mērķis tiek uzsvērts nevis

sniegt pareizās atbildes un būt labākam par citiem (*performance goal*), bet gūt izpratni un uzlabot savas prasmes (*mastery goal*);

- veidojot drošu vidi – neveicinot kaunēšanos vai jušanos neadekvātam par nepareizām atbildēm vai atbilžu trūkumu, lai pieļautu arī kļūdīšanos un piedzīvotu izdošanos (vairāk sk. 1.6. nodaļā).

Skolēni labāk jūtas tādās matemātikas stundās, kurās ir uzsvars uz mācīšanos un izpratni un kurās tiek novērtēta piepūle un atrasta vieta priekam.



Jautājumi pārdomām

Kādas stratēģijas es varu izmantot, lai atbalstītu skolēnus ar dažādām vajadzībām?

Kā es varu veicināt skolēnu aktīvu līdzdalību un iesaisti mācību procesā?

Kādas metodes es varu izmantot, lai atpazītu skolēnu individuālās vajadzības un grūtības?

Kā es varu pielāgot mācību saturu un uzdevumus, lai tie būtu pieejami visiem skolēniem?

Kā es varu veicināt sadarbību un cieņu starp skolēniem?

Kā es varu radīt drošu vidi, kurā skolēni jūtas iesaistīti un motivēti mācīties?

Kādi digitālie rīki var palīdzēt padarīt abstraktus jēdzienus saprotamus visiem skolēniem?

Literatūra tālākai uzziņai

Ainscow, M. (2020). Promoting Inclusion and Equity in Education: Lessons from International Experience. *Nordic Journal of Studies in Educational Policy*, 6(1), 7–16.

Ainscow, M., Booth, T., & Dyson, A. (2006). *Improving Schools, Developing Inclusion*. Routledge: London, UK.

Antoninis, M., April, D., Barakat, B., Bella, N., D'Addio, A. C., Eck, M., Operation, F., Joshi, P., Kubacka, K., McWilliam, A., Murakami, Y., Smith, W., Stipanovic, L., Vidarte, R., & Zekryal, L. (2020). *All Means All: An Introduction to the 2020 Global Education Monitoring report on Inclusion*. Prospects, 49, 103e109.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the Theory of Formative Assessment. *Education Assessment Evaluation Accountability*, 21(1), 5–31. <https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5>

Booth, T., & Ainscow, M. (2011). *Index for Inclusion: Developing Learning and Participation in Schools*. Centre for Studies on Inclusive Education, Bristol.

Boyle, C., & Anderson, J. (2020). The Justification for Inclusive Education in Australia. *Prospects: Quarterly Review of Comparative Education*, 49(3–4), 203–217.

Boyle, C., Topping, K., & Jindal-Snape, D. (2013). Teachers' Attitudes towards Inclusion in High Schools. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 19(5), 527–542.

Casey, G. (2013). Interdisciplinary Literacy through Social Media in the Mathematics Classroom: An Action Research Study. *Journal of Adolescent & Adult Literacy*, 57(1), 60–71. <https://doi.org/10.1002/jaal.216>

Clerk, R. C., Nguyen, F., & Sweller, J. (2011). *Efficiency in Learning: Evidence-Based Guidelines to Manage Cognitive Load*. John Wiley & Sons, NJ.

- Cuturi, L. F., Cappagli, G., Yiannoutsou, N. et al. (2022). Informing the Design of a Multisensory Learning Environment for Elementary Mathematics Learning. *Journal of Multimodal User Interfaces*, 16, 155–171. <https://doi.org/10.1007/s12193-021-00382-y>
- Dally, K., Ralston, M. M., Strnadová, I., Dempsey, I., Chambers, D., Foggett, J., Paterson, D., Sharma, U., McHatton, A., & McCray, E. D. (2007). Inclination toward Inclusion: Perceptions of Elementary and Secondary Education Teacher Candidates. *Action in Teacher Education*, 29(3), 25–32.
- Dieker, L. A., Stephan, M., & Smith, J. (2012). Secondary Mathematics Inclusion: Merging with Special Education. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 18(5), 292–299. <https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.18.5.0292>
- Dowker, A., Sarkar, A., & Looi, C. Y. (2016). Mathematics Anxiety: What Have We Learned in 60 Years? *Frontiers in Psychology*, 7, 508. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00508>
- Dreikurs, R. (1968). *Psychology in the Classroom*. Harper & Row.
- Faragher, R., Hill, J., & Clarke, B. (2016). Inclusive Practices in Mathematics Education. In *Research in Mathematics Education in Australasia 2012–2015* (pp. 119–141). Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-10-1419-2_7
- Finkelstein, S., Sharma, U., & Furlonger, B. (2021). The Inclusive Practices of Classroom Teachers: A Scoping Review and Thematic Analysis. *International Journal of Inclusive Education*, 25(6), 735–762.
- Florian, L. (2012). Preparing Teachers to Work in Inclusive Classrooms: Key Lessons for the Professional Development of Teacher Educators from Scotland's Inclusive Practice Project. *Journal of Teacher Education*, 63(4), 275–285.
- Garcia-Melgar, A., Hyett, N., Bagley, K., McKinstry, C., Spong, J., & Iacono, T. (2022). Collaborative Team Approaches to Supporting Inclusion of Children with Disability in Mainstream Schools: A Co-design Study. *Research in Developmental Disabilities*, 126. <https://doi.org/10.1016/j.ridd.2022.104233>
- Gunderson, E. A., Ramirez, G., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2012). The Role of Parents and Teachers in the Development of Gender-Related Math Attitudes. *Sex Roles*, 66, 153–166.
- Hattie, J., & Hamilton, A. (2020). *Real Gold vs. Fools Gold: The visible learning methodology for finding what works best in education*. Corwin Press, Inc.
- Hernandez, D. A., Hueck, S., & Charley, C. (2016). General Education and Special Education Teachers' Attitudes towards Inclusion. *Journal of the American Academy of Special Education Professionals*, Fall, 79–93.
- Ho, H.-Z., Senturk, D., Lam, A. G., Zimmer, J. M., Hong, S., & Okamoto, Y. (2000). The Affective and Cognitive Dimensions of Math Anxiety: A Cross-National Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(3), 362–379.
- Hopko, D. R., Mahadevan, R., Bare, R. L., & Hunt, M. K. (2003). The Abbreviated Math Anxiety Scale (AMAS): Construction, Validity, and Reliability. *Assessment*, 10(2), 178–182. <https://doi.org/10.1177/1073191103010002008>
- Hoppey, D., & McLeskey, J. (2013). A Case Study of Principal Leadership in an Effective Inclusive School. *Journal of Special Education*, 46(4), 245–256.
- Horner, R. H. & Macaya, M. M. (2018). A Framework for Building Safe and Effective School Environments: Positive Behavioral Interventions And Supports (PBIS). *Pedagogická orientace*, 28(4), 663–685.

- Hott, B., Jones, B., Randolph, K., Kuntz, E., McKenna, J., & Brigham, F. (2021). Lessons Learned from a Descriptive Review of Rural Individualized Education Programs. *The Journal of Special Education*, 55(3), 163–173. <https://doi.org/10.1177/0022466920972670>
- Kramarski, B., & Mevarech, Z. R. (2003). Enhancing Mathematical Reasoning in the Classroom: The Effects of Cooperative Learning and Metacognitive Training. *American Educational Research Journal*, 40, 281–310.
- Lindner, K. T., & Schwab, S. (2020). Differentiation and Individualisation in Inclusive Education: A Systematic Review and Narrative Synthesis. *International Journal of Inclusive Education*, 1–21. <https://doi.org/10.1080/13603116.2020.1813450>
- Maloney, E. A., & Beilock, S. (2012). Math Anxiety: Who Has It, why It Develops, and how to Guard Against It. *Trends in Cognitive Sciences*, 16, 404–406.
- Messiou, K. (2012). Collaborating with Children in Exploring Marginalisation: An Approach to Inclusive Education. *International Journal of Inclusive Education*, 16(12), 1311–1322.
- Monteiro, V., Carvalho, C., & Santos, N. N. (2021). Creating a Supportive Classroom Environment Through Effective Feedback: Effects on Students' School Identification and Behavioral Engagement. *Frontiers in Education*, 6, 661–736. <https://doi.org/10.3389/feduc.2021.661736>
- Novak, K. (2022). *UDL now! A Teacher's Guide to Applying Universal Design for Learning*. G. Couros (ed.). Third edition. CAST Professional Publishing.
- Osberg, D., & Biesta, G. (2010). The End/s of Education: Complexity and the Conundrum of the Inclusive Educational Curriculum. *International Journal of Inclusive Education*, 14(6), 593–607.
- Petronzi, D., Staples, P., Sheffield, D., & Hunt, T. (2019). Acquisition, Development and Maintenance of Maths Anxiety in Young Children. *Mathematics Anxiety*. Routledge.
- Prince, E. J., & Hadwin, J. (2012). The Role of a Sense of School Belonging in Understanding the Effectiveness of Inclusion of Children with Special Educational Needs. *International Journal of Inclusive Education*, 17(3), 238–262. <https://doi.org/10.1080/13603116.2012.676081>
- Qvortrup, A., & Qvortrup, L. (2018). Inclusion: Dimensions of Inclusion in Education. *International Journal of Inclusive Education*, 22(7), 803–817.
- Richardson, F. C., & Suinn, R. M. (1972). The Mathematics Anxiety Rating Scale: Psychometric Data. *Journal of Counseling Psychology*, 19(6), 551–554.
- Roldan, S. M., Marauri, J., Aubert, A., & Flecha, R. (2021). How Inclusive Interactive Learning Environments Benefit Students Without Special Needs. *Frontiers in Psychology*, 12, 1–12. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.661427>
- Sharma, U. (2012). Changing Pre-Service Teachers' Beliefs to Teach in Inclusive Classrooms in Victoria, Australia. *Australian Journal of Teacher Education*, 37(5), 53–66.
- Smith, D. D., & Tyler, N. C. (2011). Effective Inclusive Education: Equipping Education Professionals with Necessary Skills and Knowledge. *Prospects*, 41, 323–339.
- Szczygieł, M., & Pieronkiewicz, B. (2022). Exploring the Nature of Math Anxiety in Young Children: Intensity, Prevalence, Reasons. *Mathematical Thinking and Learning*, 24(3), 248–266. <https://doi.org/10.1080/10986065.2021.1882363>
- Turner, J. C., Midgley, C., Meyer, D. K., Gheen, M., Anderman, E. M., Kang, Y., & Patrick, H. (2002). The Classroom Environment and Students' Reports of Avoidance Strategies in

- Mathematics: A Multimethod Study. *Journal of Educational Psychology*, 94(1), 88–106. <https://doi.org/10.1037//0022-0663.94.1.88>
- Valsts izglītības satura centrs. (2020). *Domāt. Darīt. Zināt*. Ziņu izdevums skolotāju atbalstam pilnveidotā mācību satura un pieejas īstenošanai, Nr. 12.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics Teaching Developmentally*. Boston MA: Allyn & Bacon.
- Voisiner, J., & van der Veer, R. (2013). The Encoding of Distance: The Concept of the Zone of Proximal Development and Its Interpretations. In *The Development and Meaning of Psychological Distance*. Psychology Press.
- Witzel, B. S., & Little, M. E. (2016). *Teaching Elementary Mathematics to Struggling Learners*. New York, NJ: The Guilford Press.
- Witzel, B. W., & Allsopp, D. (2007). Dynamic Concrete Instruction in an Inclusive Classroom. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(4), 244–248.
- Zhang, J., Zhao, N., & Kong, Q. P. (2019). The Relationship between math Anxiety and math Performance: A Meta-Analytic Investigation. *Frontiers in Psychology*, 10, 1613. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.01613>

1.8. Digitālās tehnoloģijas un to lietojums

1.8.1. Matemātiskās prasības attīstība un pilnveide digitālajā laikmetā

OECD (2024) pētījumā secināts, ka patstāvīgiem un mācīties gribošiem skolēniem papildus pašmotivācijai ir nepieciešamas digitālās navigācijas prasmes. Skolotājiem ir vajadzīgas zināšanas par skolēnu iepriekšējām prasmēm un izpratni par digitālo prātību, par kritiskās domāšanas prasmēm, kā arī atbalstošu un atbildīgu attieksmi. Skolotājiem vajadzētu būt spējīgiem vadīt savus skolēnus, atpazīstot uzticamus avotus, identificējot aizspriedumus, veicot pētījumus tiešsaistē un saprotot, kā digitālais saturs tiek veidots un ietekmēts ar algoritmiem. Papildus tehniskajām prasmēm skolotāji var pilnvarot skolēnus kļūt par atbildīgiem digitālajiem pilsoņiem, mācot noteiktas attieksmes un vērtības, piemēram, cieņu pret intelektuālo īpašumu, datu privātumu, digitālo drošību, iekļaušanu un līdzsvarotus digitālos paradumus labklājībai. Iekļaujot digitālo prātību matemātikas mācību programmā, tiek nodrošināts, ka skolēni ne tikai apgūst matemātiskos konceptus, bet arī spēj izmantot digitālos rīkus, lai risinātu sarežģītas problēmas. Digitālā prātība ļauj skolēniem apstrādāt datus, veidot modeļus un izmantot simulācijas, kas kļūst arvien nozīmīgākas dažādās nozarēs, piemēram, inženierijā, finansēs un digitālajās tehnoloģijās.

Tai pašā laikā jāņem vērā digitālo tehnoloģiju radītie riski, piemēram, tehnoloģisko rīku izmantošanas apjoms matemātikas stundās. Lai gan digitālajām tehnoloģijām ir potenciāls uzlabot mācīšanos, tās var novest arī pie neiesaistīšanās un uzmanības novēršanas, ja tiek slikti izmantotas, arī nevienlīdzīga piekļuve šādiem rīkiem var būt problēma (OECD, 2024).

Pēdējos gados mācīšanās digitālajā vidē kļuvusi ne tikai aktuāla, īpaši pandēmijas ietekmē, bet arī būtiska, lai nodrošinātu nepārtrauktu izglītības procesu, tajā skaitā sākumskolas matemātikā. Skolēni, skolotāji un vecāki bija spiesti strauji pielāgoties digitālo tehnoloģiju izmantošanai, un tas ir paliekoši ietekmējis mācību paradumus un pieejas. Joprojām ir aktuāls jautājums, kādas digitālās tehnoloģijas izmantot mācību procesā un kā to darīt, nodrošinot līdzsvaru starp tradicionālajām mācīšanās pieejām un tām, kas balstītas digitālajās tehnoloģijās, lai attīstītu un pilnveidotu skolēnu zināšanas un prasmes matemātikā.

Digitālās tehnoloģijas izglītības vidē tiek arvien plašāk izmantotas, tās piedāvā jaunas iespējas mācību procesa organizēšanai un skolēnu iesaistei mācību procesā. Digitālās tehnoloģijas var bagātināt izglītības saturu, radot dinamisku un interaktīvu mācību pieredzi, kā arī pielāgojot uzdevumus skolēnu individuālajām vajadzībām. Arvien aktuālāka kļūst arī mākslīgā intelekta lietošana sākumskolas matemātikā. Tas var sniegt skolēniem personalizētu atbalstu, pielāgojot uzdevumus viņu individuālajām vajadzībām un veicinot dziļāku izpratni. Mūsdienās mākslīgais intelekts darbojas kā digitāls asistents, palīdzot skolotājiem analizēt skolēnu progresu un ieteikt efektīvākās mācību stratēģijas. Nākotnē tas kļūs par neatņemamu izglītības sastāvdaļu, nodrošinot dinamisku, adaptīvu un interaktīvu mācīšanās pieredzi, kas veicinās radošumu un kritisko domāšanu (Yaping & Nor, 2025). Tomēr tajā pašā laikā tas rada arī būtiskus jautājumus un izaicinājumus, kas prasa rūpīgu izvērtējumu no skolotāja puses, it īpaši, ja domājam par digitālo tehnoloģiju lietošanu sākumskolas posmā.

1.8.2. Kombinēta mācīšanās

Dons Rendijs Gerisons (*Donn Randy Garrison*) un Hetere Kanuka (*Heather Kanuka*) uzskata, ka kombinētās mācīšanās definīcija vienlaikus ir gan vienkārša, gan kompleksa. Ja to definē vienkārši, tad kombinētā mācīšanās ir pārdomāta klātienēs (*face-to-face*) mācīšanās procesa un tiešsaistes mācīšanās (*online learning*) procesa integrēšana. Kompleksums rodas tajā, ka nav noteikta robeža starp pilnībā tiešsaistē un klātienē realizētu mācīšanos ar uzsvaru uz mācīšanos, izmantojot digitālās tehnoloģijas, kas liek aplūkot kombinēto mācīšanos kā spektru ar neskaitāmi daudzām šo paņēmienu kombinācijām (Garrison & Kanuka, 2004). Apvērstās mācīšanās modeli (*flipped classroom*) klasificē kā vienu no kombinētās mācīšanās veidiem. Apvērstajā klasē skolēni veic divas galvenās aktivitātes:

- 1) apgūst saturu pirms stundas, izmantojot digitālās tehnoloģijas – lasa, skatās, pēta mācību saturu, parasti no attālas vietas, piemēram, no mājām;
- 2) stundu laikā klātienē skolēni kopā ar skolotāju turpina pildīt mācību uzdevumus.

Galvenā apvērstās klases modeļa atšķirība ir tāda, ka satura sākotnējā apguve sākotnotiek tiešsaistē, kas to atšķir no tradicionālās mājasdarbu prakses, kad skolēni tikai pabeidz vai nodod uzdevumus tiešsaistē pēc nodarbībām. Šis modelis uzsver skolēnu kontroli pār savu mācību vidi, ļaujot viņiem izvēlēties, kur un kādā tempā viņi apgūst saturu, tādējādi saskaņojot ar jauktās mācīšanās principiem, kas veicina elastību laikā, vietā, ceļā un mācīšanās tempā (Staker & Horn, 2012). Džeikobs Bišops (*Jacob L. Bishop*) un Metjū Verlegers (*Matthew A. Verleger*) apvērsto

klasi raksturo kā uz skolēnu vērstu mācību metodi, kas sastāv no interaktīvām mācīšanās aktivitātēm stundu laikā un individuālas mācīšanas, kuras pamatā ir darbs ar datoru ārpus klases (Bishop & Verleger, 2013).

Apvērstās mācīšanas modelis palīdz uzlabot skolēnu akadēmiskās zināšanas un prasmes, piemēram, pētnieki Steisija Šmita (*Stacy M. P. Schmidt*) un Deivids Ralfs (*David L. Ralph*) atsaucas uz rezultātiem, kuros 67% skolotāju atzīmē pozitīvas izmaiņas skolēnu rezultātos (Schmidt & Ralph, 2016). Džērids Montgomerijs (*Jared Montgomery*) konstatējis, ka tradicionālā apmācība, ja tā netiek apvienota ar citām stratēģijām, ir mazāk efektīva nekā apvērstās klases modeļa izmantošana – tas liecina, ka apvērstā mācīšanās palielina skolēnu mācību efektivitāti un potenciāli varētu novērst dažus tradicionālo metožu ierobežojumus, jo īpaši matemātikas izglītībā (Montgomery, 2015). Tā kā apvērstās klases modelis prasa no skolēniem aktīvāku iesaistīšanos savā izglītībā, tas var arī palīdzēt skolēniem attīstīt pašvadītās mācīšanās prasmi, jo, gatavojoties stundas uzdevumiem, skolēniem būs jāiemēcas efektīvi pārvaldīt savu mācību laiku (Sletten, 2017).

Viena no lielākajām apvērstās klases priekšrocībām sākumskolas posmā ir iespēja pielāgot mācību procesu katra skolēna individuālajām vajadzībām. Skolēni var apgūt mācību materiālus savā tempā, atkārtotot to, kas viņiem liekas sarežģītāks, un iegūstot dziļāku izpratni par mācību saturu. Tas ir īpaši svarīgi, ņemot vērā skolēnu atšķirīgos mācīšanās stilus un attīstības līmeņus šajā vecumā (Lage et al., 2000). Vēl apvērstās klases modelis veicina aktīvāku skolēnu iesaisti klasē, kur vairāk laika tiek veltīts radošām un interaktīvām aktivitātēm. Grupas darbi un diskusijas palīdz skolēniem ne tikai labāk izprast mācību saturu, bet arī attīstīt sadarbības prasmes. Šis modelis veicina arī kritisko domāšanu, jo skolēniem bieži vien tiek piedāvāti uzdevumi, kas prasa risināt problēmas vai radīt jaunas idejas (Zainuddin & Halili, 2016).

Pētījumi rāda, ka sākumskolas posmā apvērstās klases modeli var uzskatīt par veiksmīgu paņēmienu. Piemēram, Indonēzijas sākumskolā veiktajā pētījumā apvērstās klases modeļa ieviešana skolēniem deva vairākus pozitīvus rezultātus. Jo īpaši bija ievērojams mācību rezultātu uzlabojums, skolēnu vidējam iegūtajam vērtējumam pieaugot no 59% sākotnējā diagnostikā līdz 77% pirmajā ciklā un pēc tam līdz 90% otrajā ciklā, – tātad šī pieeja ļauj uzlabot matemātikas mācīšanos. Turklāt skolēni izrādīja lielāku entuziasmu un iesaistīšanos klases aktivitāšu laikā, par ko liecina to skolēnu skaita pieaugums, kuri aktīvi uzdeva jautājumus un piedalījās diskusijās par mājās skatīto video saturu un mācīšanās grūtībām. Atsauksmes no skolēniem lielākoties bija pozitīvas; viņi ziņoja, ka jūtas pārliecinātāki, elastīgāki mācību laikā un atbildīgāki par mācīšanos. Tomēr, lai gan viņi jutās spējīgi mācīties patstāvīgi, viņiem joprojām bija vajadzīgas zināmas norādes no vecākiem, kas ir raksturīgi sākumskolas klašu skolēniem (Mustadi & Retno, 2021).

Galvenās priekšrocības, ko izceļ pētnieki, ir, pirmkārt, tas, ka, sagatavojoties stundai mājās, pašā stundā paliek vairāk laika sarežģītākiem uzdevumiem un tam, lai skolotājs varētu palīdzēt katram skolēnam individuāli. Autori min arī, ka skolēniem ir vieglāk apgūt teorētisko materiālu, jo viņi var ik pa brīdim apstādināt video, taču skolotāju viņi parasti nevar "apstādināt" (Bergmann & Sams, 2015). Savukārt viens no ievērojamākajiem izaicinājumiem, kas saistīts ar apvērsts klases modeļa ieviešanu, ir tehniskas problēmas, ar kurām saskārās daži skolēni, piemēram, grūtības ar video atskaņošanu, lejupielādi vai apturēšanu. Skolēniem bija nepieciešams vecāku atbalsts, kas liecina par izaicinājumu sasniegt pilnīgu neatkarību mācību aktivitātēs, kā arī par to, ka skolēnu tehnoloģiskās spējas ir atšķirīgas. Paļaušanās uz vecāku atbalstu ir īpaši svarīga sākumskolas klašu skolēniem, kuri vēl tikai mācās patstāvīgi mācīties (Mustadi & Retno, 2021; Susanti et al., 2024). Viens no nozīmīgiem izaicinājumiem skolotājam ir līdzsvarot laiku, kas pavadīts, skatoties video stundu laikā, jo tas ierobežo iespējas piedalīties grupu diskusijās vai praktiskās aktivitātēs, kas ir būtiskas dziļākas izpratnes izveidošanai. Vēl viens izaicinājums ir nodrošināt, lai visi skolēni varētu piekļūt videoierakstiem ārpus stundas. Skolotājam jāņem vērā dažādie skolēnu piekļuves līmeņi digitālajām tehnoloģijām un atbalstam mājās. Kāda skolotāja atzina, ka tikai ar matemātikas priekšmeta zināšanām vien nepietiek, lai izveidotu tiešām uzskatāmus videomateriālus. Kopumā šie izaicinājumi uzsver nepieciešamību pēc pastāvīga atbalsta un resursiem skolotājiem, kuri pamatskolā īsteno apvērsto mācīšanos (Webel et al., 2018).

1.8.3. Digitālo tehnoloģiju izmantošana

Digitālās tehnoloģijas prasmju apguvē

Datu apstrāde un vizualizācija. Skolēni var uzkrāt un apstrādāt vienkāršus datus, piemēram, reģistrēt mērījumu rezultātus, uzņemt fotogrāfijas, lai fiksētu novērojumus, veidot grafikus.

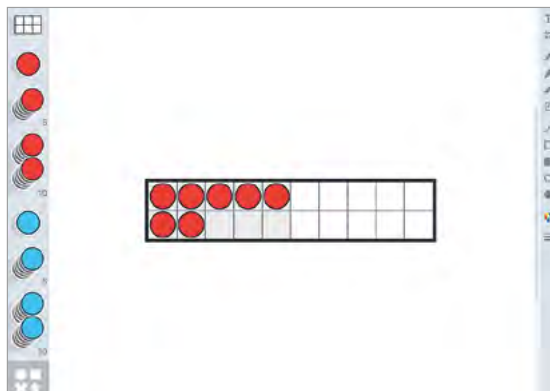
Skaitļošanas prasmes. Matemātikas spēles un lietotnes ir vide, kurā skolēni var vingrināties aritmētikā, pilnveidot skaitļošanas prasmes un to veiklību.

Lai skolēni pilnveidotu savu skaitļu izjūtu, var palīdzēt dažādas digitālas vizualizācijas, ko sākotnēji var izmantot skolotājs, darbojoties kopā ar skolēniem, vai skolēni, paši vizualizējot un stāstot, kā sprieduši, piemēram, izmantojot *Math Learning Center* organizācijas izveidotās lietotnes ([mathlearningcenter.org](https://www.mathlearningcenter.org)).

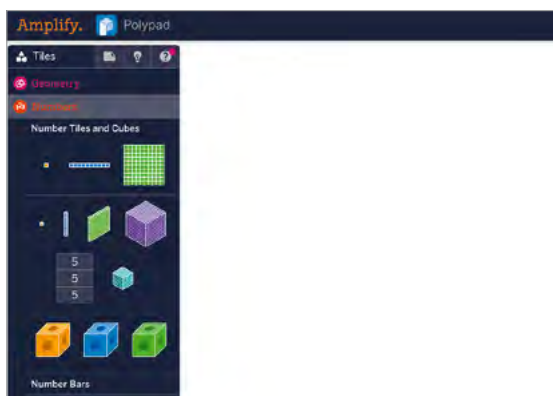
<https://www.mathlearningcenter.org/apps> 60. att.



60. att.



61. att.



Šajā lietotnē iespējams dažādi vingrināties, piemēram, skolotājs vai skolēns var vizualizēt saskaitīšanu, izmantot skaitļu asi, lai ilustrētu sadalāmības īpašību, reizināšanā var lietot sadaļu *Partial Product*.

Dažādas prasmes, tai skaitā skaitļošanas prasmes, var apgūt, izmantojot video, kuros skaidrots, kā to dara. Viens no piemēriem, kas var būt noderīgs gan skolotājiem, gan vecākiem, ir par to, kā skaitīšanu padarīt efektīvu sākumskolas vecuma bērniem.

<https://www.siic.lu.lv/resursi/video-serijas-padomi-gan-vecakiem-gan-skolotajiem/sakumskolas-matematika/>



Pētniecības un eksperimentēšanas prasmes. Simulācijas rada iespēju veikt eksperimentus un pārbaudīt hipotēzes drošā vidē. Izmantojot simulācijas un animācijas, skolēni var mācīties novērot procesus un veikt vispārinājumus. Novērot, eksperimentēt, būt radošam un veikt vispārinājumus var, izmantojot virtuālos priekšmetiskās darbības rīkus, piemēram, *Polypad* (polypad.amplify.com).

61. att.

Izmantojot šo rīku, skolēniem ir iespējams nosūtīt atbildes skolotājam, viņi var saglabāt savus darbus kā attēlus (jpg un png failus).

Telpiskā domāšana. Telpisko domāšanu var attīstīt un pilnveidot ar mācību uzdevumiem, kuru veikšanai vajadzīga spēja prātā vizualizēt objektu izskatu un novietojumu no dažādiem skatpunktiem; izpratne par attiecībām starp objektiem telpā, piemēram, kur viens objekts atrodas attiecībā pret otru (virs, zem, pa labi, pa kreisi, tuvāk, tālāk u. tml.); spēja manipulēt ar objektiem prātā, piemēram, iztēloties, kā izskatīsies objekts, ja tas tiks pagriezts vai salocīts; spēja interpretēt kartes, diagrammas, modeļus – piemēram, saprast, kāda ir reljefa karte, kā diagramma attēlo realitāti. Telpiskā domāšana ir nozīmīga gan matemātikā, gan dabaszinībās, gan ikdienas dzīvē, piemēram, matemātikā ģeometrisku figūru un telpisko attiecību izpratnei; dabaszinībās izpratnei par modeļiem; mākslas un dizaina procesos, kur nepieciešams veidot telpisko objektu vai elementu kombināciju; ikdienas dzīvē, lai orientētos apkārtnē, izmantotu kartes, izvietotu mēbeles telpā u. tml. Tiešsaistes matemātiskās platformas vai programmas, piemēram, *GeoGebra*, palīdz vizualizēt ģeometrijas uzdevumus.

Sadarbības un komunikācijas prasmes. Lai attīstītu un pilnveidotu sadarbības prasmes, skolēni var darboties platformās, kurām ir koplietošanas iespējas – piemēram, virtuālās sienas, kopdokumenti u. tml.

Radošums un kritiskā domāšana. Izmantojot 3D modelēšanas programmas vai digitālo stāstu programmatūru, skolēni var radīt paši savus projektus. Tālāk tiks apskatīti piemēri, kā attīstīt un pilnveidot skolēnu zināšanas un prasmes matemātikā, mācību procesā izmantojot digitālos rīkus.

Sadarbības prasmju pilnveide savstarpējā mācīšanāsā (*peer tutoring*). Skolēni, mācot cits citu, tiek rosināti formulēt savas domas, paskaidrot un pamatot viedokli, uzdot jautājumus, kā arī reflektēt par savām zināšanām. Zināšanu apguve kā sociāla aktivitāte ir ļoti nozīmīga mācību procesā, izmantojot digitālos rīkus. Somijas pieredzes pētījumā (Oikarinen et al., 2022) vispirms visi 6. klašu matemātikas skolotāji apguva, kā veikt uzdevumus, izmantojot digitālos rīkus – *GeoGebra*, *L'Math* un citus, kas ir piemēroti atbilstošajam sākumskolas matemātikas mācību saturam. 6. klases skolēni apguva digitālo rīku lietošanu skolotāja vadībā, lai sagatavotos mācīt, un mācīja 5. klases skolēnus. Savukārt 5. klases skolēni mācīja 4. klases skolēniem, kā, lietojot digitālos rīkus, uzrakstīt risinājumus un atrisināt uzdevumus, un pēc tam 4. klases skolēni mācīja 3. klases skolēnus.

Nodarbības tika organizētas tā, lai mācību procesā radītu atvērtu un nepiespiestu atmosfēru, kas veicina savstarpējas diskusijas un iespēju sniegt atgriezenisko saiti. Skolēniem tika dota iespēja demonstrēt savas domāšanas prasmes un iegūt refleksiju par savu progresu, salīdzinot ar jaunākās klases skolēniem.

Tika veikts pētījums, lai izvērtētu, kā savstarpējā mācīšana, kuras laikā izmanto digitālās tehnoloģijas, ietekmē skolēnu zināšanas, prasmes un sadarbības kvalitāti

sākumskolas matemātikas apguvē, un rezultāti parādīja, ka skolēni ļoti aktīvi sadarbojās, mācot, kā rīkoties ar digitālo rīku, – soli pa solim viņi instruēja cits citu, kas jādara; skolēni mācību procesā demonstrēja domāšanas prasmes – skaidroja jaunākajiem skolēniem, kā nonākuši līdz rezultātam; uzdeva jautājumus par mācību saturu. 4. klases skolēni mācījās, izpildot uzdevumu paši un mācot to darīt 3. klases skolēniem, savukārt 3. klases skolēni mācījās, vērojot, risinot uzdevumu un uzdodot jautājumus.

Digitālās izglītojošās spēles matemātikas apguvei

Matemātikas apguve ar spēļu palīdzību ir efektīva, jo tā apvieno izklaides un mācību elementus. Šāda pieeja veicina skolēnu interesi, nostiprina viņu prasmes un zināšanas, kā arī veicina pozitīvu attieksmi pret matemātiku, vienlaikus attīstot skolēnu digitālās un sadarbības prasmes. Spēles mehānisms parasti nodrošina tūlītēju atgriezenisko saiti. Tomēr svarīgi ir izvēlēties spēles, kas atbilst izglītības mērķiem un tiek attiecīgi integrētas mācību procesā.

Pētījumā par Taivānas pieredzi (Chen et al., 2019), kur tika izveidota tiešsaistes matemātikas spēle *Math-Island*, iekļaujot tajā sākumskolas matemātikas mācību programmas saturu, iegūti līdzīgi secinājumi. Katram skolēnam pieder virtuāla sala (pilsēta), un katrs spēlē mēra lomu. Spēles mērķis ir uzbūvēt un attīstīt savu pilsētu uz salas, apgūstot matemātiku. Veicot uzdevumus, skolēniem ir iespēja apgūt jēdzienus un darbības, skatoties video, kuros tiek skaidroti jēdzieni un demonstrēti risinājumi; skolēni risina uzdevumus saistībā ar video apgūto. Pareizi izpildot uzdevumus, skolēni iegūst virtuālo naudu, ko var izmantot salas attīstībai. Salas izskats norāda skolēnu progresu – jo vairāk uzdevumu izpildīts, jo attīstītāka ir sala. Pētījumā secināts, ka spēle veicināja 2. klases skolēnu iesaisti un motivāciju, piedāvājot interaktīvu un aizraujošu vidi matemātikas apguvei. Tūlītējā atgriezeniskā saite palīdzēja skolēniem saprast kļūdas un uzlabot savas prasmes. Nepareizu atbilžu gadījumā tika piedāvāti daudzlīmeņu ieteikumi, kas palīdz skolēniem pašiem atrast risinājumu. Spēle uzlaboja skolēnu prasmi risināt situāciju uzdevumos un attīstīja pašmācības un atbildības sajūtu par mācīšanās procesu. Turklāt skolotāji varēja viegli sekot līdzi skolēnu progresam un pielāgot mācību saturu atbilstoši viņu vajadzībām.

Skolotājs, izmantojot digitālo vidi, var uzraudzīt skolēnu progresu reālajā laikā, sekot līdzi katram skolēnam un sniegt atbilstošu atgriezenisko saiti. Datu analīzes rīki palīdz skolotājam identificēt skolēnu stiprās un vājās puses un pielāgot uzdevumus atbilstoši viņu vajadzībām.

Mācīšanās ar digitālo spēļu un izglītojošo lietotņu palīdzību kļūst par nozīmīgu daļu skolēnu kognitīvajā attīstībā, jo skolēni izmanto digitālās ierīces – gan mācību procesā, gan ārpus tā. Pētījumā, kas veikts kādas Eiropas skolas 3. klasēs,

secināts, ka skolēni labprāt spēlē izglītojošas digitālās spēles, jo tās parasti nav sarežģītas atbilstošajā vecuma posmā un ļauj apgūt zināšanas un attīstīt vai pilnveidot, piemēram, saskaitīšanas vai problēmrisināšanas prasmes (Camilleri & Camilleri, 2019).

Interaktīvas simulācijas un izglītojošas spēles palielina skolēnu iesaistīšanos un motivāciju. Šie rīki padara mācīšanos interaktīvāku, kas var palīdzēt labāk atcerēties un izprast matemātikas jēdzienus (Weigand et al., 2024).

Digitālo tehnoloģiju izmantošana diferencēšanai

Ir veikts pētījums par Austrālijas pieredzi (Loong & Herbert, 2018), kur matemātikas stundā skolēnu uzdevums bija saskatīt matemātiku skolas vidē. 3. klases skolēni ar iPad un digitālām kamerām fotografēja skolas vidi un dažādus objektus skolā, kuros saskatīja matemātikas klātbūtni. Aktivitātes sasniedzamais rezultāts: saskatīt matemātikas elementus apkārtņē, veidot jautājumus par attēlā redzamo. Tā kā uzdevums bija atvērts, tad skolēni varēja darboties atbilstoši savām spējām, arī izpausties radoši. Skolēniem bija jāizveido apraksts ar viņu uzņemtajiem attēliem un jāpaskaidro, kā attēli saistās ar matemātiku. Uzdevumam nebija nekādu ierobežojumu attiecībā uz saturu, un bija vērojamas lielas atšķirības starp skolēnu prezentācijās sniegtās informācijas dziļumu un plašumu. Uzdevums ļāva skolēniem personalizēt savu mācīšanos, katram skolēnam izvēloties objektu, nofotografējot to un saglabājot skolas serverī. Pēc tam skolēni nosauca matemātiskos elementus, ko viņi saskatījuši attēlā, ļaujot veidot jautājumus atbilstoši savām interesēm un matemātikas izpratnes līmenim. Šāda skolēnu vadīta pieeja nebūtu iespējama bez digitālajām tehnoloģijām.

Mērķtiecīgi izmantojot tādas vietnes kā *soma.lv*, *maconis.lv*, *uzdevumi.lv*, ir iespējams diferencēt vingrināšanos, izmantojot dažāda līmeņa uzdevumus.

Digitālo tehnoloģiju izmantošanas izaicinājumi sākumskolā

Lai arī iepriekš apskatījām digitālo tehnoloģiju iespējas veicināt skolēnu izpratni, skolotājiem un arī skolēniem jāievēro, ka pārmērīga laika pavadīšana pie digitālo ierīču ekrāniem var izraisīt veselības problēmas, piemēram, acu sasprindzinājumu, ietekmēt stāju un samazināt fizisko aktivitāti. Tas nozīmē, ka visiem skolotājiem jāsadarbjas mācību procesa plānošanā, lai nerastos šāda veida pārslodze (INTO, 2020; Higgins et al., 2012; Barak & Ziv, 2023).

- Vienlīdzīgu iespēju nodrošināšana. Skolotājam ir jāpiedāvā uzdevumi, kuru veikšanai visiem skolēniem būtu vienādas iespējas, t. i., nepiedāvāt veikt mājās uzdevumus ar digitālo tehnoloģiju palīdzību, ja nav pārlicības, ka visiem skolēniem tās ir pieejamas.

- Digitālās ierīces var novērst skolēnu uzmanību, un bez pienācīgām norādēm skolēni tās var izmantot ar izglītību nesaistītiem mērķiem.
- Efektīvai digitālo tehnoloģiju integrācijai mācību procesā ir nepieciešama atbilstoša apmācība un atbalsts skolotājiem, kas ne vienmēr ir pieejams.
- Izmantojot digitālos rīkus, nedrīkst aizmirst par datu privātumu un drošību, jo īpaši skolēniem sākumskolas vecumā. Ir jāsadarbojas ar datorikas skolo-tāju, lai skolēni rīkotos atbilstoši.

1.8.4. *GeoGebra* un tās lietojums sākumskolas matemātikā

GeoGebra ir dinamiska, interaktīva matemātikas programma. Tā ir izmantojama gan datoros, gan mobilajās ierīcēs. *GeoGebra* ļauj veidot vizuāli pievilcīgas un interaktīvas ilustrācijas, kas palīdz skolēniem labāk saprast abstraktus matemātikas jēdzienus, piemēram, var veidot ģeometriskas figūras, grafikus, diagrammas, kas ir dinamiskas un mainās atbilstoši ievadītajām vērtībām vai veiktajām komandām. Skolēni var patstāvīgi eksperimentēt ar dažādiem matemātiskiem objektiem un redzēt, kā mainās rezultāti. Tas veicina dziļāku izpratni par matemātiskām sakarībām un attīsta kritisko domāšanu. *GeoGebra* ļauj skolēniem pašiem atklāt matemātikas likumsakarības, izpildot dažādus uzdevumus. Tas veicina interesi par matemātiku un motivē mācīties. Dažkārt programmā var pielāgot uzdevumus katra skolēna individuālajām spējām un vajadzībām. Tas nodrošina, ka visi skolēni var gūt panākumus matemātikā. *GeoGebra* var izmantot arī, lai veicinātu sadarbību starp skolēniem. Skolēni var kopīgi risināt uzdevumus, apmainīties ar idejām un prezentēt savus rezultātus.

GeoGebra ir rīks, ko pārsvarā izmanto 7.–12. klasē, tomēr ir būtiski sākt to lietot jau 4.–6. klasē, jo tas palīdz vizuāli un interaktīvi apgūt matemātikas pamatjēdzienus.

Atkarībā no mācību mērķa *GeoGebra* ir iespējams izmantot dažādi.

- **Skolotājs** to lieto matemātikas jēdzienu, objektu, sakarību vizualizēšanai – mērķis ir **demonstrēt kādu no matemātikas konceptiem**.
- **Skolēni** izmanto jau izveidotus materiālus *GeoGebra*s vidē – mērķis ir ar animētu vizualizāciju palīdzību **konstruēt jaunas zināšanas** (piemēram, lietot vizuālo reprezentāciju, lai pārietu uz simbolisko reprezentāciju).



Aktivitāte skolēniem

Skatoties vizualizāciju (<https://www.geogebra.org/m/vgfqadhp>) par to, kā attēlots veselā skaitļa un pamatdaļas reizinājums, skaidrot, kā veidota vizualizācija, kā notiek reizināšana un kā iegūts rezultāts.



Pēc tam individuāli un tad visi kopā skolēni skolotāja vadībā veido savus spriedumus, kā notiek reizināšana, un veic vispārinājumu, paši iegūstot reizināšanas algoritmu.

Šo procesu var veidot arī kā apvērstu mācīšanos, kad skolēns mājās izpēta konkrēto animāciju, tā katram skolēnam dodot nepieciešamo laiku domāšanai. Tad klasē skolēni skaidro, ko ir saskatījuši, kā to varētu izmantot vai veikt vispārinājumus.

Sākot mācīties par procentiem, skolēni, izmantojot vizualizācijas, var atklāt, kas tie ir un kā procenti saistās ar jau zināmajām parastajām daļām un decimāldaļām, to attēlojumiem. Vērojot animāciju (<https://www.geogebra.org/m/cf6ygx7d>), skolēni skaidro, kas ir kopīgs un kas atšķirīgs parastām daļām, decimāldaļām, procentiem, kā tos var attēlot.



Lai konstruētu zināšanas par prasmi un uzreiz vingrinātos, var izmantot jau gatavus darba uzdevumus vai tos mainīt pēc saviem ieskatiem.



Aktivitāte skolēniem

SR Uzzīmē sānskātu, priekšskatu, virsskatu figūrai, kas salikta no vienības kubiem.

Ieteicams piedāvāt skolēniem salikt figūru no klucīšiem, no foto-grafēt no dažādiem skatpunktiem un to kombinēt ar *GeoGebra*s aktivitāti “Telpisku figūru skatu zīmēšana” (<https://www.geogebra.org/m/umya7rjv>).



Skolotājs aicina skolēnus iepazīties ar sasniedzamo rezultātu, ko ar šo aktivitāti skolēns varēs iemācīties. Ar 1. uzdevuma palīdzību skolēns iemācās aplūkot dažādos skatus programmā *GeoGebra*, uzzina jaunus jēdzienus (“priekšskats”, “sānskats” un “virsskats”) un jau sāk veidot zīmējumus vienkāršām telpiskām figūrām. Uzdevumā skolēnam ir jāizvērtē arī cita skolēna risinājums un jādomā par nepieciešamību izmantot līmeņus, zīmējot dažādus skatus. Pēc jauno zināšanu apguves skolēni var vingrināties zīmēt dažādus skatus arī citām telpiskām figūrām. Uzdevuma beigās skolēni var individuāli reflektēt par savu mācīšanās un domāšanas procesu, atbildot uz jautājumiem: ar ko šie trīs piemēri atšķiras; kurus bija vieglāk izpildīt, kurus grūtāk un kāpēc? Skolotājs to var ļaut skolēniem

veikt individuāli, lai katram dotu laiku padomāt par savu mācīšanos, un pēc tam veidot sarunu klasē pāros vai mazās grupās, lai mācītos mācīties un sniegtu atgriezenisko saiti cits citam.

Ar 2. un 3. uzdevuma palīdzību skolēni var vingrināties zīmēt prasītos skatus un pārbaudīt savas prasmes arī grūtākā piemērā – parādās iespēja diferencēt darbu, kad doto telpisko figūru nevar pagrozīt un apskatīt no visām pusēm.

Līdzīgā veidā skolēni var iegūt jaunas zināšanas, arī veidojot telpiskas figūras, ja ir doti to skati (<https://www.geogebra.org/m/ccwnrtpv>). Izmantojot programmu *GeoGebra Class*, skolotājs var aktīvi sekot līdzi katra skolēna paveiktajam un sniegt nepieciešamo atbalstu stundas laikā.



- **Skolēni** izmanto jau izveidotus materiālus *GeoGebra*s vidē – mērķis ir **vingrināties, nostiprināt prasmes** u. c. Vingrināties var, gan risinot tipveida uzdevumus, gan izvēloties uzdevuma grūtības pakāpi.

Skolēni var vingrināties, piemēram, atlikt parastās daļas uz skaitļu taisnes un uzreiz paši pārbaudīt savu sniegumu (<https://www.geogebra.org/m/ssbsptst>).



Apgūstot procentus, sākotnēji skolēni var vingrināties vizualizācijā iekrāsoto daļu pierakstīt simboliski – ar procentiem. Piemērā dots kvadrāts, kas sadalīts vai nu simts, vai desmit daļās (<https://www.geogebra.org/m/snsxda4t>).



Tad, ja doti dažādi attēlojumu veidi un dažāds skaits daļu (<https://www.geogebra.org/m/p6zzwvrs>), skolotājs var piedāvāt izpildīt pareizi vienas grūtības pakāpes uzdevumus un tad citas grūtības pakāpes uzdevumus, ar papildu uzdevumu skolēniem savos pierakstos pierakstīt atšķirīgos attēlojuma veidus un to, kā iegūta procentu vērtība.



- **Skolēni veic pētījumu**, izmantojot dotas animācijas vai veidojot savus zīmējumus. Piemēram, pēta, kā mainās taisnstūra perimetrs, ja dots tā laukums.
- **Skolēni** paši, veidojot zīmējumus, grafikus u. c., **apgūst konkrētas prasmes**.

Dažas idejas, kā izmantot *GeoGebra*, apgūstot konkrētu matemātikas saturu 4.–6. klasē:

- Veidot dažādas ģeometriskas figūras (trijstūrus, četrstūrus, riņķus), mainīt to izmērus un pētīt īpašības.
- Zīmēt figūras, lai izprastu to novietojumu, piemēram, uzzīmēt nogriezni, staru, taisni un tad pētīt sakarības par to vai citu figūru savstarpējo novietojumu plaknē.
- Pētīt simetriju attiecībā pret taisni un punktu, konstruēt simetriskas figūras.

- Mērīt nogriežņu garumu, leņķu lielumu, figūru laukumu un perimetru.
- Vizualizēt dažādus telpiskos ķermeņus.
- Iepazīties un lietot koordinātu plakni, attēlot punktus un veidot grafikus, figūras, attēlus.
- Veidot zīmējumus, ievērojot doto mērogu.
- Pētīt tieši un apgriezti proporcionālus lielumus, izmantojot vizualizāciju.
- Veidot diagrammas un analizēt datus u. c.

Sākot darbu ar *GeoGebra*, ir svarīgi iepazīstināt skolēnus ar programmas pamatfunkcijām, lai viņi justos pārliecināti un varētu veikt uzdevumus (https://www.lu.lv/fileadmin/user_upload/lu_portal/apgads/PDF/Mat-metodika-1-6/01_IT.pdf).



STUNDAS PIEMĒRS

“Skolēnu iepazīstināšana ar GeoGebras pamatfunkcijām”

Izmantojam apvērstās klases modeli. Skolēni mājās iepazīstas ar video par programmas atvēršanu tiešsaistē un pirmajiem soļiem, ko programmā var veikt (<https://youtu.be/dMgz-R4x1BU>).



SR Zīmē ģeometriskas figūras programmā *GeoGebra*, maina to noformējumu.

Stundas gaita: skolēni aktualizē mājās redzēto video, piemēram, pāros stāsta, ko pēc video noskatīšanās paši ir pamēģinājuši uzzīmēt.

Izmantojot dotos video, zīmē atbilstošās figūras:

- taisni,
- nogriezni,
- trijstūri,
- riņķa līniju,
- zaļu četrstūri.

Uzdevumi darba diferencēšanai: papildu uzdevumi, ko varētu veikt skolēni, kuri ir apguvuši pamatdarbības.

- Novelc taisni, kas iet caur punktu A.
- Novelc taisni, kas iet caur trim punktiem K, L, M.
- Uzzīmē trīs taisnes tā, lai tām būtu:
 - a) trīs krustpunkti,
 - b) tikai viens krustpunkts,
 - c) nav krustpunktu.
- Uzzīmē divus leņķus tā, lai
 - a) tiem būtu kopīga tikai virsotne,
 - b) to lielumu summa būtu 90° jeb veidotos taisns leņķis,
 - c) tie būtu vienādi, ar kopīgu malu un virsotni.

- Uzzīmē taisnleņķa trijstūri BCD.
- Uzzīmē četrstūri GHIJ, kuram divas malas ir paralēlas.

Stundas noslēguma daļā aicina skolēnus veikt refleksiju par to, kā izdevies sasniegt rezultātu, piemēram: es protu uzzīmēt ..., par to liecina ...; man neizdevās uzzīmēt ..., jo ...; es mēģināšu ...

Atbalsta video skolotājam par *GeoGebras* ģeometrijas pamatrīkiem:

Pamatrīki. 1. daļa: <https://youtu.be/o9lksiGApgk>

Pamatrīki, 2. daļa: <https://youtu.be/hGviupLXulE>



Iespējas skolotājam sekot skolēnu veikumam ir tiešsaistes rīkā *GeoGebra Classroom*, kas skolotājiem sniedz iespēju radīt dinamiskāku mācīšanās vidi, kurā skolēni var aktīvi piedalīties, eksperimentēt un mācīties cits no cita, skolotājs var apskatīt paveikto un to izmantot sarunās. Skolēni var strādāt individuāli vai grupās. (https://www.lu.lv/fileadmin/user_upload/lu_portal/apgads/PDF/Mat-metodika-1-6/02_IT.pdf)



Jautājumi pārdomām

Kā digitālās tehnoloģijas var bagātināt mācību procesu?

Kāda ir digitālo tehnoloģiju ietekme uz skolēnu prasmju attīstību un pilnveidi, piemēram, radošo domāšanu, problēmu risināšanu un sadarbības prasmēm?

Vai pastāv risks, ka pārmērīga digitālo tehnoloģiju izmantošana varētu samazināt skolēnu spēju darboties bez tām?

Kā atrast līdzsvaru starp digitālo tehnoloģiju izmantošanu un praktisku, eksperimentālu mācīšanos?

Literatūra tālākai uzziņai

Barak, M., & Ziv, S. (2023). Technology Education in Primary Schools: Addressing Teachers' Needs. *International Journal of Technology and Design Education*. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10798-023-09828-8>

Bergmann, J., & Sams, A. (2015). *Flipped Learning for Elementary Instruction*. Arlington: ISTE.
Bishop, J. L., & Verleger, M. A. (2013). The Flipped Classroom: A Survey of the Research. *120th American Society for Engineering Education Annual Conference and Exposition*, 30, 1–18.

- Camilleri, A. C., & Camilleri, M. A. (2019). *The Students' Perceived Use, Ease of Use and Enjoyment of Educational Games at Home and at School*. 13th Annual International Technology, Education and Development Conference, International Academy of Technology, Education and Development (IATED).
- Chen, C. Y. C., Cheng, H. N. H., & Chen, Z. H., et al. (2019). Enhancing Achievement and Interest in Mathematics Learning through Math-Island. *Research and Practice in Technology Enhanced Learning*, 14(5). <https://doi.org/10.1186/s41039-019-0100-9>
- Garrison, D. R., & Kanuka, H. (2004). Blended Learning: Uncovering Its Transformative Potential in Higher Education. *Internet and Higher Education*, 7(2), 95–105. <https://doi.org/10.1016/j.iheduc.2004.02.001>
- Higgins, S., Xiao, Z., & Katsipatakis, M. (2012). *The Impact of Digital Technology on Learning: A Summary for the Education Endowment Foundation*. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED612174.pdf>
- INTO. (2020). *Digital Learning and the Primary School*. https://www.into.ie/app/uploads/2020/11/Digital-learning-and-the-primary-school_Background-paper.pdf
- Lage, M. J., Platt, G. J., & Treglia, M. (2000). Inverting the Classroom: A Gateway to Creating an Inclusive Learning Environment. *The Journal of Economic Education*, 31(1), 30–43.
- Loong, E. Y. K., & Herbert, S. (2018). Primary School Teachers' Use of Digital Technology in Mathematics: The Complexities. *Math Ed Res J*, 30, 475–498. <https://doi.org/10.1007/s13394-018-0235-9>
- Montgomery, J. (2015). *The Effects of Flipped Learning on Middle School Students' Achievement with Common Core Mathematics*. ASV: California State University San Marcos.
- Mustadi, A., & Retno, L. (2021). The Implementation of the Flipped Classroom for Early Grade Students in Elementary School. *International Journal of Elementary Education*, 5(1), 98–106.
- OECD. (2024). *An Evolution of Mathematics Curriculum: Where It Was, Where It Stands and Where It Is Going*. OECD Publishing, Paris. <https://doi.org/10.1787/0ffd89d0-en>
- Oikarinen, R., Oikarinen, J., Havu-Nuutinen, S., & Pöntinen, S. (2022). Students' Collaboration in Technology-Enhanced Reciprocal Peer Tutoring as an Approach towards Learning Mathematics. *Education and Information Technologies*, 27(1), 1–30. <https://doi.org/10.1007/s10639-021-10799-3>
- Qiu, Y., & Ishak, N. A. (2025). AI-Assisting Technology and Social Support in Enhancing Deep Learning and Self-Efficacy among Primary School Students in Mathematics in China. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, 24(2), 21–37.
- Schmidt, S. M. P., & Ralph, D. L. (2016). *The Flipped Classroom: A Twist On Teaching*. Littleton: Clute Institute.
- Sletten, S. R. (2017). *Investigating Flipped Learning: Student Self-Regulated Learning, Perceptions, and Achievement in an Introductory Biology Course*. *Journal of Science Education and Technology*, 26(3), 347–358. <https://doi.org/10.1007/s10956-016-9683-8>
- Staker, H., & Horn, M. B. (2012). *Classifying K-12 Blended Learning*. Innosight Institute.
- Susanti, S., Maftuh, B., & Dwiputra, D. F. K. (2024). *A Systematic Literature Review on Flipped Classrooms in Elementary Schools for Advancing 21st-Century Learning*. Education and Human Development Learning.

- Webel, C., Sheffel, C., & Conner, K. A. (2018). Flipping Instruction in a Fifth Grade Class: A Case of an Elementary Mathematics Specialist. *Teaching and Teacher Education*, 71, 271–282. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2018.01.007>
- Weigand, H. G., Trgalova, J., & Tabach, M. (2024). Mathematics Teaching, Learning, and Assessment in the Digital Age. *ZDM Mathematics Education*, 56, 525–541. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01612-9>
- Zainuddin, Z., & Halili, S. H. (2016). Flipped Classroom Research and Trends from Different Fields of Study. *International Review of Research in Open and Distributed Learning*, 17(3). <https://doi.org/10.19173/irrodl.v17i3.2274>

1.9. Vērtēšana

1.9.1. Kas ir vērtēšana, tās mērķis

Kāpēc vērtējam?

Vērtēšana ir neatņemama matemātikas mācību procesa daļa, un tās primārais mērķis ir dot nepieciešamo informāciju, lai varētu uzlabot mācīšanu un mācīšanos. Skolotājam, gan plānojot, gan vadot mācīšanu un mācīšanos, ir jāpieņem dažādi lēmumi, piemēram, ar ko sākt mācīšanos, kādas stratēģijas un metodes lietot, vai skolēni ir sasnieguši mācību mērķus utt., un te var palīdzēt dažāda veida vērtēšana.

Skolēnu mācību sasniegumu vērtēšanas pamatmērķi ir sniegt informāciju par skolēna progresu mācību satura apguvē un par mācību procesa efektivitāti, apzināt mācību vajadzības, plānot turpmāko mācību procesu un konstatēt iegūtās izglītības kvalitāti.

Vērtēšanas procesā iegūst pierādījumus un datus jeb ticamu informāciju par skolēnu sniegumu un, izmantojot to, pieņem lēmumus par apgūto, to komunicējot kā atgriezenisko saiti vai vērtējumu (Valsts izglītības satura centrs, 2023).

Ko vērtē?

Vērtējot tiek iegūti pierādījumi par dažādu sasniedzamo rezultātu apguvi atbilstošā veidā.

Mācību procesā izvirzām dažāda veida sasniedzamos rezultātus, lai skolēns apgūtu zināšanas, iegūtu izpratni, mācītos veikt konkrētas praktiskas procedūras, apgūtu prasmes vai iegūtu pieredzi kompleksu problēmu risināšanā (62. att. Sasniedzamo rezultātu veidi (Namsone, 2020).)

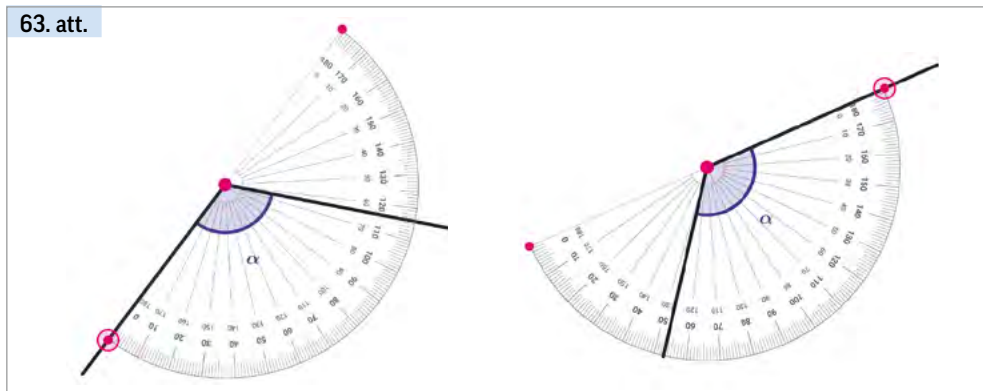
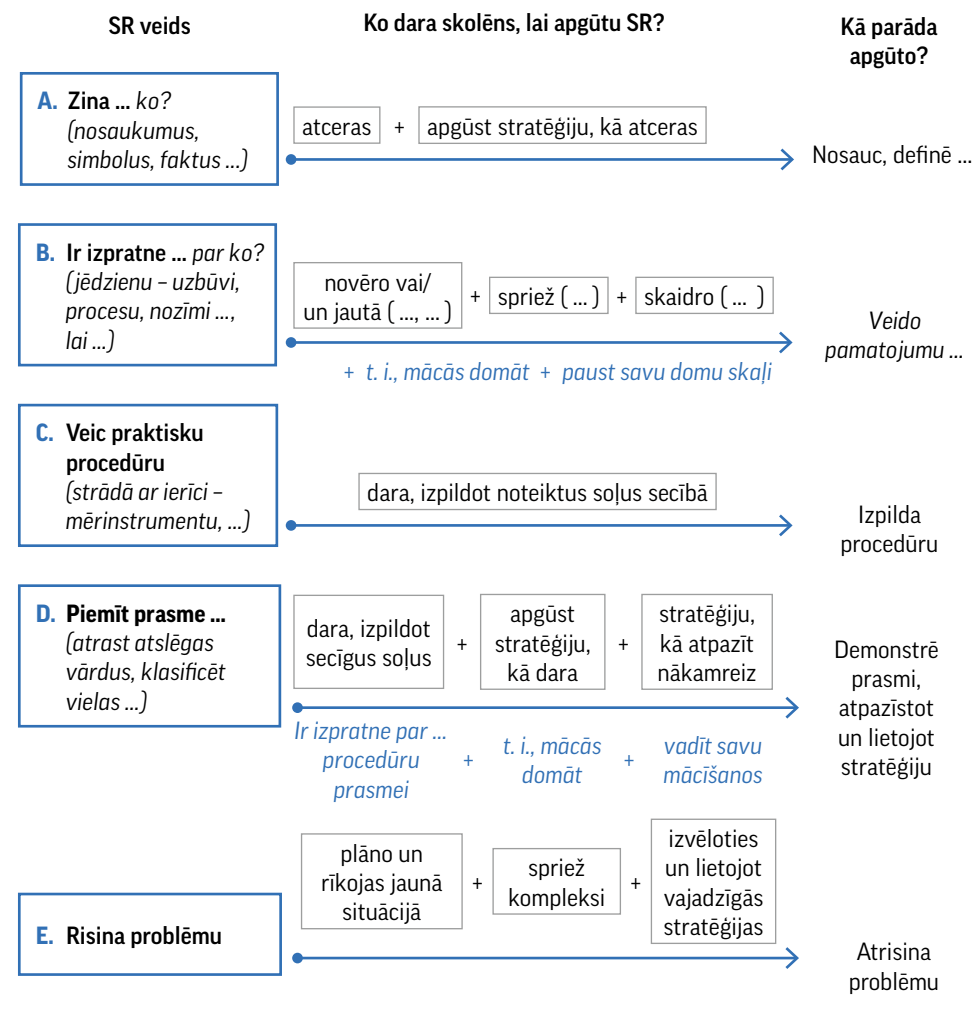
Dažādu sasniedzamo rezultātu vērtēšanai ir jāizvēlas atbilstošs veids, kā tos novērtēt.

Zināšanu pārbaude var notikt mutiski, rakstiski vai kombinēti. Var izvēlēties tādos paņēmienus kā atbilžu izvēles, īso atbilžu jautājumi u. c.

Uzdevumu piemēri:

- Nosauc šķidruma tilpuma mērvienības!
- Nolasi un pieraksti doto leņķu lielumu! 63. att.

Kāds ir skolēna ceļš uz dažādiem SR?



Izpratnes pārbaude var notikt mutiski, rakstiski vai kombinēti. Var izvēlēties tādus uzdevumus, kuros skolēni skaidro, pamato vai argumentē, formulējot to mutiski vai rakstot apgalvojumu, skaidrojumu vai pamatojumu (argumentus) brīvā formā. Bieži izpratnes pārbaude ir daļa no strukturēta uzdevuma.

4. klases temats “Kā salīdzina, saskaita un atņem daļas?”

Izvērtē, kuras darbības (saskaitīšana un atņemšana) veiktas pareizi, skaidro, kāpēc tā var darīt.

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$
$$\frac{4}{7} + \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$$

Praktisku procedūru var pārbaudīt, dodot iespēju skolēnam to demonstrēt kā apgūtu prasmi, piemēram, pareizi mēru leņķi, veidoju figūru pēc dotā algoritma utt. Praktisku procedūru veic noteiktā darbību secībā, piemēram, mērot ar lineālu, pieliekam to ar sākuma punktu pie nogriežņa (cita objekta) galapunkta un nolasām uz tā redzamo vērtību, kur atrodas nogriežņa otrs galapunkts.

Ričards Stiginss (*Richard J. Stiggins*) ar kolēģiem uzsver, ka tikai ar snieguma vērtēšanas palīdzību iespējams atbilstoši novērtēt skolēnu praktiskās prasmes, kuras nepieciešams demonstrēt, un to var izdarīt, novērojot skolēnu prasmes darbošanās procesā un izdarot spriedumu par viņa snieguma līmeni (Stiggins et al., 2004).

Praktisku procedūru apguvi var redzēt 1. klases tematā “Kā izstāsta un parāda: cik, kur, kāds?”, kur sasniedzamie rezultāti ir: raksta ciparus; novelk taisnu līniju ar lineālu; novelk līniju ar brīvu roku pa rūtiņām; izveido figūru atbilstoši dotajām norādēm.

Šāda veida sasniedzamajiem rezultātiem snieguma līmeņa aprakstu var veidot, lai to lietotu ilgākā laika posmā.

PIEMĒRS

SR Prot mērīt (garumu un leņķa) lielumu.

Snieguma līmeņa aprakstu veidojam, izmantojot pēctecību, kā mācām prasmi (sk. 30. att. 56. lpp.). 19. tabula

Vērtējot prasmi mērīt, skolotājam jāvēro, kā skolēns izmanto mērinstrumentu.

Pārbaudot prasmi, skolēns demonstrē tās apguvi – atpazīst to dotajā situācijā un lieto atbilstošu stratēģiju. Prasmes var vērtēt uzdevuma veikšanas procesā vai novērtējot atbildi. Prasmju pārbaude var notikt rakstiski vai kombinējot mutisku, rakstisku vai praktisku pārbaudes veidu. Rakstiski var pārbaudīt prasmi aprēķināt skaitlisku izteiksmju vērtības u. c. Tikai precīzi zinot sasniedzamo rezultātu, uzdevumu nolūku, var izvēlēties piemērotu vērtēšanas paņēmieni.

19. tabula

Sācis apgūt	Turpina apgūt	Apguvis	Apguvis padziļināti
Ar skolotāja/atgādnes palīdzību, ja dots mērinstruments, izmēra lielumu un pieraksta rezultātu.	Ja dots mērinstruments, izmēra lielumu un pieraksta rezultātu. Ir vērojamas dažas mērījuma neprecizitātes.	Izvēlas atbilstošu mērinstrumentu, mērvienības, mērinstrumentu lieto precīzi. Māk paskaidrot, kā jāveic mērīšana.	Mēra lielumu jaunā situācijā, izvēlas mērinstrumentu, mērvienības, plāno, kā mērīs konkrētā situācijā, objekts var būt tieši nepieejams, uzreiz tieši neizmērāms.

Būtiski ir atlasīt galvenās prasmes, kas skolēnam jāapgūst ilgākā laikā – gadā vai citā periodā.

Lai novērtētu skolēnu sniegumu, kad viņi demonstrē savu prasmi, izmantojam snieguma līmeņa aprakstus.

Snieguma līmeņu aprakstu iespējams veidot dažādi (McTighe et al., 2020).

SR Zīmē stabiņu diagrammu.

- Vērtējošs apraksts:
stabiņu diagrammas uzzīmētas ar atsevišķām kļūdām.
- Aprakstā notiek uzskaitīšana:
korekti uzzīmētas trīs diagrammas.
- Aprakstošs sniegums:
diagrammai ir virsraksts, pie asīm ir to nosaukumi, izvēlēta atbilstoša vienība, attēloti visi dotie dati.

Visprecīzāk skolēna sniegumu raksturo aprakstošs snieguma līmeņu sniegums. Tā ilustrēšanai var izmantot arī uzdevumu piemērus, kas dos iespēju skolēnam domāt un spriest atbilstoši dotajam aprakstam.

Piemēram, skolēniem 1. klasē, apgūstot darbības pirmajā desmitā, ir būtisks to lietojums jeb situāciju uzdevumu risināšana, tai skaitā arī reversās domāšanas attīstīšana – pašam veidot situāciju, ja dota izteiksme, ko varam ilustrēt ar snieguma līmeņa aprakstu.

SR Lieto saskaitīšanu un atņemšanu 10 apjomā, veidojot izteiksmes. 20. tabula

Snieguma līmeņa aprakstus ir vērts veidot tikai būtiskām prasmēm, piemēram, izvēlamies svarīgāko no mācību priekšmeta programmas. 64. att.

20. tabula

Sācis apgūt	Turpina apgūt	Apguvis	Apguvis padziļināti
Izmantojot modeļus vai zīmējumus, ar skolotāja palīdzību var atrisināt uzdevumus par situācijām, kuras raksturo darbības: pienāk, aiziet, pieliek, noņem.	Ja dots zīmējums un īss teksts, var atrisināt uzdevumus, kur jāizmanto saskaitīšana vai atņemšana.	Ja dots zīmējums un īss teksts, var atrisināt uzdevumus par situācijām, kuras raksturo darbības: pienāk, aiziet, pieliek, noņem, kopā.	Ja dota izteiksme, var izdomāt uzdevumu un to attēlot (šāda veida uzdevumus skolēns nav pildījis).

64. att.

Snieguma līmeņu apraksts prasmei saskaitīt un atņemt 20 apjomā

Saskaita un atņem 20 apjomā, darbību attēlojot ar skaitāmo materiālu.	Prot saskaitīt un atņemt 20 apjomā, dažreiz izmanto skaitāmo materiālu. Prot paskaidrot risināšanas gaitu.	Veikli saskaita un atņem 20 apjomā. Zina vairākus paņēmienus, ir izvēlējis sev saprotamāko, atbilstošāko*.	Izvēlas saskaitīšanai/atņemšanai konkrētajā gadījumā izdevīgāko paņēmienu. Spēj zināšanas par saskaitīšanu un atņemšanu 20 apjomā lietot jaunā situācijā.																																									
12 + 3 = 15 - 3 = 8 + 3 = 12 - 4 = Izmanto:	8 + 4 = 14 - 7 = 7 + 9 = 12 - 8 = Paskaidro, kā risināji: 8 + 4 = 2 2 14 - 7 = 4 3 7 + 9 = 2 5 5 4 12 8 ?	Nosaki sakarību starp 1.un 2. rindas skaitļiem! Aizpildi tabulu! <table><tr><td>8</td><td>10</td><td>7</td><td>11</td><td>16</td><td>9</td></tr><tr><td>12</td><td>14</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> Atrisini! 8 + = 17 7 + 5 = + 9 15 - = 17 - 8 <table><tr><td></td><td>+</td><td>10</td><td>+</td><td>3</td><td>18</td></tr><tr><td>+</td><td> </td><td>+</td><td> </td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>+</td><td></td><td>+</td><td>8</td><td>18</td></tr><tr><td>+</td><td> </td><td>+</td><td> </td><td>+</td><td></td></tr><tr><td></td><td>+</td><td>2</td><td>+</td><td></td><td>18</td></tr></table> 18 18 18	8	10	7	11	16	9	12	14						+	10	+	3	18	+		+		+		4	+		+	8	18	+		+		+			+	2	+		18
8	10	7	11	16	9																																							
12	14																																											
	+	10	+	3	18																																							
+		+		+																																								
4	+		+	8	18																																							
+		+		+																																								
	+	2	+		18																																							

* Skolēns demonstrē izvēlēto paņēmienu, neizmanto skaitāmo materiālu.

Kā saskaita un atņem skaitļus, kas lielāki nekā 10?

21. tabula

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
- Saskaitot dažreiz rodas jauns desmits, dažreiz nerodas. (M.Li.3.) - Atņemt nozīmē atrast nezināmo saskaitāmo, piemēram, aprēķināt $9 - 6$ nozīmē atrast skaitli, kas kopā ar 6 veido 9. (M.Li.3.) - Saskaitīšanai un atņemšanai ir dažādi paņēmieni (piemēram, skaita uz priekšu/atpakaļ, izmanto skaitļu sastāvu, saistību starp summu un starpību). (M.Li.3.) - Saskaitot rezultāts nemainās, ja maina saskaitāmos vietām, tāpēc vienmēr pie lielākā skaitļa var pieskaitīt mazāko. Saskaitot vairākus skaitļus, saskaitīšanas secību var mainīt. (M.Li.3.) - Pie viena un tā paša skaitļa pieskaitot vairāk, iegūst vairāk; atņemot vairāk, paliek mazāk. (M.Li.4.)	- Nosaka/atrod nezināmo skaitli vienādībā (zīmes "+", "-", "=" un 3 skaitļi 10 apjomā). - Veic aprēķinus situācijā, kuras aprakstīšanai nepieciešama 3 skaitļu saskaitīšana 20 apjomā. - Nosauc piemērus dzīvē, kas atbilst dotajai izteiksmei – saskaitīšanai, atņemšanai 20 apjomā. - Zīmē lauztu līniju atbilstoši nosacījumiem; aprēķina laužas līnijas garumu, ja tas ir 10–20 cm.
Komplekss sasniegjamais rezultāts	Ieradumi
- Saskaita un atņem 20 apjomā, izvēloties kādu no paņēmieniem, skaidro, kā rezultāts iegūts, kā zina, ka rezultāts pareizs. (M.3.3.2.1.) - Izsakot skaitli kā summu visos iespējamajos veidos, skaidro, kā var būt drošs, ka ir izveidoti visi gadījumi. (M.3.2.3.3.)	Veicot darbības ar skaitļiem, veido ieradumu pārliedzināties par rezultāta pareizību – plānot un vadīt savu domāšanas procesu, ik pa laikam izvērtēt paveikto.
Jēdzieni: saskaitāmais, summa, starpība.	

<https://mape.gov.lv/catalog/materials/AAAB8194-FF4F-4A89-835F-2DCBC1611D24/view>

Lai vērtētu prasmes, piemēram, izpildīt darbības ar skaitļiem, var izmantot noteiktas struktūras snieguma līmeņa aprakstu, kurā norāda apgūstamo darbību un skaitļu kopas apjomu (20 apjomā, 100 apjomā utt.) vai skaitļu kopu (parastās daļas u. c.).

22. tabula

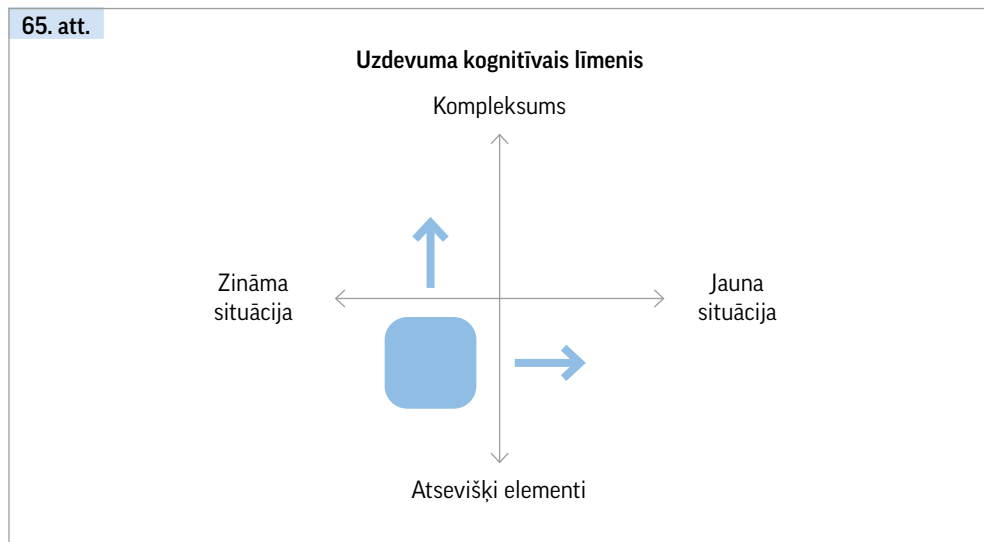
Prasme izpildīt darbības ar skaitļiem

Sācis apgūt	Turpina apgūt	Apguvis	Apguvis padziļināti
Prot ar palīdzību. Izmantojot dotos modeļus, var	Prot, izmantojot vienu paņēmienu.	Prot veikli Zina dažādus paņēmienus.	Prot veikli, izvēloties piemērotu paņēmienu. Pats var izdomāt, kā

Problēmrisināšana, kompleksu prasmju pārbaude

Risinot problēmas, skolēnam ir jārīkojas jaunā situācijā, jāspriež kompleksi, pašam jāizvēlas stratēģija, ko izmantot uzdevuma risināšanā (Namsone, 2018).

65. att.



Vērtēšanas veidi pēc mērķa

Ministru kabineta noteikumos ir uzskaitīti vairāki vērtēšanas veidi (Ministru kabinets, 2018).

Diagnosticējošo vērtēšanu izmanto, lai izvērtētu skolēna mācīšanās stiprās un vājās puses un noskaidrotu nepieciešamo atbalstu. Skolotājs diagnosticējošo vērtēšanu izvēlas, lai noteiktu skolēna mācīšanās vajadzības un plānotu turpmāko mācīšanās procesu.

Monitoringa vērtēšanu izmanto, lai izvērtētu skolēnu sniegumu un mācību procesa kvalitāti atbilstoši izglītības pilnveides mērķiem. Skola vai tās dibinātājs to īsteno, lai pilnveidotu skolotāju profesionālo kompetenci un veiktu atbalsta pasākumus skolēniem un skolām mācību procesa pilnveidē.

Formatīvo vērtēšanu izmanto kā nepārtrauktu ikdienas mācību procesa sastāvdaļu, un tā nodrošina skolēnam un skolotājam atgriezenisko saiti par skolēna tā brīža sniegumu attiecībā pret plānotajiem sasniedzamajiem rezultātiem.

Summatīvo vērtēšanu izmanto mācīšanās posma (piemēram, temata, mācību gada, izglītības pakāpes) noslēgumā, iegūstot pierādījumus par būtiskāko temata sasniedzamo rezultātu apguvi, lai novērtētu un dokumentētu skolēna mācīšanās rezultātu.

Motivācija vistiešākajā veidā saistās ar vērtēšanu (Reece & Walker, 2007), to rada vai iznīcina veids, kādā tiek dota atgriezeniskā saite. Ja vērtējuma vietā ir informatīva atgriezeniskā saite, kas norāda uz izdošanos un iespējām uzlabot savu sniegumu, tas stiprina skolēna iekšējo motivāciju (Ryan & Deci, 2020a; 2020b; Nolen, 2020).

Turpmāk detalizētāk apskatīti divi vērtēšanas veidi – formatīvā un summatīvā vērtēšana (Čakāne, 2010).

23. tabula

Summatīvā vērtēšana	Formatīvā vērtēšana
Primārais mērķis – novērtēt sasniegumus un dot par tiem atskaiti.	Mērķis – sniegt informāciju, kuru var izmantot, lai uzlabotu mācīšanos.
Vērtēšana notiek mācību procesa beigās.	Vērtēšana notiek mācību procesa laikā.
Rezultāti izteikti ballēs, procentos.	Atgriezeniskā saite, to vislabāk izteikt komentāru veidā.
Notiek reti.	Bieža, interaktīva un mainīga, reaģējoša vērtēšana, tai ir dažādi ierosinātāji – gan atsevišķa epizode, gan apjomīga satura bloks, par kuru dod pārskatu.
Noslēgta, uzlikta no augšas, strikta kontrole.	Atvērta, partneriska, ir kontrole.

Formatīvā vērtēšana (vērtēšana, lai mācītos) notiek mācību procesa laikā (Black & Wiliam, 2007; 2010), lai atbalstītu skolēnus un veiksmīgi virzītu uz summatīvo vērtēšanu, mērķtiecīgi palīdzētu skolēniem tai sagatavoties.

1.9.2. Formatīvā vērtēšana

Dilans Viljams (*Dylan Wiliam*), atsaucoties uz pētījumiem, uzsver, ka visvairāk skolēnu sasniegumus ietekmē īsā cikla formatīvā vērtēšana – tas, kas diendienā ik minūti notiek katrā mācību stundā, proti, novērošana, sarunas u. c. (Wiliam, 2006).

Pilnvērtīga formatīvā vērtēšana var notikt tikai tad, ja visām iesaistītajām pusēm ir skaidrs, kurp virzāties, kāds ir sasniedzamais rezultāts. Mācību procesā, izmantojot dažādus paņēmienus, regulāri pārlicināties, vai skolēni sasniedz plānotos rezultātus, skolēni saņem atgriezenisko saiti, kas palīdz uzlabot mācīšanos – **Kas man izdodas? Kas vēl ne? Ko darīt tālāk?** Šajā procesā iesaistās skolotājs, skolēns un klasesbiedri vai tiek lietotas digitālās tehnoloģijas, kuras izmanto, lai uzlabotu mācīšanos, balstoties uz iegūtajiem pierādījumiem. Atgriezeniskā saite var būt par uzdevumu, procesu, par pašvadību vai personu (Namsonē u. c., 2020). **66. att.** Formatīvajai vērtēšanai ir liela ietekme uz skolēnu sniegumu (Hattie & Timperley, 2007).

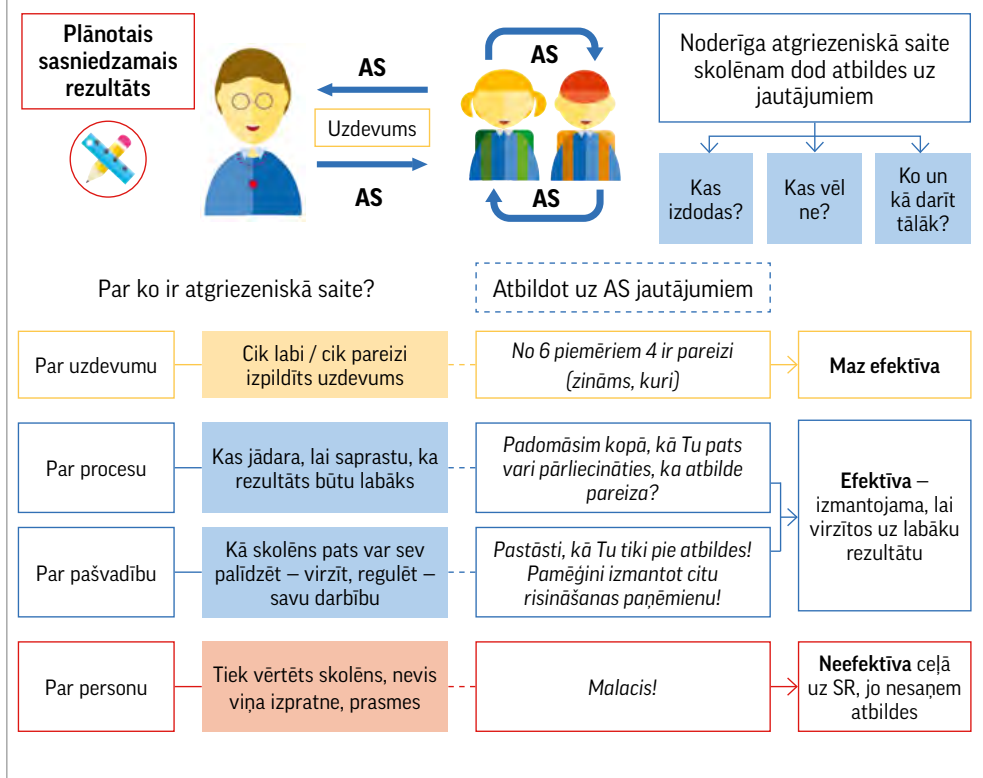
Kas vērtē un dod atgriezenisko saiti?

1. Vērtētājs ir skolotājs

Pārlicināšanās par konkrētas prasmes apguvi noteiktā domāšanas dziļumā

Lai pārlicinātos par konkrētas prasmes apguvi, ir būtiski saprast, kādu uzdevumu piedāvājam un kādu informāciju iegūstam no skolēna darba. Piemēram, skolēns prot no vārdiska apraksta izveidot skaitlisku izteiksmi, kas satur iekavas, saskaitīšanas vai atņemšanas darbību (viens sasniedzamais rezultāts). Izmantotajam 3 piemērus, lai iegūtu nepieciešamo informāciju par to, vai skolēns prot uzrakstīt dotajam tekstam atbilstošu skaitlisko izteiksmi – skolēns demonstrē sniegumu SOLO taksonomijas II līmenī. Dati par katru apakšuzdevumu katram skolēnam būtu jāiegūst un jāfiksē atsevišķi, lai varētu izdarīt precīzus secinājumus par skolēna sniegumu. **24. tabula**

Atgriezeniskā saite un mācīšanās



Pārliecināšanās par konkrētās prasmes apguvi, piedāvājot uzdevumus dažādos izzīņas darbības līmeņos

Tiek izvēlēta būtiska prasme, izveidots snieguma līmeņa apraksts sasniedzamajam rezultātam un atbilstoši uzdevumi. Šādi var iegūt informāciju par to, cik dziļi skolēns ir apguvis konkrēto prasmi, kur viņš apstājas vai “iesprūst”. Visvērtīgāk skolēnam dot atgriezenisko saiti aprakstoši – īsi, konkrēti saistībā ar sasniedzamo rezultātu. Skolotājs to var dokumentēt, izmantojot snieguma līmeņa aprakstu.

25. tabula

Formatīvā vērtējuma izlikšana procentos dos cerēto efektu vienīgi tad, ja skolēns varēs ne tikai pateikt, cik procentu saņēmis, bet arī atbildēt uz jautājumiem: kas man izdodas; kas vēl ne; ko darīt tālāk? Savukārt profesionāli īstenota formatīvā vērtēšana palīdz uzlabot skolēnu sniegumu summatīvajā vērtēšanā (Čakāne, 2018).

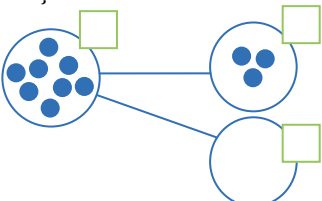
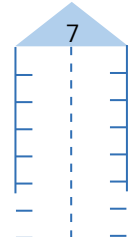
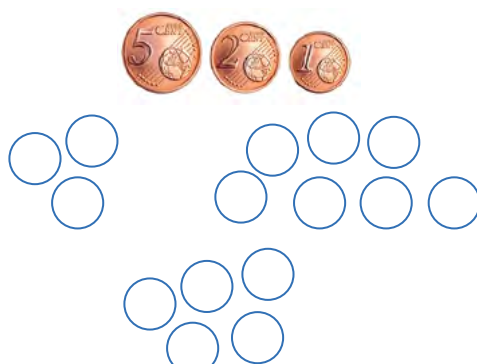
24. tabula

Uzdevums un skolēna risinājums	Sasniedzamais rezultāts
Uzraksti izteiksmi un aprēķini tās vērtību! - No skaitļa 100 atņem 40 un 24 summu! $100 - (40 + 24) = 100 - 64 = 44$ - Skaitļa 22 un 34 summu palielini par 12! $(22 + 34) = 56 + 12 = 68$ - Pie skaitļa 42 pieskaiti skaitļa 16 un 13 starpību! $42 + (16 - 13) = 42 + 3 = 45$	1. Uzraksta summu un to atņem no dotā skaitļa. 2. Uzraksta summu un to palielina par doto skaitli. 3. Uzraksta starpību un to pieskaita pie dotā skaitļa.
Kas izdodas? Skolēns korekti veic visas darbības ar divciparu skaitļiem, ievērojot darbību secību, korekti uzraksta sākuma izteiksmi divos piemēros.	4. Veic saskaitīšanas un atņemšanas darbības ar divciparu skaitļiem, ievēro darbību secību, ja dotas iekavas.
Kas vēl neizdodas? Ir vērojama viena neprecizitāte izteiksmes rakstīšanā – sākotnēji uzrakstīta daļa no izteiksmes (2. piemērs).	
Ko darīt tālāk? Neprecizitāte 2. piemērā varētu būt radusies, ja skolēns aizmirsis uzrakstīt izteiksmi līdz galam, piemēram, steidzoties, jo piemēra tālākajā gaitā skolēns demonstrē visas darbības, kas tiek prasītas. To vajadzētu noskaidrot sarunā ar skolēnu un tad vienoties, kam pievērst uzmanību turpmākajā darbā – piemēram, vēlreiz pārlasīt uzrakstīto; rosināt skolēnu domāt par to, kā viņš zina, ka nav pieļautas neprecizitātes vai kas cits, izmantojot iegūto informāciju sarunā ar skolēnu.	

25. tabula

1. klases 2. temats "Cik kopā, cik palika?"

SR Modelē, shematiski attēlo skaitļu līdz 10 sastāvu un skaitli pieraksta kā summu.

Snieguma līmeņa apraksts	
Shematiski attēlo skaitļa sastāvu, pieraksta to ar skaitļiem. (SOLO I)	Iezīmē riņķos bumbiņas un blakus ieraksti atbilstošos skaitļus! 
Skaitli pieraksta kā summu dažādos veidos, ja dots viens saskaitāmais. (SOLO II)	Ieraksti skaitļus! 
Pieraksta skaitļa sastāva visus veidus, to dara noteiktā sistēmā . (Skolēns pats izdomā stratēģiju, kā uzrakstīt visus iespējamus variantus.) (SOLO III)	Uzraksti visus skaitļa 7 sastāva iespējamus variantus! 
Analizē situāciju, modelē un pieraksta skaitļa sastāvu, izmantojot dažādu saskaitāmo skaitu. (SOLO IV) Skolēnam dažāds saskaitāmo skaits ir jauna situācija, pašam jāpieņem lēmums, kā veidojas samaksa.	Uzraksti, ar kādām monētām var samaksāt 9 centus! 



2. Atgriezenisko saiti dod skolēns skolēnam

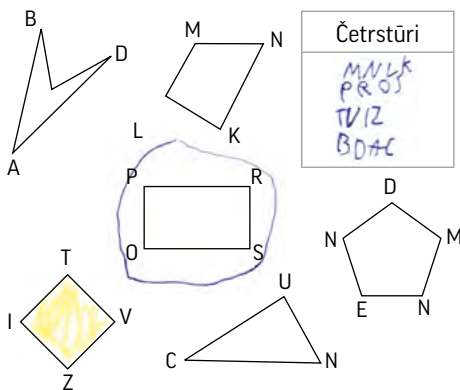
Prasmīgs skolotājs ne vien iesaista skolēnus vērtēšanas procesā, bet arī māca skolēnus dot un pieņemt atgriezenisko saiti, pārliecinoties par pašu apgūto, un savstarpēji vērtēt citam citu.

Piemēram, mācoties veikt aprēķinus galvā – saskaitīt, reizināt u. c., var izmantot sagatavotus piemērus un atbildes, kad skolēni, strādājot pāri, var gan uzdot jautājumus, gan arī dot atgriezenisko saiti par to, kā piemērs izpildīts. **67. att.** Skolēniem ir jā māca dot precīzu atgriezenisko saiti jau sākumskolas pirmajās klasēs. Mācām skolēnus sniegt komentārus precīzi par uzdevumā paveikto.

UZDEVUMA PIEMĒRI

68. att.

Atrodi visus četrstūrus un ieraksti tabulā!
Apvelc taisnstūrus!
Izkrāso kvadrātus!

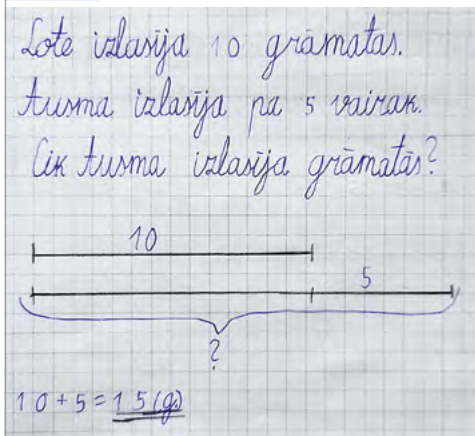


Apsveicu te pirmo uzdevumu esi veicis pareizi! Vai tiešām esi atradis visus taisnstūrus? Taisnstūrs ir figūra ar taisniem stūriem bet visiem stūriem jābūt taisniem. Trešo uzdevumu arī esi izdarījis pareizi!

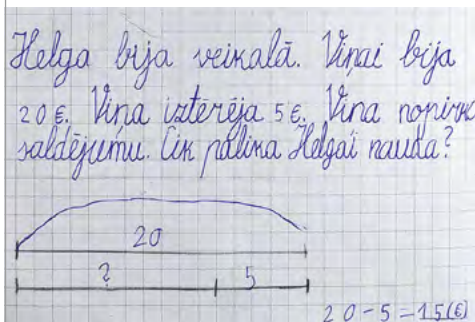
Tu esi pareizi ievērojis visus kvadrātus. Tu arī esi pareizi ievērojis tabulā četrstūrus. Tu esi nepareizi apvelis taisnstūrus jo kvadrāts

Piemērs ar skolēna doto atgriezenisko saiti par uzdevumu veidošanu, shematiskā zīmējuma zīmēšanu un izveidotā situāciju uzdevuma atrisināšanu.

69. att.



Teksts shēma un darbības ir izpildīti pareizi. Es ieteiktu bērnam tekstā un shēmā iekrāsot zināmo daļiņu, zināmo un nezināmo, tad būs vieglāk iemēķināt.



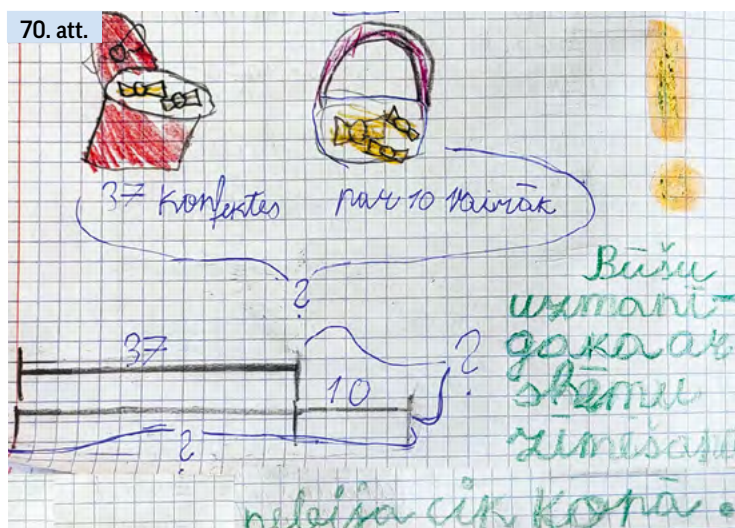
Man ļoti patika izdomātais situāciju uzdevums, bet vajadzēja zīmēt vienu nogriešni shēmā, jo šajā situācijā uzdevumā nav divu maksu.

Ējā nogriešni, betu jaredz kā no 20 atņem 5.

3. Skolēns veic pašnovērtējumu

Skolēna pašnovērtēšanas prasmju attīstīšana nav iedomājama bez pilnvērtīgas formatīvās vērtēšanas, kuras laikā skolēnam pakāpeniski pilnveidojas izpratne par mācību mērķiem, kritēriju izpratne, veidojas prasme veikt darbu saskaņā ar kritērijiem, prasme atbilstoši kritērijiem izvērtēt rezultātu, prasme formulēt neskaidros jautājumus. Viens no skolotāja mērķiem, lietojot formatīvo vērtēšanu, ir pakāpeniski atbrīvot skolēnu no ārējas kontroles nepieciešamības. Skolēnam kā līdzvērtīgam mācību procesa dalībniekam vajadzētu būt tikpat informētam kā skolotājam par to, **ko mācīsies, kad, cik ilgi, ko zinās, prātīs**. Tātad skolēnam jābūt zināmiem gan mērķiem, gan laika plānojumam. Tas attiecas uz katru konkrēto stundu, tematu, arī uz darbu ilgākā laika posmā. Augsti skolēnu mācību sasniegumi ir atkarīgi no daudziem faktoriem, un vērtēšana ir tikai viens no tiem. Taču nav noliedzama pilnvērtīgas formatīvās vērtēšanas pozitīvā ietekme uz skolēnu personisko atbildīgumu, apzinātu mācīšanos, izprotot mācību mērķus.

Pašvērtējuma piemērs, kad skolēns salīdzina patstāvīgi veiktos uzdevumus ar doto atbildi vai risinājumu. **70. att.** Skolēns atzīmē savā darbā, ko nav sapratis, kur būtu vēl jāpavingrinās – tiem uzdevumiem pats pieliek klāt izsaukuma zīmi. Ja nepieciešams, prasot padomu skolotājam, rāda šo uzdevumu, un skolotājs dod ieteikumus, kā strādāt ar konkrētā veida uzdevumiem. Šādā veidā strādājot, skolotājs iegūst arī informāciju par to, kā skolēns izprot situāciju, spēj veikt uzdevumu.



Skolotāja darbības stundā, veicot formatīvo vērtēšanu

Skolotājam formatīvajā vērtēšanā iegūtā informācija palīdz plānot mācību procesu un operatīvi to mainīt, maksimāli efektīvi virzot skolēnus uz sasniedzamiem rezultātiem.

Novērošana kā metode, kas izmantojama, vērtējot skolēnus stundas gaitā. Novērošana kā vērtēšanas metode no skolotāja – vērtētāja prasa redzēt, dzirdēt, fiksēt, secināt. Novērošanas rezultātā skolotājs var gūt noderīgu informāciju gan par saturiskām zināšanām un prasmēm, gan par vispārējām mācību prasmēm, piemēram, sadarbību. Lai neizdarītu ātrus, apšaubāmus secinājumus, novērojumu rezultātus vajadzētu fiksēt un pēc tam analizēt. Tam nepieciešamas iepriekš sagatavotas strukturētas (ērti izmantot tabulas formātu, sk. **26. tabulu**) novērojumu lapas, lai stundā nebūtu jāveic lieki pieraksti. Lapā nepieciešams skolēnu vai skolēnu grupu saraksts, vērtējamās jomas, kritēriji, snieguma līmeņi, vieta atzīmēm par katru kritēriju vai, vēl labāk, par katru līmeni.

26. tabula

Skolotāja novērojuma lapas piemērs

Skolēna vārds	Skaitīšana					Secība	
	Zina skaitļu "pantiņu" līdz	Skaita uz priekšu no 6	Skaita atpakaļ no 8	Skaita pa divi uz priekšu	Skaita pa divi atpakaļ	Sakārtoti secīgi skaitļu kartītes (0–10)	Salīdzina skaitļus (6 un 8)
Anna	30 (420)	1	1	1	1	1	1
Jānis	16	1 (galvā no 1)	1	0	0	1 (pēc kārtas meklē)	1
Līva	20	1 (7 8 10 11 ...)	1	1	1	1	(no 1 skaita)
Pēteris	30 (100)	1	1	0	0	1	1
Baiba	11 (11 20 13 14)*	1	1	1		1	1
Žanis	15	1	1	0	0	0 (7 un 8 nepareizi)	1

* Iekavās te un citur skolotāja fiksēja skolēna kļūdu vai citu būtisku informāciju.

Te redzamas piezīmes, kur skolotājs fiksē savus novērojumus, stundas laikā dodot atbilstošus uzdevumus skolēniem. Piemēram, redzams, ka visi skolēni zina skaitļu secību, savukārt tikai puse prot skaitīt pa divi uz priekšu. Šādi novērojot, var redzēt, cik ilgs laiks skolēnam nepieciešams, lai izdomātu, vai prasme ir automatizējusies vai vēl nav. Rakstiskas pārbaudes darbā, aplūkojot rezultātus, nav zināms, cik daudz laika skolēnam bijis vajadzīgs un kādā veidā viņš ticis līdz atbildei.

Vērtēšanas paņēmieni stundas aktualizācijas fāzē

Ir stundas, kad primārā ir zināšanu un prasmju aktualizācija pašiem skolēniem, lai varētu apgūt jauno vielu. Skolotājs šādi iegūst tālākajam mācību procesam noderīgu informāciju netieši, lai reaģētu un, ja nepieciešams, mainītu plānotās stundas gaitu. Aplūkosim dažus piemērus.

- Skolēni tiek aicināti uzrakstīt vārdus, jēdzienus, kas saistās ar skolotāja nosaukto tematu, vai, izmantojot dotos piemērus, skolēni secina, ko jau prot, un kas ir tas, ko vēl neprot. Tālāk pāros vai grupās vārdi/atbildes tiek salīdzināti, individuālie saraksti var tikt papildināti. Klasē tiek nosaukti un uz tāfeles fiksēti tie jēdzieni/piemēri, kas bija uzrakstīti grupām. Seko saruna,

precizējumi par šo jēdzienu saturu, atbilstību, savstarpējām sakarībām, saistību ar jaunapgūstamo.

- Skolēni grupē uzdevumu piemērus, kurus prot/neprot atrisināt. Ideja stundas aktualizācijas daļā “Parasto daļu saskaitīšana ar dažādiem saucējiem” (sk. stundas piemēru 57. lpp.):

Kad skolēni ir cits citam izstāstījuši, kā saskaita daļas ar vienādiem saucējiem un kā notiek daļas paplašināšana, seko nākamā aktivitāte.

Darbs pāros. Sagrupēt dotos piemērus – tos, kurus prot saskaitīt, un tos, kurus vēl neprot. Atrisināt tos, kurus prot. Tad klasē var vienoties, kāda veida piemēri bija tie, kurus pagaidām neprot atrisināt, un nonākt pie stundas tēmas, kā saskaitīt daļas, kuru saucēji ir dažādi.

- Grafiskie organizatori, tabulas, diagrammas, rāmji, lai, piemēram, sašķirotu skolotāja dotos jēdzienus: *zinu, varu izskaidrot, kas tas ir; domāju, ka zinu, bet paskaidrot nevaru; esmu dzirdējis, bet neko nezinu.*

Piemēram, var likt sagrupēt jēdzienus “reizināt”, “dalīt”, “trīs reizes garāks”, “ceturtdaļa”. **71., 72., 73. att.**

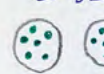
71. att.

Varu izskaidrot, kas tas ir	Domāju, ka zinu, bet paskaidrot nevaru	Esmu dzirdējis, bet neko nezinu
<i>reizināt</i> in kads <i>zārtis nāpērtis</i> <i>jēls in rezes</i> $2 \cdot 5 = 25$ <i>Dalīšana in kads</i> <i>radalīšana uz mēsm</i> <i>in cik daļās radalīts</i> $10 : 2 = 5$ $10 : 2 = 5$	<i>3 rezes gūstis</i> 3 4	<i>ceturtdaļa?</i>

72. att.

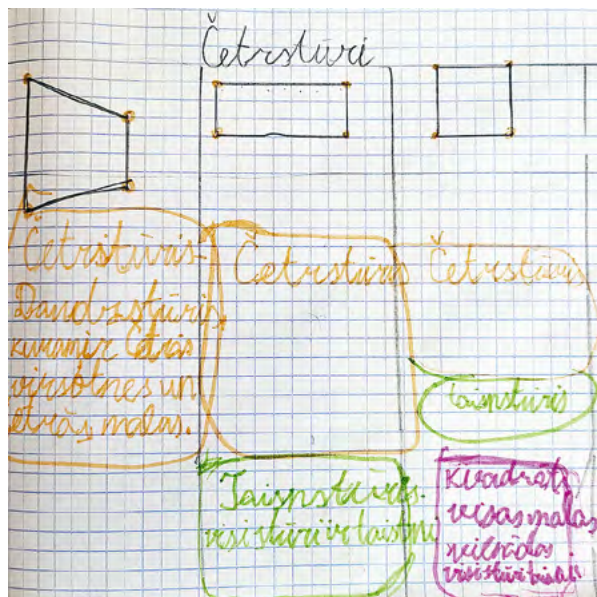
Varu izskaidrot, kas tas ir	Domāju, ka zinu, bet paskaidrot nevaru	Esmu dzirdējis, bet neko nezinu
<u>Reizināšana</u> $4 \times 4 = 16$ Reizināšana ir tas, ka 30 parasti ir 30 un 40 un 30. <u>Dalīšana</u> $20 : 2 = 10$ $20 : 2 = 10$ $20 : 2 = 10$ 3 reizes garāks ko mēs reizinājam un 30 mēs garāks pēc 30. <u>Ceturtdaļa</u> 3 reizes garāks.	<u>Dalīšana</u> 3 reizes Ceturtdaļa. ↓ 	

73. att.

<u>Reizināšana</u> $2 \cdot 6 = 12$ ir kad  piem. 2 reizes tik daudz <u>Dalīšana</u> $12 : 2 = 6$ ir kad piemēram 12 sadala 2 daļās.  ir kad viena cin daļās.	3 reizes garāks $10 + 30 = 40$ 	<u>Ceturtdaļa</u>
---	--	--------------------------

- Asociācijas, saistītos jēdzienus skolēni var nosaukt frontāli. Pierakstot tos var strukturēt, parādot un meklējot savstarpējās saistības. Piemēram, sākot mācīt tematu “Daudzstūri” un sistematizējot jau zināmo par daudzstūriem un to elementiem, skolotājs iegūst informāciju, kā skolēni izprot jēdzienu “četrstūris”.

Piemēram, skolēni var vārdiski papildināt dotos zīmējumus. 74. att.



- Jautājums – vai tu zini, kas ir...? Pēc katra jautājuma skolēni parāda atbildi, izmantojot kartīšu komplektus, piemēram, jā vai nē, vai balso, izmantojot IT iespējas. Ja jautājumi ietver intrigējošu informāciju, faktus, tas reizē noder par stundas āķi, saista skolēnu uzmanību, ieinteresē.

Piemēram, stundas sākumā skolotājs var jautāt: “Vai tu zini un vari izstāstīt, kas ir vienādas figūras? Vai tu zini un vari izstāstīt, kas ir vienlielas figūras?” Skolēniem vajadzētu varēt izstāstīt, ka vienādas figūras ir tādas, kuras, saliekot vienu uz otras, sakrīt. Viņi var dalīties ar savām idejām, kas, viņuprāt, ir vienlielas figūras, tādējādi nonākot līdz tam, ka jānoskaidro, kas tās ir par figūrām un kā to noteikt.

- Skolēni individuāli lasa nelielu teksta fragmentu un apvelk/pasvītro nezināmos/neskaidros vārdus. Tie tiek piefiksēti un izmantoti turpmākajā stundas gaitā. Skolotājs var lūgt paskaidrot būtiskus tekstā minētos jēdzienus, kurus skolēni ir atzinuši par zināmiem, bet par kuru precīzu izpratni skolotājam ir šaubas.
- Skolotājs uzdod virkni jautājumu, uzdevumu, kuru atbildes ir īsas un konkrētas, bet atšķirībā no iepriekš minētā piemēra jautājumi ir par to, kas jāzina, jāprot. Lai iegūtu informāciju par visiem skolēniem, var izmantot IT iespējas, balsojot vai nosūtot savu atbildi, kartītes ar simboliem, īsu tekstu, piemēram, atbilžu variantiem, kas apzīmēti ar burtiem. Atbilžu kodēšanai var izmantot norunātus žestus, piemēram, īkšķa pacelšana uz augšu, sānis, uz leju u. c.

Jebkurā gadījumā šīm aktivitātēm ir jēga tikai tad, ja turpmākā mācīšanās balstās uz aktualizācijas gaitā iegūtā izmantošanu.

Vērtēšanas paņēmieni stundā, apgūstot plānoto saturu

Izmantojot mutiskos vērtējumus, skolotājam ir būtiski ieklausīties, **kā skolēns domā**, piemēram, risinot kādu matemātisku problēmu, kā skaidro to, **kā dara**. Skolēniem tā ir nozīmīga praktizēšanās komunicēt priekšmetā, kā arī tas veicina iedziļināšanos un metakognitīvo prasmju attīstību.

Risinājumu analīzes izmantošana

Varam izmantot mācību līdzeklī dotu uzdevumu (sk. uzdevuma piemēru 193. lpp.), vai arī skolotājs no iepriekš veiktajiem darbiem var apkopot dažādu skolēnu risinājumus, arī kļūdainos. Piemēram, darba lapā ir šie piemēri (sk. 27. tabulu), blakus ailē skolēniem jāveido korekts risinājums/skaidrojums, trešajā ailē jāraksta jautājumi, kādi risinājuma gaitā būtu jāuzdod, lai novērstu kļūdas. Pēc individuālā darba seko pāru, grupu darbs, frontālas diskusijas, ideju apspriešana. Skolēnam turpmākajā mācību procesā var noderēt mācīšanās laikā fiksētie secinājumi, savos pierakstos veiktie labojumi, kurus var uzskatīt par skolēna dienasgrāmatu; darba lapas var izmantot, veidojot portfolio.

27. tabula

	Tavs risinājums	Jautājums skolēnam, lai viņš nekļūdītos																																			
Oto <table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>+</td><td>1</td><td>0</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td></td><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>0</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>								2	3	5				2	6			3	1	4	+	1	0	4	5		3	6	9	0							
		2	3	5																																	
			2	6																																	
		3	1	4																																	
+	1	0	4	5																																	
	3	6	9	0																																	
Leo <table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>+</td><td>1</td><td>0</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td></td><td>9</td><td>9</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>								2	3	5				2	6			3	1	4	+	1	0	4	5		9	9	0								
		2	3	5																																	
			2	6																																	
		3	1	4																																	
+	1	0	4	5																																	
	9	9	0																																		
Teo <table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>+</td><td>1</td><td>0</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td></td><td>3</td><td>7</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>								2	3	5				2	6			3	1	4	+	1	0	4	5		3	7	1	0							
		2	3	5																																	
			2	6																																	
		3	1	4																																	
+	1	0	4	5																																	
	3	7	1	0																																	

UZDEVUMA PIEMĒRS

Oto, Leo un Teo saskaitīja vienus un tos pašus skaitļus $2325 + 26 + 314 + 1045$. Vai risinājumi ir pareizi? Kā, tavuprāt, ir radušās kļūdas? Kā tu pierakstītu šo skaitļu saskaitīšanu?

Piemēri skolotāja jautājumiem, apgūstot jaunu saturu:

- Kāpēc tu domā, ka atbilde ir/nav pareiza?
- Vai tu piekrīti risinājumam?
- Vai visiem grupā/pārī bija tāds pats risinājums?
- Vai kāds no jums mainīja viedokli pēc apspriešanās?
- Kāpēc mainīji domas?
- Kā jūs palīdzētu... uzlabot šo risinājumu, skaidrojumu?
- Tu teici..., vai tu vari izstāstīt, kāpēc tā teici?
- Vai kādam ir cits atrisinājums vai cits ceļš, kā iegūts risinājums?
- Kāpēc tur varēja rasties kļūda?
- Kas tika vai netika izdarīts, lai nerastos kļūda?

Piemēri skolotāja reakcijai uz skolēna runu, atbildi:

- Lūdzu, paskaidro sīkāk/tālāk!
- Neuztraucies par to, ka atbilde bija nepareiza, vienkārši izstāsti, ko/kā tu domāji!
- Uzmanīgi seko, ko... stāsta, pārdomā, ko dzirdēji, un saki, vai piekrīti idejai!
- Nedari automātiski; šajā uzdevumā svarīgākais ir skaidrojums!
- Vai kāds domā citādāk un ir pamanījis ko citu?
- Ir ļoti labi iesākts, turpini, pievērs uzmanību...!
- Tas ir ļoti labi, tikai runā mazliet skaļāk!

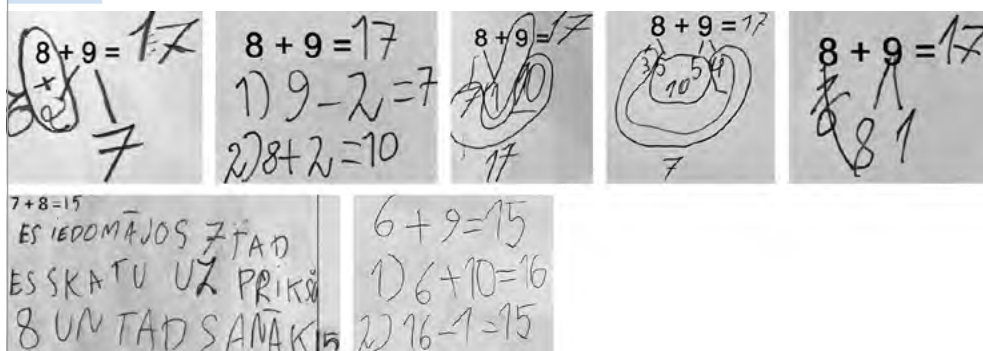
Ja skolēni mācoties pietiekamu uzmanību veltīs **jēdzienu izpratnei un prasmes apguvei**, iespējams, viņi paši radīs algoritmu, tradicionālu, bet varbūt savu, līdzvērtīgu (Forgasz & Leder, 2008; Karsenty et al., 2007) tam, kā jēdzienus lietojam un kā darbojas kāds algoritms, piemēram, kā reizina daudzciparu skaitļus, kā to pieraksta – vienīgais pieraksta veids nav skaitļus rakstīt stabiņā.

Skolotājam jābūt gatavam iedziļināties netradicionālās pieejās, neformālos risinājumos. Tas nav iespējams bez centieniem iedziļināties skolēnu domāšanā.

Piemērs

Skolēniem ir jāskaidro, kā viņi veic saskaitīšanu. Skolēnu risinājumos redzam, ka ir daudzveidīgas stratēģijas, kā viņi to dara. Iegūstot šāda veida informāciju, skolotājs var efektīvi modelēt stundas gaitu – runāt par veidiem, kā skolēni rīkojas; apspriest, kurš no citu skolēnu izmantotajiem paņēmieniem viņiem šķiet

75. att.



vienkāršs, kuru būtu gatavi aizņemties no klasesbiedriem un turpmāk izmantot paši u. c. **75. att.**

Snieguma līmeņa apraksti

Veiksmīgi var izmantot snieguma līmeņa aprakstus, kur fiksēts, kas jāiemācās, dots apraksts, kā skolēns pats var noteikt, cik labi veic atbilstošo uzdevumu, demonstrējot konkrēto prasmi. Šajā stundas daļā īpaši nozīmīga ir iespēja skolēnam uzdot jautājumus, diskutēt, mēģināt, piedalīties snieguma kritēriju izstrādē, sadarboties, palīdzot citiem skolēniem uzlabot viņu sniegumu, vienlaikus pilnveidojot un nostiprinot savas prasmes.

Mācību dialogs

Nepārvērtējama nozīme ir kvalitatīvam mācību dialogam. Skolotājs, uzdodot īstos jautājumus, var ļoti daudz uzzināt par saviem skolēniem. Tajā pašā laikā skolēns risina problēmu, domā, trenējas reflektēt, pārdomāt savu darbību, mācīšanos.

Izstāsti, ko tu dariji! Kā tu to dariji? Izstāsti, kā tas radās – soli pa solim!

Šādi jautājumi veicina pašnovērtēšanas prasmes – skolēns stāsta ne tikai skolotājam, bet pāriniekam, arī pats sev.

Vērtēšana vingrināšanās laikā

Apgūstot kādu prasmi vingrinoties, var izmantot frontālu sarunu, skolēnu savstarpējo vērtējumu, kur skolēns seko pārinieka sniegumam, komentē, papildina un, ja nepieciešams, kopā salīdzina ar kādu **etalonu**. Tas prasa no skolēniem zināmu pieredzi un no skolotāja uzticēšanos, pārliecību, ka netiks akceptēta aplama informācija.

Vērtēšana vingrināšanās laikā vistiešākajā veidā saistās ar to, ka skolēni spēj būt atbildīgi par savu mācīšanos, ieinteresēti tajā, kā arī ar to, ka skolēns vislabāk iemācās, runājot, stāstot un rādot otram.

76. att.



Temata pārrunāšana pāros

Skolēns A pasaka vienu faktu par to, ko stundā iemācījies, skolēns B – nākamo faktu utt. Tas var būt arī saistīts stāstījums (var papildināt, zīmējot, rakstot piemērus), kad viens no pāra sāk runāt, bet pēc skolotāja signāla stāstītāji mainās.

Savstarpēja risinājumu demonstrēšana

Katrs skolēns individuāli izdomā un izveido no klucīšiem savu telpisko figūru, nofotografē to **76. att.** un uzzīmē tās skatus, tad figūru izjauc. Skolēni pārī apmaiņās ar uzzīmētajiem skatiem un veido figūru. Tad skolēns stāsta un demonstrē risinājumu otram – izveidoto figūru. Pārinieks seko, salīdzina, pārbauda, var uzdot jautājumus, precizēt.

Savstarpējā jautāšana

Skolēns A uzdod jautājumu par to, ko stundā uzzinājis, iemācījies, skolēns B atbild. Tad skolēns B jautā un skolēns A atbild. Iepriekš var vienoties par jautājumu skaitu un veidu.



Ideja stundas aktivitātei

Var izmantot spēli, kur savstarpēji jāuzdod jautājumi un jāatbild. Piemēram, kartītei vienā pusē ir jautājums, otrā – atbilde. Kartītes atrodas kaudzītē ar jautājumu uz augšu. Skolēns A izlasa pirmo jautājumu, B atbild, A pārbauda, vai atbilde pareiza. Nākamo jautājumu lasa skolēns B, atbild A utt.

Spēle “Kuram ir atbilde, tas jautā” (VISC, 2009) **77. att.**

SR Veic visas darbības ar veseliem skaitļiem, lietojot matemātisko valodu (6. klase).

77. att.



Kartītes vienā pusē ir jautājumi, tā apzīmēta ar jautājuma zīmi, bet otrā pusē ir atbilde, atzīmēta ar izsaukuma zīmi.

Kartītes tiek izdalītas spēles dalībniekiem. Jāizdala viss kartīšu komplekts. Ieteicamais kartīšu skaits vienam spēlētājam ir 2–3. Skolēni tās noliek sev priekšā ar atbildes pusi uz augšu. Spēlētājs, kuram ir kartīte *Tu sāc spēli!*, nolasa jautājumu; spēlētājs, kuram ir atbilde uz šo jautājumu, piesakās un skaļi nolasa atbildi, paskaidro, kā to ieguvis. Ja pārējie spēlētāji tai piekrīt, tad spēlētājs turpina, nolasot jautājumu no savas kartītes. Atkal piesakās spēlētājs, kuram ir atbilde utt. Izspēlētās kartītes (nolasīts gan jautājums, gan atbilde) liek kaudzītē izspēlēšanas kārtībā. Ja nepieciešams, vēlāk var atrast pieļautās kļūdas un tās labot. Spēle beidzas, kad visas kartītes ir nonākušas kaudzītē.

Skolēni, spēlējot šo spēli, veic pašvērtējumu, seko līdzi citu teiktajam un iesaka labojumus, tātad vērtē cits citu.

Saruna par risināšanas veidu

Salīdzinot tikai atbildes, skolotājs neiegūst informāciju, kā skolēni ir risinājuši, vai pareizi sprieduši, vai nav izmantojuši aplamas matemātiskas idejas (dažreiz, šādi rīkojoties, tomēr iegūstam pareizu atbildi). Vērtīgi ir sarunāties un iedziļināties, kā iegūtas atbildes. 78. att.

78. att.

Lasī! Risini! Ja nepieciešams, izmanto modeļus!

Kaķenei Mincei ir 8 kaķēni: 3 svītraini, 3 raibi, bet pārējie pelēki.

Cik pelēko kaķēnu ir Mincei?

Viena skolēna risinājums

	8	-	3	-	2	=	3	

Mincei ir ...³... pelēki kaķēni.

Cita skolēna risinājums

	3	+	2	=	5	(k)		
	8	-	5	=	3	(k)		

Vērtēšana stundas noslēguma daļā

Neskatoties uz to, ka formatīvo vērtēšanu veicam visās stundas daļās, dažkārt ir būtiski uzsvērt tieši stundas noslēguma daļu.

Kopsavilkuma veidošana

Viens skolēns izdara stundas, tās aktivitāšu jeb vingrināšanās kopsavilkumu, pārējie uzmanīgi klausās, papildina, precizē.

Skolēniem jādod iespēja veikt refleksiju par savu darbu, apsvērt, kā viņi domājuši un ko darījuši. Stundas noslēguma daļā skolēni jānudina, jāiedrošina pārdomāt, ko viņi stundā iemācījušies, veicot kādu no uzdevumiem. Kā tas, ko iemācījušies, saistās ar viņu zināšanām stundas sākumā, kāda varētu būt turpmākā mācīšanās. Ko skolēns sapratis pilnībā, par ko ir šaubas, kas palicis neskaidrs, minot konkrētus uzdevumus, u. c. Var izmantot gan mutvārdu, gan rakstiskas atbildes. Skolēnam varētu būt noderīgi pierakstīt atbildi konkrētā vietā savos pierakstos, kas varētu veidoties kā skolēna mācību dienasgrāmata. Savukārt mutvārdu atbildes var paplašināt izpratni, ieklausoties pārējo skolēnu atbildēs, pārdomājot un salīdzinot tās. Mutvārdu atbildes aizņem vairāk laika, skolēniem jābūt motivētiem gan paust savu domu, gan uzklausīt citus. Skolotājam ir jārespektē arī skolēna nevēlēšanās to darīt publiski.

Šajā stundas fāzē iespējamie jautājumi, rosinājumi:

- Aicina skolēnu izvēlēties vienu jautājumu par darbu stundā. Svarīgi ir mācīt skolēnus dot tādas atbildes, kas tieši attiecas uz sasniedzamo rezultātu. Nav nozīmes vispārējām, neko neizsakošām, paredzamām atbildēm, piemēram, "iemācījos sadarboties".
 - *Ko es darīju?*
 - *Kāpēc es darīju?*
 - *Kāpēc tas ir svarīgi?*

- *Kā es to varu izmantot?*
- *Kāpēc es izvēlējos darīt?*
- *Kas man būtu jādara tālāk?*
- Skolēns tiek mudināts pateikt kaut ko vienu: 1) ko turpmāk izmantos no uzzinātā, 2) ko noteikti atcerēsies, 3) faktu, kas šodien izbrīnīja, pārsteidza. Tam var noderēt nepabeigtie teikumi:
 - *Vislabāk man izdevās...*
 - *Es īsti nesapratu...*
 - *Kādam vajadzētu man parādīt/izstāstīt...*
 - *Nākamreiz man vajadzētu...*
 - *Mums bija jāiemācās..., es iemācījos..., es ceru iemācīties...*
 - *Es varu iemācīt kādam...*
 - *Man ir jautājums...*
 - *Iesaku nākamajā stundā...*
 - *Man nepieciešama palīdzība...*
 - *Es ceru, ka nākamajā stundā...*
 - *Mūsu grupa šodien bija lieliska, kad...*
 - *Es jutos ļoti labi, kad...*
 - *Es jutos slikti, jo...*

Daži pētnieki norāda, ka stundā ir būtiski palīdzēt skolēnam saprast viņa pilnveidojamās prasmes (Brownly et al., 2011). Mudinām skolēnu izvēlēties dažādas izteiksmes formas, ne tikai rakstīt, jo parasti tā nemaz nav rakstītprasme, ko vēlamies konstatēt:

- *Izmantojot savas idejas, iztēli, sajūtas, parādi, ka saprati...*
- *Izvēlies veidu un parādi šīs stundas galveno ideju un detaļas, kā tās saistās savā starpā?*
- *Kā tu izskaidrosi jēdzienus...*
- *Ko tu gribētu pateikt par savu šodienas darbu?*
- *Ko tu lasot/skatoties/darot saprati?*
- *Vai tev to bija viegli vai grūti saprast, paskaidro, kāpēc?*
- *Kā tu pats varētu sev labāk palīdzēt atcerēties?*
- *Uzraksti 2 jautājumus, ko tu gribētu pajautāt stāstītājam/skolotājam par to, ko mācījies?*
- *Kā tas, ko tu uzzināji, saistās ar to, ko tu pirms tam domāji/zināji?*
- *Ko skolotājam vajadzētu atzīmēt par jūsu šodienas darbu?*
- Stundas beigu komentārs (grupas vai individuāls) – īsa atbilde uz vienu skolotāja jautājumu – var palīdzēt skolotājam saprast, kas skolēnam sagādā grūtības, attieksmi pret mācīšanās veidu u. tml.

Formatīvais vērtējums stundas noslēgumā – gan neformālais, gan formālais – pieļauj dažādas izpausmes formas (rakstiski, zīmējums, demonstrējums).

1.9.3. Summatīvā vērtēšana

Summatīvās vērtēšanas norise

Summatīvās vērtēšanas rezultātā skolēns saņem vērtējumu, kura pamatā ir dati/pierādījumi par konkrētu tematā sasniedzamo rezultātu apguvi. Svarīgi, lai katrs summatīvās vērtēšanas darbs noderētu kā mērinstruments, lai rezultāti katrā vērtēšanas darbā precīzi atspoguļotu tematā iekļauto sasniedzamo rezultātu apguvi un lai, saņemot vērtējumu, skolēnam būtu skaidrs, par ko šis vērtējums saņemts.

Vērtējumam ir jābūt arī kā ierosinājumam un norādījumam, kā uzlabot sniegumu, ne kā nosodījumam. Summatīvais vērtējums ir tikai mērījums, cik lielā mērā skolēna konkrētā brīža zināšanas un prasmes atbilst sasniedzamajam rezultātam. Pētījumos atzīts (piemēram, Stiggins et al., 2004; McMillan, 2017), ka prasmīgi īstenota, pierādījumos balstīta summatīvā vērtēšana norisinās, ja:

- vērtēšanai ir konkrēts mērķis. Vienam vērtēšanas darbam var būt tikai viens mērķis. Vērtēšana tiek plānota;
- vērtēts tiek tas, kas tiek mācīts, atbilstoši sasniedzamajiem rezultātiem, dodot iespēju visiem skolēniem parādīt apgūto. Summatīvajā vērtēšanā tiek vērtēti būtiskākie sasniedzamie rezultāti, izvēloties atbilstošu vērtēšanas paņēmieni;
- tiek iegūti pierādījumi par katra skolēna apgūto, izmantojot drošus un ticamus vērtēšanas paņēmienus (pārbaudes darbus u. c.) pierādījumu iegūšanai;
- objektīva vērtējuma izlikšana un komunikēšana ir skolotāja atbildība;
- vērtēšanu pielāgo vai modificē atbilstoši skolēnu vajadzībām. Vērtēšanu dažādo, to pielāgojot (laiks, burtu izmērs...) vai modificējot atbilstoši skolēnu konkrētajām vajadzībām;
- vērtēšanā iegūtie pierādījumi kalpo skolotājam mācīšanas uzlabošanai, reflektējot par iegūtajiem pierādījumiem un izmantojot tos;
- skolēni tiek iesaistīti vērtēšanā, darot zināmu skolēniem vērtēšanas mērķi un ietekmi, iepazīstinot ar to, ko vērtē, comunicējot skolēniem spriedumu (vērtējumu) mērķim atbilstošā veidā, mācot skolēniem izvērtēt savu sniegumu;
- plānojot summatīvo vērtēšanu, tiek ieteikts (Reece & Walker, 2007), ka tai nevajadzētu aizņemt vairāk par 10% no mācību laika, nosaucot to par "īkšķa principu". Pilnīgi pietiekami, ja tā ir mācību procesa beigās – ir pētījumi, kas rāda, ka, palielinot vērtēšanas biežumu, skolēnu mācību rezultāti nemainās (Brownlie et al., 2011);
- tradicionāli summatīvās vērtēšanas darbs tiek piedāvāts skolēniem temata noslēgumā.

Nobeiguma darbu veidi

Atkarībā no būtiskākajiem sasniedzamajiem rezultātiem ir jāpieņem lēmums, kāds būs noslēguma darba veids – rakstisks, mutisks, praktisks vai kombinēts. Vērtēšanai var izvēlēties tādos paņēmienus kā jautāšana, novērošana, uzdevumi, kuros skolēni demonstrē sniegumu, u. c. Skolēnu pašnovērtējumam kalpo paš-refleksija, portfolio u. c. paņēmieni (McMillan, 2017).

Novērošanu izmantosim, vērtējot, kā skolēns demonstrē praktisku prasmi, piemēram, veic mērījumus, iegūst datus – eksperimenta laikā sver u. c.

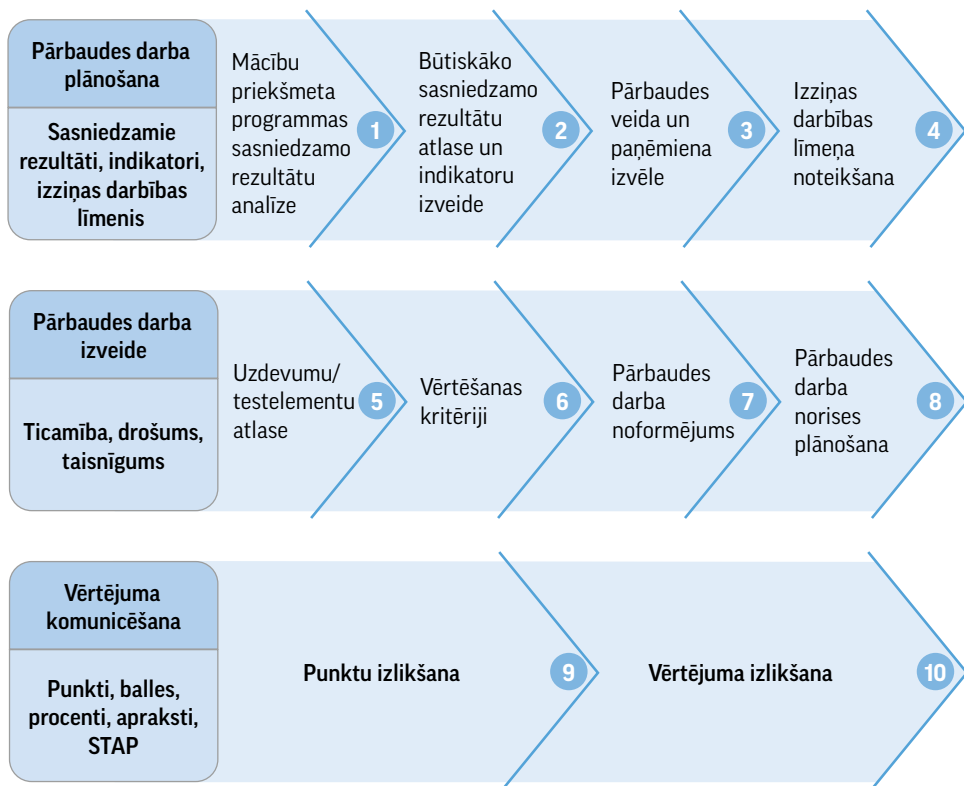
Rakstiskos pārbaudes darbos parasti izvēlas iekļaut dažāda veida uzdevumus – atbilžu izvēles, savienošanas, savietošanas, brīvo atbilžu (eseju tipa) u. c. uzdevumus. Jāņem vērā, ka ikviena veida uzdevumiem ir gan savas priekšrocības, gan trūkumi.

Atbilstoši izvēlētā darba veidam atšķirsies tā izpildes laiks. Darba izpildes laiks var būt gan 30 minūtes (mazākajās klasēs), gan vairākas mācību stundas, ja tas ir, piemēram, projekts.

Nobeiguma darba veidošana

Veidojot nobeiguma darbu, sāk ar tā plānošanu, tad veido darbu un nolemj, kā komunicēt par rezultātu. Nobeiguma darba veidošanas posmi aplūkoti Skola 2030 metodiskajā līdzeklī “Skolēnu mācību sasniegumu summatīvā vērtēšana” (Valsts izglītības satura centrs, b. g.) **79. att.**

Nobeiguma darba veidošanas posmi



Aplūkosim vienu darba veidošanas piemēru 4.–6. klasei.

4. klases temats “Kas kopīgs iepirkšanās un kustības matemātiskajā aprakstā?”
Ieteicamais laiks temata apguvei: 10–14 mācību stundas.

1.–2. solis. Izvēlas **būtiskākos sasniedzamos rezultātus** no programmas.

27. tabula

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
▪ Ātrums izsaka ceļa garumu, kas veikts 1 stundā (1 minūtē, 1 sekundē). Ātruma mērvienības izlasīšana palīdz saprast ātruma nozīmi (piemēram, 60 km/h lasa “60 kilometri stundā”). (M.Li.4., M.Li.5.) ▪ Ja konkrētajā situācijā par kustību divi no trim lielumiem (ceļš, laiks, ātrums) ir zināmi, tad trešo lielumu var aprēķināt. Shematiska zīmējuma veidošana palīdz saprast, kā aprēķināt nezināmo lielumu. (M.Li.2., M.Li.5.) ▪ Ja kāds no lielumiem (laiks, ceļš vai ātrums) ir nemainīgs, tad divi pārējie ir savstarpēji atkarīgi – mainot viena lieluma skaitlisko vērtību, mainās arī otra lieluma skaitliskā vērtība (palielinās vai samazinās tikpat daudz reižu). (M.Li.2., M.Li.4.) ▪ Savstarpēji atkarīgi lielumi raksturo iepirkšanos (skaits, samaksa, cena), kustību (ceļš, laiks, ātrums) un citas dzīves darbības. (M.Li.2., M.Li.4.)	▪ Aprēķina nezināmo lielumu situācijās, kas apraksta kustību, ja divi lielumi ir zināmi. ▪ Salīdzina ātrumus (arī tad, ja tie doti dažādās mērvienībās).
Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
▪ Sadarbojas ar klasesbiedriem, apkopo pieredzi un formulē vispārīgus spriedumus par nezināmā lieluma aprēķināšanu dažādās situācijās, piemēram, <i>skaits = samaksa : cena; laiks = ceļš : ātrums</i>. Raksturo burtu simbolu lietojumu spriedumu pierakstā. (M.6.2.1.3., M.6.4.2.3., M.6.1.1.3.) ▪ Skaidro ātruma mērvienības km/h un m/s. Stāsta, kā veido saliktās mērvienības, t. sk. praktiskās mērvienības (piemēram, degvielas patēriņu). Raksturo simbolu lietojumu mērvienību pierakstā. (M.6.1.1.3., M.6.5.3.2., M.6.5.3.4.) ▪ Situācijās, kas apraksta iepirkšanos, komplektēšanu, kustību u. tml., pēta un formulē sakarības starp diviem lielumiem (kā, mainot vienu, mainās otrs), ja trešais lielums ir nemainīgs. (M.6.4.2.1.)	Formulē jautājumus un izsaka viedokli par situāciju aprakstu vai apgalvojumu atbilstību personiskajai pieredzei, attīstot ieradumus iegūtās zināšanas saistīt ar savu pieredzi, veidot izpratni par situāciju, jēdzieniem.
Jēdzieni: ceļš, laiks, ātrums, ātruma mērvienības, nemainīgi un mainīgi lielumi, savstarpēji atkarīgi lielumi.	

2.–4. solis. Precizē sasniedzamos rezultātus, veidojot uzdevuma sasniedzamo rezultātu jeb indikatoru, prognozē uzdevuma dziļumu. Nolemj, ka būs rakstisks pārbaudes darbs, 40 minūtes.
Pārbaudes darba saturs (ko mēra?).

28. tabula

SR veids	Sasniedzamais rezultāts	Vērtēšanas indikators (ko mēra uzdevums)	SOLO	Uzdevuma nr.
Zināšanas	Zina, ka ātrums izsaka ceļa garumu, kas veikts noteiktā laika vienībā.	Starp dotajiem lielumiem tekstā atpazīst, kas ir ātrums.	I	1.
Prasmes	Aprēķina nezināmo lielumu situācijās, kas apraksta kustību, ja ir zināmi divi lielumi.	Situāciju uzdevumā aprēķina ceļu, ja zināms ātrums un laiks.	I	2.
Prasmes	Aprēķina nezināmo lielumu situācijās, kas apraksta iepirkšanos, ja ir zināmi atsevišķi lielumi.	Situāciju uzdevumā aprēķina cenu, ja zināma samaksa un daudzums.	II	3.
Prasmes	Aprēķina nezināmo lielumu situācijās, kas apraksta iepirkšanos, ja ir zināmi atsevišķi lielumi.	Situāciju uzdevumā spriež par to, kā veidojas cena, ja zināma samaksa par noteiktu daudzumu.	II	4.
Risina problēmu	Izvērtē situāciju par iepirkšanos un veido ieteikumus.	Izvērtē situāciju par iepirkšanos un veido ieteikumus.	III	5.
Risina problēmu	Izvērtē doto situāciju, prot salīdzināt ātrumus, kas doti dažādās mērvienībās.	Izvērtē doto situāciju, prot salīdzināt ātrumus, kas doti dažādās mērvienībās.	IV	6.

5. un 7. solis. Uzdevumu veidošana un darba noformēšana.

Pārbaudes darbs

Kas kopīgs iepirkšanās un kustības matemātiskajā aprakstā?

1. uzdevums (1 punkts)

Automašīna brauc no Rīgas uz Talsiem. Attālums starp abām pilsētām ir 97 kilometri. Stundas laikā automašīna nobrauca 84 kilometrus. Ceļā tā kopā pavadīja 1 stundu un 9 minūtes.

Automašīnas ātrumu izsaka skaitlis (izvēlies atbildi):

A 97 B 84 C $1\frac{9}{60}$

2. uzdevums (2 punkti)

Automašīnas ātrums bija 86 km/h, un tā bez apstāšanās brauca 2 stundas. Aprēķini, cik garu ceļu tā nobrauca?

3. uzdevums (4 punkti)

Ģimene iegādājās virtuves galdu un četrus krēslus. Par pirkumu viņi samaksāja 591 eiro. Galda cena ir 475 eiro. Aprēķini, cik liela ir viena krēsla cena!



4. uzdevums (2 punkti)

Cepumu paka, kurā ir 200 gramu cepumu, maksā 1,75 eiro. Ar aprēķiniem pamato, cik maksā viens kilograms cepumu!

5. uzdevums (7 punkti)

Artūrs grib nopirkt 7 biezpiena sieriņus.

Uzraksti ieteikumu, kā viņam rīkoties, ja veikalā ir akcija un ja tās nav, pamatojot, cik maksās viņa pirkums!

Izmanto attēlā doto informāciju!

Akcijas cena
0,38 EUR



Cena 0,47 EUR



Cena 2,87 EUR

6. uzdevums (3 punkti)

Pavasara pēcpusdienā vēja ātrums pie jūras bija 21 m/s. Vilnišu ģimene devās skatīties jūras viļņus. Viņu automašīnas ātrums bija 80 km/h. Kas pārvietojās ar lielāku ātrumu – vējš vai automašīna?

6.–9. solis. Vērtēšanas kritēriju formulēšana, punktu izlikšana.

29. tabula

Uzd. Nr.	Indikators (sasniedzamais rezultāts)	Vērtēšanas kritēriji	Punktu izlikšana
1.	Sarp dotajiem lielumiem tekstā atpazīst, kas ir ātrums.	Atpazīst tekstā skaitli, kas izsaka automašīnas ātrumu.	1 punkts
2.	Situāciju uzdevumā aprēķina ceļu, ja zināms ātrums un laiks.	Uzraksta izteiksmi, kas izsaka nobraukto ceļu.	1 punkts
		Aprēķina nobraukto ceļu (reizina divciparu skaitli ar viencipara skaitli).	1 punkts
3.	Situāciju uzdevumā aprēķina cenu, ja zināma samaksa un daudzums.	Uzraksta izteiksmi vai izteiksmes, kas izsaka viena krēsla cenu: izteiksme/es uzrakstītas korekti; pieļautas atsevišķas neprecizitātes, rakstot izteiksmi/izteiksmes.	2 punkti 1 punkts
		Aprēķina izteiksmju vērtības (atņem trīsciparu skaitļus, daļa divciparu skaitli ar viencipara skaitli): aprēķini veikti un pierakstīti korekti; aprēķini veikti daļēji precīzi.	2 punkti 1 punkts
4.	Situāciju uzdevumā spriež par to, kā veidojas cena, ja zināma samaksa par noteiktu daudzumu.	Demonstrē ideju, kā veidojas kilograma cena – uzraksta izteiksmi vai spriež. Izmanto piemērotas mērvienības un aprēķina viena kilograma cenu.	1 punkts 1 punkts
5.	Izvērtē situāciju par iepirkšanos un veido ieteikumus.	Risināšanas stratēģija: ir saskatāma stratēģija, kā veiks aprēķinus (izmantojot cenu vai kopējos aprēķinus); ir atsevišķas izteiksmes.	2 punkti 1 punkts
		Salīdzina.	1 punkts
		Aprēķinu korektums: aprēķini veikti korekti (atbilstošās mērvienībās); ir atsevišķas neprecizitātes aprēķinos.	2 punkti 1 punkts
		Ieteikums: uzrakstītais ieteikums ietver abas situācijas, un tajā ir iekļauta arī pamatojuma daļa; uzrakstītais ieteikums ir tikai tieša atbilde.	2 punkti 1 punkts

6.	Izvērtē doto situāciju, prot salīdzināt ātrumus, kas doti dažādās mērvienībās.	Demonstrē ideju, ka nepieciešams pārveidot mērvienības, lai varētu veikt salīdzināšanu. Ātruma mērvienību pārveidošana: mērvienību pārveidojumi/spriedumi korekti, saprotami pierakstīti; mērvienību pārveidošana iesākta, ir atsevišķi spriedumi.	1 punkts 2 punkti 1 punkts
		KOPĀ	19 punkti

10. solis. Vērtējuma izlikšana atbilstoši Ministru kabineta noteikumiem un skolas vērtēšanas nolikumam.

Aplūkosim vienu darba izveides piemēru 1.–3. klasēm, izmantojot tādus pašus darba veidošanas soļus.

PIEMĒRS

Temats “Cik kopā, cik palika?”

Ieteicamais laiks temata apguvei: 16–20 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: veidot izpratni par skaitļa sastāvu, kura nepieciešama saskaitīšanas un atņemšanas darbības izpildei; dot pieredzi daudzveidīgu modeļu izmantošanai, kas palīdz ieraudzīt, saprast, skaidrot.

30. tabula

Ziņas	Prasmes
- Ar “+” zīmi pieraksta saskaitīšanu, ar “–” zīmi atņemšanu, ar “=” zīmi parāda, ka tikpat jeb vienāds ar. (M.Li.1.) - Saskaitīt nozīmē noskaidrot, cik kopā; atņemt nozīmē noskaidrot, cik ir viena daļa no daudzuma, ja otru zina. (M.Li.3.) - Viens un tas pats kopums/daudzums var dažādi veidoties no 2 daļām. (M.Li.1.) - Skaitlis 0 nozīmē “necik, nav skaitāmo objektu”. Skaitlis 0 rodas atņemšanas rezultātā, piemēram, $5 - 5 = 0$. Ja skaitlim pieskaita 0 vai no skaitļa atņem 0, skaitlis nemainās. (M.Li.1., M.Li.3.) - Skaidrot nozīmē “stāstīt, parādot piemērus”. (M.Li.2.)	- Modelē, shematiski attēlo skaitļu līdz 10 sastāvu un skaitli pieraksta kā summu. - Saskaita un atņem 10 apjomā, demonstrējot izpratni par skaitļa sastāvu un darbību jēgu. - Modelē saskaitīšanu un atņemšanu (objekti, sloksnītes, lineāls) un lieto sakarības starp summām un starpībām. - Sadzīves situācijas, kuras raksturo jēdzieni/darbības “kopā”, “pienāk”, “aiziet”, pieraksta ar atbilstošu aritmētisko darbību, ja nepieciešams, praktiski modelējot situāciju. - Nosauc piemērus no dzīves, kuri atbilst dotajai izteiksmei – saskaitīšana, atņemšana 10 apjomā.

Kompleksais sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
Apskata visus iespējamus gadījumus, modelējot skaitļa sastāvu, veidojot figūras, un skaidro, kā rīkoties, lai atrastu visas iespējas. (M.3.2.3.3.)	Sāk veidot ieradumu uzskatāmi un saprotami organizēt informācijas pierakstīšanu, veidojot vienkāršu tabulu, kas palīdz pašam un citiem labāk saprast/uztvert, tādējādi vienlaikus attīstot rūpīgumu un mērķtiecīgumu.
Jēdzieni: tikpat, saskaitīšana, atņemšana, summa, starpība, izteiksme, vienādība, patiesā vienādība, aplama vienādība.	

Pārbaudes darba veids: rakstisks.

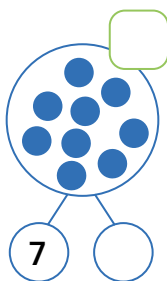
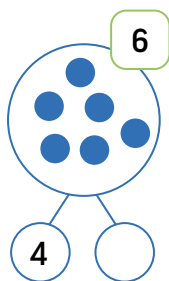
Pārbaudes darba izpildes laiks: 40 min + 40 min.

Pārbaudes darba saturs (Ko mēra?)

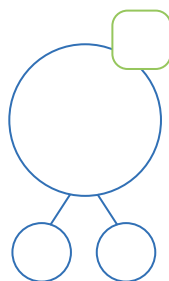
31. tabula

SR grupas	Sasniedzamais rezultāts	Indikators (ko mērīs uzdevums)	SOLO	Uzd. nr.
Zināšanas	Shematiski attēlo skaitļu līdz 10 sastāvu.	Zīmējumā attēlo skaitļa sastāvu.	I	1.
Izpratne	Skaitli pieraksta kā summu.	Aizpilda daļēji aizpildītu "skaitļu mājiņu".	II	2.
	Sadzīves situāciju pieraksta ar atbilstošu aritmētisko darbību.	Uzraksta zīmējumam atbilstošu aritmētisko darbību.	I	6.
Prasmes	Saskaita un atņem 10 apjomā.	Atrisina darbības.	I	5.
	Sadzīves situācijas, kuras raksturo jēdzieni/ darbības "kopā", "pieņāk", "aiziet", pieraksta ar atbilstošu aritmētisko darbību.	Ja dots zīmējums un īss teksts, var atrisināt uzdevumus par situācijām, kuras raksturo darbības: pieņāk, aiziet.	II III	7.1, 7.2. 7.3.
		Atrisina uzrakstītu nestandarta sadzīves situāciju.	IV	8.
Kompleksas situācijas	Apskata visus iespējamus gadījumus, modelējot skaitļa sastāvu.	Dala skaitli daļās visos veidos, sistemātiski.	III	3.
		Patstāvīgi dala skaitli vairākās daļās dažādos veidos	IV	4.

1. Sadali punktiņus un blakus ieraksti atbilstošos skaitļus!



Izdomā pats
savu piemēru!



2. Ieraksti skaitļus!

8		
5	+	
	+	4
6	+	
	+	1
8	+	

3. Uzraksti visus skaitļa sastāva iespējamās variantus!

9		
	+	
	+	
	+	

4. Kā sīkāk var samainīt **?**

Uzraksti dažādus variantus!

$$10 = \square + \square$$

$$10 = \square + \square + \square + \square$$

$$10 = \square + \square + \square + \square + \square$$

$$10 =$$

$$10 =$$

Monētas



5. Raksti rezultātus!

$7 + 1 = \square$

$9 - 1 = \square$

$5 + 4 = \square$

$3 + 6 = \square$

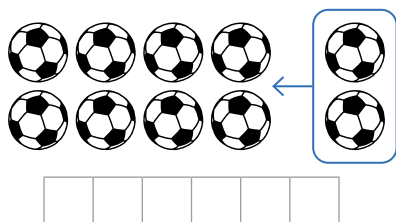
$2 + 5 = \square$

$7 - 3 = \square$

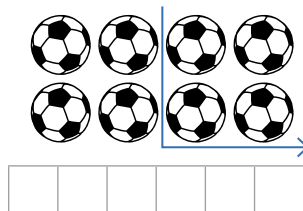
$6 - 4 = \square$

$9 - 8 = \square$

6. Raksti darbības un atrisini!



--	--	--	--	--	--



--	--	--	--	--	--

7. Raksti atbilstošas darbības! Atrisini tās!

a) Bija 7



Paņēma 3



Palika

--	--	--	--	--	--

Palika lecamauklas.

b) Meitenēm 2



Zēniem 5



Kopā

--	--	--	--	--	--

Kopā lecamauklas.

c) Meitenēm 4



Zēniem



Kopā 9

--	--	--	--	--	--

Zēniem lecamauklas.

8. Skolēns somā ielika 3 grāmatas, un somā tagad ir 8 grāmatas. Cik grāmatu somā bija sākumā? Raksti darbību! Atrisini!

Somā sākumā bija grāmatas.

Vērtēšanas kritēriji tiek aprakstīti, izmantojot snieguma aprakstu STAP.

SR Dažādi veido skaitļa sastāvu.

32 tabula

Sācis apgūt	Turpina apgūt	Apguvis	Apguvis padziļināti
Prot dalīt skaitli daļās, izmantojot skaitāmo materiālu .	Prot dalīt skaitli daļās dažos veidos .	Prot dalīt skaitli daļās visos veidos, sistemātiski.	Patstāvīgi dala skaitli vairākās daļās dažādos veidos.
1. uzdevumu, ja zīmējumā pareizi sadalīti punktiņi.	2., 3. uzdevumu, ja uzrakstīti vismaz 3 varianti.	2., 3. uzdevumu, ja uzrakstīti visi gadījumi.	4. uzdevumu, ja pareizi uzrakstīti vismaz 4 piemēri.

SR Saskaita un atņem 10 apjomā.

33. tabula

Sācis apgūt	Turpina apgūt	Apguvis	Apguvis padziļināti
Izmantojot modeļus vai zīmējumus, var atrisināt uzdevumus par situācijām, kuras raksturo darbības: pienāk, aiziet, pieliek, noņem.	Saskaita un atņem 10 apjomā. Ja dots zīmējums un īss teksts, var atrisināt uzdevumus, kur jāizmanto saskaitīšana vai atņemšana.	Ja dots zīmējums un īss teksts, var atrisināt uzdevumus par situācijām, kuras raksturo darbības: pienāk, aiziet, pieliek, noņem, kopā.	Atrisinā uzrakstītu nestandarta sadzīves situāciju.
6. uzdevumu, ja pareizi uzrakstīta vismaz 1 izteiksme.	5. uzdevumu, ja pareizi atrisināta lielākā daļa piemēru. 7. uzdevumu, ja pareizi atrisināti vismaz 2 piemēri.	7. uzdevumu, ja uzdevums izpildīts pilnībā.	8. uzdevumu, ja uzrakstīta darbība un atbilde.

Kā iedziļināties skolēnu sniegunā

Formatīvo vērtēšanu skolotājs plāno tā, lai atbalstītu skolēnus ceļā uz summātīvo darbu. Formatīvā darba/uzdevuma mērķis ir iespējami precīzi noskaidrot, kur un kāpēc skolēns apstājas, un palīdzēt konkrētās grūtības pārvarēt. Tikpat svarīgi ir analizēt skolēnu snieguma kvalitāti arī summatīvajā darbā.

Aplūkosim piemēru, kurā redzams, kā varam kvalitatīvi aprakstīt skolēna sniegumu.

SR Zīmē shematisku zīmējumu situācijai, kas dota tekstā (SOLO II).

Uzdevums

Evita un Guntis devās pārgājienā. Pirmajā dienā viņi nogāja trešdaļu no plānotā ceļa. Otrajā dienā viņi nogāja $\frac{3}{4}$ no atlikušā ceļa. Trešajā dienā viņi nogāja atlikušo distanci – 12 km.

Uzzīmē shematisku zīmējumu, kas palīdzētu aprēķināt kopējo ceļa garumu!

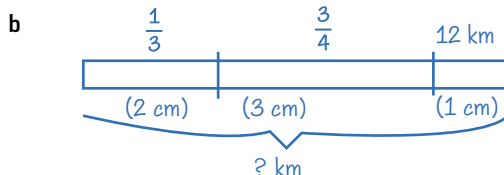
Ar šī uzdevuma palīdzību vēlamies noskaidrot, cik lielā mērā skolēns prot izveidot shematisku zīmējumu – ļoti konkrēta prasme un risinājuma reprezentācija. Lai precīzāk ievāktu informāciju par skolēnu sniegumu, izmantojot skolēnu darbus, varam izveidot aprakstus, ko un kā skolēns demonstrē savā darbā.

33. tabula

Skolēna snieguma apraksts	Atšķirīgu skolēnu darbu piemēri
Veido zīmējumu, kas pēc būtības neilustrē doto situāciju.	
Tekstā atrod būtisko informāciju un sāk veidot zīmējumu vai attēlo kopējo garumu, neparādot situācijas daļu sasaisti.	a b
Veido shematisku zīmējumu atbilstoši tekstā dotajai situācijai, attēlo tikai daļu no visas situācijas vai parāda, kā aprēķināt visu ceļa garumu, bet ir neprecīzs pieraksts.	a 1 diena – $\frac{1}{3}$ 2 diena – $\frac{3}{4}$ 3 diena – 12 b

Izveidotais zīmējums palīdz aprēķināt kopējo ceļa garumu – ir attēlots kopējais ceļš, parādītas visas situācijas daļas un to atkarība (atzīmētas un zīmējumā pierakstītas proporcijas vai ievērotas un zīmējumā atzīmētas proporcijas).

- a
- 1 dienā – $\frac{1}{3}$ no visa ceļa
 2 dienā – $\frac{3}{4}$ no atlikušā ceļa
 3 dienā – 12 km



Ja nepieciešams, snieguma kvalitatīvo aprakstu var pārvērst punktos un izmantot vērtējuma izlikšanai ballēs vai procentos.



Jautājumi pārdomām

Kā izpaužas formatīvā vērtēšana jūsu mācību stundā?

Kā formatīvā vērtēšana ietekmē summatīvo vērtēšanu?

Kā atbalstīt skolēnu mācībās, lai viņa rezultāts summatīvajā vērtēšanā būtu maksimāli labs?

Kādi ir kvalitatīva summatīvā darba kritēriji?

Literatūra tālākai uzziņai

Black, P., & Wiliam, D. (2007). Large-scale Assessment Systems: Design Principles Drawn from International Comparisons. *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives*, 5(1), 1–53. <https://doi.org/10.1080/15366360701293386>

Black, P., & Wiliam, D. (2010). Inside the Black Box: Raising Standards through Classroom Assessment. *Phi Delta Kappan*, 92(1), 81–90. <https://doi.org/10.1177/003172171009200119>

Brownlie, F., Fullerton C., & Schnellter, L. (2011). *Collaborating to Support All Learners in Mathematics and Science (It's All About Thinking)*. Science Edition. Portage & Main Press.

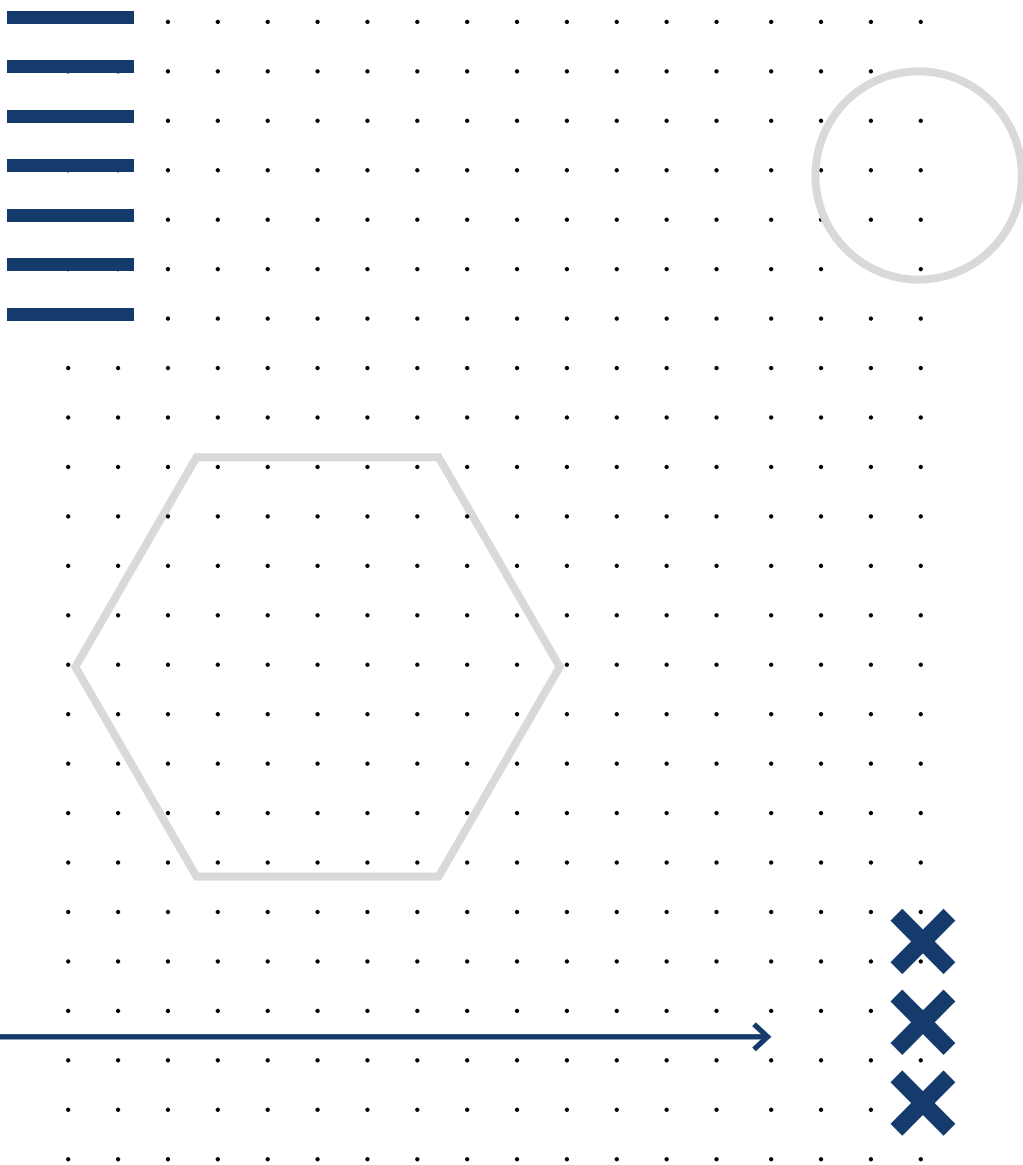
Čakāne, L. (2010). *Matemātikas labākai izpratnei un skolēnu motivācijai. Matematika skolā*. Metodisks rakstu krājums. Lielvārds.

Čakāne, L. (2018). Formatīvās vērtēšanas lomas pastiprināšanās, īstenojot mācīšanos iedziļinoties. No *Mācīšanās lietpratībai*. Rīga: LU Akadēmiskais apgāds, 131.–145. lpp.

Forgasz, H., & Leder, G. (2008). Beliefs about Mathematics and Mathematics Teaching. In P. Sullivan, & T. Wood (eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Vol. 1. Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (pp. 173–192).

- Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112.
- Karsenty, R., Arcavi, A., & Hadas N. (2007). Exploring Informal Mathematical Products of Low Achievers at the Secondary School Level. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(2), 156–177. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.003>.
- McMillan, J. H. (2017). *Classroom Assessment: Principles and Practice That Enhance Student Learning and Motivation*. Pearson.
- McTighe, J., Doubet, K. J., & Carbaugh, E. M. (2020). *Designing Authentic Performance Tasks and Projects: Tools for Meaningful Learning and Assessment*. ASCD.
- Ministru kabinets. (2018). Ministru kabineta noteikumi Nr. 747: "Noteikumi par valsts pamatizglītības standartu un pamatizglītības programmu paraugiem". Latvijas Vēstnesis, 249, 19.12.2018. <https://likumi.lv/ta/id/303768-noteikumi-par-valsts-pamatizglitiba-standardu-un-pamatizglitiba-programmu-paraugiem>
- Namsone, D., Čakāne, L., France, I. (2020). *Skolotājs Prātnieku laboratorijā. Atgādnē skolotājam, kurš mācās*. LU Starpnozaru izglītības inovāciju centrs. Rīga: LU Akadēmiskais apgāds.
- Namsone, D., Oliņa, Z. (2018). *Kā vērtēt kompleksu sniegumu, "Mācīšanās lietpratībai" 3. nod.* Rīga: LU Akadēmiskais apgāds.
- Nolen, S. B. (2020). A Situative Turn in the Conversation on Motivation Theories. *Contemporary Educational Psychology*, 61, 101866.
- Reece, I., & Walker, S. (2007). *Teaching, Training & Learning*. A practical guide. 6th Rev. edition. Business Education Publishers Ltd (United Kingdom).
- Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2020a). Intrinsic and Extrinsic Motivation from a Self-Determination Theory Perspective: Definitions, Theory, Practices, and Future Directions. *Contemporary Educational Psychology*, 61, 101860.
- Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000b). Self-Determination Theory and the Facilitation of Intrinsic Motivation, Social Development, and Well-Being. *American Psychologist*, 55(1), 68.
- Stiggins, R. J., Arter, J. A., Chappuis, J., & Chappuis, S. (2004). *Classroom Assessment for Student Learning: Doing It Right, Using It Well*. Assessment Training Institute.
- Valsts izglītības satura centrs. (2020). *Vērtējumu izlikšana 1.–3. klasē*. Metodiskie ieteikumi VISC, SKOLA 2030, Skolēnu mācību sasniegumu summatīvā vērtēšana.
- Valsts izglītības satura centrs. (2023). *SKOLA 2030. Skolēnu mācību sasniegumu summatīvā vērtēšana*. Metodiskais līdzeklis. <https://mape.gov.lv/catalog/materials/A0468945-2A65-42F2-92CD-6874F1D18E12/view>
- Wiliam, D. (2006). Assessment: Learning Communities Can Use It to Engineer a Bridge Connecting Teaching and Learning. *Journal of Staff Development*, 27(1), 16–20." <https://mape.gov.lv/catalog/materials/A0468945-2A65-42F2-92CD-6874F1D18E12/view>
- Valsts izglītības satura centrs. (B. g.). *SKOLA 2030. Skolēnu mācību sasniegumu summatīvā vērtēšana*. Metodiskais līdzeklis. <https://mape.gov.lv/catalog/materials/A0468945-2A65-42F2-92CD-6874F1D18E12/view>
- Wiliam, D. (2006). Assessment: Learning Communities Can Use It to Engineer a Bridge Connecting Teaching and Learning. *Journal of Staff Development*, 27(1), 16–20.

2. daļa



Matemātisko konceptu un procedūru veidošana

Šajā daļā lasītājam ir iespēja iepazīties ar dažādām idejām par to, kā rosināt skolēnus ar izpratni apgūt visus matemātikas pamatkonceptus – skaitļus un darbības ar tiem, sakarības, statistikas elementus, ģeometrijas elementus un mērus, izmantojot pasaules un Latvijas praktiķu ieteikumus. Īpaša uzmanība pievērsta tam, kā varam veicināt katra skolēna konceptuālo izpratni, izmantojot dažādos matemātikas koncepta attēlojumus (sk. 1. daļu) un digitālās tehnoloģijas.

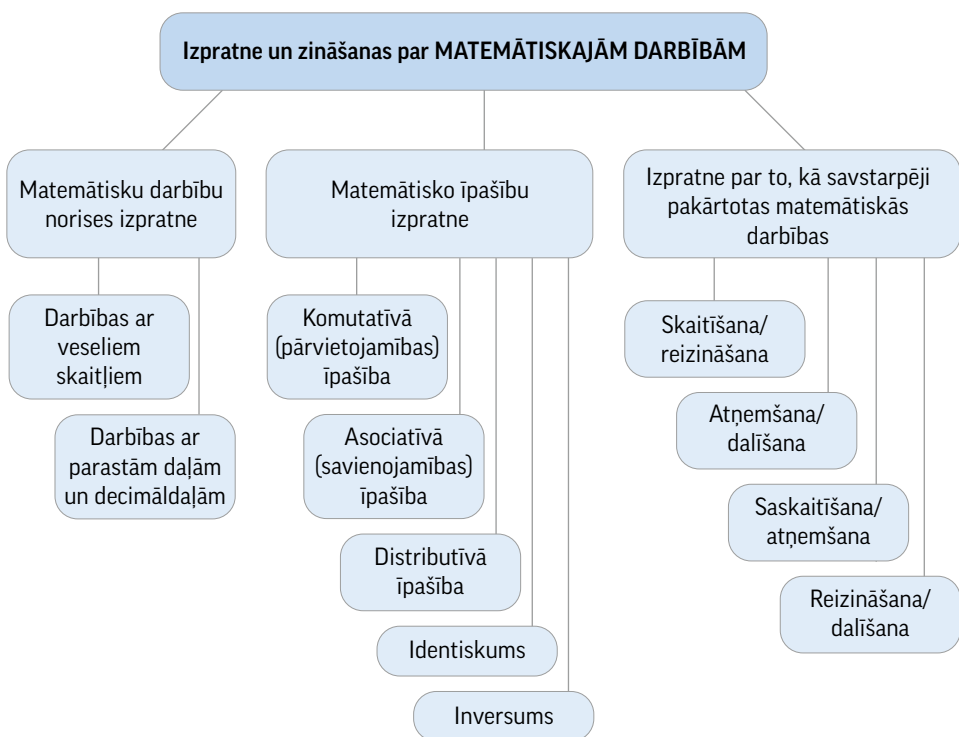
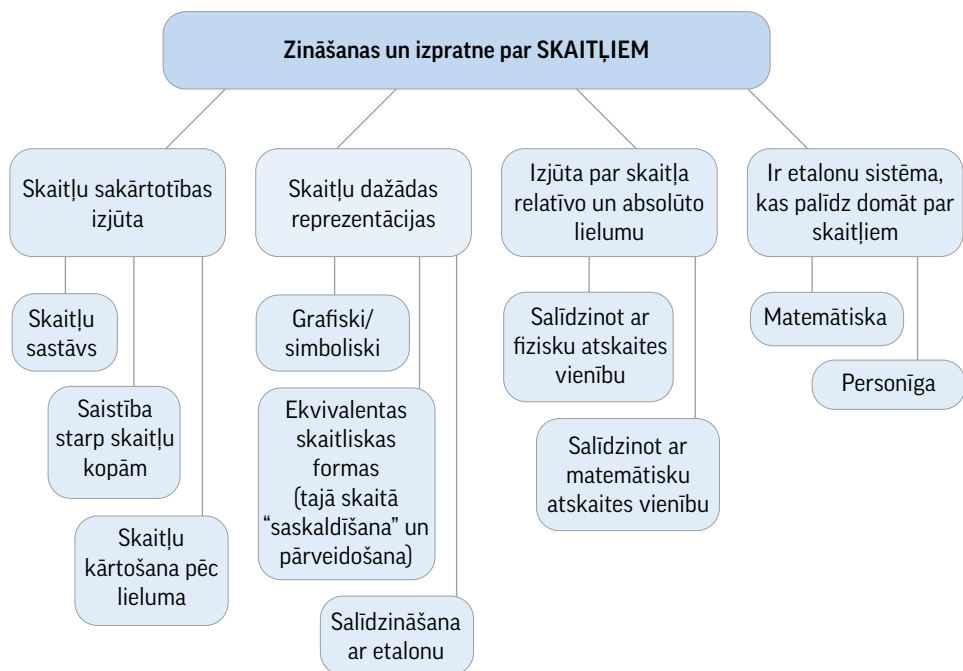
2.1. Skaitļi

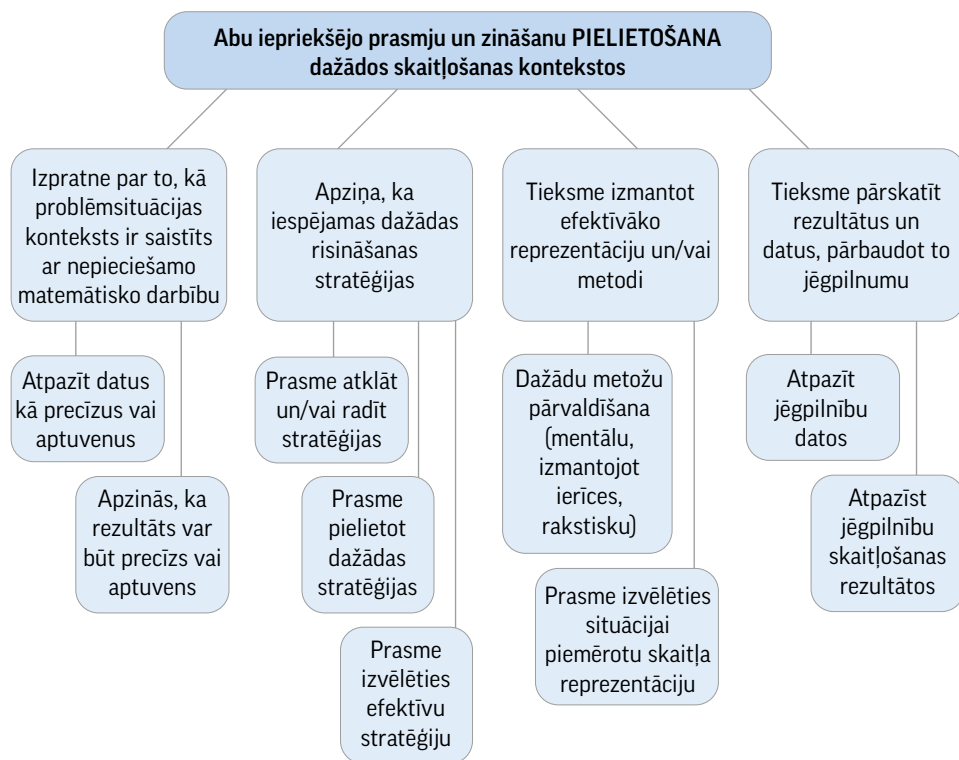
2.1.1. Sākotnējā skaitļu izjūta

Sākumskolas posmā jēdziens “skaitļu izjūta” kļūst arvien svarīgāks, jo izglītība paredz apgūt ne tikai četras pamatdarbības un to neklūdīgu kalkulēšanu, bet arī sakarību pamanīšanu, rezultāta prognozēšanu, hipotēžu izvirzīšanu u. c. Lai iemācītos no galvas reizrēķina tabulu, skaitļu izjūta nebija nepieciešama. Taču, lai skaidrotu ērtāko paņēmieni, kā aprēķināt, cik ir $4 \cdot 8$, vajadzīga izpratne, par to, ko nozīmē reizināt, reizināšanas īpašību pārvaldīšana, dažādu stratēģiju pārzināšana un prasme izvēlēties derīgāko. Piemēram, ja zinu, ka drīkst vienu no reizinātājiem sadalīt reizinātājos un mainīt reizinātājus vietām, varu vispirms sareizināt $2 \cdot 8 = 16$ un pēc tam rezultātu reizināt ar 2, tas ir, $2 \cdot (2 \cdot 8) = 2 \cdot 16$, vai līdzīgi: $4 \cdot 4 \cdot 2 = 16 \cdot 2$. Varu izmantot citādāku stratēģiju: $5 \cdot 8 - 8$. Lai skaidrotu, piemēram, kā saskaitīt $39 + 26$, jāzina saskaitīšanas īpašības un dažādas iespējamās stratēģijas, no kurām izvēlēties efektīvāko, piemēram, $40 + 25$ vai $50 + 15$. Šobrīd nav iespējams mācīt un mācīties matematiku, ignorējot skaitļu izjūtu un tās attīstīšanu. Šis salīdzinoši jaunais jēdziens ir ienācis mācību saturā kā viena no pamatkompetencēm, un ir būtiski to definēt un vienoties par tā izpratni.

Skaitļu izjūta attiecas uz personas vispārējo izpratni par skaitļiem un darbībām ar tiem, kā arī uz spēju un tieksmi elastīgi izdarīt matemātiskus spriedumus un attīstīt noderīgas stratēģijas, kas saistītas ar skaitļiem un darbībām ar tiem. Tā atspoguļo tieksmi un spēju lietot skaitļus un kvantitatīvas metodes kā informācijas apstrādes, interpretēšanas un komunikēšanas līdzekli. Tā rezultējas ar gaidām, ka skaitļi ir noderīgi un matemātikai piemīt noteikta regularitāte (tā ir loģiska) (Mcintosh et al., 1992). Skaitļu izjūta ir personīga, t. i., katram indivīdam unikāla: “Skaitļu izjūta ir personalizēta un attiecināma ne tikai uz idejām par skaitļiem, kuras apgūtas, bet arī uz pašu procesu, kā tas noticis” (Anghileri, 2006, 3), un tas šo procesu padara vienreizīgu.

E. Makintošs, B. Reisa un R. Reiss (Mcintosh et al., 1992) skaitļu izjūtu iedala trīs apakškategorijs. Tās sadalās prasmju kopās, kas secīgi iedalās atsevišķās prasmēs, kuras padara skaitļu izjūtu uzskatāmāku un vieglāk uztveramu: tā tiek sistematizēta izpratne un zināšanas par SKAITĻIEM, izpratne un zināšanas par MATEMĀTISKAJĀM DARBĪBĀM un abu iepriekšējo prasmju un zināšanu PIELIETOŠANA dažādos skaitļošanas kontekstos (sk. att.).





Iepriekšējos mācību priekšmeta standartos (pirms 2020. gada) Latvijā lietots šķietami līdzīgs jēdziens “skaitlis”. Taču tas iekļauj tikai 1. apakšskategoriju “izpratne un zināšanas par skaitļiem”. Skaitļu izjūtas raksturojumā vairāk uzsvērtas skaitļu savstarpējās sakarības un struktūras un dažādie attēlojumi, kā arī pieminēta personīga etalonu sistēma, taču principā iepriekš lietotais jēdziens “skaitlis” ir pielīdzināms E. Makintoša jēdzienam “izpratne un zināšanas par skaitļiem”.

Savukārt 2. apakšskategorijai “izpratne un zināšanas par matemātiskajām darbībām” var pielīdzināt iepriekšējos standartos lietotos jēdzienus “darbība” un “darbību īpašības”.

Mazāk analogiju var saskatīt E. Makintoša 3. apakšskategorijā, lai gan dažas no prasmēm ir pieminētas iepriekšējos standartos, piemēram, “metožu lietojums”, tomēr rodas šaubas par to mērķtiecīgu un saskaņotu apguvi. Daži aspekti, piemēram, efektīvākā paņēmiena vai reprezentācijas izvēle, neparādās vispār.

Skaitļu izjūtas izklāstā ārkārtīgi uzsvērtā izpratne, kā arī lietoti tādi vārdi kā “apziņa” un “tieksme”, kas liek domāt par matemātikas mācīšanu/mācīšanos ne tikai kā par intelektuālu procesu, bet arī kā par darbību, kurā izmantojama personīgā pieredze un izjūtas – intuīcija, aizdomas, kuras, protams, tiek pārbaudītas un tiek balstītas dziļā skaitļu un darbību izpratnē.

Skaitļu izjūtu ir grūti definēt, bet viegli atpazīt. Skolēni ar labu skaitļu izjūtu var

- brīvi orientēties reālās pasaules un matemātiskās pasaules kvantitatīvajos lielumos, skaitliskajās izteiksmēs;
- izdomāt savas stratēģijas skaitlisko darbību veikšanai;
- attēlot vienu un to pašu skaitli vairākos veidos atkarībā no šī attēlojuma konteksta un mērķa;
- spriest par skaitliskās problēmas vai izteiksmes vispārīgām īpašībām, neveicot precīzu aprēķinu;
- atpazīt skaitliskās kļūdas;
- demonstrēt labu skaitļu lieluma izjūtu.

Skaitļu izjūtu ir iespējams attīstīt, mērīt to un tās progresu.

Nav vienkārši noteikt, kādā secībā apgūstam matemātikas ideju aizmetņus, bet ir skaidras mācīšanās trajektorijas (*learning trajectories*) – secīgums, kā katra no šīm pamatidejām jeb bāzes idejām attīstās. To aplūkosim nākamajā apakšnodaļā. Ja pirmsskolas un sākumskolas posmā trūkst kāda no mācīšanās trajektorijas posmiem (to viegli var nepamanīt, ja skolēniem netiek prasīts par viņu domu gaitu un stratēģijām – metakognīciju, jo summas un citas prasītās zināšanas vēl ir iespējams iegaumēt no galvas un ar algoritmiem var strādāt mehāniski, bez izpratnes, “iekalt”, bet nākamajos mācību posmos vairs nav iespējams iegaumēt tik lielu informācijas daudzumu), vēlāk sākas matemātiskās grūtības, kuru cēlonis meklējams agrīnākos posmos, bet prasmes trūkums laikus nav pamanīts.

2.1.2. Skaitļa jēdziens un decimālās skaitīšanas sistēmas izveide

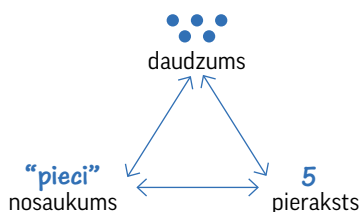
Skaitļa jēdziens ir cieši saistīts ar apkārtējo pasauli. Skaitļu pielietošana, aprakstot to, ko saskatām kvantitatīvi reālajā pasaulē, ir sākums matemātiskai pasaules izpratnei. Skaitlis dod iespēju pierakstīt objektu daudzumu. Skaitļi savā starpā ir saistīti ar noteiktām likumsakarībām, piemēram, 7 ir vairāk nekā 2. Pārsvārā mēs lietojam decimālo skaitīšanas sistēmu.

Skaitļa jēdziena attīstības trajektorija

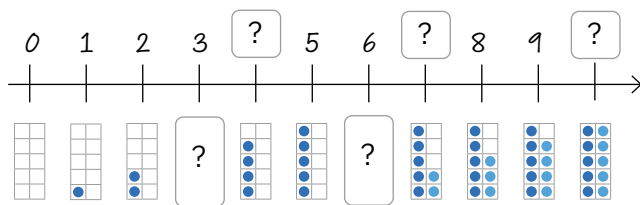
- ♦ Skaitot objektus, pēdējais nosauktais skaitlis norāda, cik objektu ir kopā. Skaita uz priekšu un atpakaļ 10 apjomā. Raksta ciparus. (1. klase)*
- ♦ Lasa uzrakstītus skaitļus līdz 100. Ar cipariem pieraksta nosauktus skaitļus līdz 100. Nosaka decimālo sastāvu (šis termins nav jālieto) skaitļiem līdz 100. (1. klase)
- ♦ Izlasa skaitļus un raksta tos līdz 1000 ar cipariem, vārdiem, izvērstā formā (kā simtu, desmitu un vienu summu). (3. klase)
- ♦ Izlasa un raksta skaitļus līdz 10 000 ar cipariem, vārdiem, izvērstā formā (kā tūkstošu, simtu, desmitu un vienu summu). (4. klase)
- ♦ Lasa un pieraksta naturālus skaitļus (līdz miljardam). Lasa un pieraksta skaitļus ar romiešu cipariem. Noapaļo naturālus skaitļus līdz noteiktai šķirai. (5. klase)

Ja domājam par skaitļiem, tad skolēniem jau sākotnēji ir jādod iespēja saprast un izmantot decimālās skaitīšanas sistēmas pamatidejas:

- pirmajā desmitā skolēniem jāizprot skaitļa dažādie attēlošanas veidi: daudzums, skaitļa nosaukums un atbilstošais pieraksts – cipars;
- desmit **vieni** ir viens **desmits**, desmit **desmiti** ir viens **simts**, desmit **simti** ir viens **tūkstotis** utt.;
- rakstos katrs cipars norāda skaitļa šķiru un tās vērtību, un skaitļa pierakstā tam ir noteikta vieta. Daudzumu pieraksta, parādot, cik skaitlī ir vienu, desmitu, simtu, tūkstošu utt. Ja kādas šķiras vērtības nav, tad to apzīmē ar 0. Tā atšķiram 304 un 34. No pierakstītā zinām, ka pirmajā skaitlī cipars 3 nozīmē trīs simtus, bet otrajā trīs desmitus.



* Iekavās minēta klase, kurā skolēns apgūst šo sasniedzamo rezultātu. Avots: *Matemātika 1.–9. klasei*. Mācību priekšmeta programmas paraugs. VISC, SKOLA2030.



Būtiski ir skolēniem dot iespēju skaitli saskatīt un izprast, izmantojot dažādas tā reprezentācijas – darbības ar priekšmetiem, vizualizāciju, skaitļu taisni un dažādus attēlojumus un simbolisko pierakstu – ciparus (sk. att.).

Pētījumi rāda, ka skolēnu spēja izmantot dažādos skaitļu attēlojumus ir cieši saistīta ar decimālās skaitīšanas sistēmas konceptuālu saprašanu (English & Mulligan, 2013).

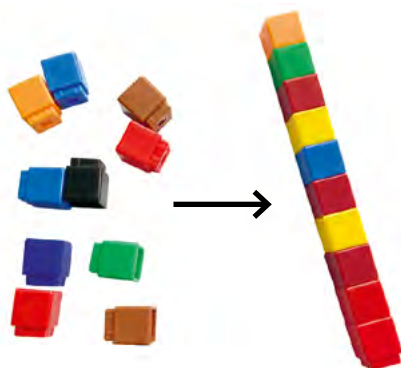
Priekšmetiskie darbības rīki (uzskate) ļoti palīdz saprast decimālo skaitīšanas sistēmu. Jaunākās klasēs, lai skolēni saprastu skaitļa jēgu, viņiem pašiem ir jāveido skaitļi, izmantojot klucīšus, kociņus u. c., jāparāda vieni un tad no desmit vieniem jāizveido desmits utt.



Aktivitāte skolēniem

SR Modelē skaitļu decimālo sastāvu – vieni un desmiti.

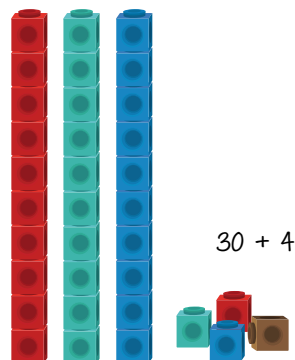
Kad skolēni jau ir apguvuši skaitļus līdz 20, aicinām skolēnus paņemt saspraucamos klucīšus, savienot kopā 10 vienus un atkārtot: 10 klucīši, sasprausti kopā, ir **viens** desmits.



Ja paņemam 23 klucīšus un šādi grupējam – savienojam, redzam, ka mums ir 2 desmiti un 3 vieni. Skolotājs kopā ar skolēniem veido dažādus piemērus. Tad skolēni stāsta, ar cik klucīšiem sāk un cik desmiti un vieni veidojas skaitlī.

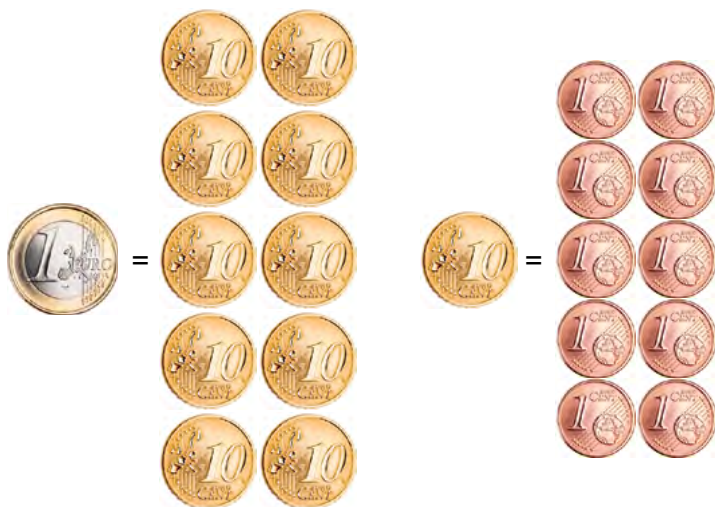
Strādājot pāri, skolēni pasaka viens otram savu skaitli, tas ir jāmodelē ar klucīšiem un jāizstāsta, cik vienu un cik desmitu redzams modelī.

Skolēni modelē dotos skaitļus ar priekšmetiskas darbības rīkiem jeb uzskati, kur ieraugāmi desmiti un vieni, viņi tos salīdzina un nosaka skaitļa decimālo sastāvu, pārveidojot par summu ($34 = 30 + 4$) u. tml.



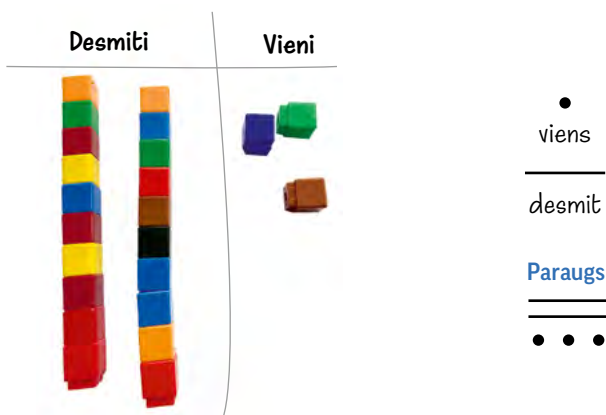
Vēl viens veids, kā palīdzēt skolēniem veidot izpratni par skaitli, ir izmantot modeli – monētas. Jārēķinās gan, ka šis uzskates veids zaudē aktualitāti, īpaši ekonomiski augsti attīstītās valstīs, jo tiek samazināts skaidras naudas lietojums ikdienā.

Desmit atsevišķu 1 centa monētu vērtība ir tāda pati kā vienai 10 centu monētai, un līdzīgi arī – desmit 10 centu monētas ir 1 eiro.



Lai saprastu cipara nozīmi tā pierakstā, lietojam savietojamos klucīšus un papīra lapu, kas ir sadalīta 2 kolonnās ar uzrakstiem “vieni” un “desmiti”. Vieni atrodas savā kolonnā, desmiti – savā. Ja, savietojot klucīšus, sanāk 10 vai vairāk vienu, tos saspraucam kopā un iegūstam vēl vienu desmitu, ko liekam desmitu slejā. Skolēniem tas ir jādara bieži un jāvingrinās ar daudziem piemēriem. Skolotājam ir svarīgi lietot vārdus “vieni” un “desmiti”. Tad skolēni mācās korekti pierakstīt skaitli, izmantojot ciparus. Cipara vietu skaitlī palīdz izprast tas, ka ar klucīšiem modelējam, modeli ievietojam tabulā un tad saistām ar abstraktiem simboliem – pierakstām skaitli.

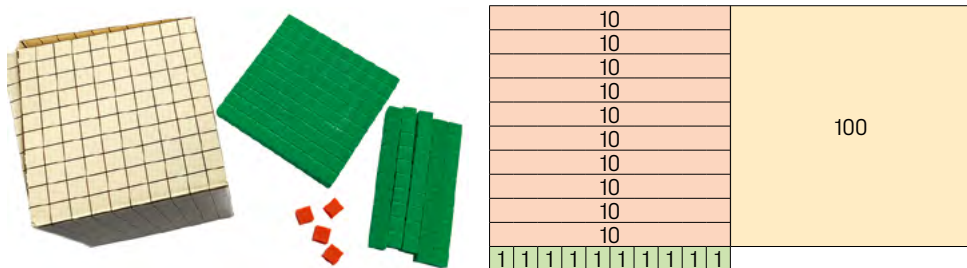
Pēc tam modeli var aizstāt ar līdzīgu vizualizāciju – desmitus attēlojot ar nogriežni, bet vienus ar punktu.



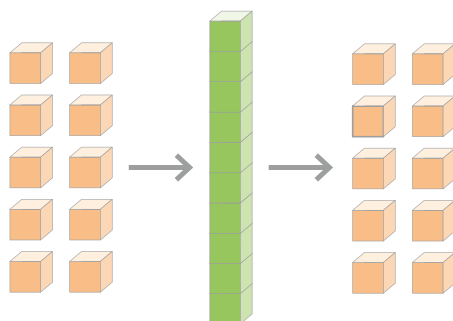
Ir jābūt dažāda satura vingrinājumiem, piemēram, rādām un rakstām tikai 3 desmitus.

Domājot tālāk par daudzciparu skaitļiem, ieteicams lietot šķiru blokus vai papīra sloksnītes, tad varam līdzīgi veidot simtus un tūkstošus.

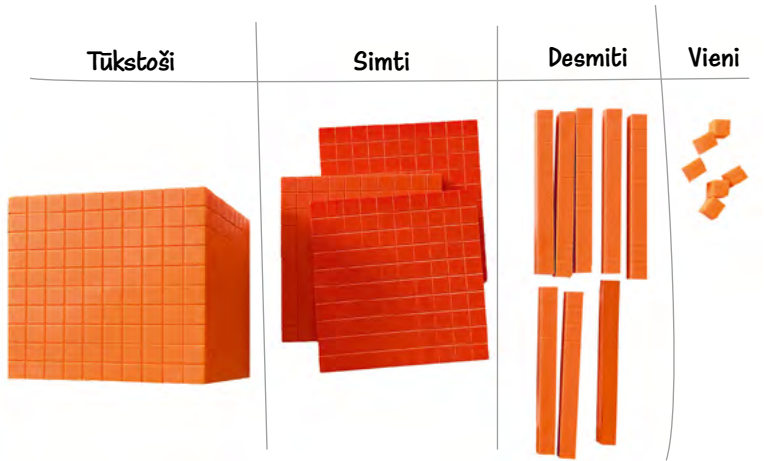
Šķiru bloki (*dienes blocks* jeb *base-ten pieces*) ir izveidoti tā, lai skolēni mācītos par decimālo skaitīšanas sistēmu, to ļoti uzskatāmi modelējot. Ja tādi nav pieejami, var lietot biezu papīru, veidojot sloksnītes desmitiem un kvadrātus simtiem. Izklājumu tūkstošiem arī var izgriezt no bieza papīra.



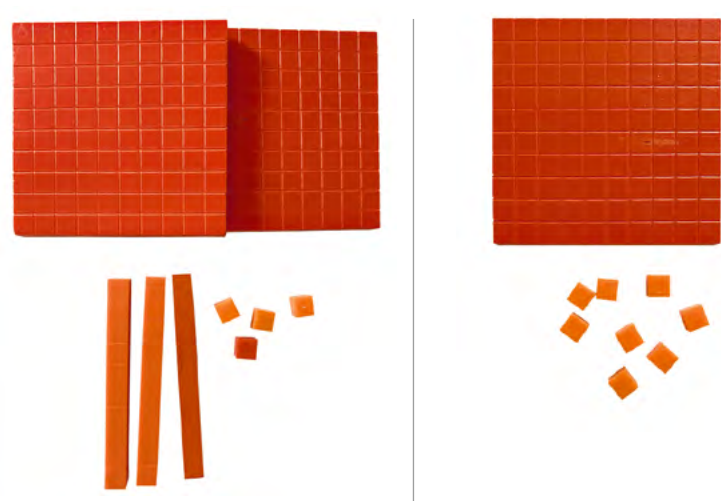
Svarīgi, ka, strādājot ar šķiru blokiem (vai papīra sloksnītēm), desmitu veido kopā salikti 10 vieni. Skolēni vairs nespauž klucīšus, bet maina 10 vienus pret 1 desmitu. Varam teikt, ka “ejam uz banku” mainīt klucīšus, tāpat kā bankā var samainīt 1 eiro pret desmit 10 centu monētām.



Skolēniem ir ieteicams darboties ar šķiru blokiem vai papīra sloksnītēm, arī mācoties par lielākiem skaitļiem. Attēlā ir redzams skaitlis 1386. Jāuzsver, ka skaitlis sastāv no 1 tūkstoša, 3 simtiem, 8 desmitiem un 6 vieniem.



Modelējot varam ievērot, ka skolēni vizuāli var atpazīt skaitļa šķiras, lai saprastu, kurš skaitlis ir domāts. Pirmajā attēlā redzam 234, otrajā – 108.



Vēlāk modeļus var aizstāt ar zīmējumiem.

Tūkstoši	Simti	Desmiti	Vieni
			

Pakāpeniski pārejot uz simboliem un vairs nelietojot vizualizācijas, var izmantot tabulu, piemēram, apzīmējot simtus ar S, desmitus ar D un vienus ar V.

S	D	V	Skaitlis
8	5	2	Astoņi simti piecdesmit divi

5. klasē apgūstot lielākus skaitļus, runājam par to, ka skaitļu ērtākai nosaukšanai tos sadala klasēs. Ik triju šķiru vienības, sākot ar vieniem, apvieno vienā klasē: vieni, desmiti un simti veido vienu klasi; tūkstoši, desmittūkstoši un simttūkstoši veido tūkstošu klasi utt. Skaitli lasot, nosauc tikai to, cik ir katras klases vienību. Tā, piemēram, skaitli 25 130 045 lasa: 25 miljoni 130 tūkstoši 45 (klases nosaukumu “vieni” parasti neizrunā).

Klases	Triljoni				Miljardi			Miljoni			Tūkstoši			Vieni		
Šķiras	Kvadriljoni	Simttriljoni	Desmittriljoni	Triljoni	Simtmiljardi	Desmitmiljardi	Miljardi	Simtmiljoni	Desmitmiljoni	Miljoni	Simttūkstoši	Desmittūkstoši	Tūkstoši	Simti	Desmiti	Vieni



Jautājumi pārdomām

- Ar ko atšķiras jēdzieni “skaitlis” un “skaitļu izjūta”?
- Kā atpazīt skaitļu izjūtu skolēnu darbībās?
- Kā es savā praksē skolēniem attīstu skaitļu izjūtu?
- Kā un kāpēc izmantot darbības ar priekšmetiem, lai saprastu decimālo skaitīšanas sistēmu?
- Kā darbības ar priekšmetiem palīdz veidot skaitļa pierakstu?

Literatūra tālākai uzziņai

Anghileri, J. (2006). *Teaching Number Sense*. Continuum.

English, L., Mulligan, J. (eds.) (2013) *Reconceptualizing Early Mathematics Learning*. Advances in Mathematics Education. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6440-8_4

Mcintosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2–8.

2.1.3. Saskaitīšanas paņēmieni un to attīstība

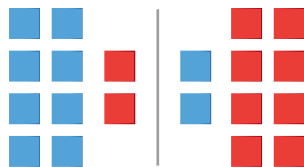
Saskaitīt nozīmē noskaidrot, cik kaut kā ir kopā. Viens un tas pats kopums/daudzums var dažādi veidoties no divām vai vairākām daļām, ko varam pierakstīt ar saskaitīšanas palīdzību. Veiksmīga saskaitīšanas paņēmienu atklāšana (skolēns ar skolotāja palīdzību atklāj vai iegūst, tad pats atlasa sev piemērotākos) un apguve demonstrē izpratni par darbībām, piemēram, saskaitīšanu un tās īpašībām. Tradicionālie saskaitīšanas algoritmi ir būtiski paņēmieni, kas ir atklāti un tiek visbiežāk lietoti.

Naturālo skaitļu saskaitīšanas prasmes attīstības trajektorija

- ♦ Modelē, shematiski attēlo skaitļu līdz 10 sastāvu un skaitli pieraksta kā summu. Saskaita un atņem 10 apjomā, demonstrējot izpratni par skaitļa sastāvu un darbību jēgu. (1. klase)
- ♦ Veic aprēķinus situācijā, kuras aprakstīšanai nepieciešama 3 skaitļu saskaitīšana 20 apjomā. Saskaitot rezultāts nemainās, ja maina saskaitāmos vietām, tāpēc vienmēr pie lielākā skaitļa var pieskaitīt mazāko. Saskaitot vairākus skaitļus, saskaitīšanas secību var mainīt. (1. klase)
- ♦ Saskaitot divciparu skaitļus, desmitus saskaita ar desmitiem, vienus ar vieniem; saskaitot vienus, var veidoties jauns desmits. (1. klase)
- ♦ Saskaita un atņem 100 apjomā arī tad, ja notiek pāreja jaunā desmitā, lietojot dažādus paņēmienus. Aprēķinos izmanto decimāldaļas veidā dotas naudas summas. (2. klase)
- ♦ Veido dažādas izteiksmes, izmantojot dotos skaitļus; ja iespējams, aprēķina izteiksmes vērtību. Situāciju raksturo ar divu darbību skaitlisku izteiksmi; ja nepieciešams, izmanto iekavas. (2. klase)
- ♦ Saskaita 1000 apjomā, izmantojot konkrētus modeļus un zīmējot, lietojot paņēmienus, kuri balstās uz skaitļa decimālā sastāva izpratni, darbību īpašībām, formulējot sev saprotamu algoritmu. (3. klase)
- ♦ Saskaita 10 000 apjomā. (4. klase)
- ♦ Saskaita skaitļus līdz miljardam. Aprēķina vairāku saskaitāmo summas vērtību, saskatot sakarības starp skaitļiem un mainot saskaitāmos vietām. (5. klase)

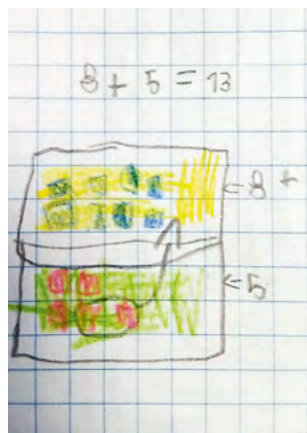
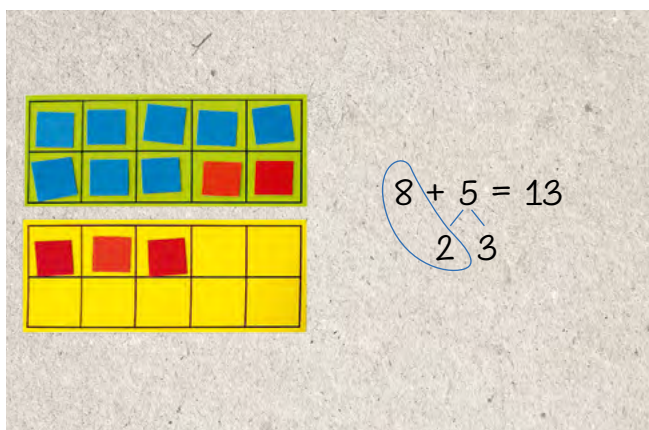
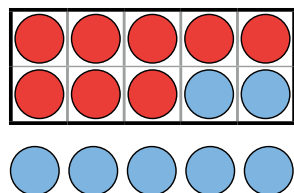
Apskatīsim piemēru, kurā domājam par to, kā bērns sāk apgūt saskaitīšanu. Vispirms bērns, kurš ir tikko iemācījies skaitīt, izskaitīs 3 klucīšus un tad 5 klucīšus. Lai atbildētu uz jautājumu, cik klucīšu ir pavisam, bērns saliks visus klucīšus kopā un tad sāks skaitīt no 1, kamēr sasniegs 8. Tikai ar laiku un daudzu piemēru aplūkošanu, izmantojot darbības ar priekšmetiem un sarunājoties par to, kā skolēns domā, viņš sapratīs, ka var sākt skaitīt no 3 un pieskaitīt vēl 5: četri, pieci, seši, septiņi, astoņi. Pētījumi rāda, ka šī ir svarīga prasme saskaitīšanā. Šo veidu mēs varam apzīmēt kā **turpināšanu skaitīt no noteikta skaitļa**.

Nākamais solis – jāsaprot, ka tad, ja ir jāaprēķina, cik ir $2 + 8$, vieglāk ir sākt ar 8, ne ar 2. Ar laiku skolēns sāks saprast **pārvietojamības (komutatīvo) īpašību saskaitīšanā**. Skolēni mācīsies šo īpašību formāli vēlākās klases. Jaunākās klasēs modelēšanas ceļā viņi ierauga, ka, 2 klucīšiem pieliekot klāt 8, iegūst tikpat, cik tad, ja 8 klucīšiem pieliek 2, no kā var secināt, ka rezultāts nemainās neatkarīgi no tā, kuram skaitlim kuru pieskaita.



Veidojam 10

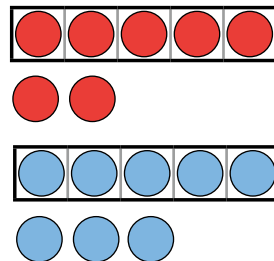
Šo paņēmieni lietojam, pat daudz nedomājot, īpaši ja skolēni ir pazīstami ar 10 rāmi. Pirms veikt darbību ar skaitļu rāmi, skolēni jau prātā redz kastīti. Ja, piemēram, gribam saskaitīt $8 + 7$, varam domāt šādi: sākam ar 8. Skaitlis 8 ir 2 lēcieni attālumā no 10. Tad domājam par 7. 7 ir $2 + 5$. Prātā noliekam 2 ripiņas, lai veidotu 10, un paliek vēl 5 pāri: tātad iegūstam 15. Šo pieeju klasē var ieraudzīt tā, kā parādīts attēlā.



Lai šo paņēmieni skolēns veiksmīgi pielietotu, tos skaitļu pārus, kas veido desmit, ir vēlams iegaumēt (1 un 9; 2 un 8; 3 un 7; 4 un 6; 5 un 5).

Veidojam 5

Tāpat kā ar 10, daži skolēni labāk izprot un domā, skaitot pa 5. Piemēram, lai saskaitītu $7 + 8$, var domāt šādi: 7 ir 5 un vēl 2, 8 ir 5 un vēl 3. Tad sanāk divi 5, kas ir 10, klāt vēl 2 un 3. Rezultātā kopā ir 15.



Lai skolēni paši darbotos un vingrinātos, var izmantot dažādas lietotnes, piemēram, *MathLearningCenter* lietotni *Number Frames*, ar kuras palīdzību skolēni var gan modelēt, gan pierakstīt veikto darbību.



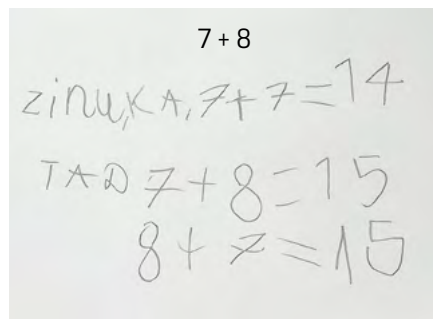
<https://apps.mathlearningcenter.org/number-frames/>

Lietot jau zināmas summas

Ir summas, kuras skolēns ir iegaumējis, tās viņš uztver automātiski, un katram bērnam tās var būt atšķirīgas. Piemēram, ja kādam prātā ir palikusi summa $5 + 3$, tad, balstoties uz šīm zināšanām, skolēns var spriest, kā iegūst summu $6 + 3$ vai $5 + 4$ u. tml. Ne visi skolēni šādi domās, tomēr visiem ir vērtīgi ieraudzīt šādu paņēmieni.

Dubultošana

Kopīgi ir vērts apgūt “dubultošanas summas” $4 + 4$, $6 + 6$, $7 + 7$ utt. un izmantot tās jau kā zināmas summas. Skolēns var spriest: neesmu drošs par $6 + 7$, bet zinu, ka $6 + 6$ ir 12. Tad, ja pieliek vēl vienu klāt, iegūstu 13. Šo stratēģiju var saukt arī par “**dubults un viens**”.



Tāpat var izmantot arī “**dubults un divi**”: $8 + 6$.

Zinu, ka $6 + 6 = 12$, un vēl 2 klāt ir 14.

Lai šāds paņēmiens skolēnam būtu ērts, iepriekš sistemātiski, ar dažādiem piemēriem jāveido skaitļu izjūta, vēlams arī skolēniem automatizēt skaitļa sastāvu – piemēram, 8 var izveidot no 6 un 2.



Svarīgi paturēt prātā

Skolotājs nevar vienkārši uzrakstīt dažādus saskaitīšanas paņēmienus uz tāfeles un gaidīt, ka skolēni tos iegaumēs un lietos. Paņēmieni jāveido skolēniem pašiem,

ar skolotāja palīdzību tie jāprecizē vai jāapstiprina. Lai to veiktu, skolotājs var lūgt kādam skolēnam izskaidrot savu domu gaitu visai klasei. Tad var iesaistīt citus skolēnus, aicinot pastāstīt, ko viņi domā par klasesbiedra teikto. Vai viņi arī lieto šādu paņēmieni? Vai varam lietot šo paņēmieni arī citiem uzdevumiem? Turpmākajās stundās var atsaukties uz skolēnu minētajiem paņēmieniem, piemēram, Aiva izmantoja dubultošanu, Pēteris domāja par pieciniekiem. Apgūto paņēmieni skaits nav pašmērķis, bet vajadzētu palīdzēt izprast, ka tie ir dažādi, un mācīt piemeklēt situācijai piemērotākos.

Saskaitīšana, izmantojot skaitļu taisni

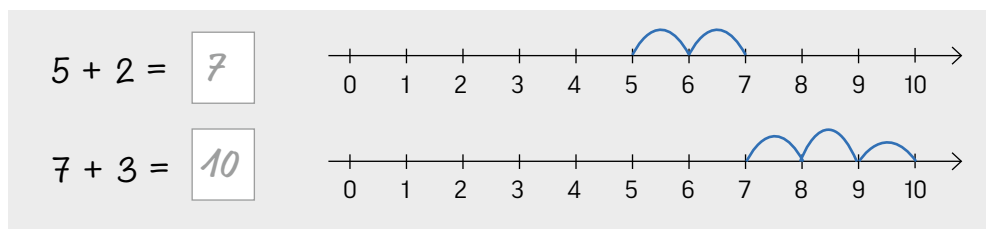
Skaitļu taisne tiek uzskatīta par vērtīgu rīku, tā palīdz veidot izpratni par matemātikas darbību jēgu, attīsta skaitļu izjūtu un ļauj izprast skaitļu savstarpējo novietojumu un secību. Tā it kā savieno skolēna telpisko domāšanu un skaitļu izjūtu. Tomēr jāņem vērā, ka pirms tam ieteicams izmantot darbības ar priekšmetiem.



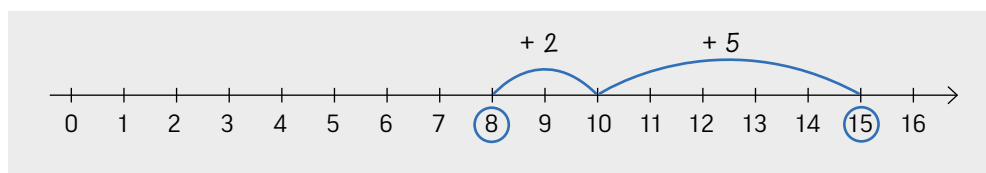
Aktivitāte skolēniem

SR Modelē saskaitīšanu, izmantojot skaitļu taisni 20 apjomā.

Sākotnēji skolēni uz skaitļu taisnes var attēlot saskaitīšanu, vispirms atrodot vienu saskaitāmo un virzoties uz priekšu nepieciešamo skaitu soļu, jo viņi vēl nesaskata saskaitāmo kā elementu kopu. Attēlā redzams, ka skolēns šādi ir veicis saskaitīšanu.

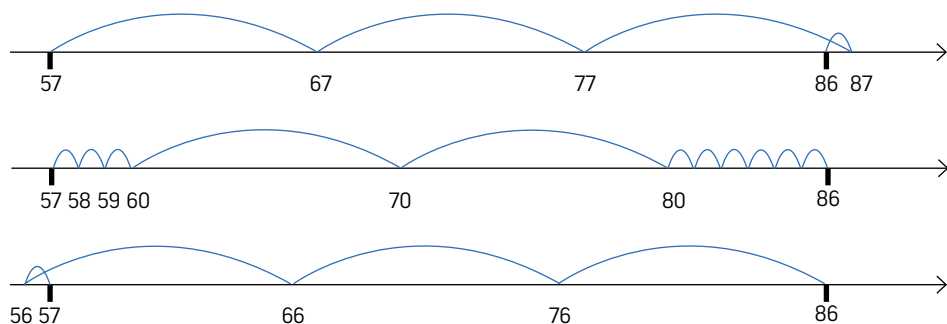


Var, piemēram, lietot iepriekš aprakstīto stratēģiju “veidojam 10”. Attēlā redzams, kā risināta izteiksme 8 + 7. Vispirms skolēns ieraudzījis, cik trūkst līdz 10, un tad pieskaitījis atlikumu.



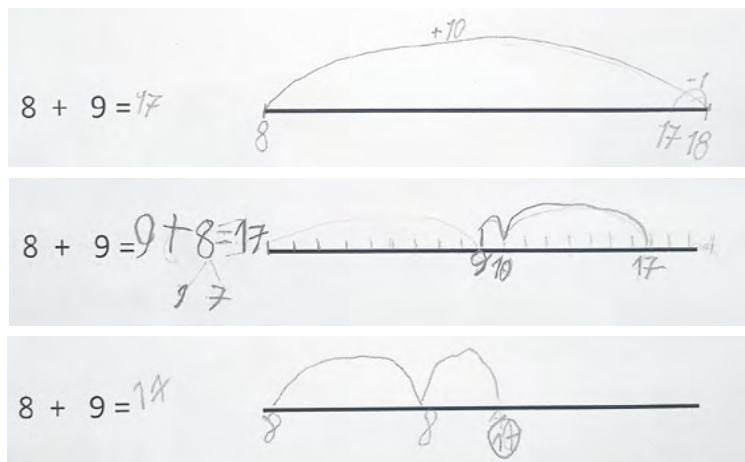
Skaitļu taisne var noderēt kā rīks, lai vizualizētu izvēlēto saskaitīšanas paņēmieni un shematiski attēlotu situāciju uzdevumos. Šeit īpaši uzsvērta “tukša” jeb tikai iesākta skaitļu taisne, kur nav iepriekš noteiktu iedaļu un iedaļas vērtību – tās jāveido pēc nepieciešamības. Tomēr jāpatur prātā, ka atsevišķiem skolēniem tā var likties ļoti abstrakta, īpaši pirmajās klasēs, kad tikai veidojas skolēnu abstraktā domāšana.

Dažādi veidi, kā atrisināt izteiksmi $57 + 29$:



(Frykholm, 2010)

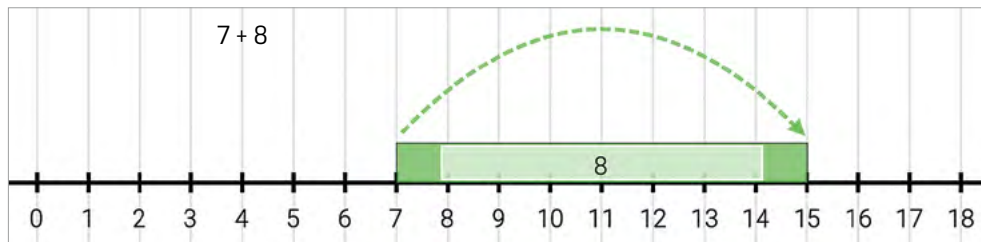
Ar šāda veida uzdevumiem varam saskatīt un veicināt skolēnu dažādu domāšanu, piemēram, 1. klases skolēni spriež atšķirīgi, izmantojot tukšo skaitļu taisni:





Lai skolēni paši darbotos un vingrinātos, varam izmantot dažādas lietotnes, piemēram, *MathLearningCenter* lietotni *Number Line*, kur skolēni var izvēlēties un veidot savas skaitļu taisnes un modelēt dažādus saskaitīšanas piemērus.

<https://apps.mathlearningcenter.org/number-line/>



Saskaitīšana rakstos

Ja aplūkojam uzdevumu saskaitīt 7 klucīšus un 8 klucīšus, tad redzam, ka, pie 7 pieliekot 3, veidojas jauns desmits, ko noliekam desmitu kolonnā, un paliek 5 vieni. Ja aplūkojam uzdevumu saskaitīt 2 desmitus 6 vienus ar 3 desmitiem un 7 vieniem, tad šādā uzdevumā skolēniem vispirms var būt jāuzraksta šie skaitļi, tad jāveido pieraksts, rakstot skaitļus vienu zem otra, un tikai tad jāsāk domāt par saskaitīšanu.

Saskaitām 6 un 7 vienus, sanāk viens desmits, ko noliekam desmitu slejā – pierakstām virs desmitiem, un paliek 3 vieni. 3 vienus rakstām zem vieniem. Saskaitām desmitus: $1 + 2 + 3 = 6$, ko rakstām zem desmitiem. Kopā sanāk 6 desmiti un 3 vieni jeb 63.

Piemēram,

$$\begin{array}{r} 1 \\ 26 \\ + 37 \\ \hline 63 \end{array}$$

Ieteicams skolēniem veidot savas atgādnas, kur fiksēt saskaitīšanas algoritma secību.



Svarīgi paturēt prātā

Domāšanu par saskaitīšanas procesu varam skatīt divējādi: ir situācijas, kur ir dabīgi sākt ar desmitiem un tad saskaitīt vienus. Domāšana notiek it kā no kreisās uz labo pusi, ja raugāties uz pašu skaitli. Pat rakstos varētu saskaitīšanu sākt no kreisās puses. Tai pašā laikā skolēniem tiek mācīts sākt skaitīt no labās puses, jo tas ir universāls saskaitīšanas paņēmiens. Ja sāk skaitīt no kreisās puses, reizēm var nākties soļus atkārtot, jo ir radies vēl viens desmits, saskaitot

vienus. Skolotājs var pats vienmēr sākt saskaitīšanu no skaitļu labās puses un mudināt skolēnus darīt līdzīgi, bet nevajag teikt, ka nav iespējams citādi un ka cits risināšanas veids ir nepareizs.

Daudzciparu skaitļu saskaitīšana rakstos

Ir ļoti svarīgi domāt dziļāk par skolēnam nepieciešamajām zināšanām, lai viņš izprastu saskaitīšanu rakstos, ne tikai atkārtotu iedotu gatavu algoritmu. Sākotnēji skolēni var pierakstīt arī skaitļu šķiras.

$$\begin{array}{r} \text{SDV} \\ 237 \\ + 486 \\ \hline \end{array}$$

Kad saskaitām vienus, 7 un 6, iegūstam 13. Pierakstām 3 vienu slejā un paturam prātā vēl 1 desmitu, rakstām 1 desmitu slejā virs desmitiem. Turpinām, saskaitot 3 un 8 desmitus un vēl 1 desmitu, iegūstam 12 desmitus. Zinām, ka 10 desmiti veido 1 simtu, tāpēc desmitu slejā pierakstām 2 un paturam prātā vai pierakstām vēl 1 simtu slejā virs simtiem. Tad saskaitām 4 simtus, 2 simtus un vēl 1 simtu, iegūstam 7 simtus. Atbilde ir 723.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 237 \\ + 486 \\ \hline 723 \end{array}$$



Vingrināties saskaitīt rakstos var arī, izmantojot digitālās iespējas, aizstājot darba lapas. Ir izveidots modelis, kas palīdz skolēniem vingrināties un praktizēt daudzciparu skaitļu saskaitīšanu, kur skolēniem ir iespēja pierakstīt prātā paturamos skaitļus.

<https://www.geogebra.org/m/hurcverw>



Dažkārt skolēniem nepietiek ar to, ka viņi mācās saskaitīšanas algoritmu un pieraksta skaitļus vienu zem otra, viņiem vēl joprojām ir nepieciešams modelēt darbību ar priekšmetiskajiem darbības rīkiem.



Svarīgi paturēt prātā

Digitālie risinājumi var noderēt, lai nebūtu tikai jādarbojas ar priekšmetiem. Skolēni nevar iegūt pilnīgu izpratni, tikai klausoties skolotāja stāstījumā un vērojot. Tāpat kā neviens neiemācās braukt ar divriteni vai auto, skatoties, kā citi brauc, arī priekšmetiskie darbības rīki ir jālieto pašam, lai iegūtu īstu saprašanu un prasmi veikli veikt darbības.



Lai skolēniem būtu iespēja modelēt saskaitīšanu, var izmantot dažādas lietotnes, piemēram, *MathLearningCenter* lietotni *Number Pieces*.

<https://apps.mathlearningcenter.org/number-pieces/>



PIEMĒRS: saskaitām 38 un 65:

Diagram 1: Initial setup

38
+ 65

Diagram showing 38 (3 tens rods and 8 units cubes) and 65 (6 tens rods and 5 units cubes) using base ten blocks.

Diagram 2: Regrouping 10 units into 1 ten

Kad saskaitām vienus, kopā sanāk 13 vieni.
Samainām 10 vienus pret 1 desmitu.

38
+ 65

Diagram showing the regrouping of 10 units cubes into 1 ten rod.

Diagram 3: Regrouping 10 tens into 1 hundred

Pierakstām, ka ir vēl 1 desmits,
un paliek 3 vieni.

1
38
+ 65
3

Diagram showing the regrouping of 10 ten rods into 1 hundred rod.

Diagram 4: Final result

Kopā iegūts 1 simts un 3 vieni.

1
38
+ 65
103

Diagram showing the final result: 1 hundred rod and 3 units cubes.



Svarīgi paturēt prātā

Darbību veikšana ar lieliem skaitļiem nereti skolēniem sagādā grūtības. Katram skolēnam ir svarīgi saprast, kā ir būvēta decimālās skaitīšanas sistēma. Izpratne par naturāliem skaitļiem jaunākajās klasēs ļoti palīdzēs turpmāk saprast apgūstamo saskaitīšanu ar decimāldaļām (Sowder, 1997; Markovits & Sowder, 1994). Tādējādi tiks nodrošināta prasmes veiksmīga pēctecība.



Jautājumi pārdomām

Cik dažādas reprezentācijas – fiziski, vizuāli, vārdiski, kontekstuāli, simboliski – jūs ieteiktu lietot, apgūstot naturālo skaitļu saskaitīšanu?

Kuras no iepriekš minētajām saskaitīšanas stratēģijām, jūsu prātā, ir visveiksmīgākās?

Kuru no paņēmieniem jūs neizmantojat vai maz izmantojat? Vai esat gatavi to ieviest savā praksē?

Kā veidot atbalstu skolēniem, kuriem ir grūtības, apgūstot saskaitīšanas konceptu?

Literatūra tālākai uzziņai

- Bove, S. P. (1995). Place Value: A Vertical Perspective. *Teaching Children Arithmetic*, 1(9), 542–546.
- Fraivillig, J. L. (2018). Enhancing Established Counting Routines to Promote Place-Value Understanding: An Empirical Study in Early Elementary Classrooms. *Early Childhood Education Journal*, 46(1), 21–30.
- Frykholm, J. (2010). Learning to think mathematically with the number line: A resource for teachers, a tool for young children. *Math Learning Center*.
- Hartnett, J. (2018). Teaching place-value: Concept development, big ideas and activities. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 23(3), 35–40.
- Hiebert, J., & Wearne, D. (1992). Links between Teaching and Learning Place Value with Understanding in First Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(2), 98–122.
- Markovits, Z., & Sowder, J. (1994). Developing Numbers sense: An Intervention Study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 4–29.
- Reys, R., Lindquist, M., Lambdin, D., & Smith, N. (2015). *Helping Children Learn Mathematics*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Sowder, J. (1997) Place Value as the Key to Teaching Decimal Operations. *Teaching Children Mathematics*, April, 448–453.
- Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Boston: Allyn & Bacon.

2.1.4. Atņemšanas paņēmieni un to attīstība

Līdzīgi kā ar saskaitīšanu, apgūstot atņemšanu, skolēniem ir svarīgi pašiem redzēt un darboties, lai saprastu, ka, modelējot atņemšanas darbību ar šķiru klučīšiem, tā ir rēķināšanas rakstos vizuāla reprezentācija un tā atspoguļo decimālās skaitīšanas sistēmas struktūru. Lai skolēni saprastu, kā notiek atņemšana rakstos, ir ļoti svarīgi izprast šīs darbības soļus. Ja sākumā mērķtiecīgi tiek veltīts pietiekams laiks tam, lai skolēni izprastu un apgūtu algoritmu, vēlāk viņiem būs daudz mazāk kļūdu un neskaidrību (Reys et al., 2015).

Naturālo skaitļu atņemšanas prasmes attīstības trajektorija

- ♦ Atņem 10 apjomā, demonstrējot izpratni par skaitļa sastāvu un darbības jēgu. (1. klase)
- ♦ Modelē atņemšanu (objekti, sloksnītes, lineāls) un lieto sakarības starp summām un starpībām. (1. klase)
- ♦ Atņem 20 apjomā, izvēloties kādu no paņēmieniem, skaidro, kā rezultāts iegūts, kā zina, ka rezultāts pareizs. (1. klase)
- ♦ Aprēķina skaitli, kurš ir par tik lielāks/mazāks, ja zināms otrs. (1. klase)
- ♦ Simts apjomā atņem pilnus desmitus; no divciparu skaitļa atņem pilnus desmitus un viencipara skaitli. (1. klase)
- ♦ Atņem 100 apjomā arī tad, ja notiek pāreja jaunā desmitā, lietojot dažādus paņēmienus. (2. klase)
- ♦ Nosauc piemērus situācijām, kuras atbilst dotajai izteiksmei vai vienādībai (saskaitīšana un atņemšana 100 apjomā). (2. klase)
- ♦ Atņem 1000 apjomā, izmantojot konkrētus modeļus un zīmējot, lietojot paņēmienus, kuri balstās uz skaitļa decimālā sastāva izpratni, darbību īpašībām un/vai sakarību starp saskaitīšanu un atņemšanu, formulējot sev saprotamu algoritmu. (3. klase)
- ♦ Atņem daudzciparu skaitļus 10 000 apjomā. (4. klase)
- ♦ Atņem daudzciparu skaitļus miljona apjomā. Nosaka nezināmo skaitli vienādībā, ja skaitlis apzīmēts ar burtu. Veido un formulē vispārinājumus par to, kā mainās starpība, mainot mazināmo un/vai mazinātāju. (5. klase)

Skaitļa sastāva izmantošana atņemšanā

Bērniem, kuri mācās saskaitīt un atņemt 10 apjomā, ir derīgi veltīt pietiekami daudz laika vienam skaitlim. Piemēram, 7.



Aktivitāte skolēniem

SR Modelē atņemšanu 10 apjomā.

Skolotājs aicina skolēnus skaitīt un saspraust 7 saspražamos klučīšus un izveidoto “7 stāvu torni” aizlikt sev aiz muguras. Tad aicina sadalīt torni divās daļās,

katrā rokā paturot daļa no torņa. Vienam bērnam būs 3 klucīši vienā rokā un 4 otrā, citam būs 2 un 5, vēl citam 5 un 2. Tad var kopīgi spriest, ka bija 7 – no tā atņemam 3, paliek 4, tāpat var atņemt 4, paliek 3.

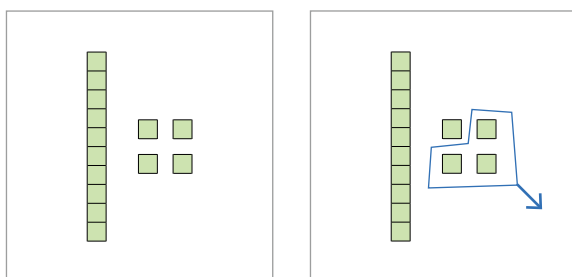
Šī aktivitāte atšķiras no citām, kur nāk klāt zināms skaits klucīšu. Piemēram, Annai ir 3 klucīši, kuriem viņa pieliek klāt 4 klucīšus. Torņa sadalīšana rāda skaitļa sastāvu, un to var izmantot, domājot, kā notiek atņemšana.

Atņemšanas modelēšana, izmantojot darbības ar priekšmetiem

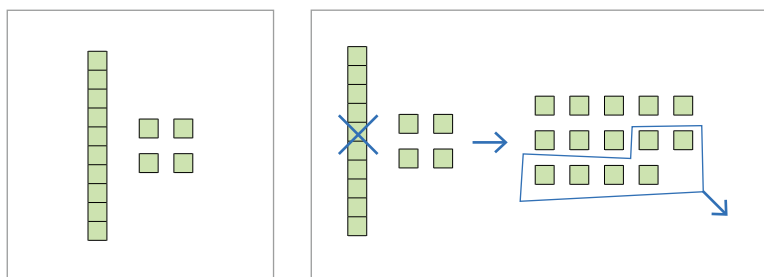
Līdzīgi kā saskaitīšanā, modelējot atņemšanu, sākotnēji skolēniem ir jāatgādina, ka skaitlis, piemēram, 14, ir 1 desmits un 4 vieni jeb 14 vieni. Parasti mēģinām veidot tik desmitus, cik varam. Ja ir 37 mazie klucīši, tad savienojam 3 desmitus (vai samainām 30 vienus pret 3 desmitu šķiras klucīšiem) un paliek 7 vieni.

Ir svarīgi, ka skolēni sākotnēji modelē vienkāršas darbības ar klucīšiem, lai vēlāk spētu modelēt darbības ar lielākiem skaitļiem, kas skolēniem var sagādāt grūtības. Sākam ar piemēriem, kur ir iespēja atņemt pa šķirām, to modelējot, un tikai pēc tam domājam par pierakstu un to, kā šo darbību veikt bez modeļa palīdzības.

Modelējam un rādām atņemšanu $14 - 3$, kur no 4 vieniem viegli var atņemt 3, iegūstot 1 vienu, un ir palicis arī 1 desmits.



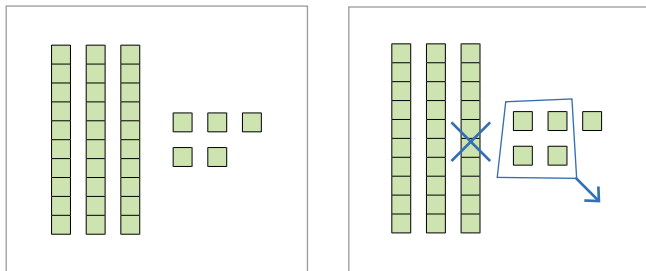
Modelējam un rādām atņemšanu $14 - 6$, izmantojot klucīšus (sk. att.). Sākam ar 1 desmitu un 4 vieniem. Tā kā no 4 nevaram atņemt 6, tad 1 desmitu sadalām vienos, iegūstot 14 vienus, un atņemam 6.



Tad skolēni paši modelē dažādus atņemšanas piemērus un stāsta, ko darījuši, – 3 skaļi domā.

Līdzīgi varam rīkoties, kad mācāties atņemt divciparu skaitļus.

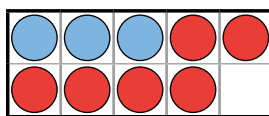
UZDEVUMA PIEMĒRS: $35 - 14$.



Tāpat kā saskaitīšanā, arī atņemšanā 10 ir kā enkurs, kas palīdz veidot atņemšanu.

10 un 5 izmantošana

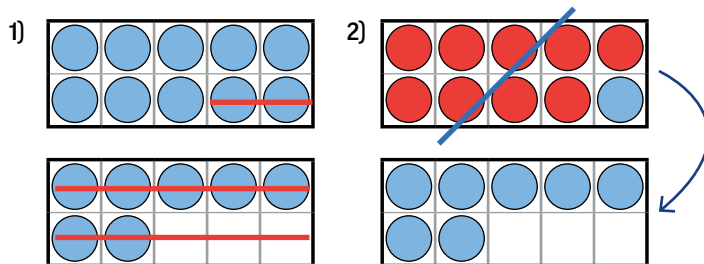
Lai no 9 atņemtu 6, domājam: cik ir līdz 5; no 9 līdz 5 ir 4, un vēl jāatņem 2, iegūstam 3. Šāda veida spriešanu var veiksmīgi vizualizēt, izmantojot 10 rāmi.



Līdzīgi spriežam, kad ir jāveic atņemšana, pārejot no viena desmita uz citu, piemēram, $17 - 9$.

Domājam: 1) no 17 vispirms atņem 7, paliek 10, jāatņem vēl 2, iegūstam 8;

2) $17 - 10$ ir 7, bet ir atņemts 1 par daudz. Pieliekot 1 klāt, iegūstam 8.

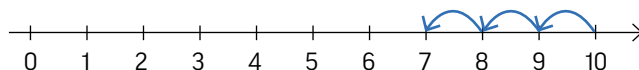


Jau zināmu summu lietošana

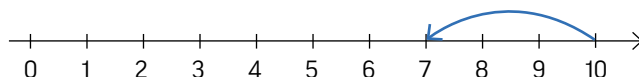
Dubultotas summas reizēm palīdz skolēniem veikli izpildīt atņemšanu. Piemēram, $16 - 7$. Var domāt šādi: 16 ir $8 + 8$. Tad $16 - 8 = 8$, bet te atņemts 1 par daudz, tāpēc paliek par 1 vairāk: 9.

Atņemšanas vizualizācija, izmantojot skaitļu taisni

Praksē sākotnēji skolēni atņemot bieži skaita atpakaļ. To biežāk izmanto, ja jāatņem mazs skaitlis, kā 1, 2 vai 3. Šo spriešanas veidu varam arī vizualizēt, izmantojot skaitļu taisni. Piemēram, $10 - 3$: lecam 3 vienības atpakaļ: 9, 8 un 7.

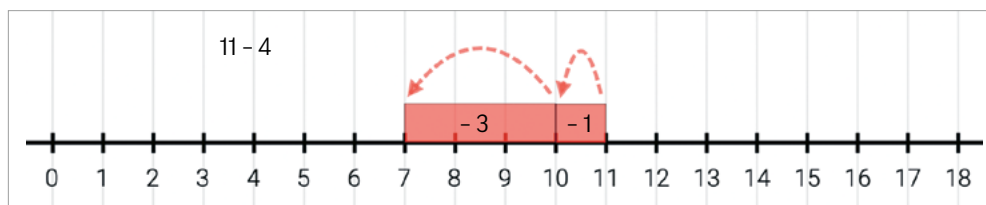


Vēlāk jau skatām 3 kā kopumu un vizualizējam.



Lai skolēni paši darbotos un izprastu, kā veidojas atņemšana, var izmantot dažādas lietotnes, piemēram, *MathLearningCenter* lietotni *Number Line*, kur varam izvēlēties un veidot savas skaitļu taisnes un modelēt dažādus atņemšanas piemērus, “staigājot pa skaitļu taisni”.

<https://apps.mathlearningcenter.org/number-line>



Skaitīšana uz priekšu

Daži skolēni atņem, izmantojot šādu paņēmieni: sāk ar skaitli, ko atņem (ar mazinātāju), un skaita līdz skaitlim, no kura atņem (mazināmajam). Piemēram, $8 - 5 = 3$. Sākam ar skaitli, ko atņem, tas ir 5, un skaitām, cik ir līdz 8. Iegūstam 3. Bieži redzam, ka šo paņēmieni skolēni izmanto vēlāk, kad jāmeklē kāds darbības nezināmais loceklis – jānoskaidro, cik ir jāatņem no 8, lai iegūtu 5.

$$8 - \dots = 5$$

Atņemšana rakstos

Kad skolēni ir modelējuši, kā notiek atņemšana, tad var pārrunāt darbības pierakstīšanu. Atņemšanu varam pierakstīt kā izteiksmi (vienā rindā) vai arī rakstīt skaitļus vienu zem otra:

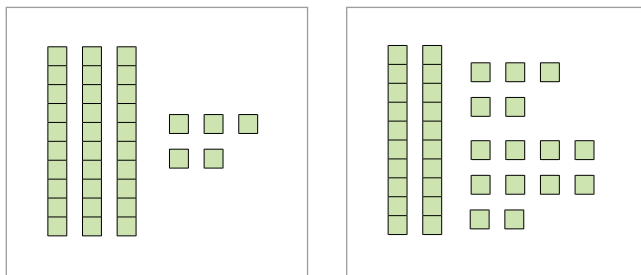
$35 - 14$ vai

$$\begin{array}{r} 35 \\ - 14 \\ \hline \end{array}$$

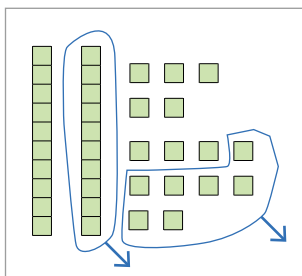
UZDEVUMA PIEMĒRS: 35 – 17

Pirms sākt pierakstīt, vispirms var modelēt un pēc tam rakstīt.

Sākam ar 3 desmitiem un 5 vieniem. Gribam atņemt 7 vienus, bet ir tikai 5, tāpēc ņemam vienu desmitu un pārveidojam par 10 vieniem.



Jāatgādina skolēniem, ka tad, kad mainām klucīšus, rakstos vieni atrodas vienu slejā un desmiti desmitu slejā. Varam teikt, ka samainām 1 desmitu pret 10 vieniem. Tad sanāk 2 desmiti un 15 vienus. Tagad varam atņemt 7 vienus, paliek 8 vienus. Atņemam 1 desmitu, sanāk 18.



Šādā veidā spriežam, arī veidojot pierakstu un izprotot, kā rakstāmi skaitļi viens zem otra.

$$\begin{array}{r} 2 \ 15 \\ 35 \\ - 17 \\ \hline 18 \end{array}$$



Svarīgi paturēt prātā

Priekšmetiskie darbības rīki ir viena no skaitļu reprezentācijām. Lai skolēni iegūtu dziļu izpratni, ir jālieto dažādas reprezentācijas. Rezultātā gribam, lai skolēni pārliecinoši un precīzi rēķinātu gan galvā, gan rakstos. Priekšmetiskie darbības rīki mums palīdz veidot izpratni, bet, lai pilnveidotu prasmi, tā ir jāsaista ar citām reprezentācijām: mutiskām, reālām situācijām, attēliem un simboliem.

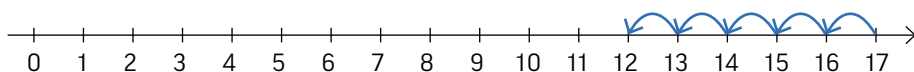
Visvieglāk to ir panākt, vienlaikus darbojoties ar klucīšiem un pierakstot darbības simbolos, kā tas ir ierasts. Kad skolēni brīvi rīkojas ar klucīšiem, var pāriet uz attēliem. Attēli var būt bildes, zīmējumi uz papīra vai ekrānā (Reys et al., 2015).

Atnēmšanas pieraksts ar izteiksmi

Bieži skolēniem piedāvājam piemērus, kas uzrakstīti vienā rindā, piemēram, $17 - 5$. Tad skolēni var meklēt atbildi dažādos veidos un **lietot atšķirīgus paņēmienus**.

Aplūkosim dažus veidus, kā varētu spriest skolēni vienā klasē, ja ir apgūti atšķirīgi atnēmšanas paņēmieni.

- 1) Līdzīgi kā saskaitot, skolēns varētu domāt par skaitļu taisni un skaitīt atpakaļ 5 soļus: sākam ar 17, viens solis atpakaļ ir 16, tad 15, 14, 13, 12.



- 2) Izmantojam skaitļa sastāva zināšanas un skaitļa decimālo sastāvu. Zinām, ka 7 sastāv no 5 un 2.



Bet $17 = 10 + 7$

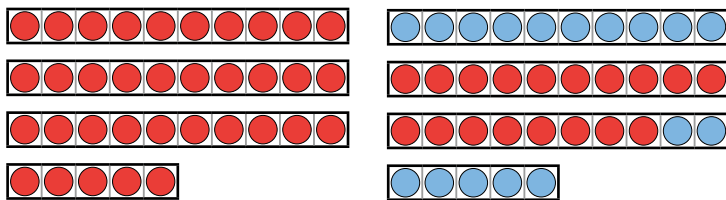


Tad, no 17 atņemot 5, iegūstam 12.

- 3) Cits skolēns domās par saistību ar 10. Sākot ar 17, līdz 10 ir 7 soļi atpakaļ. Ir jāatņem tikai 5. Tad pie 10 pieliekam atpakaļ 2 un iegūstam 12.
- 4) Skolēns varētu pie sevis domāt arī šādi: "Cik man ir jāpieskaita pie 5, lai sanāktu 17?" Šādi spriežot, viņš meklē nezināmo *saskaitāmo* vai, kā vēlāk rakstītu, $5 + x = 17$. Lietojot šo stratēģiju, skolēns saprot konceptu, ka viss kopums var veidoties no atsevišķām sastāvdaļām, no kurām vienas trūkst. Šī veida domāšana ļoti palīdz attīstīt izpratni par saskaitīšanas un atņemšanas savstarpējo saistību, tāpēc ir ieteicams uzsvērt šo paņēmieni (Walle et al., 2010, 175).

Biežāk vērojamās kļūdas un maldīgie priekšstati

- Lai mazinātu maldīgus priekšstatus atņemšanā, var izmantot darbības modeļlēsanu, kas dod iespēju redzēt, kā notiek atņemšana.
- Bieži sastopama kļūda ir parādīt ar klucīšiem skaitli, ko atņemam, piemēram, izteiksmē $35 - 17$ tas ir 17. Daudzums, ko atņemam, ir jau daļa no redzamā 35. Tāpēc to nerāda atsevišķi, bet ņem nost no esošā.

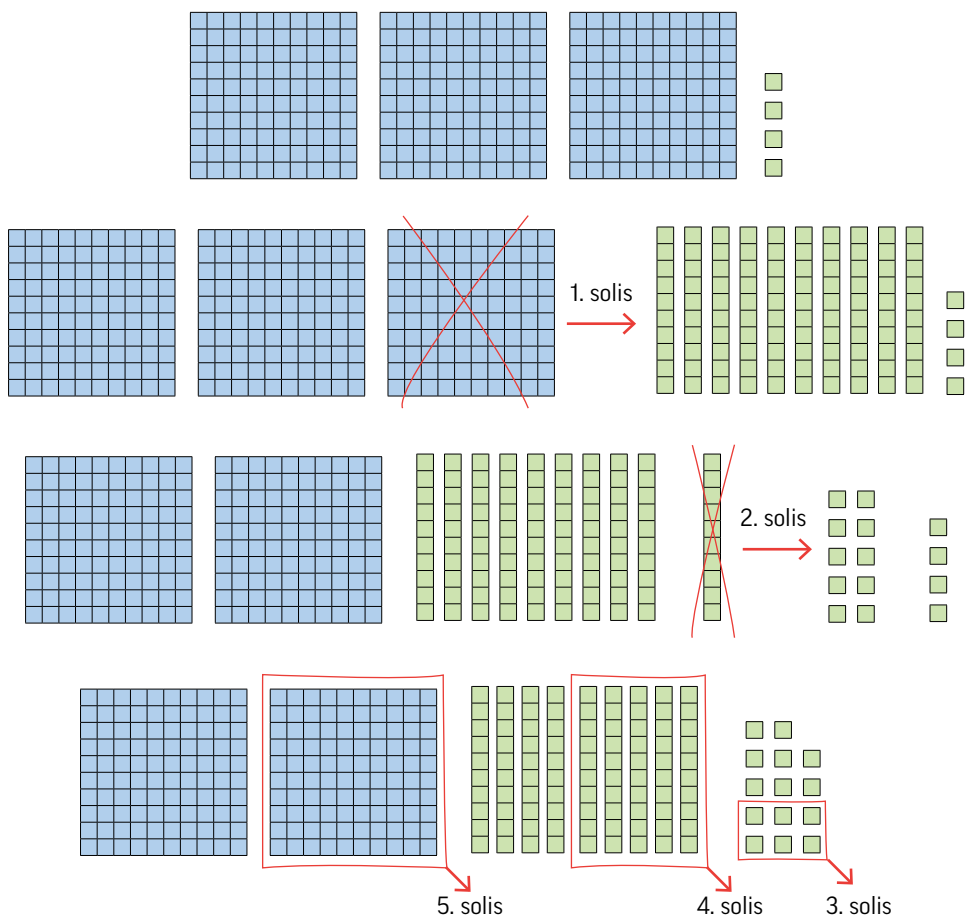


Lielāku skaitļu atņemšana rakstos

Vēlāk, mācoties atņemšanu ar trīsciparu skaitļiem un lielākiem, skolēniem bieži rodas kļūdas ar nullēm, t. i., jāveic vairākas pārejas no vienas skaitļu šķiras uz citu. Tāpēc sākotnēji ieteicams, modelējot šāda veida piemērus, pārrunāt, kā notiek atņemšana un kā veidojams tās pieraksts.

Lai aprēķinātu starpību $304 - 156$, kopā ar skolēniem spriežam tāpat, kā atņemot divciparu skaitļus, un modelējam piemērus, kur skolēni mēdz kļūdīties, veidojot pierakstu.

$$\begin{array}{r} 304 \\ - 156 \\ \hline \end{array}$$



Nevaram atņemt 6 vienus no 4 vieniem. Skatāmies modelī desmitus – desmitu nav. Tad skatāmies simtu slejā.

1. Vienu simtu pārveidojam, t. i., samainām par 10 desmitiem. Sanāk 2 simti un 10 desmiti. To pierakstām atbilstoši simtu un desmitu slejā.

$$\begin{array}{r} 2 \ 10 \\ \cancel{30}4 \\ - \ 156 \\ \hline \end{array}$$

2. Turpinām un vienu desmitu samainām pret 10 vieniem. Sanāk 9 desmiti un 14 vieni. To atkal pierakstām virs skaitļa desmitu un vienu sejā.
3. No 14 atņemam 6 vienus, paliek 8 vieni.
4. No 9 desmitiem atņemam 5 desmitus, paliek 4 desmiti.
5. No 2 simtiem atņemam 1 simtu, paliek 1 simts. Atņemot iegūstam 148.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 2 \ \cancel{10} \ 14 \\ \cancel{30}4 \\ - \ 156 \\ \hline 148 \end{array}$$



Lai veicinātu skolēnu izpratni par daudzciparu skaitļu atņemšanu rakstos – viens zem otra, var izmantot *GeoGebra* aktivitāti, kur atņemšanu vienlaicīgi vizualizē ar skaitļu blokiem.

<https://www.geogebra.org/m/wwwtah4t>



Ja mācību mērķis ir vingrināties un praktizēt daudzciparu skaitļu atņemšanu rakstos, var izmantot *GeoGebra* aktivitāti, kur skolēnam, ja kāds no mazināmā cipariem atbilstošajā skaitļu šķirā ir mazāks nekā mazinātāja šīs pašas šķiras cipars, ir iespēja desmitus pārveidot – pārgrupēt par vieniem, simtus par desmitiem utt. Lai darbību soļi skolēnam būtu vieglāk saprotami un kāds no tiem neaizmirstos, modelī virs darbības tiek veidoti papildu lodziņi un pārveidotais skaitlis tiek nosvītrots. Lodziņā virs skaitļa, no kura skolēns aizņemies, viņš var ierakstīt, cik desmitu, simtu, tūkstošu utt. atliek pēc pārgrupēšanas.

<https://www.geogebra.org/m/ggpj3qq2>





Jautājumi pārdomām

Cik nozīmīgi ir attīstīt skolēna prasmi veikt atņemšanu galvā?

Kā veicināt skolēnu izpratni par atņemšanu, ja ir jāizmanto pārejas no vienas skaitļu šķiras uz citu?

Kādi ir priekšnoteikumi, lai veiksmīgi sāktu apgūt atņemšanu, pierakstot vienu skaitli zem otra?

Kā veiksmīgāk veidot saikni starp saskaitīšanu un atņemšanu?

Literatūra tālākai uzziņai

Bove, S. P. (1995). Place Value: A Vertical Perspective. *Teaching Children Arithmetic*, 1(9), 542–546.

Fraivillig, J. L. (2018). Enhancing Established Counting Routines to Promote Place-Value Understanding: An Empirical Study in Early Elementary Classrooms. *Early Childhood Education Journal*, 46(1), 21–30.

Hartnett, J. (2018). Teaching place-value: Concept development, big ideas and activities. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 23(3), 35–40.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1992). Links between Teaching and Learning Place Value with Understanding in First Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(2), 98–122.

Markovits, Z., & Sowder, J. (1995). Developing Numbers sense: An Intervention Study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 4–29.

Math Trailblazers: A Mathematical Journey Using Science and Language Arts. (1998). Dubuque, Iowa: Kenall Hunt.

Reys, R., Lindquist, M., Lambdin, D., & Smith, N. (2015). *Helping Children Learn Mathematics*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Boston: Allyn & Bacon.

2.1.5. Reizināšanas paņēmieni un to attīstība (naturālie skaitļi)

Sākot reizināšanas koncepta apguvi, galvenais mērķis ir nevis iegaumēt reizinājumus, bet gūt izpratni par reizināšanu kā par jaunu aritmētisku darbību un par tās pielietojumu reālās situācijās. Sākotnēji reizināšanu apgūstam kā darbību, kas ļauj ātri un efektīvi saskaitīt vienādus skaitļus, tomēr jāpatur prātā, ka paralēli šim skaidrojumam ieteicams izmantot arī laukumu kā reizināšanas attēlojumu. Tas palīdzēs vēlāk skaidrot reizināšanu ar daļu, kas nozīmē atrast attiecīgo daļu no skaitļa.

Reizināšanas prasmes attīstības trajektorija

- ♦ Reizina viencipara skaitļus ar 2. Lieto jēdzienus “2 reizes vairāk/garāks”, “2 reizes mazāk/īsāks”. (2. klase)
- ♦ Reizina viencipara skaitļus ar 3, 4 un 5. (2. klase)
- ♦ Reizināšanas tabulas robežās reizina un dala ar skaitļiem no 2 līdz 10. Izstrādā stratēģiju, kā atcerēties / veikli atrast reizinājumus. Prot izlasīt (skaidro) ar simboliem pierakstītu reizināšanas īpašību: $a \cdot b = b \cdot a$. (3. klase)
- ♦ Reizina ar 10 divciparu un trīsciparu skaitļus, reizina ar 100 viencipara un divciparu skaitļus. (3. klase)
- ♦ Reizina divciparu un trīsciparu skaitli ar viencipara skaitli. Nosaka 3 vai 4 skaitļu reizinājumu (vismaz viens skaitlis ir divciparu vai trīsciparu). (4. klase)
- ♦ Lieto reizināšanu skaitliskās izteiksmēs (līdz 3 darbībām) vai tādās vienādībās, kuras satur nezināmo, aprakstot praktiska un matemātiska konteksta situācijas. (4. klase)
- ♦ Reizina daudzciparu skaitli ar divciparu skaitli. Nosaka 3 vai 4 skaitļu (vismaz divi no tiem ir divciparu vai trīsciparu) reizinājumu. (4. klase)
- ♦ Aprēķina izteiksmju skaitlisko vērtību, lietojot darbību sadalāmības īpašības:
 $b \cdot a + c \cdot a = (b + c) \cdot a$; $b \cdot a - c \cdot a = (b - c) \cdot a$ (5. klase)
- ♦ Pieraksta kāpināšanu un kāpina naturālus skaitļus (rezultāts nepārsniedz 300). (5. klase)

Tradicionāli skolēnus iepazīstina ar reizināšanu, stāstot, ka tas ir vienkāršāks atkārtotas saskaitīšanas veids.

Ir iespējams dažādi runāt par pierakstīto. Piemēram, $2 + 2 + 2 + 2 + 2$ ir tas pats, kas ņemt 2 piecas reizes vai piecas reizes ņemt 2, un tad to pierakstīt.

Tradicionāli skaitli, kas parāda, cik reižu kāds skaitlis tiek atkārtots, raksta otrajā vietā jeb $2 \cdot 5$.

Tomēr ikdienā sakām piecreiz 2, trīsreiz esmu bijis teātrī... Šāda runas forma ir ļoti ērta arī reizinājumu iegaumēšanai no galvas: $5 \cdot 8 = 40$. Arī algebrā koeficientu jeb reizinātāju rakstām pirmajā vietā, piemēram, $a + a + a + a = 4 \cdot a$, nevis $a \cdot 4$.

Dubultošana

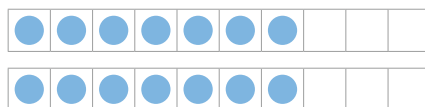
Reizināšanas koncepta izpratni sākam veidot, domājot, ko nozīmē reizināt ar 2. Reizināt ar 2 nozīmē ņemt 2 tāds daudzums, dubultot. “2 reizes vairāk” nozīmē “2 tādi daudzumi” $\rightarrow 2 \cdot \dots$

Lai skolēniem attīstītu izpratni par reizināšanu, sākotnēji aplūkojam pietiekami daudz piemēru, kur skolēni stāsta, ko redz attēlā vai modelī, piemēram, 2 reizes ņemts 4 vai pa 4 ņemts 2 reizes.

2 šķīvji, katrā 4 āboli jeb pa 4 āboliem
2 šķīvjos $\rightarrow 2 \cdot 4$.

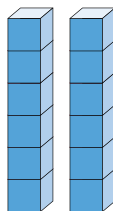


2 rindas, katrā 7 ripiņas jeb 7 ripiņas
2 rindās.



$$2 \cdot 7$$

2 stabiņi, katrā 6 kubiņi jeb 6 kubiņi
2 stabiņos utt.



$$2 \cdot 6$$



Aktivitāte skolēniem

SR Modelē dubultošanu un to pieraksta kā reizināšanu.

Pieraksti skaitļus no 2 līdz 20 kā divu skaitļu summu! Iekrāso tās summas, kuras veido 2 vienādi skaitļi!

Šādi ir iespēja arī diferencēt darbu, izvēloties konkrētos skaitļus atbilstoši skolēna spējām.

Piemēram, $8 + 8 = 16$.

Tad ar skolēniem kopīgi spriežam, kā to pierakstām un izrunājam: $2 \cdot 8$ jeb 2 reizes ņemam 8.

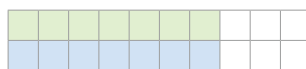
Skolēniem ir jāsaprot reizināšanas simbols – punkts, kas simboliski ir saīsinājums, lai nav jāraksta vārds “reizes”, to ir būtiski uzsvērt. Tikpat svarīgi ir aicināt skolēnus lasīt, lai pārlicinātos, ka viņi zina, saprot, prot skaļi nolasīt uzrakstītos simbolus.

Jautājumi skolēniem:

Kādi skaitļi veidojas dubultojojot? Kā to varētu pierakstīt ar reizināšanu? Kurus skaitļus var citādi pierakstīt, izmantojot reizināšanu, piemēram, $14 = 2 \cdot 7$?

$$5 + 5$$

$$6 + 6$$



$$14$$

$$8 + 8$$

$$9 + 9$$

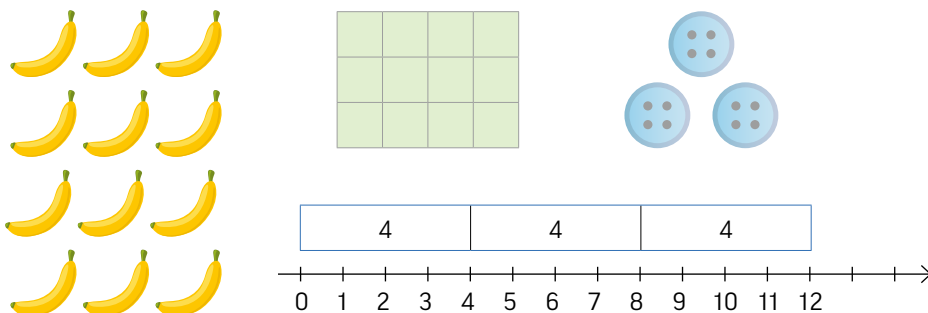
Kad skolēni ir labi izpratuši dubultošanu jeb reizināšanu ar 2, skolotājs var rosināt skolēnus domāt par to, ko nozīmē dalīt vienādās daļās jeb šajā gadījumā uz pusēm, tā palīdzot ieraudzīt reizināšanas un dalīšanas saistību (sk. detalizētāk 2.1.5. nodaļā par dalīšanu).

Turpinot izmanto šo konceptu – reizināt ar 3, 4 vai 5 nozīmē ņemt attiecīgi 3, 4 vai 5 daudzumus.

Reizināšanas īpašības

Pārvietojamības īpašība

Ir ļoti svarīgi, ka skolēni redz reizināšanu, izmantojot modeļus, lai paplašinātu izpratni par reizināšanas jēgu. Attēlā dažādi attēlots reizinājums $3 \cdot 4$.



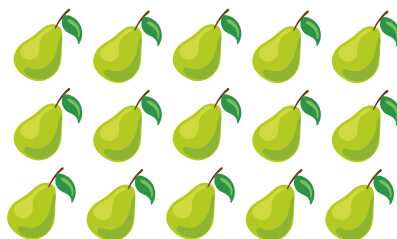
Piemēram, bērni stāv grupās pa 4. Ja mums ir 3 bērnu četrinieki, tad kopā ir 12 bērni.



Aktivitāte skolēniem

SR Stāsta un atklāj reizināšanas īpašību, ka reizinātājus var mainīt vietām.

Izstāsti, kā var iegūt zīmējumā redzamo bumbieru skaitu!



Atbildes var būt dažādas:

- saskaitīju un ieguvu 15;
- 3 rindās katrā ir 5 bumbieri, tātad 3 reizes ņemu pa 5, rakstu $3 \cdot 5 = 15$;
- 5 kolonnās katrā ir 3 bumbieri, tātad 5 reizes ņemu pa 3, rakstu $5 \cdot 3 = 15$;
- ...

Aktivitātes mērķis ir radīt tādu situāciju, kurā skolēns var ieraudzīt reizināšanas īpašību.

Piedāvājam uzdevumus, kuros skolēnam ir jāmācās skaidrot un pamatot redzamo, piemēram: *ir 3 šķīvji, uz katra 4 cepumi, jānosaka kopējais cepumu skaits. Jānis ir pierakstījis $3 \cdot 4$ un skaidro, ka 3 reizes ņēmis pa 4 cepumiem, bet Pēteris pierakstījis $4 \cdot 3$ un skaidro, ka 4 cepumus ņēmis 3 reizes. Izstāsti, vai tev ir saprotams, kā katrs no zēniem aprēķina cepumu skaitu!*

Tad, kad skolēni jau ir apguvuši reizināšanas pārvietojamības īpašību un zina, ka pierakstīt var dažādi, viņiem jāsaprot, ka ir būtiski, cik reižu kaut kas tiek ņemts, un jāpaskaidro, kurš reizinātājs ko nozīmē.

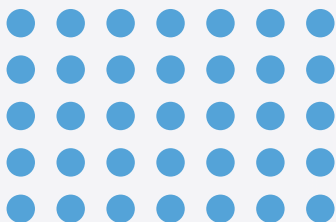
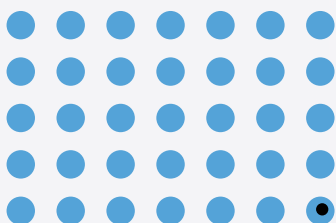
Apgūstot reizināšanu simta apjomā, ir būtiski piedāvāt skolēniem dažādi spriest par reizinājumiem, veicinot skaitļu izjūtu, piemēram, kā var pierakstīt 16 divos veidos, izmantojot reizinātājus.

$$16 = 2 \cdot 8$$

$$16 = 4 \cdot 4$$

Varam piedāvāt aktivitātes, kur kāds daudzums ir jānosaka, pašiem izvēloties veidu, piemēram, kā noteikt daudzumu neskaitot.

Kā saprast, cik ir riņķīšu, neskaitot?



Kā to pierakstīt ar skaitļiem?

Pirmais variants:

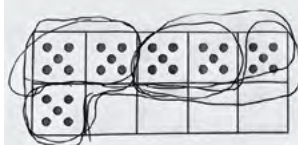
apņēma ir 7
un es ielīdza ka vienā
mintā ir 10 no vis pieci
Cik ir $10 \cdot 7 \div 2$ ir
35

Otrais variants:

Es saskaitīju pa 5.
Izejās: 35

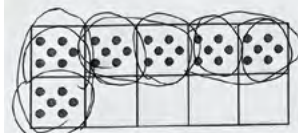
Kā saprast, cik ir riņķīšu, neskaitot?

Raksti izteiksmi un rezultātu (vari parādīt dažādus variantus)!



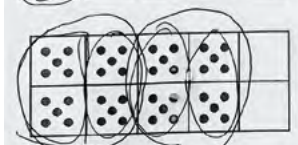
$$3 \cdot 10 = 30$$

$$2 \cdot 15 = 30$$



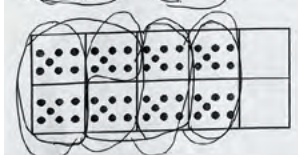
$$3 \cdot 12 = 36$$

$$6 \cdot 6 = 36$$



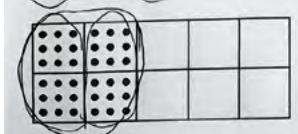
$$2 \cdot 20 = 40$$

$$4 \cdot 10 = 40$$



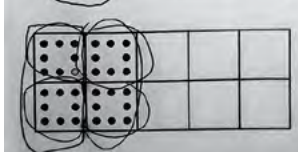
$$4 \cdot 14 = 56$$

$$2 \cdot 21 + 14 = 56$$



$$2 \cdot 9 = 18$$

$$1 \cdot 36 = 36$$



$$2 \cdot 8 = 16$$

$$4 \cdot 8 = 32$$

Reizināšanas pārvietojamības īpašību veiksmīgi var saskatīt, izmantojot taisnstūra modeli un saliekot klucīšus taisnstūrveida figūrā. Tad kopējo skaitu varam iegūt, skatoties divējādi – pa rindām vai pa kolonnām, un rezultāts būs viens un tas pats.

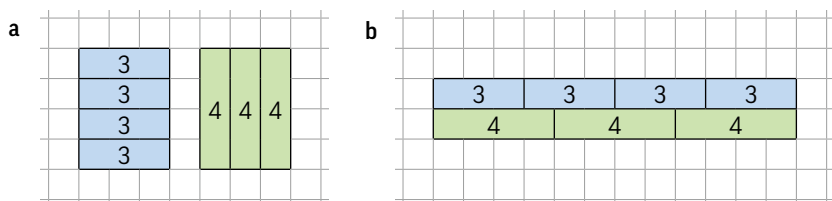
3 reizes (rindas) 4 kvadrāti ir $3 \cdot 4$

4 reizes (kolonnas) 3 kvadrāti ir $4 \cdot 3$

Šādi dabiskā ceļā ir izmantota reizināšanas pārvietojamības īpašība, un pierakstā vairs nav tik ļoti jāuzsver, kas ir kurš reizinātājs, jo zinām, ka tas rezultātu neietekmē.



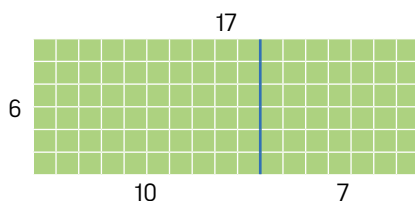
Pārvietojamības īpašību uzskatāmi var ieraudzīt, arī darbojoties ar beļģu klucīšiem (*cuisenaire rods*). Veidojot reizinājumus $3 \cdot 4$ un $4 \cdot 3$ taisnstūra modeli, klucīšus var uzlikt vienu otram virsū, un tie sakritīs (sk. att. a). Tos var arī kārtot rindās, un būs redzams, ka rindas veidojas vienādi garas (sk. att. b).



Reizināšanas sadalāmības īpašība

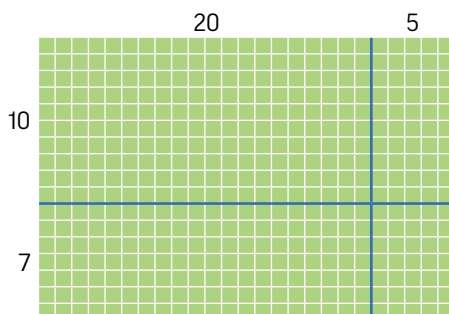
Vēlāk taisnstūra modeli izmantojam, arī reizinot divciparu skaitli ar viencipara skaitli un uzsverot, ka divciparu skaitli var sadalīt desmitos un vienos.

Piemēram, $17 \cdot 6$.



Attēlā redzams, ka $17 \cdot 6$ varam izteikt kā $(10 + 7) \cdot 6$. Tas nozīmē, ka ir 6 rindas ar 10 kvadrātiem un 6 rindas ar 7 kvadrātiem jeb $10 \cdot 6 + 7 \cdot 6 = 60 + 42 = 102$. Būtiski ir vizualizēt arī divciparu skaitļu reizināšanu, kas tālākā mācību procesā algebras sadaļā palīdz skolēniem izprast, ko nozīmē reizināt monomu ar binomu un divus binomus, iegūt saīsinātās reizināšanas formulas.

Piemēram, izmantojot vizualizāciju, viegli var saskatīt, kā veidojas reizinājums: $25 \cdot 17 = (20 + 5) \cdot (10 + 7) = 20 \cdot 10 + 20 \cdot 7 + 5 \cdot 10 + 5 \cdot 7 = 200 + 140 + 50 + 35 = 425$





Lai skolēniem būtu iespēja modelēt reizināšanu, var izmantot dažādas lietotnes, piemēram, *MathLearningCenter* lietotni *Partial Product Finder*.

<https://apps.mathlearningcenter.org/partial-product-finder/>

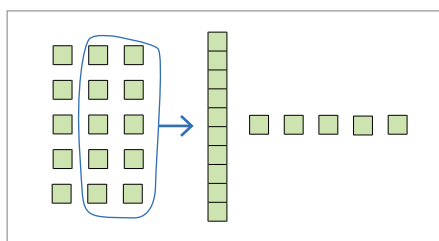


Šķiru bloku izmantošana reizināšanas koncepta apguvē

Tāpat kā saskaitīšanā un atņemšanā, arī reizināšanā šķiru bloki dod iespēju skolēniem radīt vizuālu priekšstatu par naturālu skaitļu reizināšanu.

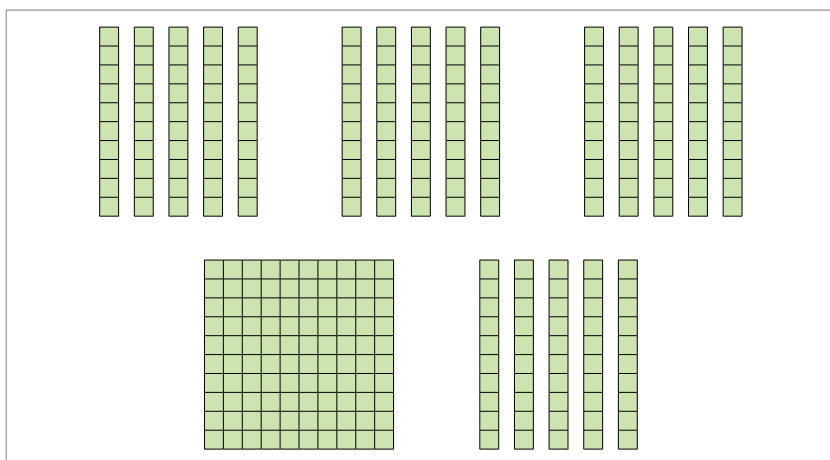
PIEMĒRS: $3 \cdot 5$

Zīmējumā redzam 3 reizes 5 vienus. Kopā sanāk 15 vienu. 10 vienus samainām pret 1 desmitu, un paliek 5 vieni. Rakstām 15.



Priekšmetiskie darbības rīki vai vizuāli attēlojumi dod iespēju vizualizēt to, kas vēlāk tiks rēķināts, izmantojot tikai simbolus.

Sākotnēji varam darboties ar priekšmetiem un tad jau vingrināties ar simboliem. Piemēram, ja skolēni prot sareizināt $3 \cdot 5$, tad, izmantojot šīs zināšanas un darbojoties ar priekšmetiem, skolēns var iegūt algoritmus viencipara skaitļa reizināšanai ar veseliem desmitiem, t. i., lai reizinātu $3 \cdot 50$, izmantojam 5 desmitus un reizinājumā iegūstam 15 desmitus, kas ir 1 simts un 5 desmiti jeb 150.





Kad skolēni, darbojoties ar priekšmetiem, prot paskaidrot, kā notiek reizināšana, tad varam izmantot digitālos rīkus, lai vingrinātos jau simbolu reprezentācijā.

<https://www.geogebra.org/m/tauhtydt>

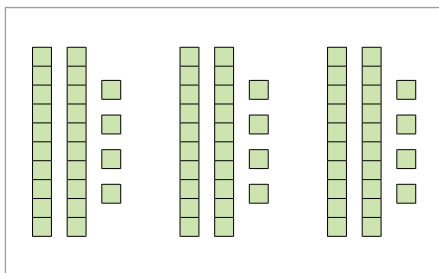


Tai pašā laikā var darboties paralēli, pildīt piemēru un to vizualizēt, darbojoties ar priekšmetiem, lai skaidrotu, kā tiek iegūts rezultāts.

Vizualizēšanu var izmantot arī, lai skaidrotu citu lielāku skaitļu reizināšanu, piemēram, viencipara skaitli reizinot ar jebkādu divciparu skaitli.

PIEMĒRS: $3 \cdot 24$.

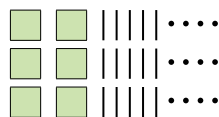
Rādām 24 kā 2 desmitus un 4 vienus 3 reizes. Kopā sanāk 12 vieni un 6 desmiti. Tad 10 vienus izmainām pret 1 desmitu un sanāk 7 desmiti un 2 vieni jeb 72.



PIEMĒRS: $3 \cdot 254$

Sākam ar 2 simtiem,

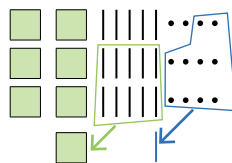
5 desmitiem un 4 vieniem. Atkārtojam 3 reizes.



Iegūstam 6 simtus, 15 desmitus un 12 vienus.

Izmainām 10 vienus pret 1 desmitu. Ir iegūti

16 desmiti. Ņemam 10 desmitus un samainām pret 1 simtu. Iegūstam 7 simtus, 6 desmitus un 2 vienus jeb 762.



Svarīgi paturēt prātā

Reizināšanu, kas nav lielāka par 100 000, varētu reprezentēt, darbojoties ar priekšmetiem, bet ilgtermiņā tas nav ne praktiski, ne vēlams. Skolēniem pakāpeniski ir jāatsakās no klucīšiem, tomēr tiem ir jābūt pieejamiem, ja tas nepieciešams. Skolotājs var lietot izteicienu “ja mums būtu tik daudz klucīšu, tad pietiktu...”, lai atgādinātu skolēniem un palīdzētu viņiem vizualizēt situāciju.

Skolotājam ik pa laikam vajadzētu atgādināt skolēniem, ko katra atsevišķa darbība nozīmē, un lūgt, lai skolēni izstāsta to saviem vārdiem. Tas veicina atcerēšanos jeb zināmā nonākšanu ilgtermiņa atmiņā.



Turpinot apgūt divciparu skaitļu reizināšanu, kā palīgu var izmantot shematisku zīmējumu – taisnstūri, kas parāda visus reizinātājus, un spriest, kā to atbilstoši varētu pierakstīt. Skolēnam tiek dots piemērs un shēma, kas palīdz reizināšanā.

<https://www.geogebra.org/m/wjanke5d>



Reizināšana rakstos

Kad skolēni ir izpratuši reizināšanas būtību, var apgūt tās īsāko algoritmu – tradicionālo reizināšanu rakstos. Praksē pieredzējuši skolotāji zina, ka daudz kļūdu veidojas, kad skolēni reizina, pierakstot skaitli zem skaitļa, ja atsevišķie reizinājumi ierakstīti nepareizā šķiru slejā. Lai izvairītos no tā, mācoties pierakstu, pierakstām katru reizinājumu un uzsveram, kādi ir reizinātāji. Sākotnēji reizinām divciparu skaitli ar viencipara skaitli.

Veido pierakstu kā izteiksmi		Veido pierakstu, rakstot skaitli zem skaitļa	
$67 \cdot 8 =$ $= (60 + 7) \cdot 8 =$ $= 60 \cdot 8 + 7 \cdot 8 =$ $= 480 + 56 = 536$	Sadalām 67 desmitos un vienos, reizinām desmitus ar 8 un tad vienus ar 8.	$\begin{array}{r} 67 \\ \cdot 8 \\ \hline 56 \end{array}$	Darbību un domas secība: 8 reizinām ar 7 vieniem, iegūstam 56 vienus jeb 6 vienus un 5 desmitus.
		$\begin{array}{r} 67 \\ \cdot 8 \\ \hline 56 \\ 480 \\ \hline 536 \end{array}$	8 reizinām ar 6 desmitiem, iegūstam 48 desmitus jeb 8 desmitus un 4 simtus, saskaitām iegūtos reizinājumus.



Svarīgi paturēt prātā

Viegli pamanīt, ka no pieraksta veida mainās spriešanas secība – tas skolēniem dažkārt sagādā grūtības, jo nav izprasta katra pieraksta būtība un izveidota saikne ar pašu reizināšanas koncepta būtību.

UZDEVUMA PIEMĒRS

“Divciparu skaitļu reizināšana”

Sareizini $78 \cdot 36$.

Matemātiski $78 \cdot 36$ nozīmē ņemt 78 reizes 36, ko var sadalīt tālāk:

$$\begin{aligned} 78 \cdot (30 + 6) &= 78 \cdot 30 + 78 \cdot 6 = \\ &= (70 + 8) \cdot 30 + (70 + 8) \cdot 6, \\ \text{tad līdzīgi sadalām } 78 \text{ desmitos un vienos} \\ &= 70 \cdot 30 + 8 \cdot 30 + 70 \cdot 6 + 8 \cdot 6 \\ &= 2100 + 240 + 420 + 48 \\ &= 2808 \end{aligned}$$

Lai skolēniem būtu vieglāk izprast, kā veidojas šie reizinājumi, varam paralēli izmantot reizināšanas vizualizāciju ar taisnstūra palīdzību (sk. iepriekš pie sadalāmības īpašības).

Tomēr īpaši tad, ja jāreizina divciparu skaitļi vai lielāki, bieži ir vieglāk pierakstīt reizināšanas soļus, rakstot skaitli zem skaitļa.

$$\begin{array}{r} 36 \\ \cdot 78 \\ \hline \end{array}$$

Veidojam pierakstu	Spriežam
$\begin{array}{r} 36 \\ \cdot 78 \\ \hline 48 \\ 240 \end{array}$	Sākam ar $8 \cdot 6$, iegūstam 48. Pierakstām ievērojot, ka cipars 8 ir vienu slejā, 4 ir desmitu slejā. Reizinām $8 \cdot 3$. Būtiski paturēt prātā, ka 3 nav 3, bet ir 30 un $8 \cdot 30$ ir 24 desmiti jeb 240.
$\begin{array}{r} 36 \\ \cdot 78 \\ \hline 48 \\ 240 \\ 420 \\ \hline 2100 \\ 2808 \end{array}$	Reizinām $7 \cdot 6$, paturot prātā, ka 7 nav 7, bet ir 70. Tad $6 \cdot 70$ ir 420. Pierakstām. Paliek vēl $7 \cdot 3$, kas ir reizinājums $70 \cdot 30 = 2100$. Saskaitot atsevišķos reizinājumus, iegūstam galīgo rezultātu.

Pierakstot reizināšanu stabiņā, kad skolēni prot izskaidrot, kā rodas katrs reizinājums, un saprot katra cipara šķiru konkrētajā skaitlī, īsuma dēļ nulles skaitļu beigās bieži vien neraksta.

Ir svarīgi lūgt skolēniem skaidrot darbības veikšanu pa soļiem.



Aktivitāte skolēniem

SR Reizina trīsciparu skaitļus un skaidro, kā veido reizināšanas pierakstu.
Sareizini $346 \cdot 283$! Skaidro, kā to dari, centies izmantot visīsāko pieraksta veidu!



Lai skolēniem būtu iespēja vingrināties skaidrot, kā rodas reizinājums, daudzciparu (divciparu, trīsciparu, četr-
ciparu) skaitli reizinot ar viencipara skaitli, var izmantot lietotni
<https://www.geogebra.org/m/nhuwsmyip>
Modelis palīdz apgūt reizināšanu un tās pierakstu stabiņā.



Jautājumi pārdomām

Kā var palīdzēt skolēniem veidot izpratni par reizināšanas darbību?
Kā mācīt skolēnus atcerēties reizināšanas tabulu?
Ko būtiski ievērot, mācot daudzciparu skaitļu reizināšanu?
Kāpēc ir vērtīgi, mācoties reizināt, izmantot taisnstūra modeli?

Literatūra tālākai uzzīpai

- Bove, S. P. (1995). Place Value: A Vertical Perspective. *Teaching Children Arithmetic*, 1(9), 542–546.
- Clark, F. B., & Kamii, C. (1996). Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1–5. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 41–51.
- Dukurs, K., Mencis, J. (1965). *Aritmētikas metodika*. Rīga: Liesma.
- Hartnett, J. (2018). Teaching place-value: Concept development, big ideas and activities. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 23(3), 35–40.
- Kosko, K. W. (2020). Using Arrays for Meaningful Multiplication. *Mathematics Teacher Learning & Teaching*, 113(9), 751–755.
- Lee, J.-E. (2014). Deciphering Multiplication Algorithms with the Area Model. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 19(9), 557–563.
- Markovits, Z., & Sowder, J. (1995). Developing Numbers sense: An Intervention Study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 4–29.
- Reys, R., Lindquist, M., Lambdin, D., & Smith, N. (2015). *Helping Children Learn Mathematics*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Boston: Allyn & Bacon.

2.1.6. Dalīšanas paņēmieni un to attīstība (naturālie skaitļi)

Kā jau zinām, dalīšana ir ļoti cieši saistīta ar reizināšanu. Dalīt skaitli a ar skaitli b nozīmē atrast tādu skaitli c , lai, to reizinot ar b , iegūtu a . Skolēniem ir būtiski saprast dalīšanas jēdzienu kā pretēju darbību reizināšanai. Jāpatur prātā, ka dalīšanā var izšķirt divus veidus – dalīšana vienādās daļās (15 metrus garu auklu varam sadalīt piecās vienādās daļās, iegūstot 3 metrus garus auklas gabalus) un ietilpes dalīšana (15 metru auklu dalām 3 metrus garos gabalos, un iegūstam 5 šādus gabalus). Izpratnes veicināšanai arī tagad izmantojam vizuālus modeļus un konkrētus piemērus, lai parādītu, kā dalīšana darbojas praksē.

Naturālo skaitļu dalīšanas prasmes attīstības trajektorija

- ♦ Dala (pāra skaitļus līdz 20) ar 2. Skaidro sakarību starp reizināšanu un dalīšanu ($2 \cdot 5 = 10$ un $10 : 2 = 5$), izmantojot modeļus. (2. klase)
- ♦ Dala skaitļus līdz 50 ar 2, 3, 4 un 5 (bez atlikuma). (2. klase)
- ♦ Reizināšanas tabulas robežās dala ar skaitļiem no 2 līdz 10. Izstrādā stratēģiju, kā atcerēties / veikli atrast reizinājumus un dalījumus. (3. klase)
- ♦ Dala ar 10 un 100 trīsciparu un četrsciparu skaitļus (kas dalās bez atlikuma). (3. klase)
- ♦ Dala divciparu un trīsciparu skaitli ar viencipara skaitli. Dala ar atlikumu, nosakot, cik reižu dalītājs ietilpst dalāmajā un kāds ir atlikums. (4. klase)
- ♦ Reizina un dala daudzciparu skaitli ar divciparu skaitli. (4. klase)
- ♦ Aprēķina izteiksmju skaitlisko vērtību, lietojot darbību sadalāmības īpašības:
 $b : a + c : a = (b + c) : a$; $b : a - c : a = (b - c) : a$. (5. klase)
- ♦ Dalījumā aprēķina nezināmo skaitli (skaitlis pierakstīts ar burtu). (5. klase)

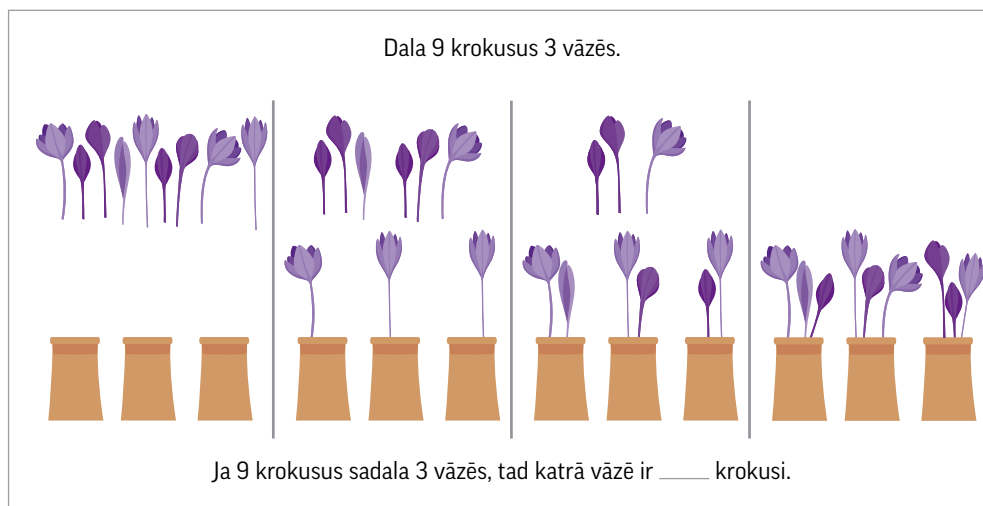
Tā kā dalīšana ir ļoti cieši saistīta ar reizināšanu, viens no veidiem, kā sākt to apgūt, ir reizināt un dalīt paralēli vai pietiekami tuvu. Jāpatur prātā, ka šis ir tikai viens no iespējamajiem scenārijiem, un skolotājam ir jāpieņem lēmums, vai skolēni uzreiz spēs apgūt arī dalīšanu vai tomēr vērtīgāk būs to atdalīt no reizināšanas un ievērot laika distanci, pārliecinoties, ka skolēni tam ir gatavi. Kad sākam mācīties dalīt un skolēni jau zina un saprot, ko nozīmē reizināt ar 2, tad nākamais solis domāšanā var būt – ko nozīmē dalīt uz pusēm, dalīt ar 2.



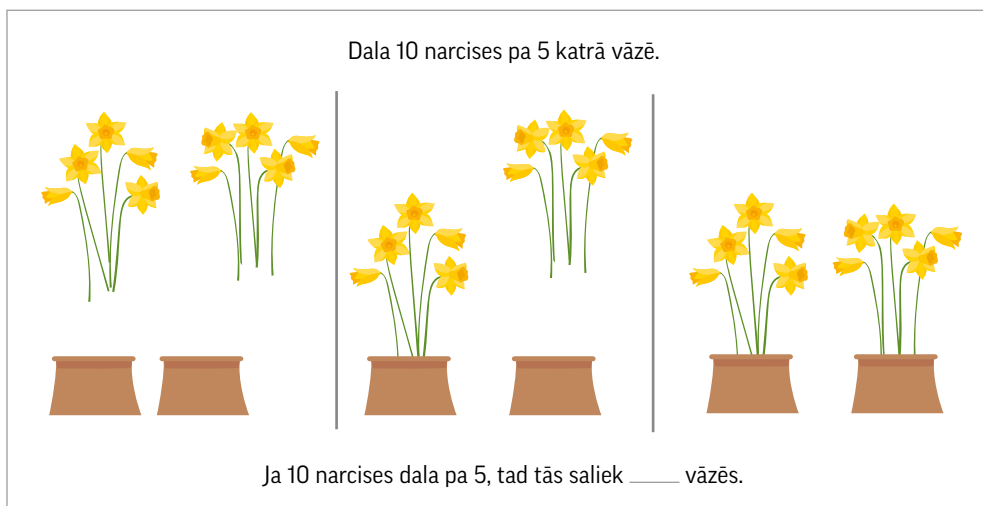
Svarīgi paturēt prātā

Ir svarīgi saprast, ka dalīšana atbilst uz diviem dažādiem jautājumiem – cik iegūstam, ja **dalām vienādās daļās**, un cik iegūstam, ja dalām pa... (jeb **ietilpes dalīšana**). To, kāda veida dalīšana notiek, var secināt no konkrētās situācijas konteksta.

Dalām vienādās daļās:



Ietilpes dalīšana:



Pirmie dalīšanas piemēri jāilustrē ar reāliem objektiem. Tas jādara tādēļ, lai skolēnu apziņā dalīšana parādītos kā jauna patstāvīga darbība ar savu darbības zīmi, savu lasīšanas veidu, savu pielietojumu reālās situācijās. Tikai pamazām skolēni saskatīs saistību starp reizināšanu un dalīšanu un to izmantos kā vienu no līdzekļiem dalījuma meklēšanā.

Divciparu skaitļa dalīšana ar viencipara skaitli

Aplūkosim piemēru, kur divciparu skaitli dalām ar viencipara skaitli.

Klasē mācās 24 skolēni. Ja nodarbībai ir nepieciešamas 4 komandas, cik skolēnu būs katrā komandā? (Dalīšana vienādās daļās)

Komandā ir 4 skolēni. Cik komandu varēs izveidot, ja klasē mācās 24 skolēni? (Ietilpes dalīšana)

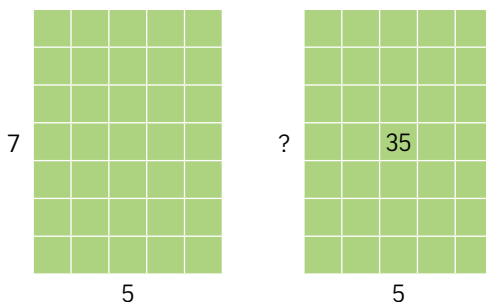
Pirmajā gadījumā ir zināms, cik ir grupu, bet nezināmais – cik katrā grupā ir skolēnu. Šādā veidā notiek visa kopuma dalīšana vienādās 4 grupās. Savukārt otrajā jautājumā zināms, cik katrā grupā ir skolēnu, bet nezināmais ir grupu skaits. Te dalām pa 4 elementiem, iegūstot grupu skaitu.

Skolēniem vairāk ir pazīstami pirmā veida jautājumi, jo ikdienā viņiem bieži iznāk dalīties vienādi ar mantām vai saldumiem.

Ir ļoti svarīgi, ka skolēni iepazīstas ar dalīšanu vairākos kontekstos, pirms mācās dalīšanas algoritmu.

Skolēniem jau būs pazīstama reizināšanas modelēšana ar taisnstūri. Kad reizinām, ir zināms, cik rūtiņu ir rindā un cik kolonnā, un tad meklējam, cik rūtiņu veido taisnstūri. Dalīšanā mēs zinām kopējo rūtiņu skaitu taisnstūrī un rūtiņu skaitu vai nu kolonnā, vai rindā. Tad meklējam atbilstoši rūtiņu skaitu rindā vai kolonnā.

Redzam 7 rindas ar 5 kvadrātiem katrā rindā jeb 35 kvadrātus.



Aktivitāte skolēniem

SR Saskata saistību starp reizināšanu un dalīšanu, veicot modelēšanu.

Mērķis ir iegūt dalīšanas darbību un dot iespēju skolēniem saskatīt saistību reizināšanas darbībai ar dalīšanas darbību. Iegūt pierakstu.

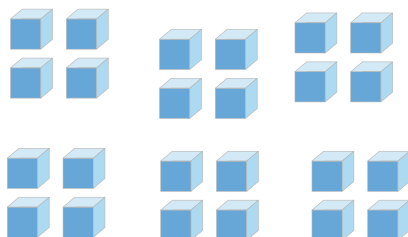
Veidojiet un stāstiet, kā izveidojāt taisnstūri:

- *Tev ir 24 kvadrāti, un tie jāsaliek 4 rindās. Cik kvadrātu būs katrā rindā?*
- *Tev ir 24 kvadrāti, un tie jāsaliek 6 kolonnās. Cik kvadrātu būs katrā kolonnā?*

Ir svarīgi, ka skolēniem ir kvadrāti, no kuriem tiek veidoti (ne zīmēti) taisnstūri. Sarunā skolotājs klausās, kā skolēni piemin reizināšanu vai to, ka dalīs, un kā rodas rezultāts. Ir jāuzklausā un jāatkārto skolēnu teiktais jeb “jāatbalso” teiktais (viens no veiksmīgas sarunas elementiem), piemēram, $4 \cdot 6$ ir 24. Tātad, ja taisnstūri veido 24 kvadrāti un viena mala ir 4 kvadrātu garumā, tad otru malu veido 6 kvadrāti, un otrādi.

Ja neizmantojam taisnstūra modeli, arī tad varam spriest līdzīgi.

Piemēram, ja ir 24 klucīši un 6 skolēni, tad, lai katram skolēnam iedotu vienādu klucīšu skaitu jeb sadalītu “godīgi” visiem skolēniem, ir jādod 4 klucīši katram skolēnam. Pirmajā reizē skolēni varētu dalīt klucīšus pa vienam, kamēr visi ir izdalīti.



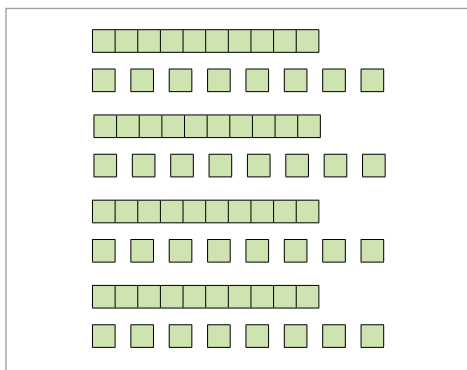
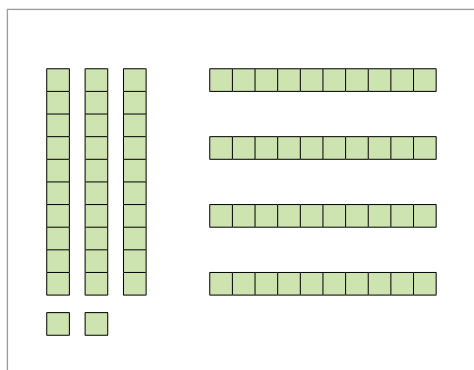
Aktivitāte skolēniem

SR Spriež un modelē dalīšanu, izmantojot dalīšanu vienādās daļās.

Sadaliet 72 klucīšus vienādi 4 skolēniem! Varat izmantot klucīšus vai šķiru blokus.

Nemam 7 desmitus un 2 vienus, tad rosinām skolēnus domāt, cik katram skolēnam būs klucīšu. Atbilde varētu būt, ka 1 desmits un paliek 3 desmiti un 2 vieni. Tad sekotu jautājums, kā un vai varētu turpināt dalīšanu. Skolēni paši varētu ieteikt: sadalām 3 desmitus 30 vienos, kopā mums būs 32 vieni. Tad katram skolēnam sanāk vēl 8 vieni. Tātad kopā katrs skolēns saņems 18 klucīšus.

$$72 : 4 =$$



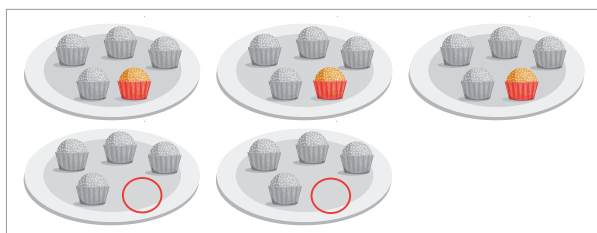
Ir svarīgi apskatīt to pašu uzdevumu taisnstūra kontekstā: ja ir 72 klucīši, ko vēlamies salikt 4 rindās, vai tas izdosies? Vai varam izveidot taisnstūri? Cik klucīšu būs katrā rindā?

Dalīšana ar atlikumu

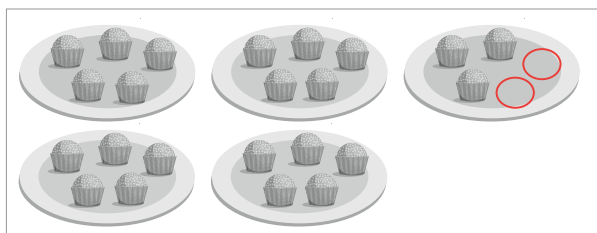
Skolēniem nepieciešams piedzīvot situācijas, kad nav iespējams izdalīt skaitli, neveidojoties atlikumam.

PIEMĒRS: $23 : 5$

Var modelēt situāciju, kad nepieciešams salikt jeb sadalīt 23 kūksniņus uz 5 šķīvjiem tā, lai uz katra šķīvja būtu vienāds skaits kūksniņu (dalīšana vienādās daļās). Daži skolēni izmantos modeļus, daži jau spriedīs, izmantojot reizināšanu. Sadalot visus kūksniņus, saprotam, ka neveidojas vienādas grupas/porcijas. Trīs kūksniņi ir lieki.

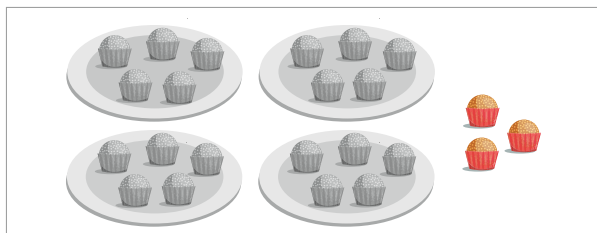


Var domāt arī citādi – ir 23 kūksniņi, jāsaprot, cik porciju sanāk, ja vienā porcijā ir 5 kūksniņi (ietilpes dalīšana).



Domājot, cik porciju sanāk pa 5 kūksniņiem, redzam, ka ir 4 pilnas porcijas un 1 nepilna.

To pieraksta šādi: $23 : 5 = 4 \text{ A } 3$



Spriežam, kā pārlicināties, ka dalījums ir pareizs, ja dalot radies atlikums. Iepriekš aplūkotajā gadījumā pārlicināmies, vai 23 ir tikpat cik $5 \cdot 4 + 3$.

Skolotājs šo pašu situāciju var aplūkot, izdalot skolēniem noteiktu skaitu objektu – ripiņas, spēļu kauliņus u. c., un vispirms sākt ar uzdevumu skolēniem izveidot modeli. Tā kā ripiņas pašas nevar saskaldīt, uzreiz radīsies ideja par atlikumu. Ja piedāvājam situāciju ar ķēksiņiem, tad skolotājam jābūt gatavam tam, ka skolēni varētu ieteikt pašu ķēksiņu sadalīt daļās – tas būtu solis uz priekšu pašā dalīšanas procesā. Skolēni nebūtu jābremzē šādā situācijā.

Trīsciparu skaitļa dalīšanu ar viencipara skaitli

Līdzīgi, kā modelējām divciparu skaitļa dalīšanu ar viencipara skaitli, rīkojamies arī trīsciparu skaitļu gadījumā.

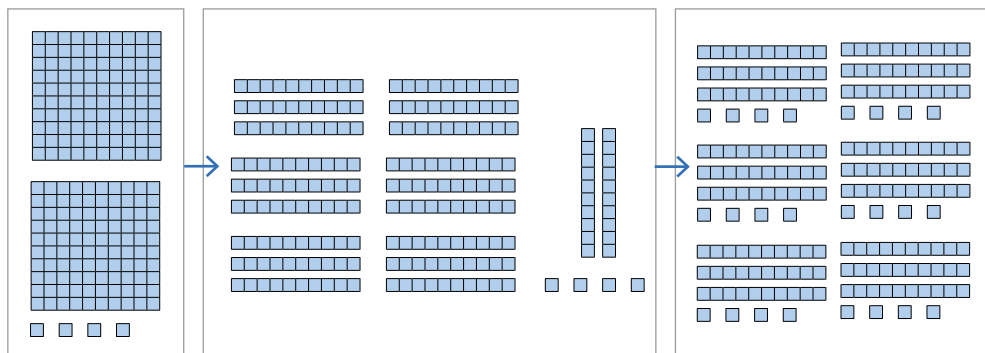


Aktivitāte skolēniem

SR Modelē trīsciparu skaitļa dalīšanu ar viencipara skaitli.

Sākam, piemēram, ar 204 klucīšiem, kas jāsadala vienādi 6 skolēniem. Klucīšu vietā varam izmantot skaitļu modeļus.

1. Divus simtus nevaram sadalīt 6 skolēniem, bet tos varam sadalīt 20 desmitos, un tad katrs skolēns saņem 3 desmitus.
2. Paliek 2 desmiti, ko sadalām vienos, un 4 vieni jeb kopā 24 vieni. Katrs skolēns tādējādi saņem vēl 4 vienus. Rezultātā katrs skolēns saņem 34 klucīšus.



Kad sākam dalīt, ir svarīgi padomāt par to, cik liels varētu būt rezultāts. Piemēram, šajā gadījumā atbilde nevarēja būt simtos, tai ir jābūt desmitos, jo 20 desmitus dalījām starp sešiem skolēniem.

Varam arī jaūtāt, kā 204 klucīšus salikt 6 rindās, lai veidotos taisnstūris.

Pakāpeniskā dalīšana

Aplūkosim, kā veidot izpratni par dalīšanu, izmantojot pakāpenisko dalīšanu.

PIEMĒRS: $538 : 6$

Sākam ar reālu situāciju: maisā ir 538 klucīši modelēšanai, un tos vajadzētu sadalīt vienādi 6 klasēm.

Skolotājs vaicā: “Kā jūs domājat, cik klucīšu varētu būt katrai klasei?” Skolotājs mudina skolēnus minēt “vieglus” skaitļus vai noteikt aptuvenu skaitu, piemēram, 10, 50, 100 utt.

“Vai varam katrai klasei dot 100?” (Nē, jo tad būtu vajadzīgi 600 klucīšu.)

Skolotājs mudina skolēnus piedāvāt kādu citu dalījumu.

Sākam ar 10. Ja katrai klasei tiek iedoti 10 klucīši, tad kopā ir sadalīti jeb atdoti 60 klucīši. Paliek 478.

Pierakstām:

$$\begin{array}{r} 538 : 6 \quad \text{katrai klasei ir 10.} \\ - 60 \\ \hline 478 \end{array}$$

Vai varam iedot katrai klasei vēl 10? Vai varbūt varētu vairāk? Skolēni varbūt minēs 20 vai 30. Ja atdotu 30 katrai klasei, tad kopā būs atdoti vēl 180 klucīši.

$$\begin{array}{r} 538 : 6 \quad \text{katrai klasei ir 10 + 30} \\ - 60 \\ \hline 478 \\ - 180 \\ \hline 298 \end{array}$$

Paliek 298. Vai varam iedot katrai klasei vēl 30 klucīšus?

$$\begin{array}{r} 538 : 6 \quad \text{katrai klasei ir 10 + 30 + 30} \\ - 60 \\ \hline 478 \\ - 180 \\ \hline 298 \\ - 180 \\ \hline 118 \end{array}$$

Iespējams, skolēni teiks, lai dod 9 katrai klasei, bet it sevišķi sākumā viņi varētu ierosināt mazāk, piemēram, 5 katrai klasei.

$$\begin{array}{r} 538 : 6 \quad \text{katrai klasei ir 10 + 30 + 30 + 5} \\ - 60 \\ \hline 478 \\ - 180 \\ \hline 298 \\ - 180 \\ \hline 118 \\ - 30 \\ \hline 28 \end{array}$$

Redzams, ka varam katrai klasei sadalīt vēl 4 klucīšus un paliks pāri 4.	$ \begin{array}{r} 538 : 6 \\ - 60 \\ \hline 478 \\ - 180 \\ \hline 298 \\ - 180 \\ \hline 118 \\ - 30 \\ \hline 28 \\ - 24 \\ \hline 4 \end{array} $	katrai klasei ir $10 + 30 + 30 + 5 + 4$
--	--	---

Tātad katra klase saņem $10 + 30 + 30 + 5 + 4 = 89$ un pāri paliek 4 klucīši, ko saucam par atlikumu.

Pakāpeniskā dalīšana atļauj minēt mazāku rezultātu un pārbaudot saprast, kas vēl nav izdalīts, un turpināt. Ja minējums ir par lielu, tad jādomā, cik daudz to samazināt.

Dalīšanas rakstos algoritms

Kad esam pārliecināti, ka skolēniem ir izpratne par dalīšanu, ir ļoti svarīgi, ka skolēni saista savu izpratni par dalīšanu ar dalīšanas algoritmu.

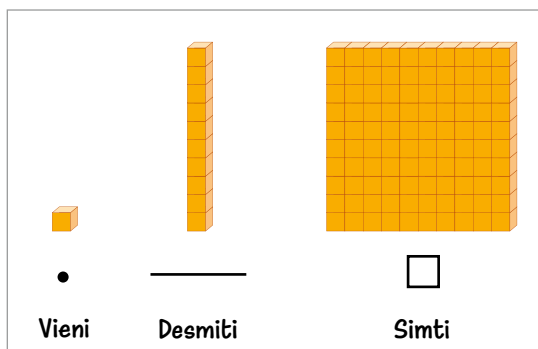
PIEMĒRS: $72 : 4$

Veidojot un pēc tam lietojot algoritmu, sākam ar lielāko šķiru. Domājam, ja ir jāsadala 7 desmiti vienādi 4 grupās, cik desmitus varam salikt katrā grupā (1 solis). Esam sadalījuši 4 desmitus, veidojam pierakstu, rakstot skaitļus vienu zem otra – desmitus zem desmitiem, pierakstām, kas rodas atlikumā. Paliek 3 desmiti, ko nevaram sadalīt 4 grupās, tāpēc to sadalām 30 vienos. Kopā ir 32 vieni, ko varam sadalīt 4 grupās, katrā grupā pa 8.

Rakstām:

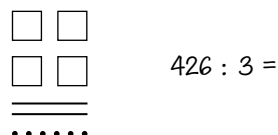
$$\begin{array}{ccc}
 72 : 4 = 18 & \longrightarrow & 72 : 4 = 18 & \longrightarrow & 72 : 4 = 18 \\
 \begin{array}{r} 4 \\ \hline 3 \end{array} & & \begin{array}{r} 4 \\ \hline 32 \end{array} & & \begin{array}{r} 4 \\ \hline 32 \\ \hline 32 \\ \hline 0 \end{array}
 \end{array}$$

Lai nonāktu līdz tam, kā darbojas dalīšanas algoritms un kā pierakstīt dalīšanu, var izmantot jau iepriekš lietotus modeļus un vizualizācijas.

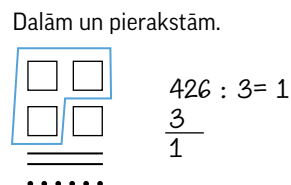


PIEMĒRS: $426 : 3$

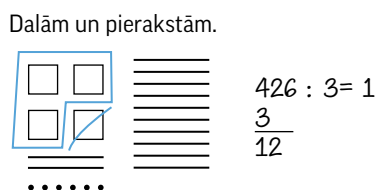
1. Vizualizējam skaitli, ko dalīsim.



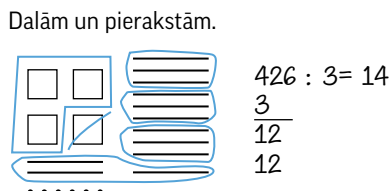
2. Sākam dalīšanu – skatāmies, cik reizes varam simtus sadalīt pa 3, to varam izdarīt 1 reizi, paliek vēl viens simts.



3. Sadalām šo simtu 10 desmitos, saprotam, ka mums ir 12 desmiti.



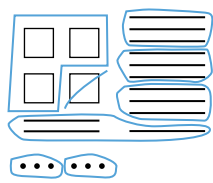
4. Dalām desmitus pa 3, to varam izdarīt 4 reizes.



5. Dalām 6 vienus pa 3, to varam izdarīt 2 reizes.

Tātad $426 : 3 = 142$.

Dalām un pierakstām.



$$426 : 3 = 142$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \overline{)426} \\ \underline{12} \\ 12 \\ \underline{6} \\ 6 \\ \underline{6} \\ 0 \end{array}$$

Tad turpinām apgūt dalīšanu un tās pierakstu rakstos bez modeļiem un vizualizācijām.

PIEMĒRS: $204 : 6$.

Sākam ar 2 simtiem, kas ir jāsadala vienādi 6 grupās. Simtu nepietiek, lai sadalītu 6 daļās. Tad domājam par 2 simtiem kā par 20 desmitiem. Katrā grupā būs 3 desmiti, jo $3 \cdot 6 = 18$. Paliek 2 desmiti.

$$\begin{array}{r} 204 : 6 = 3 \\ \underline{18} \\ 24 \end{array}$$

Bet 2 desmiti ir 20 vieni. Viss kopā ir 24 vieni. Katrai grupai sanāk 4 vieni. Dalījumā tātad ir 34.

$$\begin{array}{r} 204 : 6 = 34 \\ \underline{18} \\ 24 \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

Noteikti rosinām skolēnus veikt paškontroli – pārbaudīt, vai dalījums ir pareizs, izmantojot reizināšanas darbību.

Kad dalām lielus skaitļus un skolēniem nav izpratnes par to, cik liels rezultāts varētu būt, parastais algoritms neatļauj pierakstīt mazāku dalītāju.

Piemēram, ja skolēns kļūdās un pieraksta

$$\begin{array}{r} 204 : 6 = 2 \\ \underline{12} \\ 8 \end{array}$$

varētu rasties apmulsums un skolēns nevar turpināt dalīšanu.

Ja skolēns vēl nav gatavs lietot algoritmu, var izmantot pakāpeniskās dalīšanas paņēmieni, kas palīdz samazināt grūtības un ļauj labāk izprast dalīšanu. Šo paņēmieni var izmantot, sākot domāt par to, kā varētu dalīt.



Svarīgi paturēt prātā

Pakāpeniskā dalīšana nav domāta kā skolēniem iemācams paņēmieni dalīšanā, bet tā ir veids, kā palīdzēt skolēniem saprast dalīšanu un skaitļu jēgu.



Sākotnēji ir būtiski dot skolēniem iespēju vingrināties pierakstīt dalīšanas izteiksmi, ja dots vizuāls modelis. Uzdevumā ir attēlotas klucīšu (ripiņu) kopas. Skolēnam ir jāsaskaita attēlotās ripiņas katrā kopā un kopu skaits. Dotajā lodziņā jāieraksta dalīšanas vienādība konkrētajam modelim.



<https://www.geogebra.org/m/tanpayv7>

Izmanto pogas, uzraksti dalīšanas darbību un rezultātu, kas atbilst dotajam modelim.

1	2	3	↶
4	5	6	:
7	8	9	=
0			

Pareizas atbildes: 0



Jautājumi pārdomām

Kā veiksmīgi izmantot modeļus, lai veicinātu izpratni par dalīšanu?

Cik lielā mērā jūs savā praksē izmantojat pakāpenisko dalīšanu, mācot dalīšanu skolēniem?

Kādas ir būtiskākās grūtības, skolēniem apgūstot naturālu skaitļu dalīšanu?

Kādi uzsvāri jāliek, mācot dalīšanu, lai skolēni veidotu arī korektu dalīšanas pierakstu stabiņā?

Literatūra tālākai uzziņai

Bove, S. P. (1995). Place Value: A Vertical Perspective. *Teaching Children Arithmetic*, 1(9), 542–546.

Dukurs, K., Mencis, J. (1965). *Aritmētikas metodika*. Rīga: Liesma.

- Hartnett, J. (2018). Teaching place-value: Concept development, big ideas and activities. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 23(3), 35–40.
- Lee, J.-E. (2014). Deciphering Multiplication Algorithms with the Area Model. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 19(9), 557–563.
- Markovits, Z., & Sowder, J. (1995). Developing Numbers sense: An Intervention Study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 4–29.
- Reys, R., Lindquist, M., Lambdin, D., & Smith, N. (2015). *Helping Children Learn Mathematics*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Boston: Allyn & Bacon.

2.1.7. Daļas

Gribot labu, bieži vien pieaugušie stāsta skolēniem, ka darboties ar daļskaitļiem ir vienkārši, ja tikai iemācās no galvas likumus un paņēmienus. Tas rada maldīgu priekšstatu, jo daļskaitļi ir komplekss matemātikas jēdziens, ko var izprast dažādi (Reys et al., 2015, 243; Walle et al., 2010, 287).

Daļas jēdziens (parastās daļas)

Parasto daļu mācīšanas nozīme:

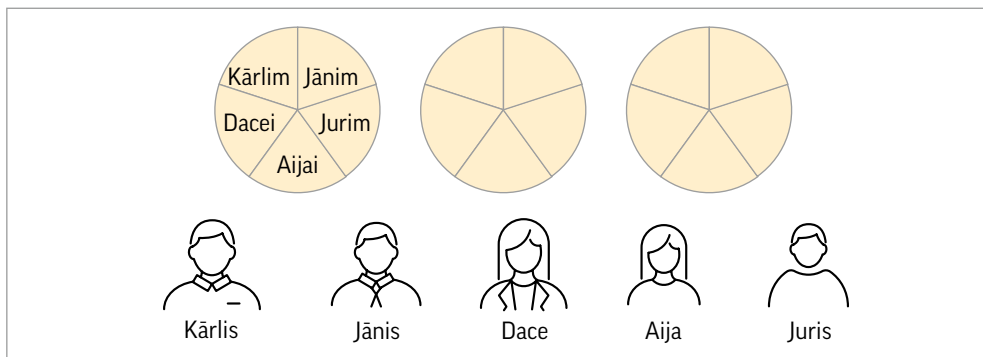
- 1) ar to skolēnus ievada skaitļa un darbību jēdziena paplašināšanā (dalīšanas rezultāts ne vienmēr ir naturāls skaitlis);
- 2) parastās daļas ierobežotā apjomā izmanto ikdienas dzīvē;
- 3) parastās daļas izveido bāzi, no kuras tālāk iespējams iepazīstināt skolēnus ar algebriskām daļām;
- 4) izmantojot parastās daļas, nonākam līdz decimāldaļas jēdzienam.

Daļas jēdziena attīstības trajektorija

- ♦ Nosaka (parāda, iezīmē, atdala) ģeometriskā figūrā noteiktu daļu, veselo, ja dota daļa no veselā. Izlasa un pieraksta parasto daļu, atliek uz skaitļu taisnes (saucējā ir viencipara skaitlis vai 10). Lasa decimāldaļas formā pierakstītas desmitdaļas un simtdaļas. (3. klase)
- ♦ Uz skaitļu taisnes atliek īstas un neīstas daļas. Salīdzina daļas ar dažādiem saucējiem, modelējot ar shematisku zīmējumu vai atliekot uz skaitļu taisnes. (5. klase)
- ♦ Skaidro savu darbību, pareizi lasa un pieraksta daļas, pieraksta daļu dažādi. (4. klase)
- ♦ Skaidro daļas saīsināšanu, paplašināšanu, daļu ar dažādiem saucējiem salīdzināšanu, izmantojot shematisku zīmējumu. (5. klase)

Daļas jēdziena interpretācijas.

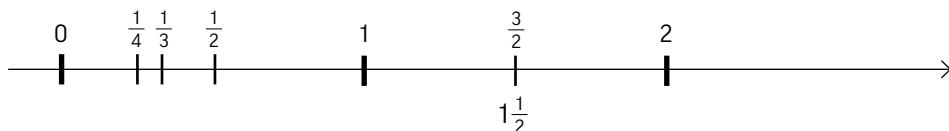
1. Ja sadala veselu vienību vairākās vienādās daļās, iegūst pamatdaļu. Pēc tam, ņemot vienu vai vairākas šādas pamatdaļas, var iegūt daļu.
Sadalot papīra loksni 4 daļās, iegūstam pamatdaļu $\frac{1}{4}$ un, apvienojot 3 radušās pamatdaļas, iegūstam $\frac{3}{4}$.
2. Daļas jēdzienu izmanto divu lielumu attiecības pierakstīšanai. Ar lielumu attiecību saprot divu lielumu dalījumu, kurš uzrakstīts, lai tos salīdzinātu. Piemēram, astoņi ir ceturtdaļa no 32; rakstām attiecību $8 : 32 = \frac{1}{4}$.
3. Daļas jēdzienu aplūkojam kā dalīšanas rezultātu.
Ja trīs picas jāsadala vienādās daļās 5 bērniem, tas nozīmē $3 : 5$. Ja picas saliktu citu virs citas un katru dalītu 5 daļās, tad katrs bērns saņemtu $\frac{3}{5}$ jeb $3 : 5 = \frac{3}{5}$.



! **Svarīgi paturēt prātā**

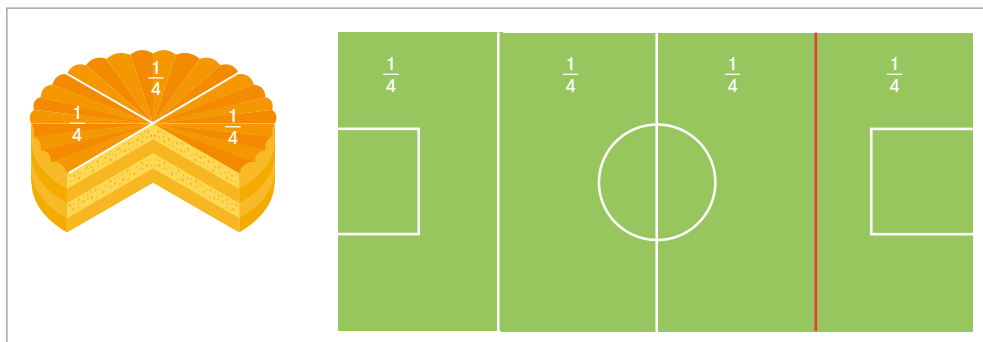
Skolotājam kopumā jāatceras, kā veidojas skolēna izpratne par daļām un kā tā turpina attīstīties.

- Daļa ir skaitlis, un to var atlikt uz skaitļu taisnes.



Te redzam, ka $\frac{1}{3}$ ir starp $\frac{1}{4}$ un $\frac{1}{2}$. Kad aplūko skaitļus, kas ir lielāki par 1, iegūst neīstas daļas jeb jauktus skaitļus, piemēram, $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

- Parastās daļas bieži lietojam, lai apzīmētu daļu no veselā. Piemēram, ja mums ir $\frac{3}{4}$ tortes, tas nozīmē, ka esam sadalījuši torti 4 vienādās daļās un ņemam 3 no tām. Šī ir daļa no veselā jēga. Sevišķi jāpievērš uzmanība tam, ka trīs ceturtdaļas no vesela var būt ļoti dažādi lielumi: $\frac{3}{4}$ no tortes virsmas laukuma ir daudz mazāk nekā $\frac{3}{4}$ no hokeja laukuma. Šajā nozīmē daļa apraksta darbību, kur sadalām objektu vienādos gabalos, un runa ir par zināmu daļu no tiem.



- Daļa ir arī viens veids, kā simbolizēt dalīšanu. Varam rakstīt gan $\frac{3}{4}$, gan $3 : 4$. Šajā nozīmē daļa norāda dalīšanu kā darbību.

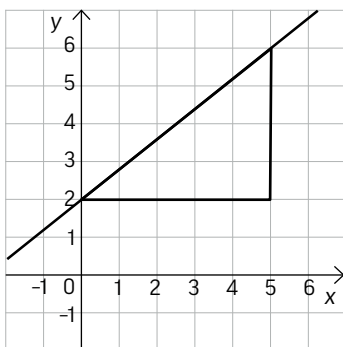
$$3 : 4 = 0,75$$

$$\begin{array}{r} 300 \\ 28 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 20 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ 20 \\ \hline \end{array}$$

- Daļa var arī aprakstīt attiecību. Piemēram, kad spriežam par lineāriem procesiem un rakstām $y = \frac{4}{5}x + 2$, tad $\frac{4}{5}$ norāda taisnes virziena koeficientu, kas ir funkcijas pieauguma attiecība pret argumenta pieaugumu. Var teikt, ka šajā nozīmē daļa rāda daļas-daļas attiecību.



- 6. klasē skolēni jau ir spējīgi izprast daļskaitļa definīciju. Parasti daļu $\frac{m}{n}$ definē kā skaitli, kur m ir vesels skaitlis $\{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ un n ir naturāls skaitlis $\{1, 2, 3, \dots\}$. Definīcijā ir paslēpti daži jēdzieni. Pirmkārt, tā garantē, ka daļas var būt arī negatīvi skaitļi. Otrkārt, definīcija garantē, ka saucējs nedrīkst būt 0. Pats galvenais, lai skolēni saprastu, ka nav iespējama situācija, kad daļas saucējs ir 0. Skolēniem te var rasties neizpratne. No vienas puses, skolēniem sakām, ka daļas var saprast kā attiecību, bet, no otras puses, reālajā dzīvē futbola spēles rezultātu var pierakstīt $5 : 0$. Lai saprastu, kāpēc saucējs nevar būt nulle, izmantojam spriešanas veidu, ko sauc par pierādīšanu no pretējā. Skatāmies, kas notiek, ja saucējā liekam nulli. Piemēram, ņemam $\frac{3}{0}$. Ir jābūt skaitlim x , kur $\frac{3}{0} = x$. Bet tas nozīmē, ka $3 = 0 \cdot x$. Domājam, vai ir skaitlis, ko reizinām ar nulli un iznākums ir 3? Tāda skaitļa nav, un tas nozīmē, ka mūsu pieņēmums $\frac{3}{0}$ ir aplams un šāds skaitlis neeksistē. Skolotājs var arī aicināt skolēnus lietot kalkulatorus (vai savus telefonus) un dalīt 3 ar 0. Ierīce rādīs, ka darbību nav iespējams veikt.

Parasto daļu mācīšana

Mācot daļas, skolotājam ir jāizmanto visi attēlojumi – fiziskais, vizuālais, konteksta, mutiskais un simboliskais – un jāiepazīstina skolēni gan ar daļām, kur daļa ir skaitlis, kas parāda daļu no veselā, gan ar daļu kā dalīšanu, gan daļu kā attiecību. Citādi skolēni saskatīs daļu nevis kā skaitli, bet kā divus atsevišķus skaitļus ar svītru pa vidu (Siebert & Gaskin, 2006).

Skolēniem ir svarīgi pildīt uzdevumus, kur pašiem ir jāveido daļas (Siebert & Gaskin, 2006). Piemēram, skolēni zīmē un izkrāso daļas vai loka papīru noteiktās daļās. Modelējot daļas, ieteicams izmantot dažādus modeļus.

Skolēniem ir jādod iespēja saskatīt daļas dažādos modeļos. Daļas visbiežāk redzam laukuma modeļi, tai pašā laikā garuma un kopas modeļi arī ir svarīgi, lai paplašinātu izpratni par daļām (Walle et al., 2010).

Gadījums, kad veselo veido viens elements



Aktivitāte skolēniem

SR Iegūst noteikta lieluma daļu, modelējot to ar taisnstūra veida loksnī.

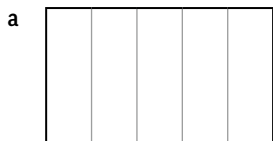
Skolotājs rāda papīra sloksnīti un saloka to uz pusēm. Skolēniem jautā, cik daļās ir sadalīta sloksnīte. Skolēni atbildēs, ka 2 daļās. Tad skolotājs vēlreiz saloka sloksnīti uz pusēm un uzdod šo pašu jautājumu.

Interesanti, ka bieži skolēniem ir nepareizs priekšstats par daļām. Viņi domā, ka sloksnīte tagad ir sadalīta 2 vai 3 daļās, nevis 4. Var likt locīt sloksnīti arī pašiem skolēniem un atklāt, kā rodas daļa, – tad, ja būs bijusi kļūda, viņi to pārdomās un paši sapratīs.

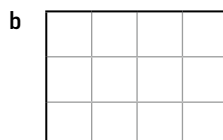
Būtiski ir nesasteigt daļu mācīšanu, lai skolēniem rastos pilnīga izpratne, tāpēc pietiekami daudz laika jāvelta situācijām, kad dalām vienu veselu objektu.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Iekrāso prasīto daļu no veselā!



Iekrāso $\frac{2}{5}$ no taisnstūra.



Iekrāso $\frac{7}{12}$ no taisnstūra.

Cik liela katra taisnstūra daļa netika iekrāsota?



Aktivitāte skolēniem

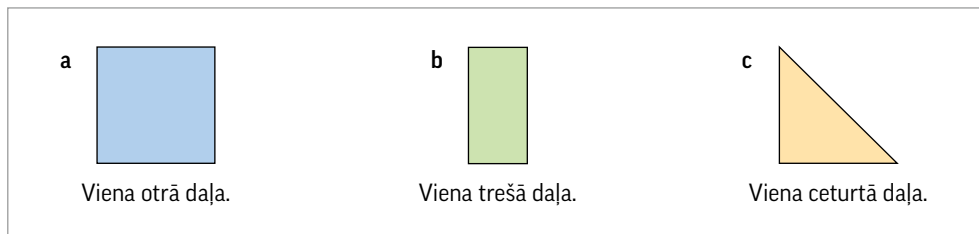
SR Saskata daļas izveidotā modeli.

Uz rūtiņu papīra uzzīmē taisnstūri – 18 rūtiņas garu un 1 rūtiņu platu! Pieraksti 5 daļas, ko vari izveidot, izmantojot šo taisnstūri! Salīdzini ar klasesbiedru! Vai varat izveidot vēl kādas citas daļas?

Skolēni paplašina izpratni par daļām ar jautājumiem, kad veselais nav dots, bet ir dota daļa. Vēlāk skolēniem var likt vingrināties zīmēt $\frac{7}{8}$, ja ir dots $\frac{3}{8}$. Šī darbība, ko literatūrā dēvē par “sadalīt un atkārtot”, pētījumos ir aprakstīta kā svarīgs solis daļas jēgas izpratnei (Siebert & Gaskin, 2006).

UZDEVUMA PIEMĒRS

Dotā figūra ir daļa no veselas figūras. Izveido vai uzzīmē visu figūru, ja zināms, cik liela veselās figūras daļa tā ir!



Starptautiskajā matemātikas pētījumā TIMSS 4. klasēm 2019. gadā tika dots līdzīgs uzdevums šim, un Latvijas skolēniem labi izdevās to izpildīt.

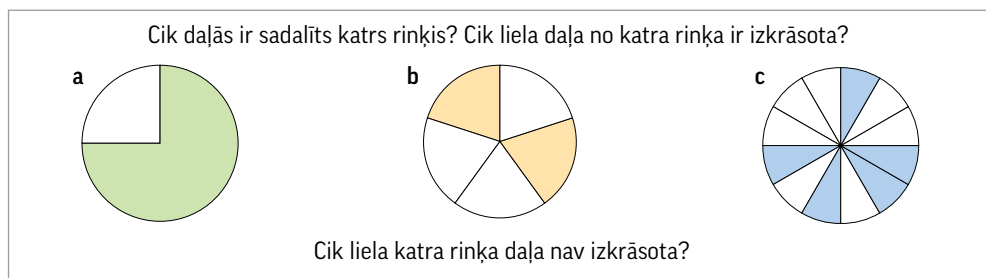
Viena veselā izpratnes veicināšana



Aktivitāte skolēniem

SR Stāsta, kas ir veselais un kādas daļas var saskatīt dotajā vizualizācijā.

Uzdevumā (sk. attēlu 272. lpp.) skolēnam ir jānosaka, ne tikai cik sektori ir iekrāsoti (skaitītājs), bet arī cik palikuši neiekrāsoti. Tas pievērš uzmanību tam, ka kopā sanāk viens vesels. Skolotājs var turpināt ar jautājumiem bez attēliem – vispārinot, piemēram: *ja $\frac{5}{7}$ no riņķa ir iekrāsotas, cik būs neiekrāsotas? Kā jūs zinājāt atbildi?* Šādi jautājumi sagatavo skolēnus daļu saskaitīšanai un atņemšanai un idejai, ka 1 var rakstīt arī kā $\frac{7}{7}$ vai jebkuru skaitli var dalīt ar sevi, izņemot nulli.



Pētījumi rāda, ka **garums** ir nepieciešams modelis daļas jēdziena izpratnei, tas atspoguļo daudzas īstās dzīves situācijas (Middleton et al., 1998).



Aktivitāte skolēniem

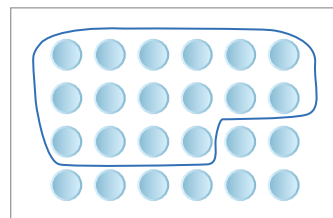
Uzzīmē 12 cm garu nogriezni! Atzīmē trīs ceturtdaļas, divas trešdaļas, piecas sestdaļas, septiņas divpadsmitdaļas!

Atsevišķi elementi, kas veido veselo

Atsevišķu elementu kopas arī atspoguļo daudzas ikdienas situācijas, bet skolēni bieži nesaista daļas ar diskrētiem objektiem (Reys et al., 2015, 287).

Ja klasē mācās 16 meitenes un 8 zēni, tad $\frac{16}{24}$ jeb $\frac{2}{3}$ no skolēniem ir meitenes. Veselais šajā situācijā ir visa klase, ko veido 24 skolēni.

Kā modeli veselajam, kas sastāv no atsevišķiem elementiem, var izmantot ripiņas.

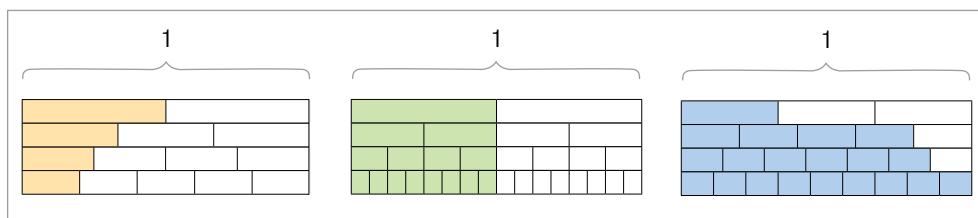


Sloksnītes

Sloksnītes kā modelis ļoti palīdz skolēniem saprast daļu kā skaitļa jēgu. Lietojot sloksnītes, skolēni atpazīst daļas, salīdzina daļas un izmanto tās tālāk dažādu konceptu apgūvē – daļas paplašināšanā un saīsināšanā, saskaitīšanā un atņemšanā.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Uzraksti visas parastās daļas, kas atbilst katrai iekrāsotajai slejas daļai. Atrodi likumsakarību un uzraksti nākamās trīs daļas.



Daļu salīdzināšana



Aktivitāte skolēniem

SR Saskata daļu salīdzināšanu un pierakstīšanu, izmantojot doto vizualizāciju. Šajā uzdevumā skolēni iegūst izpratni, ka pamatdaļa ar lielāku saucēju būs mazāks skaitlis nekā pamatdaļa ar mazāku saucēju. Skolēniem ir iespēja spriest par likumsakarībām, kuras var saskatīt vizualizācijā. Skolotājs piedāvā dažādus skaitļus un aicina tos salīdzināt, piemēram, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$ vai $\frac{1}{4}$ un $\frac{2}{8}$ utt.

1											
$\frac{1}{2}$						$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Izpratnes pilnveidošanai skolēniem var piedāvāt pašiem veidot sloksnīšu modeli, ko izmantot ilgtermiņā, ja zinām, ka tas būs precīzi izveidots (sk. att.).

Salīdzinot daļas, ir būtiski uzmanību veltīt tam, kas ir vienādas daļas. Tā salduma batoniņus var modelēt ar sloksnītēm. Piemēram, Modris apēda $\frac{1}{2}$ no batoniņa. Spriežam un vispārinām. Ja batoniņš būtu sadalīts 4 daļās un Modris apēd 2 no tām, vai viņš ir apēdis vairāk vai mazāk par pusi? Bet ja batoniņš ir sadalīts 8 daļās un Modris apēd 4 no tām? Un – ja 12 daļās un Modris apēd 6 no tām? Kā to var pierakstīt?

Vizualizācijā redzam, ka $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12}$. Veicot daļu salīdzināšanu, intuitīvi nonākam pie jēdziena “daļu paplašināšana” un “daļu saīsināšana”.

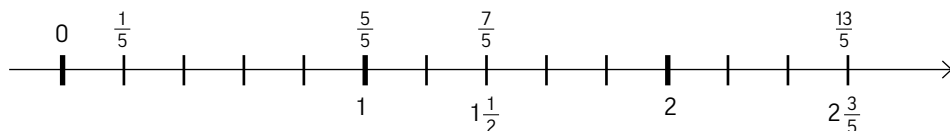
Ir ieteicams, lai katram skolēnam vai grupai būtu arī neizgrieztu sloksnīšu komplekts, kā arī palielināta tabula klasē pie sienas vai versija, ko rāda uz ekrāna. Sloksnītes palīdz arī apvienot laukuma un garuma modeļus.

Lai padziļinātu izpratni par skaitļu taisni un skaitļu atlikšanu uz tās, mācāmajos atlikt daļas uz taisnes. Sākotnēji izvēlamies nogriežni, kas ir tikai daļa no skaitļu taisnes, atliekam 0 un 1 un sadalām daļās tāpat, kā liekam sloksnītes.



Atrodot pareizo vietu skaitlim uz skaitļu taisnes, skolēni padziļinās izpratni par skaitļa lielumu un to, kur daļa atrodas uz skaitļu taisnes salīdzinājumā ar citiem skaitļiem vai daļām, piemēram, $\frac{3}{5}$ ir mazliet vairāk nekā $\frac{1}{2}$ vai $\frac{8}{9}$ ir gandrīz 1. Tas padziļina skolēnu izpratni, arī tālāk apgūstot daļu saskaitīšanu un atņemšanu (Cramer et al., 2008). Skolotājs var rosināt skolēnus, lai tie domā, vai un kur uz skaitļu taisnes atradīsies $\frac{5}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{12}{5}$, tā intuitīvi nonākot pie jēdziena “neīstas daļas”.

Kad skolēni ir apguvuši daļas, kas ir mazākas nekā 1, un intuitīvi nonākuši pie lielākām daļām jeb neīstas daļas jēdziena, varam domāt, kā šādus skaitļus pierakstīt, piemēram, $\frac{7}{5}$ un $\frac{13}{5}$. Te varam izmantot jau zināmo skaitļu taisni.



Skolēni var saskatīt, ka

$$\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5} \quad \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

Tātad, ja par $\frac{7}{5}$ domājam kā dalījumu, tad spriežam $7 : 5 = 1$ A 2 jeb iegūstam, ka septiņas piektdaļas ir tas pats, kas viens vesels un divas piektdaļas.

Šo algoritmu arī izmanto, lai neīstu daļu uzrakstītu kā jauktu skaitli.

Savukārt jauktu skaitli saprotam kā vesela skaitļa un daļas summu, piemēram,

$$1\frac{2}{5} = 1 + \frac{2}{5} \quad \text{vai} \quad 2\frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5}$$

Šo jauktā skaitļa pierakstu arī izmanto, lai jauktu skaitli pierakstītu kā daļu, ja tas nepieciešams. Svarīgi, lai skolēni izprastu, ka jebkuru veselu skaitli var pierakstīt kā daļu, piemēram,

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{10}{5} \text{ utt.}$$

Tad

$$2\frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5} = \frac{10}{5} + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$$

Darbības ar parastām daļām

Darbību ar daļām attīstības trajektorija

- ♦ Saskaita un atņem daļas ar vienādiem saucējiem, izmanto shematisko zīmējumu. Sareizina veselu skaitli ar īstu daļu (saucēji nepārsniedz 10). (4. klase)
- ♦ Skaidro savu darbību, pareizi lasa un pieraksta daļskaitļus, pieraksta daļu dažādi. (4. klase)
- ♦ Skaidro daļas saīsināšanu, paplašināšanu, daļu ar dažādiem saucējiem salīdzināšanu, saskaitīšanu un atņemšanu, izmantojot shematisku zīmējumu. (5. klase)
- ♦ Saskaita un atņem daļas ar dažādiem saucējiem, skaidrojot veiktās darbības un veidojot korektu pierakstu. (5. klase)
- ♦ Praktiskos un matemātiskos kontekstos aprēķina daļas skaitlisko vērtību, ja zināms veselais, un veselo, ja zināma tā daļas skaitliskā vērtība. Izsaka vienu skaitli kā otra skaitļa daļu. Atrisina atbilstošus situāciju uzdevumus. (5. klase)
- ♦ Salīdzina, saskaita un atņem jauktus skaitļus. Plāno darbību izpildi ar tiem. Atrisina situāciju uzdevumu (līdz 3 darbībām), lietojot darbības ar jauktiem skaitļiem. (5. klase)
- ♦ Sareizina skaitļus, ja viens vai abi reizinātāji ir parasta daļa vai jaukts skaitlis. Skaidro savu darbību, lietojot matemātisko valodu. (6. klase)
- ♦ Nosaka un uzraksta skaitlim apgriezto skaitli. Dala parastas daļas vai jauktus skaitļus. Skaidro savu darbību, lietojot matemātikas valodu. Novērtē parasto daļu vai jauktu skaitļu reizinājuma/dalījuma aptuveno vērtību. Atrisina situāciju uzdevumus, ja to risinājums ietver parasto daļu vai jauktu skaitļu reizināšanu/dalīšanu. (6. klase)

Daļu saskaitīšana un atņemšana, ja saucēji ir vienādi

Sākot darbību apguvi, izmanto jau ierastās sloksnītes. Skolēni, tās rādot, var paši skaidrot, kā notiek saskaitīšana vai atņemšana.

Kad sākam rēķināt, skolēni redz, ka $\frac{1}{5}$ un $\frac{3}{5}$ ir $\frac{4}{5}$. Saucēji ir vienādi, un tie nemainās.

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	
---------------	---------------	---------------	---------------	--

Dažādi saucēji

$\frac{1}{1} = 1$											
$\frac{1}{2}$						$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Lai sāktu rēķināšanu ar dažādiem saucējiem, ir jāiegūst izpratne par daļu paplašināšanu, ko ir vērtīgi uzsākt jau pie daļu salīdzināšanas. Atceramies, ka to vizualizē ar sloksnīšu modeli.

Vērojot sloksnīšu modeli, var pamanīt, ka

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}$$

Skolēniem ir jājautā, kuras daļas vēl ir vienādas savā starpā, kādu sakarību viņi saskata.

Skolēni paši var formulēt sakarību, ka, reizinot skaitītāju un saucēju ar vienu un to pašu skaitli, daļas vērtība nemainās.

Kad sakarība modelī ir saskatīta, tad var mācīties to pierakstīt, sākotnēji izmantojot un rakstot reizināšanas darbību, piemēram:

$$\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$$

Ja šī ideja ir apgūta ar izpratni, tad arī pretējais koncepts – daļu saīsināšana – ir viegli saskatāms, dalot daļas skaitītāju un saucēju ar vienu un to pašu skaitli:

$$\frac{3 : 3}{21 : 3} = \frac{1}{7}$$

Skolēniem ir arī jābūt iespējai spriest par daļām reālā kontekstā. Piemēram, ja klasē mācās 15 zēni un 10 meitenes, tad meitenes ir $\frac{10}{25}$ no klases vai varam arī teikt: $\frac{2}{5}$ no klases. Kaut gan matemātiski tas ir pareizi, reālajā dzīvē mēs nesakām, ka meitenes ir $\frac{20}{50}$ no klases.

Daļu ar dažādiem saucējiem saskaitīšana, ja dots reāls konteksts



Aktivitāte skolēniem

SR Modelē daļu saskaitīšanu ar dažādiem saucējiem, veido saskaitīšanas algoritmu.

Annika apēda $\frac{1}{4}$ no šokolādes tāfelītes un vēlāk vēl $\frac{1}{3}$ no sākotnējās tāfelītes lieluma. Kādu daļu no veselas tāfelītes apēda Annika? Modelē un skaidro savu risinājuma ideju!

“**Cik no vesela**” ir jautājums, kas jāatkārto, lai skolēni saprot, kas tiek prasīts, kad saskaita vai atņem daļas.

Varam atbildēt, ka ir “ $\frac{1}{4}$ un $\frac{1}{3}$ ”, bet meklējam, kā to var pateikt, izmantojot **vienu skaitli**. Domājam, kā izmantot jau esošās zināšanas par daļu saskaitīšanu ar vienādiem saucējiem.

Skolēniem dod iespēju strādāt grupās ar sloksnītēm.

Ja ar šo uzdevumu sāk domāt par ideju, kā veikt saskaitīšanu, tad skolotājam ir jābūt gatavam mērķtiecīgi vadīt procesu un uzdot nepieciešamos jautājumus: *kā, izmantojot sloksnītes, varam parādīt uzdevuma tekstu?*

Ja skolēniem nerodas idejas, tālāk var prasīt: *vai varam $\frac{1}{4}$ saskatīt (reprezentēt) citādāk? Kā mums būtu jāskatās, lai varētu saskaitīt?*

Skolēni sāks rādīt ar sloksnītēm, ka $\frac{1}{4}$ ir tas pats, kas $\frac{2}{8}$ vai $\frac{3}{12}$. Ja skolēniem nerodas idejas, tālāk var prasīt: *vai $\frac{1}{3}$ ir tas pats, kas $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$ vai $\frac{4}{12}$?*

Kāds skolēns ievēros, ka $\frac{1}{4}$ un $\frac{1}{3}$ var pārvērst divpadsmitdaļās. Redzam, ka $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ un $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$. Tad varam arī saskaitīt un iegūt $\frac{7}{12}$.



Ievērojam arī, ka varam novilkt taisni vai pielikt lineālu sloksnīšu sakārtojumā pie $\frac{1}{4}$ taisni uz leju. $\frac{1}{4}$ sakrīt ar $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$. Līdzīgi $\frac{1}{3}$ sakrīt ar $\frac{2}{6}$ un $\frac{4}{12}$. Ja nepieciešams, skolotājs var atgādināt skolēniem, ja kāds jau nav ieminējies, ka tā patiesībā ir daļu paplašināšana.

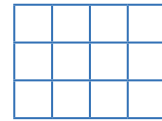
Detalizētāks stundas piemērs par to, kā varam mācīt saskaitīt daļas ar dažādiem saucējiem, jau minēts 1. daļā (“1.3.2. Kā apgūt prasmes un izmantot virzītās mācīšanās modeli”).

Viss iepriekš minētais ir spēkā, domājot par parasto daļu atņemšanu.

Daļu reizināšana un dalīšana

Reizināšanas koncepta apguvei der atgādināt, kā izprotam reizināšanu, to vizualizējot (vairs neizmantojam saskaitīšanas konceptu).

Atgādinām skolēniem: reizinājumu 3 reizes pa 4 jeb $3 \cdot 4$ varam vizualizēt ar taisnstūra palīdzību, saskatot, kā iegūstam 12.



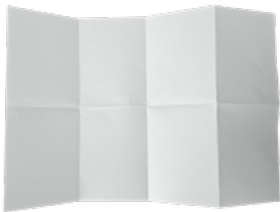
Sākot spriest par daļu reizināšanu, iztiekam bez simboliem un aplūkojam situāciju.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Aivai ir palikusi ceturtdaļa no šokolādes tāfelītes un viņa apēd pusi no atlikušās tāfelītes. Cik lielu šokolādes tāfelītes daļu Aiva ir apēdusi?

Situācijas vizualizēšanai lietojam papīra modeli – taisnstūra lapu, vai arī var vizualizēt zīmējot. Ieteikums ir sākt ar lapas locīšanu.

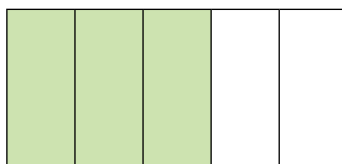
Modelis	Vizualizācija
	Zīmējumā redzama ceturtdaļa no šokolādes.
	Pusi no ceturtdaļas varam parādīt divos veidos: Vai arī
Galvenais jautājums, kas jāuzsver, cik liela daļa no veselās šokolādes ir šī daļa. Tas vislabāk redzams, lokot papīra lapu. Atrodam vienu ceturtdaļu un tad turpinām un sadalām visu “šokolādi” uz pusēm, iegūstam 8 daļas.	



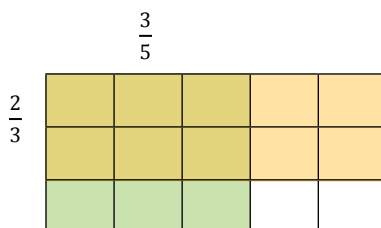
Te redzam, ka puse no
ceturtdaļas ir astotdaļa, un
rakstām $\frac{1}{2}$ no $\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Turpinām aplūkot piemērus, dodot iespēju skolēniem izvēlēties, vai vēl izmantot modeli vai vizualizāciju.

Domājam, cik ir $\frac{2}{3}$ no $\frac{3}{5}$. Sākam ar $\frac{3}{5}$.



Aicinām skolēnus savā starpā pārrunāt, kā modeli vai zīmējumā attēlot $\frac{2}{3}$. Visuzskatāmāk ir dalīt zīmējumu horizontāli 3 rindās un iezīmēt 2 no tām: iekrāsojam $\frac{2}{3}$ no šīm $\frac{3}{5}$ (te skaidri redzam reizināšanas interpretēšanu ar laukuma palīdzību, kas skolēniem jau ir pazīstama).



Redzam, ka $\frac{2}{3}$ no $\frac{3}{5}$ ir $\frac{6}{15}$. Skolēni redzēs, ka to varētu saīsināt un rakstīt $\frac{2}{3}$, bet labāk ir atstāt, kā ir, lai skolēni paši sāk saskatīt, kā veidojas reizināšanas algoritms.

Atceroties, ka šādi vizualizē reizināšanu, var spriest:

$$\frac{1}{2} \text{ no } \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \quad \text{jeb} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{2}{3} \text{ no } \frac{3}{5} = \frac{6}{15} \quad \text{jeb} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$$

Turpinot zīmēt vēl piemērus un rakstot visus reizinājumus vienā vietā, skolēni ievēros: lai reizinātu divas daļas, ir jāreizina saucēji savā starpā un skaitītāji savā starpā.

Kad šī sakarība ir saskatīta, vajadzētu pārliecināties, vai, reizinot parastās daļas un reizinātājus mainot vietām, arī iegūsim to pašu rezultātu – atkal modelējam vai vizualizējam, vai izmantojam jau esošos modeļus un izdarām spriedumus.

Tālāk, kad ir apgūti neīstas daļas un jaukta skaitļa jēdzieni, skolēni var paši iegūt algoritmu neīstu daļu vai jauktu skaitļu reizināšanai. Skolotāja jautājums: ja protam sareizināt daļas, kā varētu reizināt jauktus skaitļus? Ir jāveic tikai viens starpsolis – jauktu skaitli pārveidojam par daļu un tad jau izmantojam zināmo algoritmu.



Kad skolēni ir darbojušies ar papīra locīšanu un paši vizualizējuši, varam izmantot arī digitālo rīku piedāvātās iespējas, kur var vingrināties. Atšķirībā no iepriekšējiem vingrinājumiem (viens taisnstūris) te izmantotie reizinātāji vizuālajā modelī ir attēloti kā vienāda lieluma četrstūri, kuros iekrāso konkrēto reizinātāju. Lai skolēni labāk uztvertu tālākās darbības reizināšanas procesā, viens no četrstūriem ir sadalīts horizontāli, otrs vertikāli.



<https://www.geogebra.org/m/kjgcuuvp>

Maldīgais priekšstats

Ja naturālo skaitļu kopā skolotājs ir ļoti uzsvēris, ka reizinājums vienmēr ir lielāks nekā reizinātāji, tad tagad skolēniem var rasties neizpratne jeb “likumu sadursme”. Reizinot parastas daļas, iegūstam mazāku reizinājumu nekā atsevišķie reizinātāji. Skolotājam vajag to akcentēt kā jautājumu skolēniem, lai skolēni sarunājas, un tad skolotājs var skaidrot, ka, strādājot dažādās skaitļu kopās, paplašinām jēdzienu “reizināšana”.

Daļas reizināšana ar veselu skaitli



Reizināšanas izpratnei var izmantot digitālo tehnoloģiju piedāvātās vizualizācijas. Šajā modelī skolēniem tiek vizuāli attēlotas un nostiprinātas zināšanas par vesela skaitļa reizināšanu ar daļskaitli. Skolotājs var aicināt skolēnus klasesbiedram stāstīt, kā notiek reizināšana, ja uzdevumu skolēni pilda pāri.



<https://www.geogebra.org/m/vgfqadhp>

Jauktu skaitļu reizināšana

Skolēni mācās, ka, reizinot jauktus skaitļus, jāizmanto jau apgūtās zināšanas par parasto daļu reizināšanu, un tas nozīmē, ka jauktais skaitlis ir jāuzraksta kā neīsta daļa. Bieži vien skolēniem aizmirstas, kāpēc to darām, un tad var rasties kļūdas. Vēlams kopā ar skolēniem spriest, kā vēl varam skatīties uz reizināšanu.

- Var atstāt izteiksmi ar jauktiem skaitļiem, bet tad ir jālieto sadalāmības īpašība. Piemēram, ja reizinām $3 \cdot 4\frac{2}{5}$, tas nozīmē, ka reizinām $3(4 + \frac{2}{5}) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{2}{5}$. Redzam, ka rezultāts būs mazliet vairāk nekā 12. Sanāk $12 + \frac{6}{5}$ jeb $13\frac{1}{5}$.
- Varam arī spriest šādi: uzrakstīt $4\frac{2}{5}$ kā neīstu daļu $\frac{22}{5}$. Reizinām $3 \cdot 4\frac{2}{5}$, iegūstam $3 \cdot \frac{22}{5} = \frac{66}{5}$ un tad $\frac{66}{5} = 13\frac{1}{5}$.
- Ja reizinām divus jauktos skaitļus, tad faktiski reizinām binomus. Šāda spriešana būs ļoti atbalstoša skolēniem vēlākajās klasēs, kur viņi vispārinās un spriedīs algebriski.

Piemēram, $3\frac{5}{8} \cdot 4\frac{2}{5}$:

Rakstām $(3 + \frac{5}{8})(4 + \frac{2}{5}) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{8} \cdot 4 + \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} = 12 + \frac{6}{5} + \frac{20}{8} + \frac{10}{40}$.

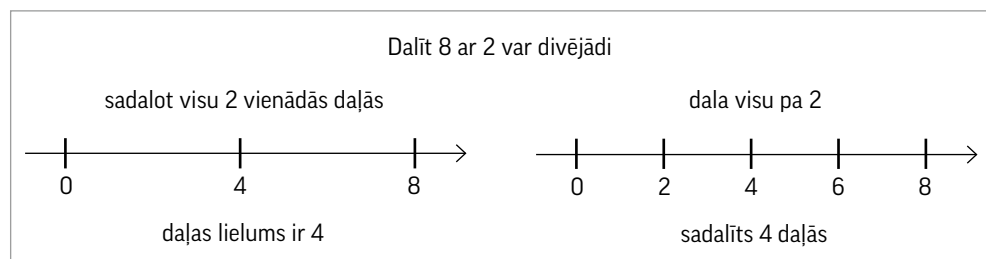
Varējām arī saīsināt pirms saskaitīšanas.

$$12 + \frac{6}{5} + \frac{10}{4} + \frac{1}{4} = 12 + \frac{24}{20} + \frac{50}{20} + \frac{5}{20} = 12\frac{79}{20} = 15\frac{19}{20}$$

- Kļūdu iespējas varētu samazināt un ātrāk izrēķināt, ja rakstītu $3\frac{5}{8} \cdot 4\frac{2}{5}$ kā $\frac{29}{8} \cdot \frac{22}{5}$. Varam uzreiz saīsināt $\frac{22}{8}$ kā $\frac{11}{4}$, un rezultāts ir $\frac{319}{20} = 15\frac{19}{20}$.

Parasto daļu dališana

Aplūkosim vēlreiz dališanas principus: 1) dotā lieluma dališana vienādās daļās vai 2) ietilpes dališana – dalām, lai noteiktu, cik daļās visu var sadalīt.



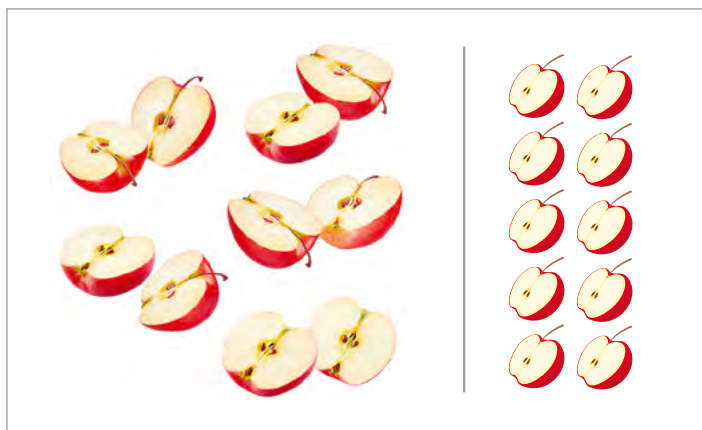
UZDEVUMU PIEMĒRI

Bērnu ballītē katram bērnam paredzētas 2 kūciņas. Ja ir 10 kūciņu, cik bērniem pietiks?

Spriežam, ka 10 kūciņas dalīsim grupās pa 2, iegūstot 5 šādas grupas, jeb pietiktu 5 bērniem. Varam rakstīt darbību kā $10 : 2$.

Te parādās dalīšanas situācija, kur grupu skaits 5 ir nezināmais un ir zināms, ka grupās ir katrā pa 2. Šī veida domāšana par dalīšanu ir nepieciešama tad, kad dala daļu ar daļu, un tas atšķiras no situācijas, ja ir zināms, cik daļās sadalīsim (grupu skaits).

Bērnu ballītē tiek plānots, ka katrs bērns varētu apēst $\frac{1}{2}$ ābola. Ir 5 āboli. Cik bērniem pietiktu ābolu?



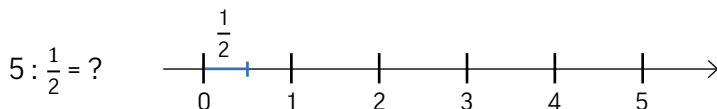
No vizualizācijas viegli varam iegūt atbildi, ka ir 10 pusāboli.

Rakstot būs $5 : \frac{1}{2}$.

Te ir svarīgi ievērot, ka **nav prasīts, cik daudz no veselā, bet gan cik puses ietilpst 5 veselos.**

Līdzīgi iesākumā varam spriest, izmantojot skaitļu asi.

Cik reižu $\frac{1}{2}$ ietilpst skaitlī 5?



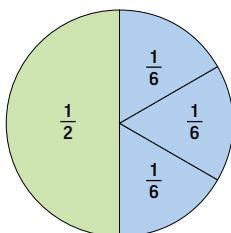
Ja runājam par parastas daļas dalīšanu ar parastu daļu, aplūkosim piemēru.

Mums ir puse no lielās picas. Katram bērnam ir paredzēta $\frac{1}{6}$ daļa no lielās picas.

Cik bērniem pietiks picas?

Jautājums ir: cik $\frac{1}{6}$ daļas ir $\frac{1}{2}$?

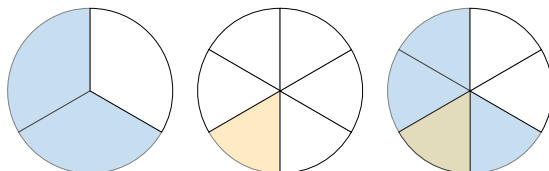
Atbilde ir 3. Rakstām: $\frac{1}{2} : \frac{1}{6}$.



Nākamais piemērs:

Ja mums ir $\frac{2}{3}$ picas un viena porcija ir $\frac{1}{6}$ daļas no picas, tad jautājums ir: cik $\frac{1}{6}$ daļas ir $\frac{2}{3}$?

Šeit arī vizualizējam un vispirms iezīmējam $\frac{2}{3}$, tad saprotam, kas ir $\frac{1}{6}$, un tad spriežam, cik sestdaļu ietilpst divās trešdaļās.

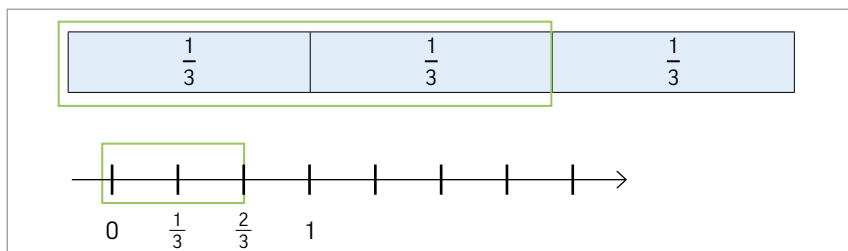


Rakstām: $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$. Atbilde ir 4.

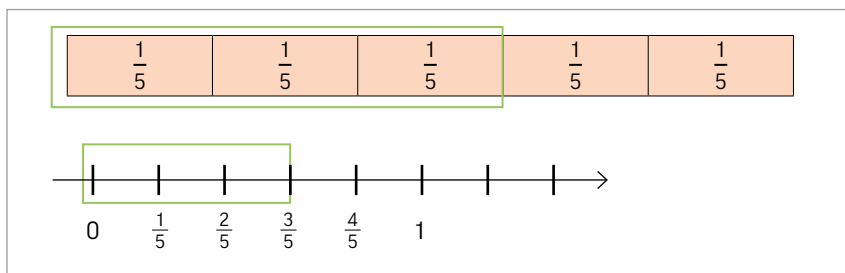
Pāreja uz dalīšanas algoritmu nav acīmredzama. Algoritms paredz, ka parastas daļas dalīšanai ar parastu daļu dalāmais jāreizina ar dalītāja apgriezto skaitli. Lai palīdzētu skolēniem šo jēdzienu saprast, skolotājs var izmantot visus iepriekš aplūkotos piemērus un to izteiksmes vienkopus, uzsverot, ka veicam ietilpes dalīšanu: domājam – cik daļas, kas ir dalītājs, ietilpst dalāmajā. Tad var jautāt skolēniem: “Vai jūs ieraugāt kādu sakarību?” Skolēniem būs iespēja izteikt savas domas un kopīgi pamanīt arī dalīšanas algoritma sakarību. Kāds no skolēniem to var pamanīt vai līdz tai nonākt kopīgā sarunā: lai dalītu ar parastu daļu, to aizstāj ar dalītāja apgrieztas daļas reizināšanu.

Piemēram:

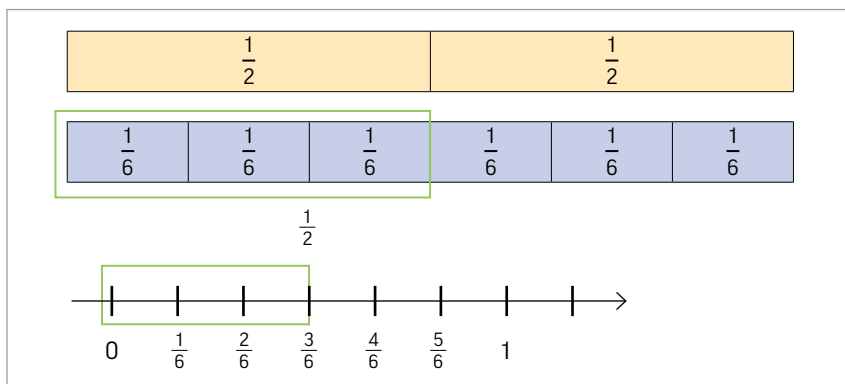
$$\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2$$



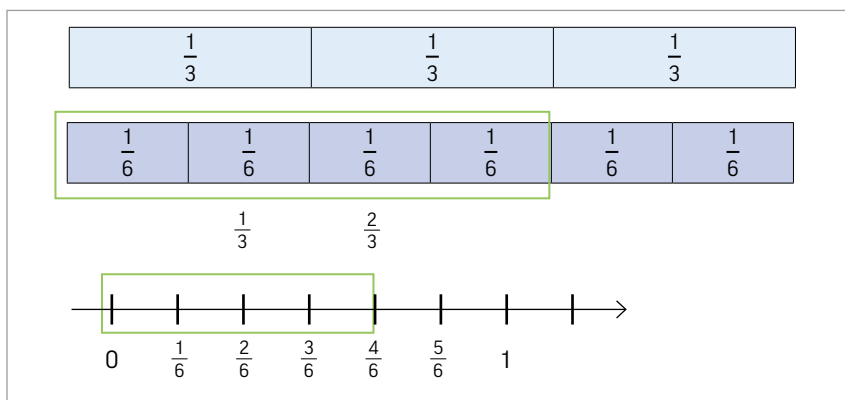
$$\frac{3}{5} : \frac{1}{5} = 3$$



$$\frac{1}{2} : \frac{1}{6} = 3$$



$$\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4$$



Tad, kad skolēni saprot, kā notiek parastas daļas dalīšana ar parastu daļu, varam rādīt algoritmu, kas palīdz dalīt bez zīmējumiem.

Piemēram, var izmantot:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = 3$$

$$\frac{3}{5} : \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{1} = 3$$

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{1} = 6$$

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{1} = 4$$

Būtiski ir skolēnam dot iespēju pašam iegūt algoritmu un piedāvāt stratēģiju, ko darīt, ja algoritms vēlāk aizmirstas. Tas ļauj skolēnam, izmantojot vienkāršus piemērus, atcerēties algoritmu vai meklēt to informācijas avotos. Svarīgākais ir, lai skolēns domātu par to, ka algoritmiem ir saprotami pamatojumi un ka tie nav vienkārši izdomāti.

Otrs veids, kā izskaidrot dalīšanas algoritmu, ir izmantot *dalīšanai* pretējo darbību – *reizināšanu* – un savstarpēji apgrieztus skaitļus.

Piemēram, $\frac{3}{5}$ un $\frac{5}{3}$ ir savstarpēji apgrieztu skaitļu. Ir jāatgādina skolēniem, ka, sareizinot savstarpēji apgrieztus skaitļus, rezultāts ir 1, un, ja reizinām jebkuru skaitli (izņemot 0) ar 1, rezultāts vienmēr ir tas pats skaitlis.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Ja dalām $6 : \frac{2}{3}$, tas nozīmē, ka meklējam skaitli, kas, reizināts ar $\frac{2}{3}$, ir 6.

Tātad varam rakstīt $\frac{2}{3} \cdot \text{nezināms skaitlis} = 6$. Varam reizināt 6 ar 1 jeb ar $(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2})$.

Iegūstam:

$$\frac{2}{3} \cdot \text{nezināms skaitlis} = 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$$

Savienojamības īpašība, ka reizinātājus varam mainīt vietām, ļauj mums pārrakstīt vienādību:

$$\frac{2}{3} \cdot \text{nezināms skaitlis} = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{3}{2}$$

Tad redzam, ka nezināmais skaitlis ir $6 \cdot \frac{3}{2} = 9$.

Ieguvām atbildi, reizinot dalāmo ar dalītāja apgriezto skaitli.

Skolotājam jāatceras, ka ar viena piemēra aplūkošanu nebūs pietiekami, lai skolēns izprastu, kā rodas šis algoritms.

Nākamais solis būtu jauktu skaitļu dalīšana. Te skolēnam nekas jauns nav jāapgūst, tikai jāsaliek kopā jau zināmais: 1) jebkuru jauktu skaitli varam uzrakstīt kā parastu daļu, 2) tad lietojam jau zināmo parasto daļu dalīšanas algoritmu.

Vērtīgi būtu skolēniem dot piemērus un jautāt: “Kā jūs rīkotos šajā situācijā?”

Piemēram,

$$4\frac{2}{3} : 1\frac{1}{2}$$

Idejas, ko varētu teikt skolēni: varam uzzīmēt; varam pārveidot par parastām daļām u. c.

Tad var aplūkot piemēru, kas nav tik viegli vizualizējams, piemēram:

$$2\frac{3}{4} : 2\frac{1}{8}$$

Pārrunājot visas skolēnu idejas, varam nonākt līdz gala spriedumam, kā rīkoties, ja būs jādala jaukti skaitļi.

Īpaši būtiski visa procesa laikā ir jautāt skolēniem, kā viņi var pārliecināties, vai ir izdalījuši pareizi.

Nākamais solis ir vingrināties lietot algoritmu daļu dalīšanai.



Vingrināšanās parastu daļu dalīšanā

Dotajā uzdevumā skolēniem ir jādala dotās parastās daļas un rezultāts jāieraksta tukšajā lauciņā. Animāciju var izmantot vingrināšanās un paškontroles nolūkiem.

<https://www.geogebra.org/m/zwgyudht>



Lai vingrinātos parasto daļu dalīšanā, vizualizācijas, proti, daļu sloksnīšu, vietā var izmantot arī digitālā rīka *Mathigon (Polypad)* daļu sloksnes. Tajā ir doti dažādi piemēri un vizuālie modeļi ar sloksnēm, kas palīdz skolēniem uztvert daļu dalīšanas principu.

<https://mathigon.org/polypad/W9wfGfvIT59xAQ>



Par ierobežojumu šajā rīkā var uzskatīt to, ka atbildes netiek atzītas par korektām, ja tās ir neīstas daļas formātā.



Jautājumi pārdomām

Kādus attēlojumus, tai skaitā modeļus, vērtīgi izmantot, mācot parastās daļas un darbības ar tām?

Vai, mācot saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu un dalīšanu, jūs ieteiktu izmantot viena veida vizualizācijas? Kāpēc?

Kuru darbību apgūšanai un skaidrošanai jūs izmantojat vizualizācijas?

Kā palīdzēt skolēnam atcerēties visu darbību veikšanas algoritmus?

Literatūra tālākai uzziņai

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). The Role of Representations in Fraction Addition and Subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 490–496.

D'Ambrosio, B. S., & Kastberg, S. E. (2012). Building Understanding of Decimal Fractions. *Teaching Children Mathematics*, 18(9), 558–565.

Denton, P. (2016). Mapping A Way to Decimal Understanding. *Teaching Children Mathematics*, 22(6), 350–357.

France, I., Lāce, G. (2015). *Matemātika 6. klasei*. Lielvārde: Lielvārds.

- Griffin, L. B. (2016). Tracking Decimal Misconceptions: Strategic Instructional Choices. *Teaching Children Mathematics*, 22(8), 489–494.
- Irwin, K. C. (2001). Using Everyday Knowledge of Decimals to Enhance Understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(4), 399–420.
- Johanning, D. I. (2013). Developing Algorithms for Adding and Subtracting Fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 18, 527–531.
- Lamon, S. J. (1999). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Litwiller, B., & Bright, G. (2002). *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions 2002 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Martinie, S. L. (2014). Decimal Fractions: An Important Point. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 19(7), 420–429.
- Middleton, J. A., Heuvel-Panhuizen, M., & Shew, J. A. (1998). Using Bar Representations as a Model for Connecting Concepts of Rational Number. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 302–312.
- Oppenheimer, L., & Hunting, R. P. (1999). Relating Fractions & Decimals: Listening to Students Talk. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 4(5), 318–321.
- Reys, R., Lindquist, M., Lambdin, D., & Smith, N. (2015). *Helping Children Learn Mathematics*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Siebert, D., & Gaskin, N. (2006). Creating, Naming, and Justifying Fractions. *Teaching Children Mathematics*, 12, 394–400.
- Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Boston: Allyn & Bacon.

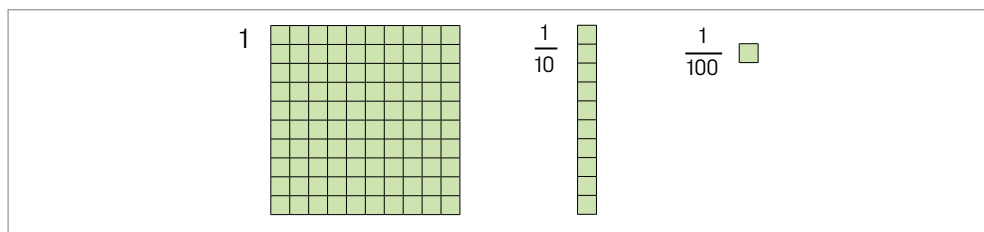
Darbības ar decimāldaļām

Ļoti nozīmīgs uzdevums ir parādīt, ka ar decimāldaļu ieviešanu tiek paplašināta decimālā skaitīšanas sistēma. Ir divi attēlojumi, kas labi palīdz skolēniem saprast decimāldaļas: šķiru bloki un reālais pielietojums – nauda. Šajā gadījumā ir ieteicams lietot tos abus vienlaikus, jo šķiru bloki dod konkrētu reprezentāciju, savukārt nauda vai cenas skolēniem ir sastopamas ikdienā.

Decimāldaļu apguves trajektorija

- ♦ Lasa decimāldaļas formā pierakstītas desmitdaļas un simtdaļas (izmanto arī daļskaitļu nosaukumus). (3. klase)
- ♦ Skaidro decimāldaļas decimālo sastāvu, pieraksta decimāldaļu kā summu, izmantojot tās decimālo sastāvu (piemēram, $3,12 = 3 + 0,1 + 0,02$). (5. klase)
- ♦ Decimāldaļu pieraksta kā parasto daļu un otrādi. Attēlo decimāldaļu (līdz simtdaļām) uz skaitļu taisnes. Pieraksta procentus kā parasto daļu un kā decimāldaļu un otrādi. (5. klase)
- ♦ Skaidro decimāldaļu salīdzināšanu. Saskaita un atņem decimāldaļas. (5. klase)
- ♦ Aprēķina procentus no veselā un veselo, ja zināma procentu skaitliskā vērtība. (5. klase)
- ♦ Sareizina skaitļus, ja viens vai abi reizinātāji ir decimāldaļa. Izdala skaitļus, ja dalāmais vai dalītājs ir decimāldaļa. Novērtē decimāldaļu reizinājuma un dalījuma aptuveno vērtību. Ar skaitliskām izteismēm, kas satur decimāldaļu reizināšanu un dalīšanu, apraksta situācijas praktiskā un matemātiskā kontekstā. Lieto kalkulatoru decimāldaļu reizinājuma un dalījuma noteikšanai. (6. klase)
- ♦ Nosaka vienu skaitli kā otra skaitļa procentus. Veido shematisku zīmējumu, lai attēlotu vienu skaitli kā otra skaitļa procentus. Lieto procentus praktiskos, autentiskos kontekstos – aprēķina procentus no skaitļa (lieluma skaitliskās vērtības), visu skaitli, ja zināma tā procentu skaitliskā vērtība, skaitli kā otra skaitļa procentus. (6. klase)

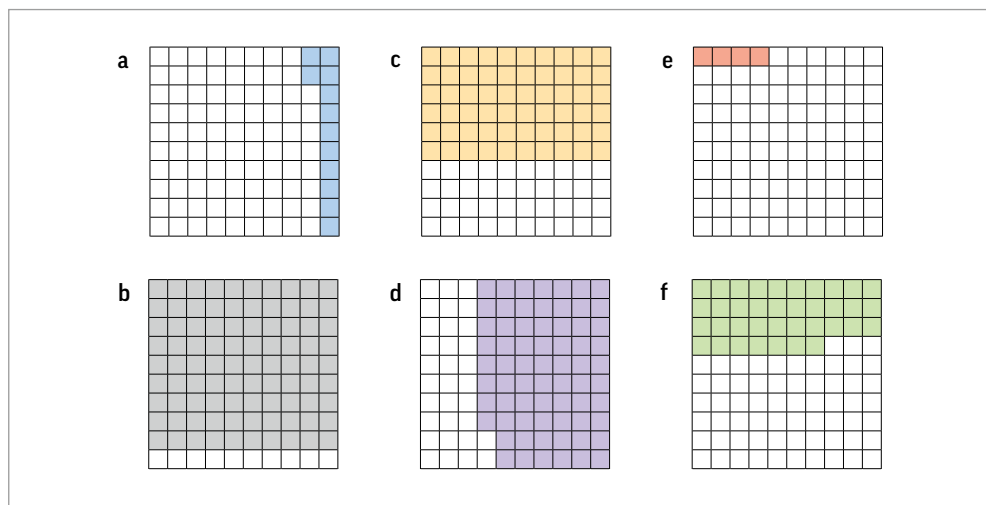
Skolēniem jau ir labi pazīstami šķiru bloki vai to versija papīra formātā vai digitālajās tehnoloģijās, kad viņi mācījās par decimālo skaitļu sistēmu. Tagad paplašinām simta kvadrāta lietojumu. Simta kvadrāts ir viens veselais: 1 (vai 1 eiro). Desmitu sloksnīte ir $\frac{1}{10}$, un 1 mazais kvadrāts ir vienība jeb $\frac{1}{100}$.



Izmantojot zināšanas par decimālās skaitīšanas sistēmas pierakstu, tagad to papildinām, ieviešot desmitdaļas pierakstu kā 0,1 un simtdaļas kā 0,01. Skolēniem būtiski saprast, ka decimāldaļas ir vienkārši cits pieraksts daļām, kuru saucējs ir 10, 100, 1000 vai teorētiski 10 kādā naturāla skaitļa pakāpē. Ikdienā decimāldaļu pieraksts tiek lietots biežāk nekā parasto daļu pieraksts.

Skolēniem ir jādod laiks strādāt ar desmitdaļām un simtdaļām, viņiem ir jānosauca arī vērtības. Veikalā vai kādā vizualizācijā skatoties cenu, ir jāprot skaidrot to ar matemātiskiem jēdzieniem – skaitļu šķirām. Piemēram, 5,78 € saprotam kā 5 vieni (vai 5 eiro), 7 desmitcentu monētas un 8 centi. Šādi skolēni iegūst pirmo intuitīvo priekšstatu par decimāldaļu, sastopoties ar to reālajā dzīvē.

Lai veiksmīgi sasaistītu parastās daļas ar decimāldaļām, izmantojam vizualizāciju – skolēni stāsta, ko redz attēlā un kā to pieraksta gan ar parastās daļas palīdzību, gan kā decimāldaļu.



Būtiski ir spriest arī reversi – skolēni paši zīmē desmitdaļas un simtdaļas, piemēram, $\frac{13}{100} = 0,13$.

Jāakcentē, ka šķiru vietas uzrakstītajā decimāldaļā tagad skaita ne no labās puses (vieni, desmiti, simti), bet no komata pa kreisi un pa labi (desmitdaļa, simtdaļa, tūkstošdaļa utt.).

Ir svarīgi pievērst uzmanību situācijām, ko var pierakstīt gan kā desmitdaļu, gan kā simtdaļu (c un b att.). Ja runājam par naudu, varam domāt par 3 desmit centu monētām vai 30 centa monētām, kam vērtība ir viena un tā pati. Jāpievērš uzmanība, ka, runājot par naudu, $0,3 = 0,30$, bet, ja mērām, piemēram, garumu metros, tad $0,3$ nozīmē, ka esam mērijuši ar precizitāti līdz decimetram, bet $0,30$ nozīmē, ka mērīšanas precizitāte ir centimetrs.

Ir svarīgi lietot naudas modeļus, jo tie vizualizē desmitdaļas un simtdaļas reālajā dzīvē, lai mazinātu un novērstu bieži redzamās kļūdas ar decimāldaļām, piemēram, sajaucot 0,06 un 0,60 (jāņem vērā, ka skolēni mūsdienās monētas vairs neizmanto tik bieži kā iepriekš, jo tiek lietoti bezskaidras naudas norēķini). Spriežot par decimāldaļām, sākotnēji ieteicams lasīt tās un spriest, veicinot skolēnu izpratni par šo pierakstu, piemēram, 3,15 var lasīt: 3 veseli, 1 desmitdaļa un 5 simtdaļas vai 3 veseli un 15 simtdaļas. Formāli lasīt “trīs, komats, piecpadsmit” tikai tad, kad skolēni izprot, ko tas nozīmē.

Darbību ar decimāldaļām apguves trajektorija

- ♦ Izmantojot naudas modeļus, demonstrē vienkāršus decimāldaļu saskaitīšanas piemērus. (3. klase)
- ♦ Saskaita un atņem decimāldaļas. (5. klase)
- ♦ Sareizina skaitļus, ja viens vai abi reizinātāji ir decimāldaļa. (6. klase)
- ♦ Izdala skaitļus, ja dalāmais vai dalītājs ir decimāldaļa. (6. klase)
- ♦ Novērtē decimāldaļu reizinājuma un dalījuma aptuveno vērtību. (6. klase)
- ♦ Ar skaitliskām izteismēm, kas satur decimāldaļu reizināšanu un dalīšanu, apraksta situācijas praktiskā un matemātiskā kontekstā. (6. klase)
- ♦ Lieto kalkulatoru decimāldaļu reizinājuma un dalījuma noteikšanai. (6. klase)

Decimāldaļu saskaitīšana un atņemšana

Visas darbības ar decimāldaļām ir saistītas ar to pozicionālo pierakstu – izpratni par decimālo skaitīšanas sistēmu. Sākotnēji varam izmantot vizualizācijas, tad vienkāršos piemēros veikt darbības galvā, izmantojot abu veidu pierakstu – parasta daļa un decimāldaļa.

$$\frac{2}{10} + \frac{3}{10} \text{ un } 0,2 + 0,3$$

Skolēniem bieži sajūk, kur likt komatu decimāldaļu saskaitīšanā un atņemšanā, tāpēc ir svarīgi nesteigties, skaidrot paņēmieni un uzdot jautājumus par darbības nozīmi. Skolēniem ir jāsaprot, ko katrs cipars skaitļa pierakstā nozīmē (vai tā ir desmitdaļa vai simtdaļa). Lai nesajauktu skaitļu šķiras, ir jāvingrina saskaitīšana un atņemšana, strādājot ar šķiru blokiem un skaļi pasakot katru darbību. Būtiski ir jau no paša sākuma uzsvērt katras šķiras un tās pierakstīšanas jēgu. Kad rakstām 0,56, pieci nozīmē 5 desmitdaļas (vai 5 desmit centu monētas), seši nozīmē 6 simtdaļas (vai 6 centi).

Kad saskaitām, raugāmies, cik ir simtdaļu, cik desmitdaļu, cik vienu, cik desmitu utt. Ja ir 10 vai vairāk no kādas šķiras, tad to “samainām” pret vienu nākamajā lielākajā šķirā.

Piemēram, ja ir 35 centi un pieliek klāt vēl 5 centus, tad kopā būs 40 centi. Rakstām $0,35 + 0,05 = 0,40$.

Līdzīgi kā naturālu skaitļu saskaitīšanā, arī viens no decimāldaļu saskaitīšanas pierakstiem ir saskaitīšana (atņemšana), rakstot vienu skaitli zem otra. Primāri skolēniem ir jāizprot, kā un kāpēc tiek novietoti skaitļi viens zem otra, īpaši tajos gadījumos, kad ciparu skaits skaitļos nav vienāds. Komats skaitļa pierakstā palīdz atpazīt skaitļa šķiras.

PIEMĒRI:

$$\begin{array}{r} 34,28 \\ +27,65 \\ \hline \end{array}$$

Lai saskaitītu, spriežam: saskaitām 8 simtdaļas ar 5 simtdaļām un iegūstam 13 simtdaļas. No tām 10 veido 1 desmitdaļu (tāpat kā 10 centus samainām pret vienu 10 centu monētu), ko pieraksta virs desmitdaļām. Paliek 3 simtdaļas. Saskaitām desmitdaļas 1 + 2 + 6, iegūst 9. Taču 4 vieni un 7 vieni ir 11 vieni. Samainām 10 vienus pret 1 desmitu un pierakstām virs desmitiem. Iegūstam, ka ir 1 viens un 6 desmiti. Kopā 61,93.

$$\begin{array}{r} \textcolor{blue}{1} \text{ } \textcolor{blue}{1} \\ 34,28 \\ +27,65 \\ \hline 61,93 \end{array}$$

Jā domājam, kā atņemam,

$$\begin{array}{r} 0,42 \\ -0,18 \\ \hline \end{array}$$

varam spriest, ka ir četras 10 centu monētas un 2 centi. Lai atņemtu 0,18, domājam, ka nevaram atņemt 8 centus no 2 centiem.

$$\begin{array}{r} \textcolor{blue}{3} \text{ } \textcolor{blue}{12} \\ 0,\cancel{4} 2 \\ -0,1 8 \\ \hline 0,2 4 \end{array}$$

Jāsamaina viena 10 centu monēta pret 10 centiem, pierakstām, ka paliek 3 desmiti. Tad sanāk 12 centi, ko uzrakstām virs vieniem, un varam atņemt 8. Atņemot iegūstam 4 simtdaļas. No 3 desmitdaļām atņemam 1 desmitdaļu un iegūstam 2 desmitdaļas. Rezultāts ir 0,24 vai 24 centi.

Ja mazināmajā ir mazāk decimālciparu nekā mazinātājā $3,8 - 1,387$, tad izmanto daļu paplašināšanu. Skolēnam ir jāizdara spriedums, ka 8 desmitdaļas ir tikpat, cik 800 tūkstošdaļas, tāpēc var rakstīt

$$\begin{array}{r} 3,800 \\ -1,387 \\ \hline 2,413 \end{array}$$

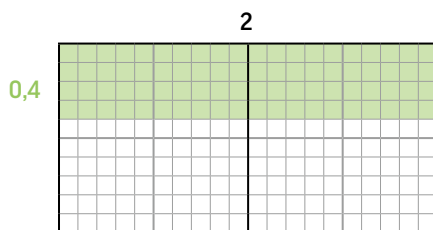
Saskaitot un atņemot, domājot par rezultātu ieguvī, ieteicams veikt sākotnējo novērtēšanu. Saskaitot vai atņemot desmitdaļas vai simtdaļas, ir ieteicams rosināt skolēnus kā uzskates līdzekli izmantot naudu. Nav neparasti, ka skolēniem sajūk, ko nozīmē 0,05 un 0,50. Tad ir jāatgādina naudas vērtība: 5 centi un 50 centi. Piemēram, saskaitot 3,48 un 2,78, domājam 3,48 eiro un 2,78 eiro. Zinām, ka summa būs vairāk nekā 5 eiro, un pat zinām, ka vairāk nekā 6 eiro, jo 3,48 ir gandrīz 3,50 un 2,78 ir vairāk par 2,50. Tāda domāšana palīdzēs arī skolēniem rēķināt galvā, kas ir noderīga prasme reālajā dzīvē. Skaitlis 0,78 ir par 0,28 vairāk nekā 0,50. Ņemot vērā, ka 3,48 ir par 0,02 mazāk nekā 0,50, saskaitot iegūsim 6,26.

Decimāldaļu reizināšana

Reizināšanu var apgūt divējādi – sākt ar decimāldaļu reizināšanu ar veselu skaitli vai uzreiz izmantot konceptu par decimāldaļu reizināšanu ar decimāldaļu.

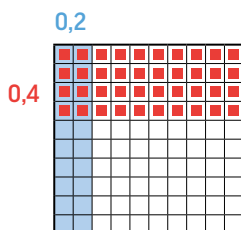
Ja sākam reizināt ar veselo skaitli, tad $0,4 \cdot 2$ nozīmē 0,4 divas reizes. $0,4 + 0,4 = 0,8$. Varam arī rēķināt, izmantojot šķiru blokus.

Ņemam 2 veselus un rādām 0,4 no tiem. Ir ļoti svarīgi, lai skolēni redz, ka simta kvadrātam ir 10 rindas un katra rinda ir daļa no veselā. Šajā gadījumā izmantojam reizināšanas kā laukuma konceptu, ne saskaitīšanu.



Redzam, ka ir iekrāsotas $\frac{8}{10}$ jeb 0,8 no viena vesela.

Ja rīkojamies šādi, tad ir viegli iegūt arī algoritmu divu decimāldaļu reizināšanai. Jāsareizina $0,4 \cdot 0,2$. Vizualizējam to un spriežam.



Sākam ar $\frac{2}{10}$ jeb 0,2 no viena vesela (zilā krāsā). No tā gribam iekrāsot 0,4 jeb $\frac{4}{10}$ (sarkanā krāsā). Redzam, ka $\frac{4}{10}$ no $\frac{2}{10}$ ir 8 rūtiņas simta kvadrātā – tikpat, cik $\frac{8}{100}$ jeb 0,08.

Varam izmantot arī naudas modeļus, sākam ar eiro. Sākam ar 0,2 eiro, kas ir 20 centi. Saprotam, ka ņemt 0,4 no 20 centiem nozīmē sadalīt šos 20 centus 10 daļās (katrā sanāk 2 centi) un ņemt 4 no tām. Iegūstam 8 centus. Pierakstām 8 centus kā 0,08 eiro.

Izpildot vairākus līdzīgus reizināšanas piemērus, var radīt ideju par reizināšanas algoritmu un to, kā pārvietojams komats reizinājumā. Kāpēc skaitām, cik ciparu ir aiz komata?

Skolēniem var skaidrot, ka tādēļ, lai vienmēr nebūtu jādomā par darbību, varam izmantot īsāku domāšanas ceļu. Tomēr, pirms to dara, ir jāiegūst izpratne, kāpēc tā var darīt.

Lai saprastu, kāpēc varam skaitīt ciparus aiz komata, apskatām attiecīgās parastās daļas.

Piemēram, $0,3 \cdot 0,25$ ir tas pats, kas $\frac{3}{10} \cdot \frac{25}{100}$. Kad reizinām, iegūstam $\frac{75}{1000}$ jeb 0,075. Ievērojam, ka $10 = 10^1$ un $100 = 10^2$. Vēlāk skolēni, reizinot skaitļu pakāpes ar vienādām bāzēm, mācīsies saskaitīt kāpinātājus.

Visbiežāk redzamās kļūdas aprēķinos ir saistītas ar to, kur rezultātā decimāldaļā likt komatu. Viens no pārbaudes veidiem ir vienmēr padomāt par aptuveno rezultātu. Ja reizinām 6,34 un 2,5, redzam, ka rezultātam noteikti ir jābūt vairāk nekā 12, respektīvi, rezultātā vesela daļa būs divciparu skaitlis. Pareizā atbilde ir 15,85, un varam uzreiz pateikt, ka atbilde nevar būt 158,5 vai 1,585.

Lai iegūtu ātru reizināšanas algoritmu, skolēniem jābūt pilnīgā skaidrībā par to, kā mainās skaitļa lielums, ja skaitlī atmet komatu. Tad jāsaprot, kā mainās reizinājums, ja vairākas reizes palielina vienu vai abus reizinātājus.

$$2,45 \cdot 10 = 24,5$$

$$2,45 \cdot 100 = 245$$

Ja ir jāsareizina $3,12 \cdot 2,6$, tad $3,12$ palielina 100 reizes, bet $2,6$ palielina 10 reizes, tātad reizinājums būs palielināts 1000 reižu.

$$312 \cdot 26 = 8112$$

Kad ir veikta naturālo skaitļu reizināšana, tad reizinājums ir jāsamazina noteikto skaitu reižu, šoreiz jādala ar 1000.

Tātad $3,12 \cdot 2,6 = 8,112$.

Kad izpratne ir iegūta, var domāt, kā komatu pirms reizināšanas atmetam un kā to pārceļam reizinājumā.

Arī šajā piemērā skolēni sākotnēji var aptuveni novērtēt reizinājumus $3 \cdot 2 = 6$ un $3 \cdot 3 = 9$ un secināt, ka rezultāts varētu būt lielāks nekā 6, bet mazāks nekā 9. Tas nevarēs būt 81,12 vai 0,8112.

Decimāldaļu dalīšana

Sākot dalīt decimāldaļas, ir svarīgi mēģināt saistīt uzdevumus ar kādu reālu situāciju.

Jādala $1,2 : 4$. Varam iedomāties, ka ir 1 eiro un 2 desmit centu monētas, kas ir jāsadala vienādi 4 bērniem. Nauda ir jāsadala starp 4 grupām. Grupu skaits ir zināms. Samainām 1 eiro pret 10 desmit centu monētām. Tad ir 12 desmit centu monētas, ko sadalām vienādi 4 bērniem, tātad katrs bērns saņem 30 centus jeb 0,30 eiro.

Ja dalām ar decimāldaļu, nevaram domāt par dalīšanu, kā sadalīt vienādi starp doto grupu skaitu, jo tas nav vesels skaitlis. Te ir jādomā par dalīšanu kā situāciju, kur ir zināms, cik vienību ir katrā grupā, un mēs dalām, lai uzzinātu, kāds ir grupu skaits.

Jādala $3 : 0,5$. Vizualizējam ar modeli vai domājam, ka ir 3 eiro. Katrs zīmulis maksā 0,5 eiro. Cik zīmuļu varam nopirkt? Skolēni atbildēs, ka 6.

Ja dalām $1,2 : 0,4$, varam domāt, ka ir 1,2 eiro un katrs cepums maksā 0,4 eiro. Sanāk 3 cepumi.

Skolēniem bieži ir neskaidrības par to, kāpēc reizēm ir jāpalielina dalāmais un dalītājs. Skolēniem vispirms jāatgādina par vienādām daļām.

Piemēram, rakstām $\frac{4}{10} = \frac{40}{100} = \frac{400}{1000}$ un sakām: 4 desmitdaļas ir vienādas ar 40 simtdaļām, kas ir vienādas ar 400 tūkstošdaļām, un tā tālāk. Ir ieteicams skolēniem lietot telefonu vai kalkulatoru, lai pārlicinātos, ka tiešām visi šie daļskaitļi ir vienādi ar 0,4.

Lai dalītu $15,2 : 0,4$, ir jāpadomā, kur rezultātā būs jāliek komats. Ieteicams prasīt skolēniem diskutēt grupās, cik apmēram liels būs rezultāts. Vai rezultāts būs mazāks par 10, lielāks par 100? Viena iespējamā atbilde ir domāt, ka 0,4 ir tuvu

0,5 vai vienai pusei. Tad jautājums ir, cik puses ir 15? Atbilde būs – apmēram 30. Varētu būt, ka daži skolēni min – būs vairāk nekā 30, jo 0,4 ir mazāk par 0,5.

Praksē ir ieteicams dalīt ar veselu skaitli – tā būs mazāk kļūdu. Tātad sākotnēji ir jāsaprot, kā šo pašu izteiksmi varam pierakstīt citādi, bet nemainot tās vērtību, piemēram, $15,2 : 0,4$. Izmantojam daļas paplašināšanu un varam uzrakstīt citādi: $\frac{15,2}{0,4} = \frac{152}{4}$, kur daļas saucēju un skaitītāju šoreiz reizinām ar desmit. Skolēni iegūst ideju, ka tikpat reižu, cik palielināsim dalītāju, ir jāpalielina dalāmais – cenšamies iegūt tādu izteiksmi, ko jau mākam izdalīt.

Dalīsim 152 ar 4. Spriežam: 1 nedalās ar 4, pārvēršam to desmitos, 15 desmitus dalām ar 4, tajos ietilpst 3 desmiti jeb $30 \cdot 4$ ir 120. Pielikām 0, lai neaizmirstas, ka 12 desmiti ir tiešām 120, un paliek pāri vēl 3 desmiti. Atņemam, un paliek 32. Rakstām:

$$\begin{array}{r} 152 : 4 = 3 \\ \underline{120} \\ 32 \end{array}$$

Redzam, ka 32, dalīts ar 4, ir 8.

$$\begin{array}{r} 152 : 4 = 38 \\ \underline{120} \\ 32 \\ \underline{32} \\ 0 \end{array}$$

Tātad $15,2 : 0,4 = 38$. Turpinot sarunu par dalīšanu, var jautāt skolēniem, vai iegūtu to pašu rezultātu, ja būtu dalījuši $1520 : 40$? Kā vēl varētu pierakstīt dalījumu?

Kā rīkoties, ja par veselu skaitli pārveidojam tikai dalītāju? Piemēram, dalām $7,344 : 2,4$. Kāda būs atbilde? Vai mazāk par 0, par 10, par 100? Ir svarīgi novērtēt, ka atbilde būs apmēram 3.

Pārveidojam dalījumu tā, lai dalītājs būtu naturāls skaitlis. Varam pārrakstīt to kā $73,44 : 24$. Varam arī pārveidot tā, lai nav nevienas decimāldaļas: $7344 : 2400$. Dažiem skolēniem tas var būt saprotamāk.

$$73,44 : 24$$

Zinām, ka $24 \cdot 3 = 72$.

$$\begin{array}{r} 73,44 : 24 = 3 \\ \underline{72} \\ 1 \end{array}$$

Vesēlie ir izdalīti. Ir jāliek komats aiz 3, jo vairāk vesēlo nevar būt. Palicis 1 viens jeb 10 desmitdaļas. Mēģinām dalīt 14 desmitdaļas ar 24. To nevaram. Tāpēc pierakstām, ka rezultātā ir 0 desmitdaļas, un domājam, ka 14 desmitdaļas ir 140 simtdaļas.

$$73,44 : 24 = 3,0$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ \hline 14 \end{array}$$

Mēģinām dalīt 144 simtdaļas ar 24. Iegūstam 6 simtdaļas.

$$73,44 : 24 = 3,06$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ \hline 144 \\ 144 \\ \hline 0 \end{array}$$

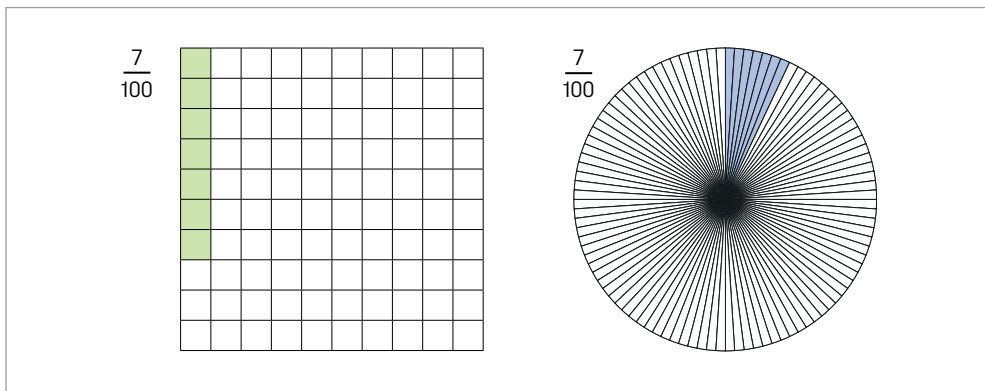
Rezultātā 7,324, dalīts ar 2,4, ir 3 vesēli un 6 simtdaļas.

Varam pārbaudīt: $2,4 \cdot 3,06 = 7,324$.

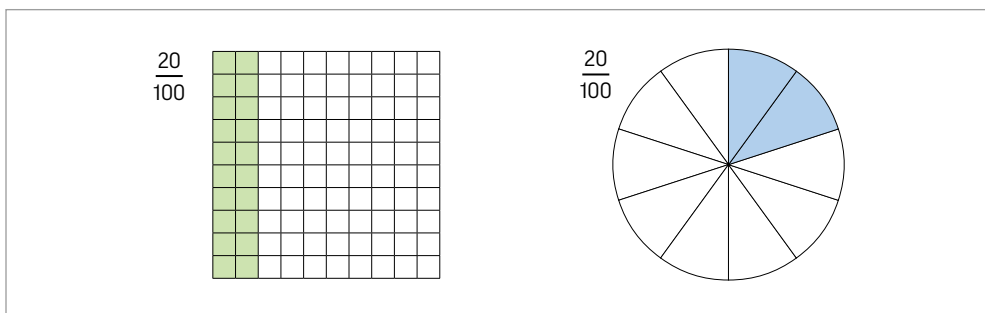
Procenti

Visās mūsdienu dzīves jomās procentus izmanto kā vienkāršu un izdevīgu paņēmieni lielumu relatīvai salīdzināšanai. Mācoties par procentiem, skolēniem ik pa laikam jāatgādina to pamatjēga, proti, ka procents ir divu skaitļu attiecība, kas izteikta simtdaļās. Pats šis vārds radies no latīņu valodas *per centum* jeb “pa simts”. Bieži vien, risinot sarežģītākus uzdevumus, skolēniem pazūd šī pamatjēga un sajūk darbības.

No sākuma ir svarīgi lietot vizuālu attēlojumu. Skolēni, jau mācoties par daļām, ir iepazinušies gan ar simta kvadrātu, gan riņķi kā attēlojuma veidu. Skolotājs var izlemt, vai izmantot vienu no tiem vai abus. Ja skatāmies perspektīvā, tad zinām, ka riņķa diagrammās datus bieži attēlosim procentos, tagad varam dot gatavas riņķa sagataves, kur sākotnēji mācāmies saskatīt simtdaļas vai spriest par tām. Lietojot simtu kvadrātu, redzam, ka ir iekrāsotas $\frac{7}{100}$ jeb 0,07 no kvadrāta. Kā procentus rakstām 7%.

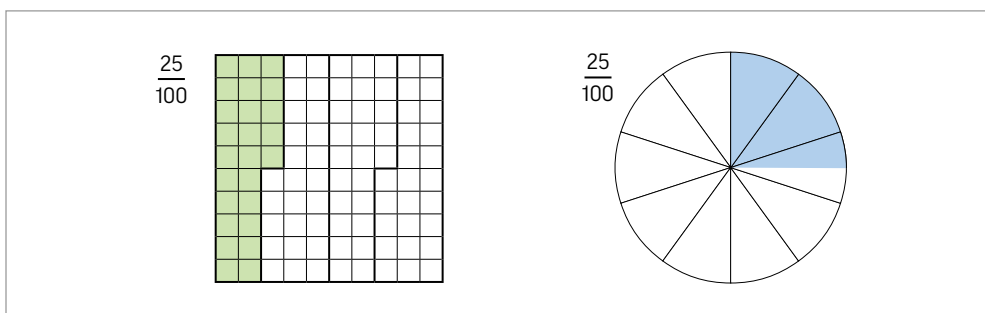


Skolēniem ļoti noder vingrinājumi, kuros pieraksts tiek veidots dažādi. Piemēram, te redzam $\frac{20}{100}$. Skolotājs jautā skolēniem, kā to varētu pierakstīt.



Varam teikt, ka ir iekrāsotas $\frac{20}{100}$, bet ir arī pareizi teikt $\frac{2}{10}$ – riņķa modelī vai kvadrātā tās būs 2 desmitdaļu slejas jeb 0,20, jeb 0,2, jeb 20%.

Nākamajā kvadrātā varam teikt, ka ir iekrāsotas $\frac{25}{100}$ jeb 0,25, jeb 25%. Bet arī ievērojam, ka varam saīsināt parasto daļu un rakstīt $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. Tas nozīmē, ka varam teikt: $\frac{1}{4}$ ir 25%.



Turpinām ar līdzīgiem piemēriem. To vajag ik pa reizei atkārtot.

Ievērojam, ka $100\% = \frac{100}{100} = 1$.

Vingrinājumi, kur skolēniem ir jāpāriet no viena pieraksta uz citu, palīdz viegli strādāt ar procentiem un decimāldaļām vēlāk.



Aktivitāte skolēniem

SR Lieto parastas daļas, decimāldaļas un procentu pierakstus.

Pieraksti doto lielumu citādi! Paskaidro, kā tu to dari! Izdomā vienu savu piemēru un uzdod to pierakstīt klasesbiedram!

Parastā daļa	Decimāldaļa	Procenti
	0,36	
$\frac{4}{5}$		
	0,8	
		68%
	0,04	

No kura pieraksta veida uz kuru tev visvieglāk izdodas pāriet? Kāpēc?

Apskatot konkrētus kontekstus un lietojot procentu jēdzienu, ir būtiski pārliecināties, ka patiesībā domājam tāpat, kā runājot par parastajām daļām, tikai apskatām vienu no veidiem – simtdaļu.

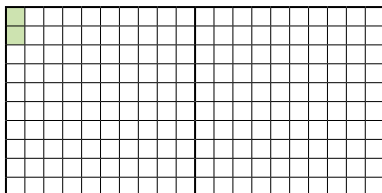
Ja 30 no 100 puķēm ir sarkanas, tad sakām, ka 30% no puķēm ir sarkanas.

Atceramies, ja rēķinām $\frac{3}{5}$ no 40, tad sadalām 40 piecās daļās $40 : 5$ un ņemam 3 jeb reizinām ar 3, tātad, pierakstot to ar vienu izteiksmi, rakstām $40 : 5 \cdot 3 = 24$.

Līdzīgi $\frac{1}{100}$ no simta kvadrāta ir 1 rūtiņa jo $100 : 100 \cdot 1 = 1$ un $\frac{7}{100}$ no 100 ir $100 : 100 \cdot 7$ jeb 7. Lietojot procentus, sakām, ka 1% no 100 ir 1 un 7% no 100 ir 7. Varam arī rakstīt 7% kā decimāldaļu un rēķināt: $100 \cdot 0,07 = 7$.

Līdz šim veselais ir bijis 100. Kas būs tad, ja veselais būs cits skaitlis, piemēram, 200? Sākumā varam atkal vizualizēt – sadalot attēlu 100 daļās, katrā daļā sanāk

2 rūtiņas. Varam teikt, ka 1% no 200 ir 2. To redzam attēlā, bet rēķinām: $\frac{1}{100}$ no 200 ir $200 : 100 \cdot 1 = 2$. Varam arī rēķināt ar decimāldaļu: $200 \cdot 0,01 = 2$.



Turpinām: 5% no 200 ir $200 : 100 \cdot 5 = 10$ rūtiņas.

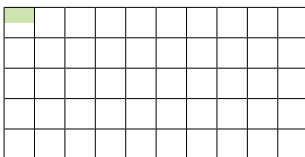
25% no 200 ir $200 : 100 \cdot 25 = 50$ jeb $200 \cdot 0,25 = 50$.

Vēlāk var veidot pierakstu, ka 1% no 200 = $0,01 \cdot 200 = 2$.

Ja veselais ir 50, kas ir 1%?

Ja sadalām 50 simts daļās, katra daļa ir $\frac{1}{2}$ rūtiņa.

Rēķinām: $50 : 100 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.



Ir jāapskata arī tādi piemēri, un skolēniem jāredz, ka rezultāts ne vienmēr būs vesels skaitlis:

$$45\% \text{ no } 90 = 90 : 100 \cdot 45 = 40,5$$

Veidojot konceptuālo izpratni, būtiski ir rosināt skolēnus atbildēt uz dažāda veida jautājumiem, kas sasaista procentu jēdzienu un dažādos skaitļa pieraksta veidus.

Kāpēc $\frac{3}{4} = 75\%$ vai, kad ievadām $3 : 4$ kalkulatorā, atbilde ir 0,75? Kā to var izskaidrot?

Procentus sastopam katru dienu ikdienas gaitās. Skolēniem ir svarīgi redzēt, ka matemātikas zināšanas palīdz saprast apkārtējo pasauli un pieņemt saprātīgus lēmumus. Dzīves situācijas var noderēt arī par ierosinātāju jauna sasniedzamā rezultāta apguvei – aplūkojam, piemēram, attēlus vai reklāmas bukletus, kur redzami procenti, un redzam, ka būtu svarīgi saprast un iemācīties, ko tas nozīmē. Skolotājs var lūgt skolēniem nofotografēt procentu piemērus veikalos vai atrast citur. Visbiežāk ikdienā procenti redzami veikalu atlaidēs. Atlaides parasti ir veseli procenti – 10%, 25%, 40%. Vingrinoties ieteicams skolēniem mēģināt aptuveno samaksu izrēķināt galvā. Meklēt telefonu vai kalkulatoru katru reizi, veikalā ieraugot atlaidi, ne vienmēr ir ērti.



Aktivitāte skolēniem

SR Novērtē, lai veiktu aprēķinus ar procentiem galvā.

Skolotājs aicina skolēnus pārrunāt grupās, kā varētu aprēķināt vai novērtēt samaksu, risinot galvā:

Jaka maksā 59,99 eiro, bet šodien tai ir atlaide par 40%. Novērtē, cik tagad maksā Jaka!

Vispirms klasei vajag vienoties, ka visvieglāk ir jakas cenu noapaļot līdz 60,00 eiro. Skolēni varētu domāt: 10% no 60 ir 6, bet atlaide ir 4 reizes vairāk. Iegūstam, ka atlaide ir 24 eiro. Tad $60 - 24 = 36$.

Citi skolēni varētu domāt: $60 \cdot 0,4$. Vēl cits veids ir domāt nevis par to, cik liela ir atlaide, bet, ja atlaide ir 40%, tad samaksa ir 60% no sākuma cenas. Tad var rēķināt: $60 \cdot 0,6 = 36$ eiro.

Var arī domāt, ka 40% ir gandrīz 50% jeb puse no cenas. $60 : 2 = 30$. Zinām, ka jaunā cena būs mazliet vairāk par 30 eiro.

Ir ieteicams ik pa reizei atkārtot šādus vingrinājumus, veicinot skolēnu konceptuālo izpratni. Piemēram, pirms sākt galveno stundas tēmu, var iesildīties ar jautājumu: "Ja cena ir 160 eiro un atlaide ir 25%, cik ir jaunā cena?"

Jāsaprot, ka bieži vien reālās situācijās noteikumi mainās vai ir saistīti.

Veikalā ir 20% atlaide visām precēm. Mētelim oriģinālā cena ir 100 eiro. Veikala vadītājs lūdz darbiniekam ieproprogrammēt kases aparātā jauno cenu aprēķinu. Darbinieks ieproprogrammē – 20% visām precēm. Mēteļa cena tāpat tagad ir 80 eiro. Pēc pāris nedēļām atlaižu laiks beidzas, visām precēm plānotas iepriekšējās cenas. Izskaidro, ja darbinieks kases aparātā ieproprogrammēs esošo cenu palielināt par 20%, vai tiks iegūta mēteļa oriģinālā cena?

Šis jautājums izvirza ļoti svarīgu ideju: procentu rēķināšanas rezultāts vienmēr balstās uz skaitli, no kura rēķinām procentus. Sākumā mēteļa cena bija 100 eiro, bet pazeminātā cena 80 eiro. Ja gribēsim pacelt cenu par 20% no esošās, tad iegūsim $80 + 80 \cdot 0,20 = 96$ eiro, bet ne sākotnējos 100 eiro.



Procentu, daļu un decimāldaļskaitļu vizuālais modelis. Ar šī modeļa palīdzību skolēns var veidot izpratni par procentiem, parastām daļām un decimāldaļām. Modelī ir attēlots simta kvadrāts.

<https://www.geogebra.org/m/cf6ygy7d>





Procentu aprēķināšanas uzdevums. Izmantojams, ja mērķis ir vingrināties vizualizācijā attēloto pierakstīt ar procentu palīdzību. Ir dots simta kvadrāts, tajā iekrāsots noteikts rūtiņu skaits, skolēnam ir jānosaka, cik rūtiņu ir iekrāsotas, un jāieraksta atbildes lodziņā kā noteikti procenti no simts.



<https://www.geogebra.org/m/snsxda4t>

Procentu uzdevumu veidi

1. Procentu aprēķināšana no dotā lieluma

Aprēķini 12% no 8 kg!

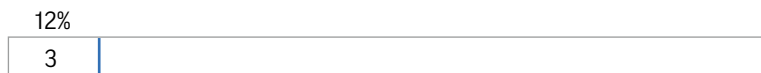
Skolēniem ir iespēja spriest dažādi, piemēram:

- 1) 1% no $8 = 8 : 100 = 0,08$ (kg)
 12% būs $12 \cdot 0,08 = 0,96$ (kg)
- 2) 12% no $8 = 0,12 \cdot 8 = 0,96$ (kg)
- 3) 8 kg ir 8000 gramu
 1% no 8000 ir $8000 : 100 = 80$ (g)
 12% ir 12 reizes vairāk, tātad $12 \cdot 80 = 960$ (g)

2. Visa lieluma aprēķināšana, ja doti tā procenti

Cukurniedrēs ir aptuveni 12% cukura. Cik daudz cukurniedru ir nepieciešams, lai saražotu 3 tonnas cukura?

Zinām, ka 12% no veselā ir 3 . Jānoskaidro, cik ir 100% .



$$100 : 12 = 8 \frac{1}{3} \text{ (tik reižu būs jāņem dotā cukura masa)}$$

$$8 \frac{1}{3} \cdot 3 = 25 \text{ (tonnas cukurniedru)}$$

Pārbaudām rezultātu: 12% no $25 = 3$, tātad esam aprēķinus veikuši pareizi.

Skolēni varētu spriest arī citādi:

12% atbilst 3 tonnām cukura

1% tad ir $3 : 12 = 0,25$ (tonnas)

100% ir $0,25 \cdot 100 = 25$ (tonnas)

Tai pašā laikā skolēni var spriest:

$$12\% \text{ no } x = 3$$

$$0,12 \cdot x = 3$$

Reizinātāju aprēķina ar dalīšanas palīdzību, tātad $x = 3 : 0,12 = 25$ (tonnas)

3. Divu lielumu procentuālā attiecība

Šie ir uzdevumi jeb situācijas, kad lielumu raksturojam ar daļu no visa, to izsakot procentos.

Reālajā dzīvē to bieži izmanto, lai salīdzinātu vairākas situācijas.

Koku skolā mācās 400 skolēnu, un uz skolēnu dziesmu un deju svētkiem devās 250 skolēnu, bet Saules skolā mācās 1200 skolēnu, un uz dziesmu svētkiem devās 300 skolēnu. Izvērtē doto apgalvojumu: Saules skolas skolēni ir aktīvāki svētku dalībnieki nekā Koku skolas skolēni.

Ja salīdzinām skolēnu skaitu, tad patiesi no Saules skolas piedalījās par $300 - 250 = 50$ skolēniem vairāk. Tomēr, ja salīdzinām kopējo skolas skolēnu aktivitāti, tad vajadzētu aplūkot, kāda daļa jeb cik procentu no skolēniem piedalījās svētkos.

Koku skola $\frac{250}{400} = 0,625 = 62,5\%$ no visiem skolas skolēniem

Saules skola $\frac{300}{1200} = 0,25 = 25\%$ no visiem skolēniem.

Apgalvojums nebūs patiess, ja runājam par to, cik liela daļa no visiem skolas skolēniem piedalījās svētkos.



Jautājumi pārdomām

Kā veicināt skolēnu izpratni par decimāldaļu saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu un dalīšanu? Cik lielā mērā skolēniem būtu jāprot veikt darbības ar skaitļiem, izmantojot kalkulatoru vai to neizmantojot?

Kurus no vizuālajiem attēlojumiem jūs un jūsu skolēni izmantojat, skaidrojot darbību konceptus ar parastām daļām un procentiem?

Kā mazināt mītu, ka procenti ir ļoti sarežģīts matemātikas koncepts?

Literatūra tālākai uzziņai

Bright, G. W., Joyner, J. M., & Wallis, C. D. (2003). Assessing Proportional Thinking. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 9 166–172.

D'Ambrosio, B. S., & Kastberg, S. E. (2012). Building Understanding of Decimal Fractions. *Teaching Children Mathematics*, 18(9), 558–564.

Denton, P. (2016). Mapping Away to Decimal Understanding. *Teaching Children Mathematics*, 22(6), 350–357.

- Griffin, L. B. (2016). Tracking Decimal Misconceptions: Strategic Instructional Choices. *Teaching Children Mathematics*, 22(8), 488–494.
- Heinz, K., & Sterba-Boatwright, B. (2008). The When and Why of Using Proportions. *Mathematics Teacher*, 101(7), 528–533.
- Hoffer, A. R. (1992). Ratios and Proportional thinking. In T. R. Post, *Teaching Mathematics in Grades K-8 Research Based Methods* (pp. 287–309). Boston MA: Allyn & Bacon.
- Irwin, K. C. (2001). Using Everyday Knowledge of Decimals to Enhance Understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(4), 399–420.
- Martinie, S. L. (2014). Decimal Fractions: An Important Point. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 19(7), 421–429.
- Mathematics Assessment Project CLASSROOM CHALLENGES A Formative Assessment Lesson (2015). *Translating between Fractions, Decimals and Percents*. Mathematics Assessment Resource Service University of Nottingham & UC Berkeley.
- Litwiller, B., & Bright, G. (2002). *NCTM 2002 Yearbook: Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions*. Reston VA: NCTM.
- Scheibling-Seve, C., Gvozdic, K., Pasquinelli, E., & Sanders, E. (2022). Enhancing Cognitive Flexibility Through a Training Based on Multiple Categorization: Developing Proportional Reasoning in Primary School. *Journal of Numerical Cognition*, 8(3), 443–472.
- Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Boston MA: Allyn & Bacon.

2.1.8. Negatīvie skaitļi

Prakse rāda, ka negatīvie skaitļi skolēniem bieži rada grūtības. Ir situācijas, kad skolēni atceras, ka “negatīvs un negatīvs ir pozitīvs”, bet neatceras, kāpēc un kā tas darbojas. Piemēram, reizinot divus negatīvus skaitļus, vienmēr iegūsim pozitīvu skaitli, bet saskaitot tā nebūs. Negatīvie skaitļi ir daudz abstraktāks jēdziens nekā skaitļi, kas lietoti līdz šim. Negatīvie skaitļi, vēsturiski skatoties, ir diezgan jauni. Pat slavenais matemātiķis Blēzs Paskāls (*Blaise Pascal*) vēl 17. gadsimtā pretojās negatīvo skaitļu idejai.

Negatīvo skaitļu apguves trajektorija

- ♦ Nosaka un pieraksta skaitlim (gan pozitīvam, gan negatīvam) pretējo skaitli, lieto arī pierakstu ar divām – zīmēm. (6. klase)
- ♦ Nolasa, atliek pozitīvus un negatīvus skaitļus uz skaitļu taisnes, salīdzina tos, sakārto augošā, dilstošā secībā. (6. klase)
- ♦ Koordinātu plaknē nolasa punkta koordinātas, atzīmē punktus, ja dotas to koordinātas. (6. klase)
- ♦ Saskaita un atņem pozitīvus un negatīvus skaitļus, skaidro, kā ieguva rezultātu. (6. klase)
- ♦ Reizina un dala pozitīvus un negatīvus skaitļus, skaidro, kā ieguva rezultātu. (6. klase)
- ♦ Lasa un pieraksta pozitīvu un negatīvu skaitļu izteiksmes, kuras satur saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu un dalīšanu, aprēķina to vērtību. Skaidro simbolu lietojumu. (6. klase)
- ♦ Raksturo dotas skaitliskas izteiksmes (līdz 4 darbībām) pierakstīšanu citādi, izmantojot darbību īpašības, saistību starp darbībām. (6. klase)

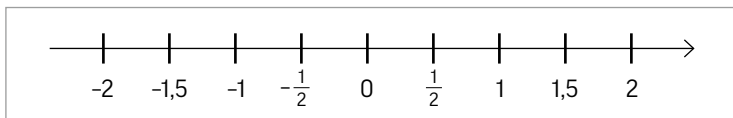
Viens no iemesliem, kāpēc negatīvie skaitļi mulšina, ir tas, ka mīnus zīmei ir dažādas nozīmes – tā norāda darbību un arī sniedz informāciju par pašu skaitli. Pirmkārt, -3 ir skaitlis, to var atlikt uz skaitļu taisnes. Varam uzskatīt to par “adresi”.

Otrkārt, pierakstu -3 var uzskatīt par darbību – “ņemt pretējo”. Tad -3 ir pretējais skaitlis $+3$ un $+3$ ir pretējais skaitlis -3 .

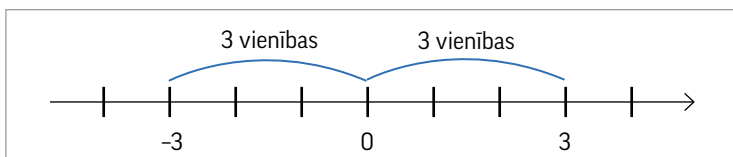
Treškārt, -3 var nozīmēt atņemšanas darbību, t. i. “atņemt 3”, ko pierakstām $7 - 3 = 4$.

Mūsdienās lietojam negatīvos skaitļus arī ikdienā, ne tikai izmantojam matemātikas ideju paplašināšanai. Skolēni iepazīstas ar negatīviem skaitļiem jau agrā bērnībā, dzirdot, ka gaisa temperatūra ir -5°C . Ikdienā skolēns lēnām sāk saprast, ka 0°C temperatūrā ir siltāk nekā -5°C un ka temperatūra ir palielinājusies par 12 grādiem, ja no rīta bija -2°C , bet dienas vidū $+10^{\circ}\text{C}$. Vissvarīgāk ir meklēt piemērus no reālās dzīves vai modelēt, lai skolēniem izskaidrotu darbības ar negatīviem skaitļiem.

Skolēniem ir svarīgi atlikt un atpazīt negatīvos skaitļus, kur tie atrodas uz skaitļu taisnes, vispirms ieviešot veselus skaitļus un tad jau runājot par parastām daļām un decimāldaļām, kas var būt arī negatīvi skaitļi. Pasakot un parādot, kur skaitlis atrodas uz skaitļu taisnes, salīdzinot tos, tiek veicināta skolēnu izpratne par jebkura veida skaitļiem un to saistību.



Atliekot negatīvos skaitļus uz skaitļu taisnes, ir būtiski sarunāties, ka, piemēram, 3 un -3 atrodas vienādi tālu no nulles. Trīs un mīnus trīs sauc par savstarpēji pretējiem skaitļiem, tie atrodas vienādā attālumā no nulles. To pieraksts atšķiras tikai ar zīmi. Pretējo skaitļu moduļi (attālums no 0 punkta) vienmēr ir vienādi (attālums ir pozitīvs lielums).



$$|3| = 3$$

$$|-3| = 3$$

Mācoties pierakstīt gan pozitīvus, gan negatīvus skaitļus, sākotnēji rakstām -3 un $+3$, lai uzsvērtu, kāda veida skaitlis dots, tomēr atceramies, ka pozitīvu skaitļu pierakstā rakstām vienkārši 3. Izņēmums ir nulle, kam nekad neraksta priekšā zīmi, jo tas nav ne pozitīvs, ne negatīvs skaitlis.

Darbības ar negatīviem skaitļiem

Saprast algoritmiskās darbības ar negatīviem skaitļiem ļoti palīdz modeļi.



Aktivitāte skolēniem

Spēle, ar kuras palīdzību var ieviest negatīvo skaitļu pierakstu un rast pirmās idejas, kā varētu saskaitīt šos skaitļus.

Kārlis un Anna spēlēja spēli “Negaiss”.

Spēlei nepieciešamais:

25 zilas ripiņas $-$ (negatīvie lādiņi)

25 sarkanas ripiņas $+$ (pozitīvie lādiņi),

2 metamie kauliņi dažādās krāsās: viens pozitīvajiem lādiņiem un otrs negatīvajiem lādiņiem.

Katrs spēlētājs met abus metamos kauliņus un paņem sarkanās un zilās ripiņas atbilstoši katra kauliņa uzmetajam punktu skaitam.

Vienāds skaits pozitīvo un negatīvo lādiņu dzēš viens otru.

Piemēram,   kopā ir 0 punktu.

Spēles beigās saskaita visu gājienu rezultātus.

Uzvar tas, kuram ir vairāk "pozitīvo" lādiņu jeb sarkano ripiņu.

Piemēram, Anna uzmeta



Apvilktais ripiņas dod 0 punktus.

Paliek divas zilās ripiņas, kuras varam pierakstīt kā -2 .

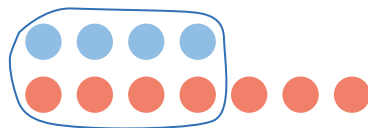
Modelējam, izmantojot ripiņas

Sākotnēji ar skolēniem vienojamies par ripiņu krāsas nozīmi, piemēram, lietojam sarkanu ripiņu, lai reprezentētu 1 pozitīvu vienību, un zilu ripiņu 1 negatīvai vienībai.

Atceroties spēli vai izmantojot skaitļu taisni, vienojamies, ka vienāds skaits abu krāsu ripiņu kopā dod 0 vai, ejot pa skaitļu taisni, noiesim vienādu skaitu vienību pozitīvajā un tad negatīvajā virzienā, vai otrādi, un atkal nonāksim tur, kur atrodas 0. Ripiņu vietā var izmantot jebkādas klucīšus divās krāsās vai papīra kvadrātus divās krāsās. Bieži negatīvos skaitļus apzīmē ar zilu krāsu, pozitīvos – ar sarkanu.

Attēlā redzamas 4 zilās un 7 sarkanas ripiņas.

Saliekot pa pāriem, redzam, ka vērtība, kas paliek bez pāra, ir 3. Pārējie $+$ un $-$ pāri dzēš viens otru.



$$\begin{array}{c} \text{Skaitļa zīme} \\ \swarrow \quad \searrow \\ -4 + (+7) = 3 \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \text{Darbības zīme} \end{array}$$

Var runāt par ripiņām, bet tikpat labi var teikt, ka $+1$ vai 1 attēlo nopelnīto 1 eiro (vai 1 eiro ir kredīts), bet ar -1 varam pierakstīt 1 eiro parādu.



Aktivitāte skolēniem

SR Modelē veselu skaitļu saskaitīšanu, lai saskatītu saskaitīšanas algoritmu.

Skolēniem pāros tiek dots uzdevums: izmantojot ripiņas, modelēt saskaitīšanu un censties izdomāt, kāds būs rezultāts.

$$3 + 4; \quad 3 + (-4); \quad -3 + 4; \quad -3 + (-4)$$

Tad, kopīgi pārrunājot, uzdod veidot simbolisko pierakstu, uzsverot, kas ir darbības zīme un kas ir skaitļa zīme. Piemērā redzama ideja, kā apkopot idejas par saskaitīšanu.

Modelis	Simboliskais pieraksts	Skaidrojums
	$3 + 4 = 7$	Sākam ar 3 sarkanām ripiņām un pieliekam klāt 4 sarkanas ripiņas. Kopā ir 7 sarkanas ripiņas jeb 7.
	$-3 + (-4) = -7$	3 zilas un 4 zilas ripiņas kopā veido 7 zilas ripiņas jeb -7.
	$3 + (-4) = -1$	Sākam ar 3 sarkanām ripiņām (pozitīvs skaitlis un pieliekam 4 zilas ripiņas (negatīvs skaitlis). 3 un -3 kopā dod 0. Paliek viena zila ripiņa, kas nozīmē -1.
	$-3 + 4 = 1$	Sākam ar 3 zilām ripiņām un pieliekam 4 sarkanas. 3 un -3 kopā dod 0. Paliek 1 sarkana ripiņa, kas nozīmē 1.

Tad skolēni var izdomāt paši savus līdzīgus piemērus, pildīt tos un saskatīt likumsakarības.

Kad ir izpildīti vairāki līdzīgi uzdevumi, skolotājs aicina skolēnus formulēt likumu, kā notiek skaitļu saskaitīšana.

Līdzīgi varam domāt par atņemšanu, te gan skolotāja iesaiste ir būtiskāka, lai varētu modelēt visus iespējamus variantus. Sākotnēji norādām gan skaitļa zīmi, gan darbības zīmi.

$4 - (+3)$

Nav zilo ripiņu, ko atņemt, tāpēc tās pievienojam kopā ar sarkanajām, kas veido 0

 $4 - (+3) = 1$

$+4 - (-3)$

Nav sarkano ripiņu, ko atņemt, tāpēc tās pievienojam kopā ar zilajām

 $+4 - (-3) = 7$

$-4 - (+3)$

Nav sarkano ripiņu, ko atņemt, tāpēc tās pievienojam kopā ar zilajām

 $-4 - (+3) = -7$

$-4 - (-3)$

Nav sarkano ripiņu, ko atņemt, tāpēc tās pievienojam kopā ar zilajām

 $-4 - (-3) = -1$

Skaitļu taisne

Skaitļu taisni bieži izmanto kā modeli, darbojoties arī ar veseliem skaitļiem, bet tas, iespējams, ir mazliet sarežģītāks modelis nekā ripiņas.

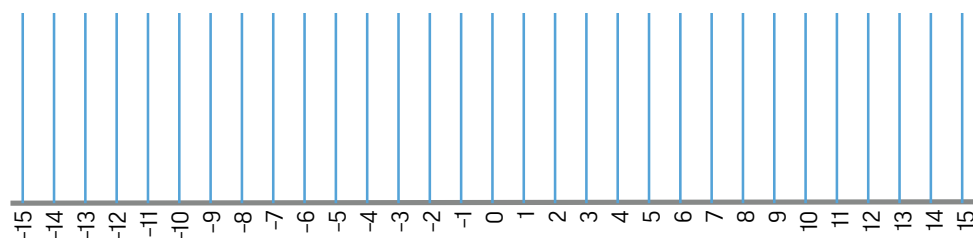
Visinteresantākā aktivitāte skolēniem, kas vairāk veicina atcerēšanos, ir, ja no papīra var izveidot lielu skaitļu taisni un novietot uz grīdas tā, lai skolēni var pa to staigāt.



Aktivitāte skolēniem

SR Modelē darbības ar veseliem skaitļiem, izmantojot skaitļu asi.

Izmantojot papīra lenti, izveidojiet klasē uz grīdas skaitļu taisni tā, kā parādīts attēlā.



Atzīmējiet uz tās skaitļus no -15 līdz 15 . Izmantojiet skaitļu asi, lai vingrinātos pozitīvu un negatīvu skaitļu saskaitīšanā vai atņemšanā.

Ievērojiet šādas vienošanās:

- Pirmais skaitlis nosaka sākumu uz ass.
- Kad saskaitām, skatāmies pozitīvo skaitļu virzienā, bet, kad atņemam skaitli, skatāmies negatīvo skaitļu virzienā.
- Norunājam, ja ir pozitīvs skaitlis, ejam ar skatu uz priekšu, bet, ja negatīvs skaitlis, ejam atmuguriski (atpakaļ).

$3 + 4 = 7$	Sākam uz 3. Tā kā darbība ir saskaitīšana, turpinām ar seju pozitīvo skaitļu virzienā un ejam uz priekšu vēl 4 vienības līdz 7.
$3 - 4 = -1$	Sākam uz 3. $-$ zīme nosaka atņemšanu, pagriežamies ar skatu uz negatīvo skaitļu pusi. Ejam uz priekšu 4 soļus, jo 4 ir pozitīvs skaitlis, līdz -1 .
$3 + (-4) = -1$	Sākam uz 3. $+$ darbība nosaka skatienu pozitīvo skaitļu virzienā, bet (-4) paredz iet atpakaļ 4 vienības līdz -1 .
$-3 - 4 = -7$	Sākam uz -3 . Jāpagriežas uz negatīvo skaitļu pusi, jo darbība ir atņemšana. Tā kā skaitlis 4 ir pozitīvs, jāiet uz priekšu 4 vienības līdz -7 .

$-3 + (-4) = -7$	Sākam uz -3 . Saskaitīšanā griežamies uz pozitīvo skaitļu pusi, bet (-4) paredz iet atmuguriski 4 vienības līdz -7 .
$3 - (-4) = 7$	Sākam uz 3. Darbība ir atņemšana, un griežamies uz negatīvo skaitļu pusi, bet ir jāiet atmuguriski 4 vienības līdz 7.

Reizināšana un dalīšana

Pirms formulē reizināšanas un dalīšanas algoritmus, var šīs darbības modelēt, lai pēc tam vispārinātu. Reizināšanā varam izmantot temperatūras modeli. Pirmais reizinātājs nosaka, par cik grādiem temperatūra ceļas vai krīt katru stundu. Otrais reizinātājs rāda, cik stundu ir pagātnē vai nākotnē. Sākuma pozīcija ir skaitlis 0.

$2 \cdot 4$	Temperatūra ceļas par 2° katru stundu. Cik būs temperatūra pēc 4 stundām? <i>+8 grādi</i>
$2 \cdot (-4)$	Temperatūra ceļas 2° katru stundu. Cik bija temperatūra pirms 4 stundām? <i>-8 grādi</i>
$(-2) \cdot 4$	Temperatūra krīt par 2° katru stundu. Cik būs temperatūra pēc 4 stundām? <i>-8 grādi</i>
$(-2) \cdot (-4)$	Temperatūra krīt 2° katru stundu. Cik bija temperatūra pirms 4 stundām? <i>8 grādi</i>

Reizināšana, izmantojot skaitļu taisni

Lietojot skaitļu taisni kā modeli, pirmais reizinātājs var norādīt, cik vienību vai soļu ir katrā lēcienā. Ja ir pozitīvs skaitlis, jālec uz priekšu, bet, ja negatīvs, jālec atmuguriski. Otrais skaitlis nosaka, vai jāskatās pozitīvo vai negatīvo skaitļu virzienā un cik reižu jālec. Ieteicams, ka skolēni praktiski izmanto jau iepriekš klasē izveidoto skaitļu taisni.

$2 \cdot 4$	Lecam 2 soļus uz priekšu. Lecam 4 reizes, skatoties pozitīvo skaitļu virzienā.
$2 \cdot (-4)$	Lecam 2 soļus uz priekšu. Lecam 4 reizes, skatoties negatīvo skaitļu virzienā.
$(-2) \cdot 4$	Lecam 2 soļus atmuguriski. Lecam 4 reizes, skatoties pozitīvo skaitļu virzienā.
$(-2) \cdot (-4)$	Lecam 2 soļus atmuguriski. Lecam 4 reizes, skatoties negatīvo skaitļu virzienā.



Aktivitāte skolēniem

SR Pēta dotās sakarības un secina par veselu skaitļu reizināšanu.

Izmanto doto skaitļu virkni un spried, kas notiks tālāk! Mēs zinām, ka

$$4 \cdot 4 = 16$$

$$4 \cdot 3 = 12$$

$$4 \cdot 2 = 8$$

$$4 \cdot 1 = 4$$

$$4 \cdot 0 = 0$$

Izdari secinājumus par risinātāju maiņu un rezultāta izmaiņām!

(Ievērojam, ka ar katru nākamo soli reizinātājs samazinās par 1, bet reizinājums par 4, proti, 16, 12, 8, 4, 0.)

Kāds būs nākamais reizinātājs un reizinājums?

Nākamais reizinātājs ir -1 , un reizinājums ir -4 , proti, $4 \cdot (-1) = -4$

Turpinām:

$$4 \cdot (-2) = -8$$

$$4 \cdot (-3) = -12$$

$$4 \cdot (-4) = -16$$

Skolēniem vajag veikt vairākus līdzīgus uzdevumus. Nākamais solis skolotājam ir palīdzēt skolēniem saprast, kā darbojas pārvietojamības īpašība. Mainām pirmo reizinātāju.

Piemēram,

$$4 \cdot 5 = 20$$

$$3 \cdot 5 = 15$$

$$2 \cdot 5 = 10$$

$$1 \cdot 5 = 5$$

$$0 \cdot 5 = 0$$

$$(-1) \cdot 5 = (-5)$$

$$(-2) \cdot 5 = (-10)$$

Kad skolēni ir pārliecināti, ka negatīvs skaitlis, reizināts ar pozitīvu skaitli, vienāla kādā secībā ir negatīvs skaitlis, tad var turpināt iepazīties tālāk ar reizināšanu, kur abi reizinātāji ir negatīvi skaitļi.

Zinām, ka:

$$(-4) \cdot 3 = -12$$

$$(-4) \cdot 2 = -8$$

$$(-4) \cdot 1 = -4$$

$$(-4) \cdot 0 = 0$$

Redzam, ka ik reizi reizinātājs samazinās par 1, bet reizinājums pieaug par 4. Tad nākamie skaitļi būs:

$$(-4) \cdot (-1) = 4$$

$$(-4) \cdot (-2) = 8$$

$$(-4) \cdot (-3) = 12$$

Varam izmantot arī rīpiņas, modelējot reizināšanu, bet tas kļūst sarežģītāk un ir jāapsver, vai ir vērts izmantot šo modeli.

Dalīšana

Līdzīgi var izmantot dažādus modeļus, domājot, kā notiek negatīvu skaitļu dalīšana, bet arī tas kļūst arvien sarežģītāk. Lai palīdzētu skolēniem saprast dalīšanu ar negatīviem skaitļiem, var uzsvērt, ka reizināšana un dalīšana ir pretējas darbības.

Zinām, ka $6 : 2 = 3$ un $3 \cdot 2 = 6$.

Tad

$$6 : (-2) = -3, \text{ jo } -3 \cdot (-2) = 6$$

$$-6 : 2 = -3, \text{ jo } -3 \cdot 2 = -6$$

$$\text{un } -6 : (-2) = 3, \text{ jo } 3 \cdot (-2) = -6$$

Kaut gan modeļi ir ļoti efektīvi, lai saprastu darbības ar negatīviem skaitļiem, skolotājam ir jāizvēlas rādīt vienu vai divus modeļus. Dažiem viens modelis būs labāk saprotams nekā otrs, bet tai pašā laikā pārāk daudz modeļu var apmulsināt skolēnus.

Kad skolēni ir izpratuši darbības ar negatīviem skaitļiem, var lūgt viņiem pašiem izgudrot veidus, kā tās viegli atcerēties.

Piemēram, var vispārināt, kā saskaita divus vienādzīmju skaitļus, – divus vienādzīmju skaitļus saskaita, saskaitot to moduļus un rezultātam ņemot to pašu zīmi, kāda ir skaitlim.

Turpina veikt darbības un vingrināties ar negatīviem skaitļiem, ja izmanto daļas un decimāldaļas.

Ar negatīvu skaitļu ieviešanu ir iespējams ieviest arī visas koordinātu plaknes jēdzienu.



Jautājumi pārdomām

Vai un kādus modeļus jūs izvēlaties, ieviešot darbības ar negatīviem skaitļiem?

Kā jūs palīdzat skolēniem vieglāk atcerēties darbību veikšanas algoritmus?

Literatūra tālākai uzzīpai

- Bennett, A. B., Burton, L. J., Nelson, T. L., & Ediger, J. R. (2016). *Mathematics for Elementary Teachers: A Conceptual Approach*. 10th ed. NY: McGraw Hill.
- Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Whitacre, I., & Schappelle, B. P. (2016). Unlocking the Structure of Positive. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 22(2), 84–91.
- Chinn, S. (2004). *The trouble with maths: A practical guide to helping learners with numeracy difficulties*. London: Routledge Falmer.
- Davis, R. (1967). *Explorations in Mathematics: The Madison Project*. Palo Alto, CA: Addison-Wesley.
- Hefendehl-Hebeker, L. (1991). Negative Numbers: Obstacles in their Evolution from Intuitive to Intellectual Constructs. *For the Learning of Mathematics*, 11, 26–32.

2.2. Sakarības

Ir grūti atrast matemātikas konceptu, kas neietvertu prasmi vispārināt. Algebriskā domāšana sevī ietver reprezentācijas, vispārināšanu, sakarību un regularitātes saskatīšanu. Matemātiskās sakarības, ko apraksta, piemēram, virknes, ietver jebkādu paredzamu regularitāti, kas saistīta ar skaitļiem, telpu vai mēriem. Rēķinpratība ietver spēju izmantot matemātisko izpratni un prasmes, lai risinātu problēmas un risinātu ikdienas dzīves prasības sarežģītos sociālos apstākļos. Lai iegūtu šīs prasmes, skolēnam jāspēj domāt un sazināties kvantitatīvi, izprast datus, telpiski domāt, saskatīt sakarības starp lielumiem un secību, kā arī atpazīt situācijas, kurās matemātisko domāšanu var izmantot problēmu risināšanai (Goos, O'Sullivan, 2023).

Skolotājiem ir svarīgi atcerēties, ka visos skolas līmeņos skolēniem ir pašiem jāattīsta izpratne darot, pārrunājot un domājot. Šo procesu nevar sasteigt vai izdarīt cita vietā. Skolēniem ir jāattīsta spējas atpazīt, aprakstīt un turpināt virknes un pārnest virknes uz citu reprezentāciju (NCTM, 2000).

Virkņu apguves attīstības trajektorija

- ◆ Spriež no konkrētā uz vispārīgo – raksturojot virknes (ritmiskas objektu virknes, vienkāršas skaitļu virknes), prognozē iespējamo nākamo virknes elementu. (1. klase)
- ◆ Veido dažādas objektu un skaitļu virknes pēc dotiem vai paša izvēlētiem nosacījumiem. (1. klase)
- ◆ Nosaka trūkstošo elementu skaitļu virknē un paskaidro savu izvēli. (1. klase)
- ◆ Veido telpisku figūru virknes no kubiem vai citiem telpiskiem objektiem, aprēķina to skaitu. (1. klase)
- ◆ Veido figūru virknes, stāsta par sakarībām, kuras izmanto. (2. klase)
- ◆ Veido un apraksta dažādas skaitļu virknes, kurās katrs nākamais skaitlis ir nosacīts skaitu reizu lielāks/mazāks nekā iepriekšējais, formulē secinājumu. (2., 3. klase)
- ◆ Turpina skaitļu virknes, formulē saskatīto likumsakarību, ja ir daļas. (4. klase)
- ◆ Pēta figūru virknes, nosaka nākamo figūru un formulē likumsakarību. Raksturo figūru virkni ar dažādām skaitļu virknēm (izsaka perimetru vai laukumu). (4. klase)
- ◆ Pēta figūru virknes, formulē vārdiski likumsakarību, kā noteikt virknes elementu skaitu, ja zināms virknes locekļa kārtas numurs virknē. (5., 6. klase)
- ◆ Veido skaitļu virknes vai skaitļu sakārtojumus (piemēram, “maģiskos kvadrātus”, “skaitļu trijstūrus”), ievērojot dotos nosacījumus un demonstrējot izpratni par tekstu un terminu lietojumu. (5. klase)

- ♦ Veido jauktu skaitļu, negatīvu skaitļu virknes atbilstoši dotajam nosacījumam, izmanto skaitļu taisni. (5., 6. klase)

Sakarību apguves attīstības trajektorija

- ♦ Pēta taisnstūra laukuma izmaiņas, mainot malu garumus; formulē pamanītās sakarības. (3. klase)
- ♦ Vārdiski raksturo praktisku, "atvērtu" problēmu (problēmu, kurai nav tikai viens atrisinājums), tajā dotos lielumus un sakarības starp lielumiem; plāno, matemātiski apraksta un atrisina problēmu, veicot skaitliskos aprēķinus ar daudzciparu skaitļiem; aprēķinus veic arī ar digitāliem rīkiem. (4. klase)
- ♦ Situācijās, kas apraksta iepirkšanos, komplektēšanu, kustību u. tml., pēta un formulē sakarības starp diviem lielumiem (kā, mainot vienu, mainās otrs), ja trešais lielums ir nemainīgs. (4. klase)
- ♦ Ar skolotāja atbalstu veido un mācās lietot formulas, kurās ar burtu simboliem pierakstītas iepriekš iegūtas sakarības, piemēram, $\text{ceļš} = \text{laiks} \cdot \text{ātrums}$. (4. klase)
- ♦ Pēta un vārdiski formulē sakarību starp riņķa līnijas rādiusa garumu un riņķa līnijas garumu. (5. klase)
- ♦ Nolasa lielumu skaitliskās vērtības no sakarības grafiskā attēlojuma (precīzas vai aptuvenas). (5. klase)
- ♦ Izmantojot grafiku, raksturo sakarību, ja tās konteksts ir pazīstams, saistīts ar pieredzi. Salīdzina divas sakarības, izmantojot to grafikus vienā koordinātu plaknē. Skaidro grafika veidu – līnija vai atsevišķu punktu kopums. (5. klase)
- ♦ Attēlo virkni grafiski. (5. klase)
- ♦ Pēta sakarības starp daudzskaldņu lielumiem, kas veidojas, ievērojot noteiktu likumsakarību. (6. klase)
- ♦ Zīmē daudzstūri koordinātu plaknē, raksturo sakarības, piemēram, starp virsotņu koordinātām. (6. klase)

Virknes kā jebkurš matemātikas jēdziens ir jāaplūko, izmantojot dažādus to attēlojumus (sk. 1. nodaļas sadaļu par reprezentācijām). Var rādīt virkni ar klucīšiem (fiziski), ar skaitļiem vai mainīgiem lielumiem (simboliski), skaidrot (vārdiski), rādīt attēlus (vizuāli) un izmantot reālu kontekstu (piemēram, nosaukt nedēļas dienas).

Bērni sākotnēji neapzināti jau ir iepazinušies ar virknēm, mācoties skaitīt. Pēc pirmajiem desmit skaitļiem atkārtojas **vienpadsmit**, **divpadsmit**... Iemācīties un izprast naturālo skaitļu virkni skolēniem ir viens no pirmajiem mērķiem matemātikā. Virknes parādās ne tikai matemātikas stundās. Skolēni mācās, kā sist plaukstas, soļot, ievērojot zināmu ritmu, ievērot noteiktu ritmu dziedot un dejojot. Skolēni mācās par dienām, nedēļām un citiem laika posmiem, kas regulāri atkārtojas.

Darbošanās ar virknēm palīdz sākt veidot un attīstīt izpratni par sakarībām (*patterns*). Pirmskolā virknes izmanto, piemēram, rindojo 2 zilus klucīšus, tad vienu sarkanu un atkārtojot secību. Bērniem vissvarīgāk ir pašiem novērot likum-sakarību, padomāt un turpināt virkni, izmantojot savas idejas.



Sākumskolas jaunākajās klasēs skolēniem ir jāšķiro, jāklasificē un jāsaliek secībā objekti un jāatrod nākamais virknes loceklis.

Skolēns stāsta, ko saskata dotajā virknē

Pirmā virkne, ko parasti skolēni sastop, ir **cikliskā virkne**, virkne, kur elementi atkārtojas.

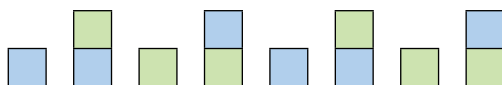
Lai veicinātu skolēnu domāšanu, ir svarīgi aicināt izstāstīt, ko viņi redz dotajā virknē. Skolotājs var prasīt skolēnam, ko viņš redz, un lūgt, lai izstāsta skaļi. Piemēram, “zils, zils, sarkans” utt. Skolotājs var to pašu prasīt citiem skolēniem. Skolēniem ir jādod laiks apdomāt pašu vai citu teikto, lai, iespējams, mainītu un papildinātu sacīto vai atkārtotu cita skolēna teikto ar saviem vārdiem. Svarīgi ir veltīt laiku sarunām pāros un nelielās grupās. Mērķis ir dot iespēju skolēniem saskatīt, ka elementi atkārtojas, – saskatīt ritmu un par to pastāstīt (Walle et al., 2010).



Aktivitāte skolēniem

SR Stāsta saviem vārdiem, ko ierauga dotajā virknes attēlā.

Izstāsti, kādas sakarības tu ieraugi dotajā virknes attēlā!

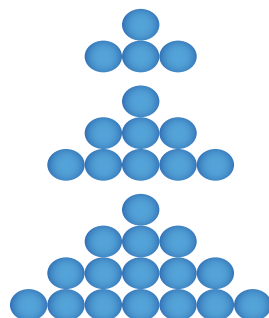


Skolēnu atbildes var būt dažādas:

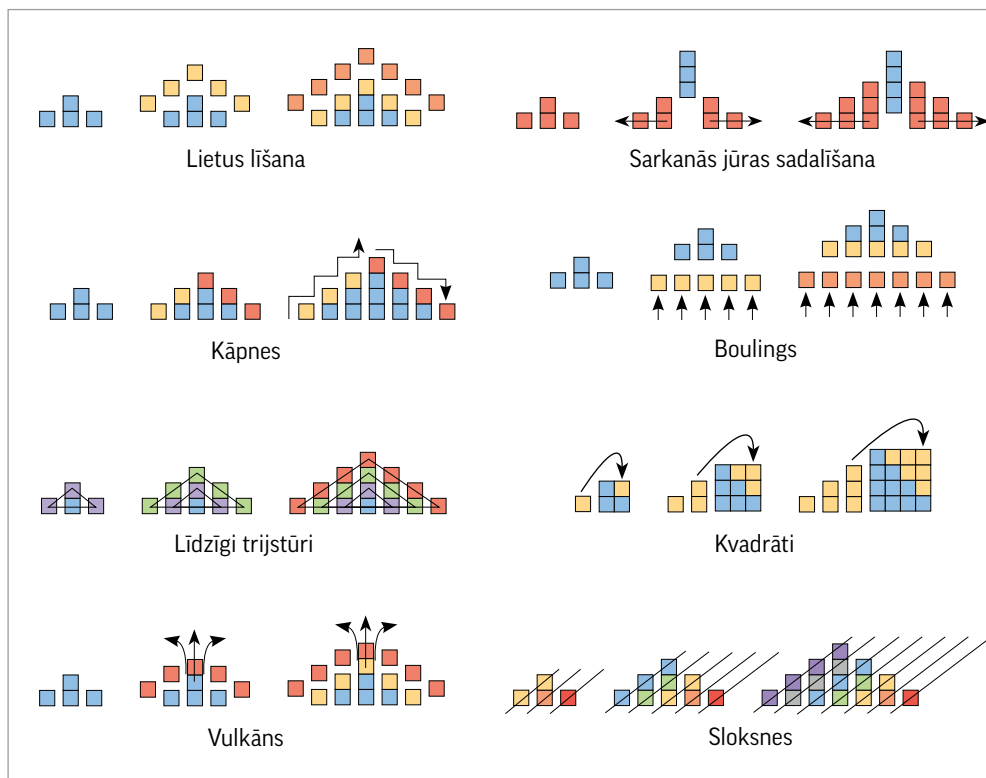
- Zilie kvadrāti atkārtojas.
- Ik pēc 4 figūrām atkal viss atkārtojas.
- Pirmajā rindā ir 2 zilie kvadrāti, tad 2 zaļie kvadrāti.
- Katra otrā figūra sastāv no 2 kvadrātiem utt.

Skolēns stāsta, kā veidojas virkne, ja tā ir augoša

Skolēnu uzdevums būtu turpināt veidot no ripiņām iesākto virkni (sk. att.) un izstāstīt, kā viņi to dara un kādas sakarības saskata.



Džo Bolera, runājot par to, kā varam veicināt skolēnu izaugsmes domāšanu, rosina dot iespēju skolēniem iztēloties, kā veidojas virknes vizualizācija, un pat veidot nosaukumus tam, ko viņi saskata, pirms sākam domāt par skaitliskām vērtībām un sakarībām. Piemēri, ko varam saskatīt (Boaler, 2022):



Skolēns prognozē nākamo elementu

Kad skolēns var pastāstīt, ko ir saskatījis virknē, nākamais uzdevums var būt prognozēt virknē nākamo elementu. Skolotājs var uzsvērt, atkārtojot “zils, zils, sarkans, zils, zils, sarkans...” un tad “2 zili, 1 sarkans, 2 zili, 1 sarkans...” un vēl “2, 1, 2, 1...”, papildinot ar ritmiskiem plaukstu sitieniem. Tikai vēlāk, kad skolēni pazīst skaitļa simbolus (1, 2, 3...), var rakstīt 2 1 2 1 2 1... un prognozēt nākamā elementa skaitu. Skolotājs var lūgt skolēniem parādīt šo virkni ar citiem priekšmetiem, tādējādi veicinot domu, ka šāda virkne saskatāma dažādās situācijās.



Skolēns saskata kopīgo un atšķirīgo

Viena no prasmēm, kas tiek attīstīta, ir kopīgā un atšķirīgā saskatīšana un tā pamatošana. Tas ir sākums skolēnu prasmēm klasificēt un formulēt pazīmes jeb saskatīt īpašības. Skolēniem rādām vairākus objektus un prasām, kas tiem ir līdzīgs un kas atšķirīgs.

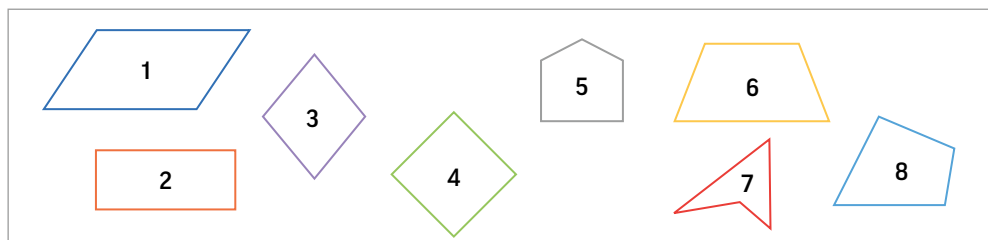
Izmantojot figūru modeļus (*pattern block*), skolēni ātri ievēro, ka 3 zaļi trijstūri veido sarkano trapeci un 2 trapeces veido sešstūri.



Ir jābūt uzmanīgiem ar uzdevumu, kurā jānorāda, kas “neder”, jo bieži tam var būt dažādas interpretācijas. Tomēr tie ir ļoti vērtīgi uzdevumi, lai skolēni savus spriedumus salīdzinātu, gūtu izpratni, ka var nebūt tikai viena pareizā atbilde. Tā būs atkarīga no izvēlētās pazīmes.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Kura figūra neiederas? Kāpēc?



Skolēnu iespējamās atbildes:

- Taisnstūris (otrā figūra) un kvadrāts (ceturtā figūra) neiederas, jo tiem visi leņķi ir taisni.
- Neiederas septītā (oranžā) figūra, jo malas ir “ieliektas”.
- Neiederas piektā figūra, jo tas ir piecstūris, u. c.

Skolēns stāsta, ko saskata virknē, un veido pierakstu



Aktivitāte skolēniem

SR Saskata sakarību dotā vizualizētā virknē, prot pastāstīt par to un pierakstīt ar simboliem.

Izstāsti, ko redzi dotajā attēlā! Vai tu saskati kādu sakarību? Pieraksti to, izmantojot skaitļus!



Skolēni lieto vizuālu (vai reālo) reprezentāciju, to pārvērš vārdiskajā un pēc tam simboliskajā. Var izmantot arī figūru modeļus (*pattern block*).

Virknes ir temats, kur bieži redzam, ka atbildes var būt dažādas. Piemēram, viens skolēns apraksta doto figūru virkni šādi:

3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1

Cits skolēns saskata trapecī kā formu, kas salikta no trijstūriem pēc kārtas, un atbild:

Č T Č T Č

Veicot šādus uzdevumus, noteikti ir jāorganizē saruna par to, ko skolēni saprot ar savu uzrakstīto un kā to pierakstīt saprotami visiem.

Skolēns veido atbilstošu virknes modeli

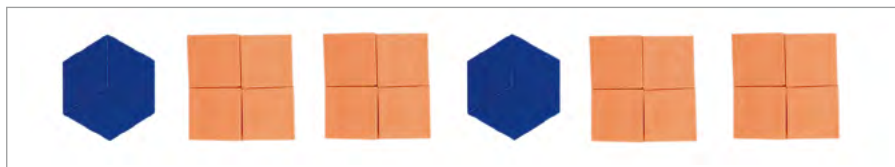
Skolēniem ir ne tikai jāaskata sakarības dotā vizuālā virknē, bet arī jābūt spējīgiem, piemēram, simboliski dotu virkni vizualizēt – salikt no objektiem vai uzzīmēt.

UZDEVUMA PIEMĒRS

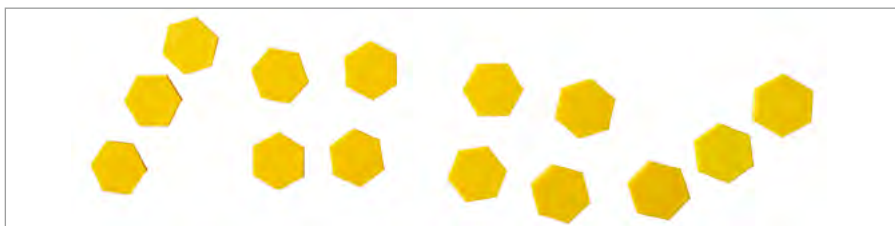
Skolēniem dota skaitļu virkne 3 4 4 3 4 4, kas jāmodelē.

Daži skolēnu piedāvātie atbilžu varianti.

a) Skolēns veido figūru no atbilstoša skaita figūriņām.



b) Skolēns veido atbilstoša skaita vienādu figūru grupas.



c) Skolēns veido virkni, izmantojot atbilstoša veida figūru – trijstūri, četrstūri, četrstūri utt.



Kad skolēni ir iepazinušies ar cikliskām virknēm, līdzīgi var turpināt ar **augošām virknēm**.

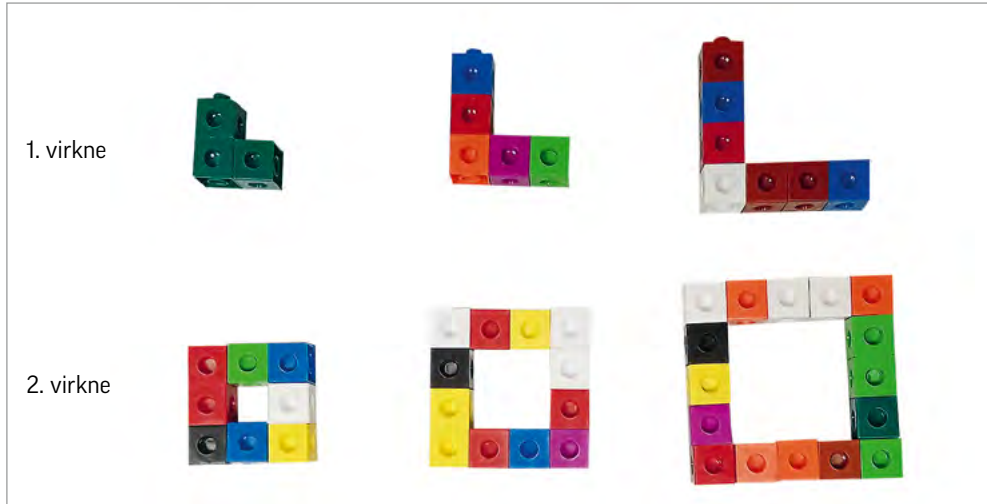
Izmantojam iepriekš apgūto prasmi – stāstu, ko redzu modelī vai attēlā, un prognozēju, kā veidosies nākamais elements.



Aktivitāte skolēniem

SR Zīmē virknes nākamos locekļus, saskata sakarību.

Dotas iesāktas virknes.



Uzzīmē doto virkni!

Uzzīmē virknes 4. locekli!

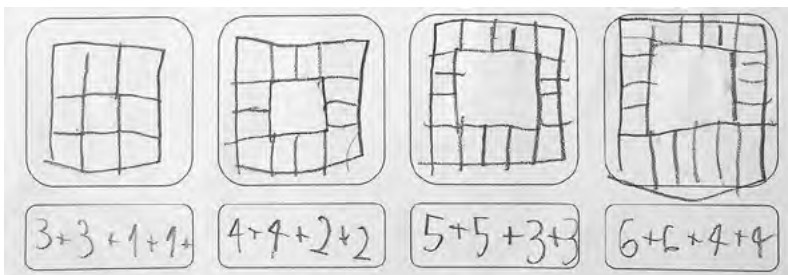
Uzraksti izteiksmi, kas raksturo virknes katru locekli!

No klucīšiem izveido virknes 10. locekli!

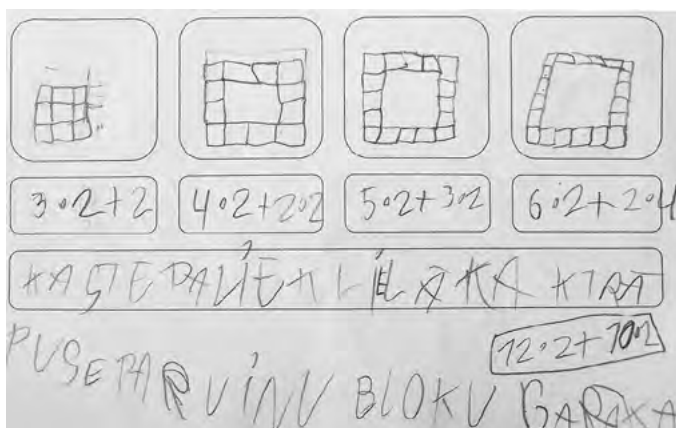
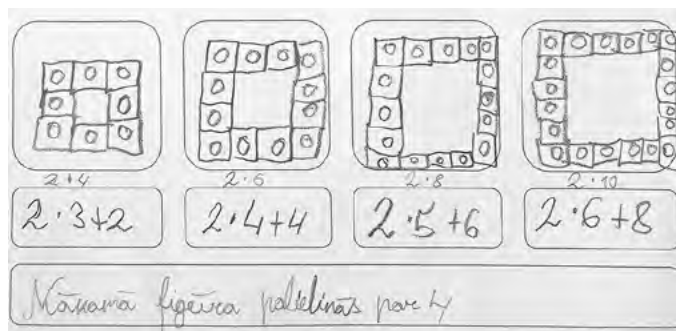
Kādu sakarību tu saskati?

Skolēnu darbi

Jaunāki skolēni var raksturot figūras locekļus, izmantojot saskaitīšanas vai atņemšanas darbības, un drīzāk raksturos sakarību mutiski.



Vecāki skolēni var izmantot arī reizināšanu. Ir vērtīgi sarunāties ar skolēniem, noskaidrojot, kā atšķiras viņu darbības un kā citu izteiksmes raksturo doto figūru. Var lūgt skolēnam uzrakstīt izteiksmi 10. virknes loceklim, pirms to saliek, tā padarot sakarības formulēšanu vajadzīgu pašam skolēnam.



Skolēniem jābūt saskatīt, kā rodas nākamais virknes elements, piemēram, pirmajā virknē 320. lpp. redzam, ka, pieliekot pirmajai figūrai 1 klucīti vertikāli un 1 horizontāli, rodas otrā figūra. Lai veidotu 3. figūru, figūras galos pieliekam atkal pa 1 klucīti. Redzam ideju, ka nākamo soli veidojam, pieliekot 2 klāt, kas vēlāk dod iespēju skolēniem diezgan viegli veidot vispārīgumu, pierakstot $n + 2$, ko vēlāk viņi sastaps algebrā.

Skolēns saskata sakarību virknē un vispārina

Lai skolēns iegūtu pieredzi vispārināt, kādu laiku skolotājs mērķtiecīgi uzdod jautājumus skolēniem, no konkrētās situācijas virzoties uz vispārīgo, mācot struktūrēt informāciju, kas pierakstīta skaitliski.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Veido virkni, savienojot bumbiņas ar kociņiem!

Skolēni ievēros, ka sākam ar 3 bumbiņām un, lai izveidotu nākamo figūru, ir jāpieliek 1 bumbiņa.



Trešajā figūrā pieliekam vēl vienu bumbiņu.

Skolotājs veicina domāšanu ar jautājumiem, piemēram:

Aprakstiet virkni ar vārdiem!

Aprakstiet virkni ar skaitļiem!

Cik bumbiņu nepieciešams 10. figūrai?

Kuras figūras izveidošanai nepieciešamas 20 bumbiņas?

Ievērojam, ka ikkatrai nākamajai figūrai vajag vēl vienu bumbiņu, bet sākam ar 3 bumbiņām. Rosinām pierakstīt informāciju tabulā.

Virknes loceklis	1.	2.	3.	4.
Bumbiņu skaits	3	4	5	6

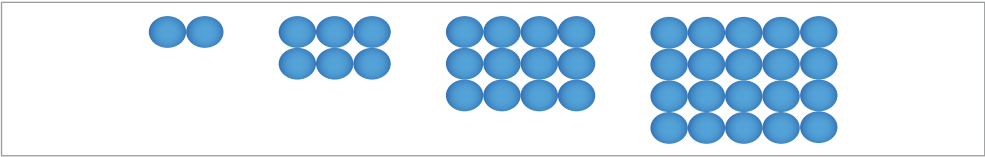
Redzam, ka pie figūras numura ir jāpieliek 2, lai uzzinātu bumbiņu skaitu. Tātad 10. figūrai būs nepieciešamas 12 bumbiņas. Savukārt, lai uzzinātu, kurai figūrai ir nepieciešamas 20 bumbiņas, atņemam 2. Atbilde ir – 18. figūrai.

Sakarība starp virknes iepriekšējo un nākamo locekli

Bieži sakarības var izteikt, izmantojot virknes locekļa kārtas numuru (vispārējā locekļa formula) – veidojot atbilstošu sakarību vai rekursīvi.

Augošās virknes bieži var aprakstīt kā **rekursīvas sakarības** – nosakām nākamo virknes locekli, ja zināms iepriekšējais (vai 2 iepriekšējie). Piemēram, iepriekšējā virknē katras nākamās figūras bumbiņu skaitu ieguvām, iepriekšējās figūras bumbiņu skaitam pieliekot 1. Ar sākumskolas skolēniem nav jālieto vārdi “rekursīva sakarība” vai “funkcija”, bet skolēni ar šo ideju iepazīstas neformālā veidā.

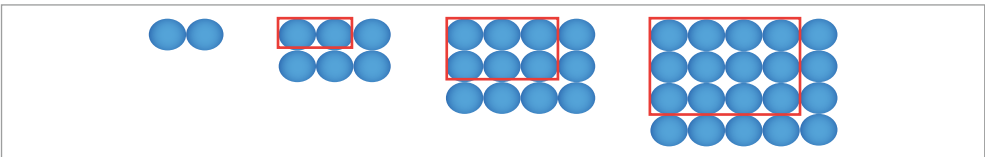
UZDEVUMA PIEMĒRS



Viens veids, kā analizēt šo virkni, ir saskatīt, kā nākamā figūra veidojas no iepriekšējās.

Skolēni stāsta, kā saskata nākamās figūras veidošanu, piemēram, pievieno 1 rīpiņu katrai rindai un tad vēl 1 rindu klāt vai pieliek 1 rindu klāt esošajai figūrai un tad atbilstošu 1 kolonnu.

Rosinām skolēnus domāt, kā fiksēt skaitlisko informāciju tabulā un kā to aplūkot. Ja spriežam rekursīvi, tad tabulā pārvietojamies pa kolonnām un mēģinām saskatīt skaitliskas sakarības.



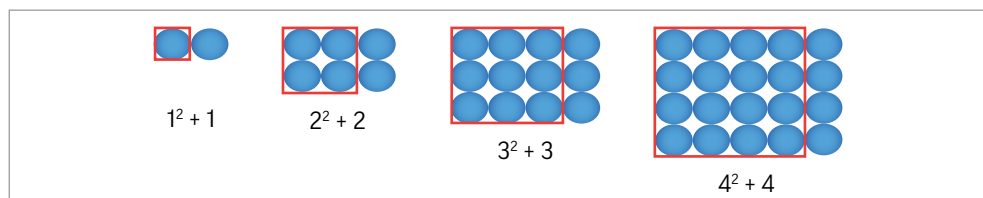
Solis/ Virknes loceklis	1.	2.	3.	4.	5.
	2	6	12	20	30
		+4	+6	+8	+10

Varam veidot tabulu, arī pierakstot informāciju un to organizējot kolonnās. Tabulā varam pierakstīt arī procesa gaitu, piemēram, cik rīpiņu pieliek.

Virknes loceklis	Cik rīpiņas pieliek	Rīpiņu kopējais skaits
1.		2
2.	$2 + 2 = 4$	6
3.	$3 + 3 = 6$	12
4.	$4 + 4 = 8$	20
5.	$5 + 5 = 10$	30

Sakarība starp virknes locekļa kārtas numuru un virknes elementu skaitu jeb vispārīgā locekļa formula

Ja runājam par konkrēto figūru virknē, tad skolēni varētu spriest, ka ripiņas veido “taisnstūri”, kura platums ir virknes locekļa numurs jeb vieta virknē – pirmajai figūrai tas ir 1, trešajai – 3, vispārīgā gadījumā n un garums ir par vienu vairāk, pirmajai figūrai 2, trešajai figūrai 5, vispārīgā gadījumā $n + 1$. Tad ripiņu skaits veidojas šādi: $1 \cdot 2$; $2 \cdot 3$; $3 \cdot 4$, ... $n(n+1)$. Sākumskolā skolēniem nav jālieto vispārīgais pieraksts, bet jāprot izstāstīt un ar skaitļiem pierakstīt, kā veidojas sakarība. Kad skolēni mācās par kāpināšanu, varam uz šo virkni paskatīties vēl citādi. Skolēni var ievērot, ka “taisnstūris” ir veidots no kvadrāta un vēl pielikts klāt tā virknes locekļa numurs.



Mācoties saskatīt, kā veidojas elementu skaits virknē, skolēni iegūst pirmos intuitīvos priekšstatus par funkciju un tās vērtību pierakstīšanu, izmantojot tabulu. Tad tabulu aplūkojam pa kolonnām, spriežot par elementu skaita atkarību no kārtas numura.

Solis/ Virknes loceklis	1.	2.	3.	4.	5.
	2	6	12	20	30

Skolēni var spriest, ka pirmajam elementam skaitu aprēķina, viens kāpinot kvadrātā un pieskaitot viens, otrajam –, divi kāpinot kvadrātā un pieskaitot divi, utt. Skolēniem ir arī svarīgi atsevišķi vai grupās pašiem veidot virknes un dot citai grupai tās aprakstīt un analizēt. Pēc tam skolēni var savā starpā vai kā klase pārrunāt, kā raksturot un aprakstīt virknes. Kas izdodas labāk – veidot virknes, saskatīt sakarības dotajā virknē, vārdiski raksturot, kā veidojas virknes nākamais loceklis vai kā iegūt jebkuru virknes locekli?



Aktivitāte skolēniem

SR Veido virkni un tās vārdisku aprakstu, veido vārdisku aprakstu jau dotai virknei.

Izmantojot dotos materiālus (ripiņas, klucīšus, pogas u. c.), izveido virkni!

*Uz atsevišķas lapas uzraksti ar **vārdiem**, kā veidojas virknes nākamais loceklis, un **sakarību**, kā iegūt jebkuru virknes locekli!*

Skolēni var strādāt individuāli vai pāros. Kad virkne ir izveidota un apraksts uzrakstīts, lapiņu apgriež uz otru pusi un atstāj uz galda. Tad pāri mainās – uzdevums ir izpētīt doto virkni un uzrakstīt tās aprakstu. Kad tas paveikts, skolēni var salīdzināt savu aprakstu ar autora uzrakstīto. Pēc tam pāri satiekas un izrunā saprasto, nesaprasto, dod ieteikumus vai vienojas par visveiksmīgākajiem virkņu aprakstiem.

Spēja analizēt un turpināt virknes un redzēt sakarības dod skolēniem pamatus vēlāk attīstīt un saprast algebru. Strādājot ar virknēm, skolēni attīsta izpratni par mainīgajiem un sakarībām. Bieži skolēniem ir grūtības ar algebru, jo iepriekš viņi ir strādājuši ar skaitliskām izteiksmēm, to rezultāts ir konkrēts skaitlis, kas ir pareizā atbilde. Kad skolēni strādā ar virknēm, viņi attīsta izpratni par to, ka ir divi lielumi: virknes elementa numurs un tam atbilstošā vērtība. Vērtības var būt dažādas, tās ir atkarīgas no virknes locekļa numura un sakarībām, kā virkne veidota (Martinez-Planell & Trigueros-Gaismann, 2012; Store et al., 2016; Dubon & Shafer, 2010).

Skolēns saskata sakarības reālās dzīves procesos

Aplūkojot reālās dzīves situācijas, bieži sastopamies ar tieši vai apgriežti proporcionāliem lielumiem.

Viens no ikdienas piemēriem ir iepirkšanās vai braukšana transportā. Ja iepērkoties apskatām pēc kārtas pērkamo objektu skaitu un summu, ko maksāsim, tad patiesībā nosacīti domājam par skaitļu virkni.

Ja viena krekeru kastīte maksā 3 eiro, tad divas kastītes maksās 6 eiro un trīs maksās 9 eiro. Matemātiski varam teikt, ka ir virkne 3, 6, 9... Virknes locekļa vērtību nosaka vieta jeb numurs virknē.

Sakarības pierakstīšanai rosinām skolēnus izmantot tabulu. Savukārt tabula dod iespēju saskatīt vēl citas sakarības, piemēram, ka pērkam 2 reizes vairāk kastīšu un arī maksājam 2 reizes vairāk.

Kastītes, skaits	1	2	3	4	5
Maksājums par pirkumu, eiro	3	6	9	12	15

$\cdot 2$
 $\cdot 2$

Līdzīgi, ja nobrauc 200 km četrās stundās, tad zinām, ka vidēji ātrums ir 50 km/h, ja nobrauc piecās stundās, tad 40 km/h. Varam saskatīt sakarību, ka vienam lielumam (laiks) samazinoties noteiktu skaitu reižu, otrs atbilstoši tikpat reižu palielinās (ātrums).

Jānobrauc 200 km.

Laiks, h	10	5	4	2,5	2
Ātrums, km/h	20	40	50	80	100

$: 2$
 $\cdot 2$

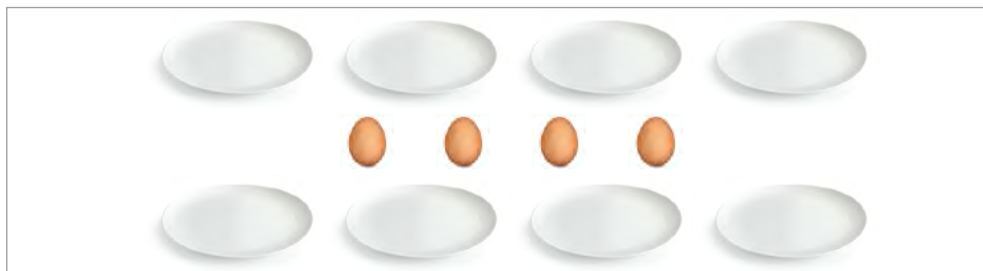
Mācoties par šīm sakarībām, attīstām skolēniem proporcionālo domāšanu, kas ir ļoti svarīgs solis turpmākā matemātikas apguvē (Heinz & Sterba-Boatwright, 2008; Hoffer, 1992).

Proportcionālā domāšana līdzīgi citiem svarīgiem jēdzieniem attīstās lēnām un nostiprinās ar pieredzi. Ir svarīgi skolēnam jau agri sākt domāt par lielumu attiecību. Sākumā skolēni nedomā proporcionāli, jo viņu sākotnējā pieredze ar skaitļiem ir saistīta ar saskatīšanas un atņemšanas darbībām. Tāpēc vingrinājumi, kas liek domāt un atšķirt situācijas, kur ir jālieto saskaitīšana/atņemšana, un tās, kur jāizmanto reizināšana/dalīšana, skolēnam prasa dažādu kognitīvo slodzi.

Sākuma jautājumi varētu būt:

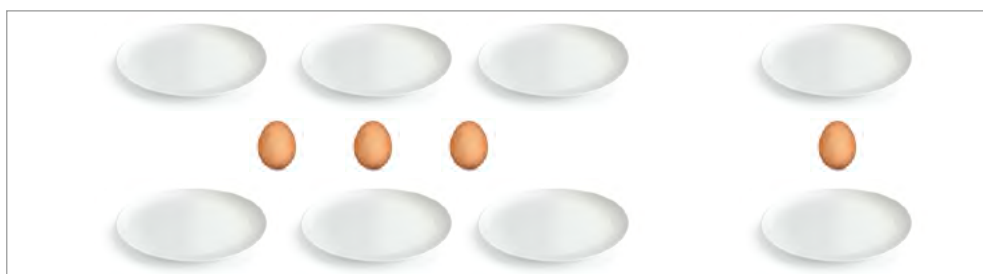
Receptē, kas paredzēta 8 porcijām, ir vajadzīgas 4 olas. Es taisīšu tikai 6 porcijas. Cik olu man būs nepieciešams?

Skolēni, kuri domā tikai ar pieskaitīšanu/atņemšanu, var atņemt 2 olas no kopējā olu skaita, jo porciju ir par 2 mazāk. Jaunākie skolēni nedomās: ja 8 porcijām ir vajadzīgas 4 olas, tad 4 porcijām ir vajadzīgas 2, bet 6 porcijām vajadzēs 3 olas, tāpat viņi nesapratīs, ka vienai porcijai vajadzīga $\frac{1}{2}$ ola. Skolēniem ir jāpalīdz pašiem veidot par to izpratni, modelējot vai izmantojot vizualizācijas.



Skolotājs var uzdot jautājumu – cik olas ir vajadzīgas 4 porcijām – un dot skolēniem laiku apspriesties grupās. Kā psihologs Žans Piažē aprakstīja, bērni mēģina asimilēt situāciju savā esošajā kognitīvajā shēmā, bet tā var zaudēt kognitīvo līdzsvaru. Konflikts var rasties, piemēram, šādā situācijā: ja atņemam 4 olas, nepaliek neviena ola, ja domājam par 4 porcijām, un tad skolēni sapratīs, ka tas nevar būt pareizi.

Skolotājs var rosināt skolēnu spriešanu – ja sadalām porciju skaitu uz pusēm, tad arī olu skaits ir jāsadala uz pusēm. Sanāk 2 olas 4 porcijām un 1 ola 2 porcijām. Tad redzam, ka 6 porcijām būs vajadzīgas 3 olas.



Reālajā dzīvē bieži palīdz domāšana par attiecību, kur viens no lielumiem ir viena vienība.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Automašīna 4 stundās nobrauc 288 km. Pieņem, ka vidējais ātrums ir nemainīgs. Cik kilometru automašīna nobrauks 3 stundās?

Laiks, h	4		1	3
Attālums, km	288		...	...

Diagramma ar baltiem līnijiem, kas norāda uz proporcijām:

- Ar baltu līniju, kas virsma ir $: ?$, savienojot 4 un 1.
- Ar baltu līniju, kas virsma ir $\cdot ?$, savienojot 1 un 3.
- Ar baltu līniju, kas zemāka ir $: ?$, savienojot 288 un ... (zem 1).
- Ar baltu līniju, kas zemāka ir $\cdot ?$, savienojot ... (zem 1) un ... (zem 3).

Piemērā redzam – ja automašīna 4 stundās nobrauc 288 km, tad 1 stundā tā nobrauks 72 km, bet 3 stundās tā nobrauks $72 \cdot 3 = 216$ km.

Tad nonākam arī pie sarežģītākas spriešanas.

UZDEVUMA PIEMĒRS

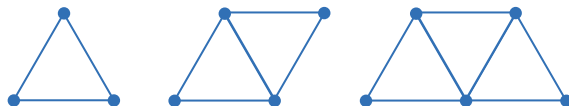
Kurš pirkums ir izdevīgāks: 3 rozes par 5,00 € vai 7 rozes par 9,00 €?

Skolotājs var sākt sarunu par šo uzdevumu, jautājot idejas par pirkumu, lai skolēni padomā, bet neko vēl nerēķina – kurš pirkums, viņuprāt, būs izdevīgāks? Pēc tam skolēni var, piemēram, sākotnēji spriest, ka abos gadījumos vispirms atdodam 1 € par puķi. Pirmajā gadījumā atlikumā paliek 2 €, kas jādala ar 3, arī otrajā gadījumā atlikumā paliek 2 €, bet tie ir jādala ar 7. Secinām, ka 7 rozes par 9,00 € ir izdevīgāka cena.

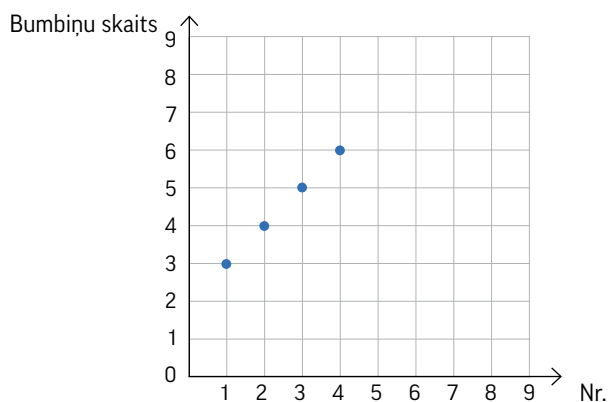
Skolēni var spriest arī: ja 3 rozes maksā 5,00 €, tad 1 rozes aptuvenā cena ir 1,67 €, bet, ja 7 rozes maksā 9,00 €, tad vienas rozes aptuvenā cena ir 1,29 €.

Skolēns vizualizē sakarības, izmantojot koordinātu plakni

Koordinātu plakne ir viens no veidiem, kā attēlot sakarības starp **diviem** lielumiem, tai skaitā virkni – virknes elementa kārtas numuru un atbilstošo skaitlisko vērtību. Virknes un daudzi reālie procesi tiek aprakstīti, izmantojot pozitīvus skaitļus, tāpēc ieteicams skolēnus sākotnēji iepazīstināt ar koordinātu plaknes 1. kvadrantu jeb koordinātu plaknes daļu, kurā atliekam tikai pozitīvās vērtības. Aplūkosim iepriekš minēto uzdevumu par virknes veidošanu ar bumbiņām, spriežot, kā skaitliskos lielumus attēlot vizuāli – izmantojot koordinātu plakni. Šajā situācijā ir būtiski skolēniem uzsvērt, ka grafiku veidos atsevišķi punkti – bumbiņu skaits, kas ir naturāls skaitlis.



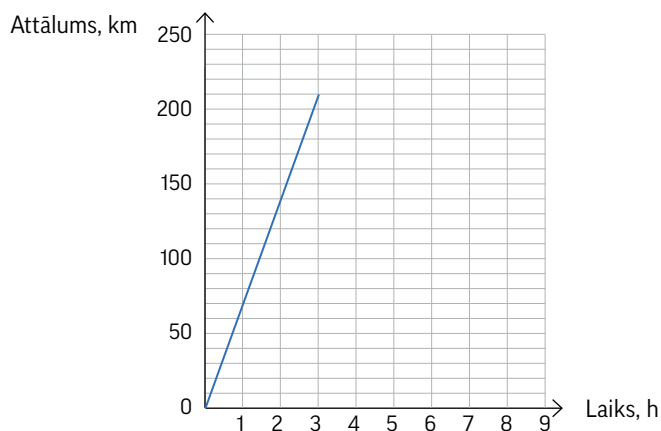
Virknes loceklis	1.	2.	3.	4.
Bumbiņu skaits	3	4	5	6



Būtiski ir jau sākumskolā veidot skolēniem izpratni par to, ka ir pārtraukti un nepārtraukti procesi un tiem atšķiras arī vizualizācijas – grafiki. Virkņu gadījumā tās būs atsevišķas vērtības, kuras koordinātu plaknē atspoguļojam kā punktus, savukārt, vizualizējot masas izmaiņu vai braukšanas procesus, varam iegūt grafiku – nepārtrauktu līniju.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Zinām, ka automašīna, braucot vienmērīgi, 3 stundās ir nobraukusi 210 kilometrus. Attēlo doto informāciju koordinātu plaknē!



Skolēnam ir būtiski izprast:

- kurš no lielumiem uz kuras ass tiek atlikts (parasti uz horizontālās ass atliekam neatkarīgo mainīgo un uz vertikālās ass – tai atbilstošo atkarīgo vērtību). Šajā piemērā nobrauktais attālums mainīsies atkarībā no tā, cik ilgi braukts, tāpēc laiku atzīmējam uz horizontālās ass, bet attālumu uz vertikālās ass;
- vienības izvēli uz asīm, lai varētu attēlot doto informāciju. Šis piemērs jau ir komplicēts, jo uz asīm atliktās vienības būs dažādas;
- kāda izskatīsies vizualizācija jeb grafiks – vai tā būs nepārtraukta līnija vai atsevišķi punkti? Vai to attēlojam kā galīgu vai bezgalīgu procesu? Šajā piemērā tas ir galīgs process, jo ir jāattēlo 3 stundās nobrauktais attālums.

Ja skolēns sākumskolā iegūst šo izpratni, tad viņš ir labi sagatavots un viņam būs vieglāk algebras kursā veidot dažādu funkciju grafikus.

Tomēr ne visi reālie procesi ietver tikai pozitīvu skaitļu lietojumu, piemēram, temperatūras grafika veidošanai būs nepieciešams attēlot arī negatīvos skaitļus, līdz ar to mēs nonākam līdz nepieciešamībai paplašināt koordinātu plakni, iegūstot tās visus 4 kvadrantus.



Jautājumi pārdomām

Kāpēc ir svarīgi vispirms rosināt skolēnus tikai stāstīt, ko viņi saskata attēlotajā virknē?

Kādas aktivitātes vislabāk izmantot, lai skolēni mācītos formulēt likumsakarību, ko saskata dotajā virknē vai radot savu virkni?

Cik lielā mērā tabula palīdz saskatīt skaitliskas likumsakarības?

Kāpēc, mācoties par koordinātu plakni, ieteicams vispirms strādāt tikai ar tās 1. kvadrantu?

Kā skolēni sapratīs, kad vizualizācija – grafiks – sastāvēs no atsevišķiem punktiem un kad tas būs nepārtraukta līnija?

Kādas reālās dzīves aktivitātes izmantosiet, mācot veidot vārdiski pierakstītas formulas?

Literatūra tālākai uzziņai

Boaler, J. (2022). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through Creative Mathematics, Inspiring Messages and Innovative Teaching*. 2nd ed. Jossey-Bass A Wiley Brand.

Dubon, L. P., & Shafer, K. G. (2010). Storyboards for meaningful patterns. *Teaching Children Mathematics*, 16(6), 325–329.

Goos, M., & O'Sullivan, K. (2023). The Evolution and Uptake of Numeracy and Mathematical Literacy as Drivers for Curriculum Reform. In Y. Shimizu, R. Vithal (eds.), *Mathematics Curriculum Reforms Around the World*, New ICMI Study Series.

Heinz, K., & Sterba-Boatwright, B. (2008). The When and Why of Using Proportions. *Mathematics Teacher*, 101(7), 528–533.

Hoffer, A. R. (1992). Ratios and Proportional thinking. In T. R. Post, *Teaching Mathematics in Grades K-8 Research Based Methods* (pp. 287–309). Boston MA: Allyn & Bacon.

- Martinez-Planell, R., & Trigueros-Gaismann, M. (2012). Students' Understanding of the General Notion of a Function of Two Variables. *Educational Studies in Mathematics*, 81(3), 365–384.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Store, J. C., Richardson, K. D., & Carter, T. S. (2016). Fostering Understanding of Variables with Patterns. *Teaching Children Mathematics*, 22(7), 421–427.
- Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Boston: Allyn & Bacon.

2.3. Statistikas elementi

2.3.1. Dati un to apstrāde

Datu pratība arvien vairāk tiek uzskatīta par vienu no pamatprasmēm, kuras ir būtiskas nākotnes panākumiem, jo tā ļauj skolēniem orientēties un interpretēt milzīgo datu apjomu, ar ko viņi saskaras mūsdienu informācijas bagātajā pasaulē (OECD, 2023). Saprast un vērtēt informāciju, ko sastopam ikdienā, ir svarīgi gan kā indivīdam, gan kā sabiedrības loceklim. Šodien ir pieejams daudz vairāk informācijas nekā jebkad agrāk, un to ir jāprot apkopot un analizēt. Maldinoša informācija izskan arvien biežāk, tā parādās grafikos un diagrammās, tāpat teiktos un rakstītos vārdos. Skolēni mācās pamatjēdzienus par statistiku, lai veiksmīgi izmantotu un analizētu dažādu informāciju, mācītos izdarīt secinājumus, – tās ir prasmes, kas būs nepieciešamas gan nākotnes profesijām, gan ikdienas dzīvē.

Datu un to apstrādes apguves trajektorija

- ♦ Nosaka doto objektu skaitu, attēlo to citādi – aizstājot ar modeli (piemēram, paņem tik ripiņu, cik logu klasē). (1. klase)
- ♦ Veido vienkāršas tabulas, lai pierakstītu mērījumus (garumu, laiku, naudu) un aprēķinus. (1. klase)
- ♦ Grupē objektus ar kopīgām un atšķirīgām īpašībām Venna diagrammās, nosaucot katras grupas pazīmi. Iegūst datus par kādiem objektiem un apkopo tos, grupē objektus. Lasa tabulā, shēmā, diagrammā attēlotu informāciju par objektu grupām. (2. klase)
- ♦ Apkopo garuma mērījumu rezultātus tabulā. (2., 3. klase)
- ♦ Apkopo dažādus datus par laiku tabulā. (2. klase)
- ♦ Attēlo datus stabiņu diagrammā. (4. klase)
- ♦ Nolasa informāciju, t. sk. datus, no infogrammām, daudzveidīgi strukturētiem tekstiem. (4. klase)
- ♦ Veic vienkāršu pētījumu – iegūst, apkopo un attēlo datus par diviem lielumiem, formulē secinājumus par saskatīto sakarību starp tiem. (4. klase)
- ♦ Izmanto Venna diagrammu, nosakot skaitļu kopu atbilstoši dotajiem nosacījumiem. (5. klase)
- ♦ Aprēķina aritmētisko vidējo. (5. klase)
- ♦ Nolasa datus un veido sektoru diagrammu, t. sk. ar digitāliem rīkiem. Analizē datus, raksturojot katru no objektiem un objektu kopu, izmanto aritmētisko vidējo, salīdzina

datus par atsevišķiem objektiem, par vienu objektu un visu objektu kopu, formulē secinājumus. (5. klase)

- ♦ Apkopo datus, apstrādā tos, formulē secinājumus, formulējot lieto arī lielumu attiecību, procentus un daļas. (6. klase)

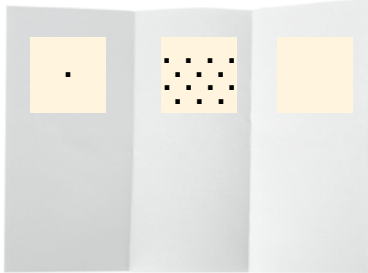
Statistika izmanto datus un to apkopojumu, analīzi, secinājumus – kā izprotam un lietojam apjomīgu informāciju. Lai sāktu attīstīt šo jēdzienu izpratni, sākotnēji skolēniem var jautāt par viņu ikdienas dzīvi un apkopot informāciju par to, kas viņiem ir svarīgi.

Tabula

Viens no pirmajiem informācijas apkopošanas veidiem ir to kārtot tabulās. Sākotnēji mācāmies lasīt vienkāršas tabulas. Pirms skolēns apgūst tabulu zīmēšanas prasmi, ieteicams izmantot A4 vai cita izmēra papīra loksnes, kuras saloka, veidojot tabulas modeli, piemēram, 1. klasē apgūstot jēdzienus “viens”, “daudz”, “neviens” (sk. att. a).

Mācot zīmēt tabulas, ir svarīgi pārrunāt ar skolēniem, kas ir tabulas rinda, kas kolonna un kā dodam tām nosaukumus. Atceramies, ka arī tabulai ir jādod nosaukums (piemēram, veicot pētījumu 4. klasē) (sk. att. b).

a



b

Veidojam tabulu

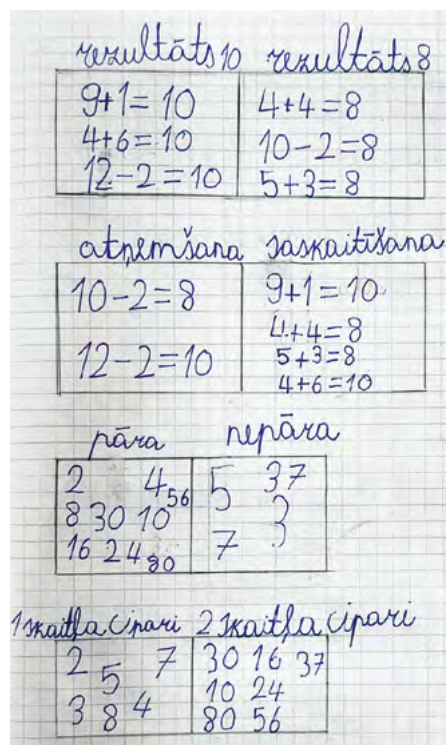
Somas masa

Vārds	Somas masa, kg un g
Keita	3 kg 200 g
Rūdolfs	4 kg
...	...

Grupēšana un diagrammas

Viena no prasmēm, ko attīsta matemātika, ir grupēšana un klasificēšana. Vispirms mācāmajos saskatīt, kas ir kopīgs vai atšķirīgs dotajiem objektiem, tad pēc izvēlētās vai dotās pazīmes tos grupēt.

Pirms sākt darbu ar Venna diagrammām, vispirms skolēni mācās objektus grupēt. Grupēšanu var sākt mācīt, lūdzot skolēnus sakārtot objektus divās grupās saskaņā ar konkrētiem noteikumiem. Piemēram, var dot objektus, kuri jāsaprupē, izmantojot krāsas, formu, skaitu vai lielumu, ar ko bērni iepazīstas jau pirmskolā.



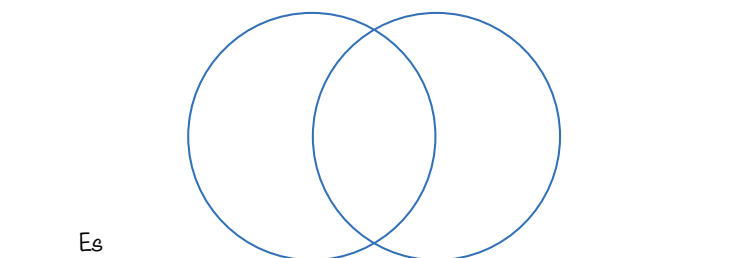
Venna diagramma

Venna diagrammas palīdz vizualizēt un saprast, kādas ir kopīgās un atšķirīgās īpašības dažādām grupām, saprast, kā objekti ir saistīti. Venna diagrammas mēdz izmantot arī, lai palīdzētu skolēniem izprast matemātikas konceptus un to saistību, piemēram, ģeometriskās figūras un to īpašības.

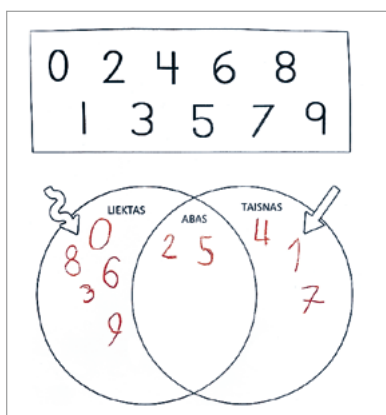
Venna diagrammas dod iespēju sakārtot objektus vai skaitļus pēc dotajiem kritērijiem un izdarīt secinājumus. Diagrammu apguvi varam sākt ar praktisku uzdevumu.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Aptaujā savu klasesbiedru! Uzzini trīs lietas, kas jums ir kopīgas, un trīs, kas ir atšķirīgas! Ieraksti tās atbilstošās vietās! Kopīgo raksti daļā, kur riņķi pārklājas! Neviena daļa nedrīkst palikt tukša.



Kad ideja par grupēšanu ir saprasta, tad, izmantojot pazīmes, var veidot tādas grupas, kas raksturo ne tikai atšķirīgo, bet arī kopīgo. Lai to vizualizētu, izmanto Venna diagrammu.



Piemēram, var izveidot skolēnu grupas – tādi, kuri prot peldēt, un tādi, kuri prot braukt ar velosipēdu. Tad radīsies situācija, ka pieteiksies skolēni, kuriem ir abas prasmes vai arī neviena no tām. Situāciju var vizualizēt, izmantojot Venna diagrammu un norādot visas četras iespējas – veidot skolēnu sarakstus, pēc tam tos aizstāt ar skaitliskām vērtībām.

STUNDAS PIEMĒRS

Objektu grupēšana pēc noteiktām pazīmēm 3. klasē.

https://www.siic.lu.lv/fileadmin/user_upload/lu_portal/projekti/siic/Stundu_piemi/SP_Objektu_grupesana.pdf

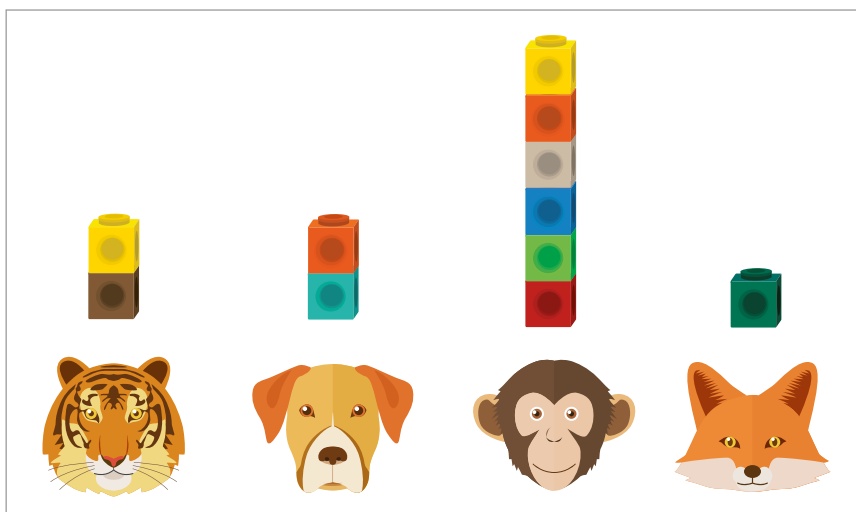


Piktogrammu diagramma

Bieži grāmatās un citos rakstiskos avotos lieto piktogrammas.

Visplašākā nozīmē piktogramma ir rakstu zīme, kas apzīmē jēdzienu (Tezaurs.lv). Piktogramma ir diagrammas veids, kurā datu attēlošanai izmanto simbolus vai attēlus. Katrs simbols vai attēls diagrammā apzīmē noteiktu lietu skaitu. Attēlus diagrammās bieži izmanto situācijās, kad dati nav pārāk sarežģīti un tos var viegli saprast no vizuālā attēlojuma.

Datus bieži sāk apkopot, strādājot ar skolēnu pašu savāktiem datiem un izmantojot piktogrammas, kas pēc tam pārtop stabīņu diagrammās. Sākumā var lietot reālus modeļus.

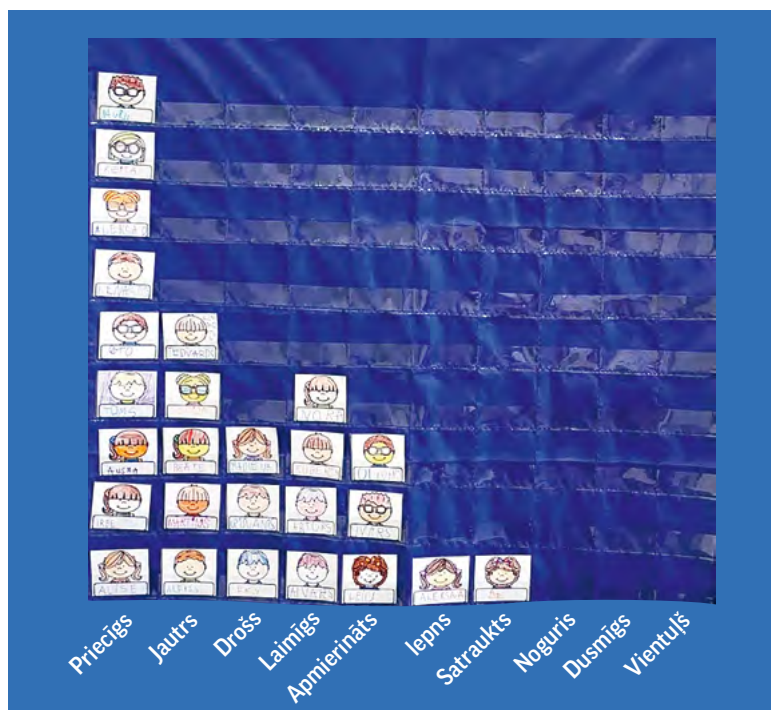


Skolēni 1. klasē tiek aptaujāti par dzīvnieku, kurš viņiem visvairāk patīk. Savu atbildi viņi parāda, pie attēla noliekot iedoto kauliņu. Aptaujas var būt dažādas. Šādi, izmantojot modeļus, skolēni mācās saskatīt, kā notiek datu ieguve.

Cits piemērs, kad katrs skolēns pieliek sava vārda kartīti pie atbildes, – tad ir redzama un ērti nolasāma informācija par visu klasi.



Skolēni tiek aicināti novērtēt savas emocijas, noliekot savu bildīti kopīgā modeli.



Aktivitāte skolēniem

SR Iegūst datus, spriež, kā tos apkopot, izmantojot piktogrammu vai tabulu.

Noskaidro, kurš no augļiem mūsu klases skolēniem garšo vislabāk!

Skolotājs uzdod jautājumu: kurš no augļiem jums garšo vislabāk? Pēc vairākām atbildēm var jautāt, kurš auglis garšo vislielākajam skaitam klases skolēnu. Tad rodas nākamais jautājums, kā apkopot visu skolēnu atbildes. Kā to varētu uzzināt un pierakstīt?

Ieteicams uzklaut skolēnu ieteikumus, piemēram, pierakstīt uz tāfeles, lai visiem būtu redzams, un rosināt domu, kā datus var apkopot. Piemēram, var uzrakstīt 5 no visbiežāk minētajiem augļiem un lūgt visiem balsot par visgaršīgāko no šī saraksta. Skolēni uzraksta savu vārdu uz līmapiņas un noliek attiecīgajā kolonnā.

zemenes	mellenes	apelsīni	banāni	vīnogas
---------	----------	----------	--------	---------

Svarīgi ir tas, ka pēc tam seko saruna. Kurš auglis klases skolēniem ir vismīļākais? Vai to varēja pateikt bez līmapiņu skaitīšanas? (Jā, spriežot pēc kolonnas augstuma.)

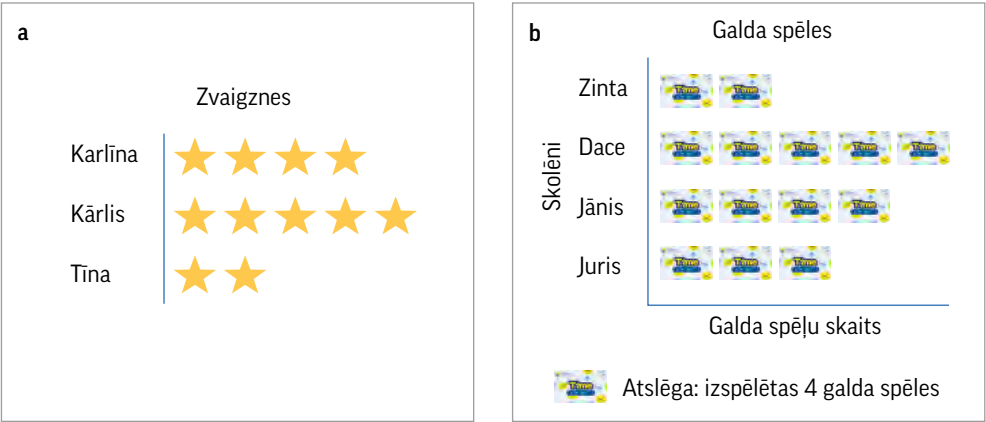
Informāciju varam pierakstīt arī tabulā. Te parādās prasmes: apgūt vai pilnveidot prasmi veidot tabulu – ko rakstām rindās, ko kolonnās, vai un kādi virsraksti ir jālieto.

Augļi	Skolēnu skaits
Zemenes	
Mellenes	
Apelsīni	
Banāni	
Vīnogas	

Pakāpeniska piktogrammu diagrammu veidošanas apguve

Piktogrammu diagrammā skolēni sākotnēji attēlo konkrēto skaitu, to vizualizējot (att. a), piemēram, Karīna nopelnījusi 4 zvaigznes, Kārlis 5 zvaigznes un Tīna 2 zvaigznes par piedalīšanos labdarības pasākumā.

Kad izprasta attēlošanas būtība, tad var vizualizēt jau lielāka apjoma datus – piktogrammas attēlam ir piešķirta vērtība (att. b), piemēram, viens spēles attēls nozīmē izspēlētas 4 spēles.



- Mācoties par datu vizualizēšanu ar piktogrammām, tiek apgūti vairāki soļi.
- Izpratne par piktogrammām:** veidojam izpratni, ka ikviens attēls vai simbols piktogrammā apzīmē noteiktu lietu skaitu.
 - Piktogrammu lasīšana:** skolēni mācās lasīt un interpretēt datus no piktogrammas. Stāsta, ko redz un kāda informācija ir dota. Viņi saprot, ka piktogrammas atslēga jeb leģenda mums norāda, ko un cik elementus katrs attēls vai simbols rāda.

- Veidojot piktogrammu diagrammas, skolēni var mācīties arī veikt aptauju un apkopot tajā iegūtos datus.



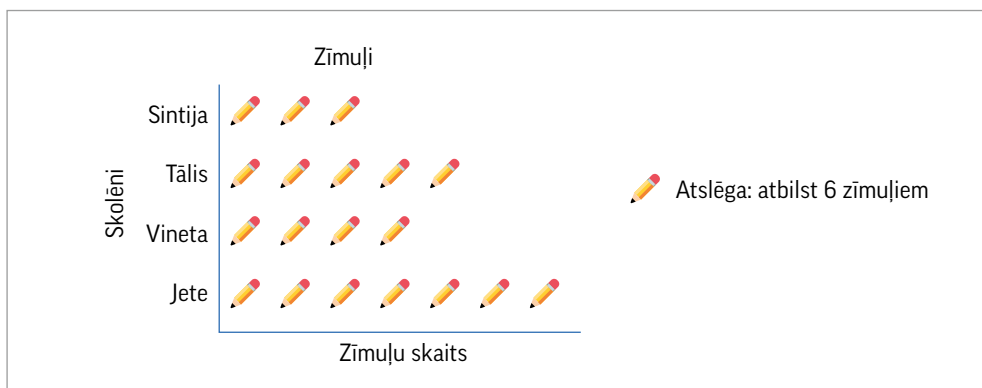
Kad skolēni ir gatavi spriest proporcionāli, aplūko jau komplicētākas piktogrammu diagrammas, kurās parādās “atslēga” – skaidrojums, cik elementus apzīmē konkrētais simbols.



Aktivitāte skolēniem

SR Iegūst tiešu un netiešu informāciju no piktogrammas.

Noskaidro, cik liela ir Sintijas un Jetes zīmuļu skaita atšķirība!



Piktogrammas lasīšana. *Izstāsti, ko tu redzi šajā diagrammā!* (Skolēni var veidot stāstījumu pāros, tad to vispārināt klasē.)

Iespējamās atbildes: *ir 4 skolēni, attēlots zīmuļu skaits. Diagrammas atslēga pasaka to, ka viens zīmulis diagrammā nozīmē 6 zīmuļus.*

Kas ir jānosaka? Sintijas un Jetes zīmuļu skaita starpība.

Plānojām. Lietosim atslēgas informāciju un uzzīmēto zīmuļu skaitu diagrammā. Noteiksim Sintijas un Jetes zīmuļu skaita starpību diagrammā, tad konkrēto zīmuļu skaita starpību. (Plānošana var atšķirties, piemēram, var aprēķināt Sintijas zīmuļu skaitu, Jetes zīmuļu skaitu un tad atņemt vienu no otra.)

Risinām. Diagrammā redzam, ka Sintijai ir par 4 zīmuļiem mazāk nekā Jetei. Tātad Sintijai ir $4 \cdot 6 = 24$, proti, par 24 zīmuļiem mazāk nekā Jetei.

Pārbaudām. Jetei ir $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 42$ jeb $6 \cdot 7 = 42$ zīmuļi, Sintijai ir $6 + 6 + 6 = 18$ jeb $6 \cdot 3 = 18$ zīmuļi, starpība ir $42 - 18 = 24$.

Tālāk skolēniem var lūgt, izmantojot šo piktogrammu, pašiem izveidot savu uzdevumu, atrisināt to un samainīties uzdevumiem ar klasesbiedru. Risināt un pārrunāt, kā notika risināšana, piemēram, kas bija visgrūtākais; kā izveidot labu uzdevumu; vai risināšanas gaita visiem bija vienāda utt.

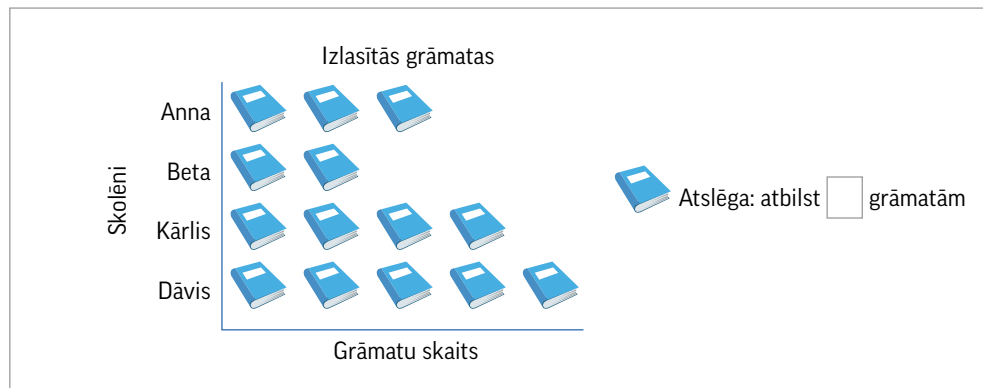
Padziļinot izpratni par datu attēlošanu, skolēniem var piedāvāt apvērsto uzdevumu, kur ir jānosaka, cik liela vērtība ir diagrammas atslēgai.



Aktivitāte skolēniem

SR Iegūst nepieciešamo informāciju, strādājot ar piktogrammu.

Zināms, ka Dāvis izlasīja par 18 grāmatām vairāk nekā Beta. Cik daudz grāmatu nozīmē ?



Rosinām skolēnus izmantot problēmrisināšanas soļus.

Ko redzam diagrammā? Diagrammā attēlota informācija par 4 skolēniem. Ir zināms attēlu skaits, kas ilustrē katra skolēna izlasīto grāmatu skaitu.

Kas jānosaka? Cik daudz grāmatu ir apzīmētas ar vienu attēlu.

Plānojam. Noskaidrosim, par cik  atšķiras Dāvja un Betas izlasīto grāmatu skaits.

Noskaidrosim, cik liela ir  vērtība.

Risinām. Dāvja izlasīto grāmatu skaits ir par 3  lielāks. Zināms, ka šī starpība ir 18. Tātad ar vienu attēlu attēlo $18 : 3 = 6$ izlasītas grāmatas.

Pārbaudām.

Beta izlasīja  , kas ir $2 \cdot 6 = 12$ grāmatas.

Dāvis izlasīja     , kas ir $5 \cdot 6 = 30$ grāmatas. Starpība ir $30 - 12 = 18$.

Ar šādām aktivitātēm attīstām skolēniem izpratni par to, kā informāciju apkopot, lai to var labāk saprast, uztvert un veidot secinājumus par to.

Lai domātu dziļāk par informācijas sakārtošanu, skolēniem uzdod jautājumus, piemēram, par cik vairāk vai mazāk ir vienā grupā salīdzinājumā ar otru; vai starpība ir liela; par cik reizēm kaut kas varētu būt lielāks vai mazāks? Skolotājs var

uzdot arī plašākus jautājumus, lai skolēni sāk domāt par to, kas ietekmē iegūtos datus. Vai, aptaujājot citus bērnus, viņi iegūs tos pašus rezultātus? Kāpēc?

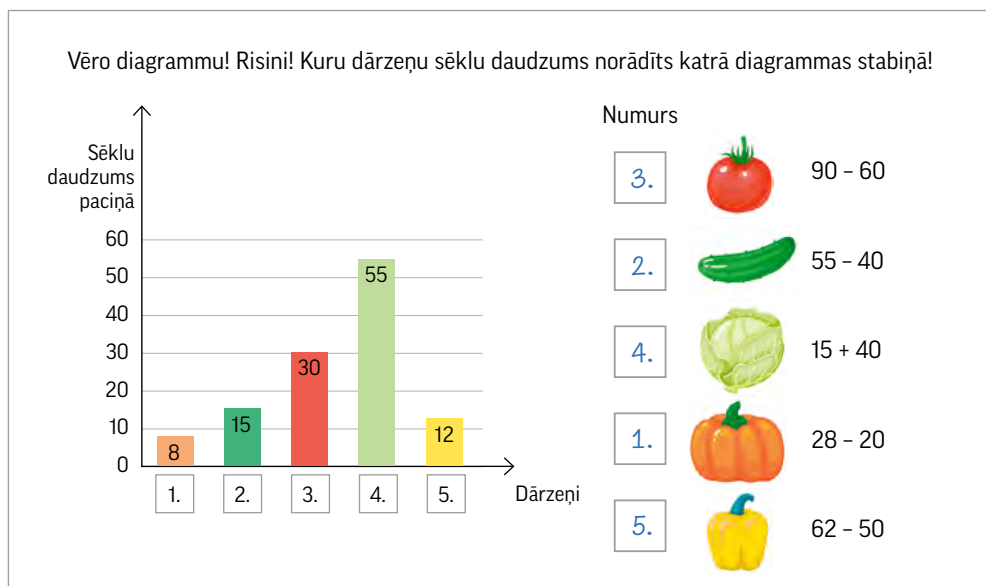
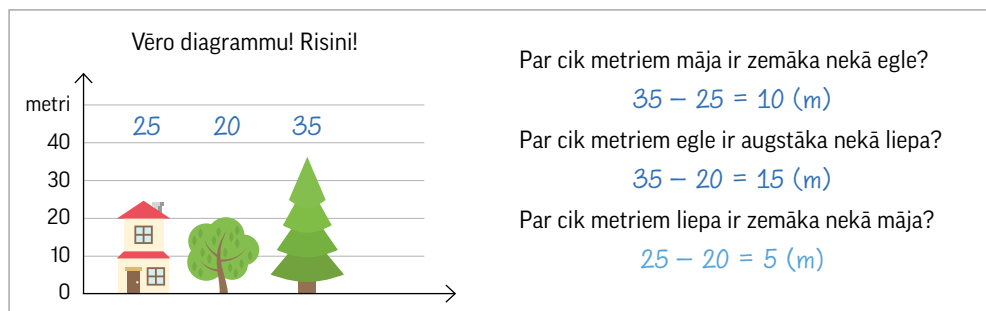
Stabiņu diagramma

Informācijas ieguve

Teksta lasīšana ar izpratni ir cieši saistīta arī ar attēlos doto informāciju jeb šajā gadījumā ar informācijas iegūšanu – lasīšanu, izmantojot stabiņu diagrammu.

Vērojot un stāstot, kas attēlots piktogrammu diagrammās, skolēni apgūst arī stabiņu diagrammas lasīšanas pamatus. Sākotnēji stabiņu diagrammās var izmantot vizualizācijas, jo ir svarīgi skolēniem mācīt saskatīt informāciju vairākos veidos (reprezentācijās), tas ir jāpārrunā un jāpārlicinās, ka skolēni izprot attēla lomu dažādajās diagrammās. Ar laiku skolēni pierod lasīt informāciju gan vertikālos stabiņos, gan horizontālos (joslu diagramma).

Skolēni lasa diagrammu – iegūst datus no stabiņu diagrammas un pēc tam tos izmanto, veicot dažādus aprēķinus. Piemēros redzam skolēnu risinājumus.



Piemērs informācijas nolasīšanai un salīdzināšanai.

Izmanto diagrammu! Atbildi uz jautājumiem! Papildini teikumus!

“Piegādāto augļu daudzums”

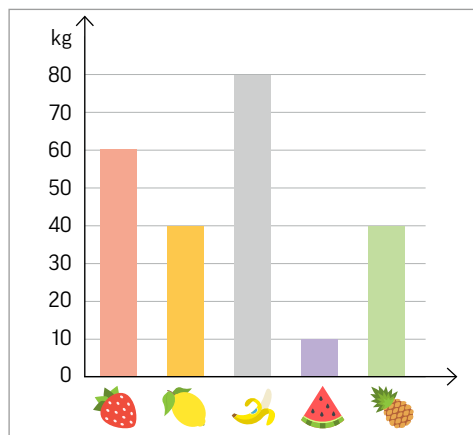
Cik kilogramu augļu piegādāja

kopā? Pastāsti, kā tu to aprēķināji!

Visvairāk piegādāja...

- piegādāja tikpat, cik...
- piegādāja par 20 kg vairāk nekā... un...

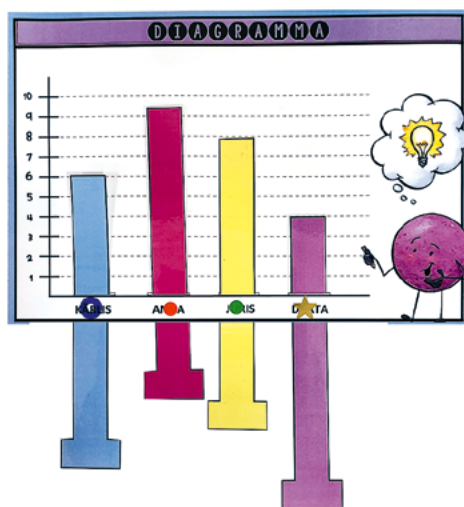
Izdomā savu jautājumu par diagrammu un uzdod to klasesbiedram!



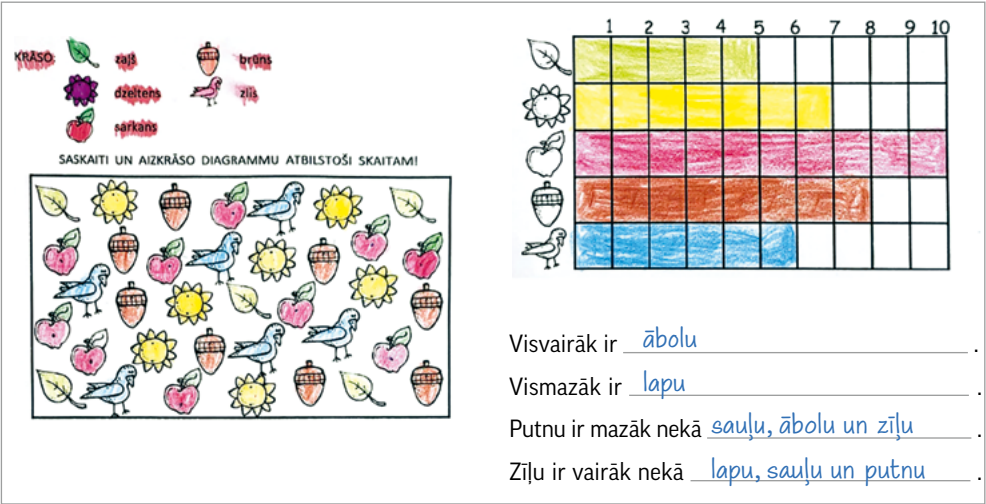
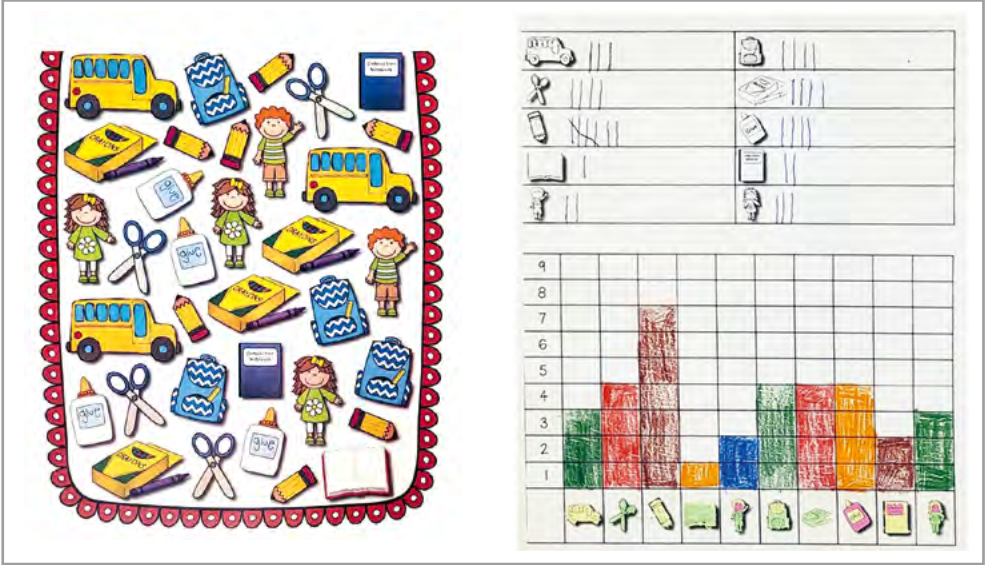
Diagrammas zīmēšana

Piktogrammu izmantošana skolēniem dabiski palīdz apgūt prasmi veidot stabīņu diagrammas.

Praktiskai darbībai skolēniem tiek doti izdales materiāli, un katrs skolēns veido diagrammu, vingrinoties izprast, kā to zīmēt. Šādi vingrinoties, var ietaupīt laiku, jo skolēniem diagramma nav jāzīmē.



Nākamais solis ir mācīties zīmēt diagrammu, līdzīgi kā tika veidotas piktogrammas un diagrammas modelis, bet nu jau skolēni paši iekrāso atbilstošo elementu skaitu.



Vai tu nēsā pirkstaiņus vai dūraiņus?

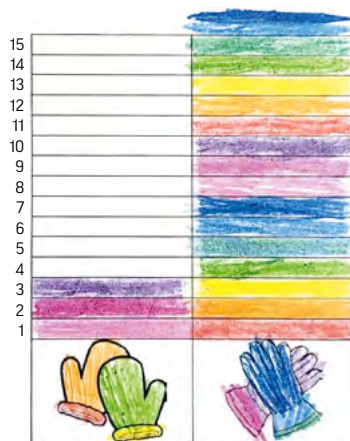
1. solis

Uzdod jautājumu saviem klasesbiedriem un atbildi iezīmē tabulā!



2. solis

Attēlo datus



3. solis

Atbildi uz jautājumiem!

Cik klasesbiedrus tu aptaujāji?

20

Kurus cimds klasesbiedri valkā vairāk?

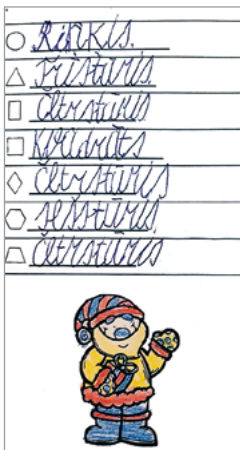
pirkstaiņus

Kurus cimds klasesbiedri valkā mazāk?

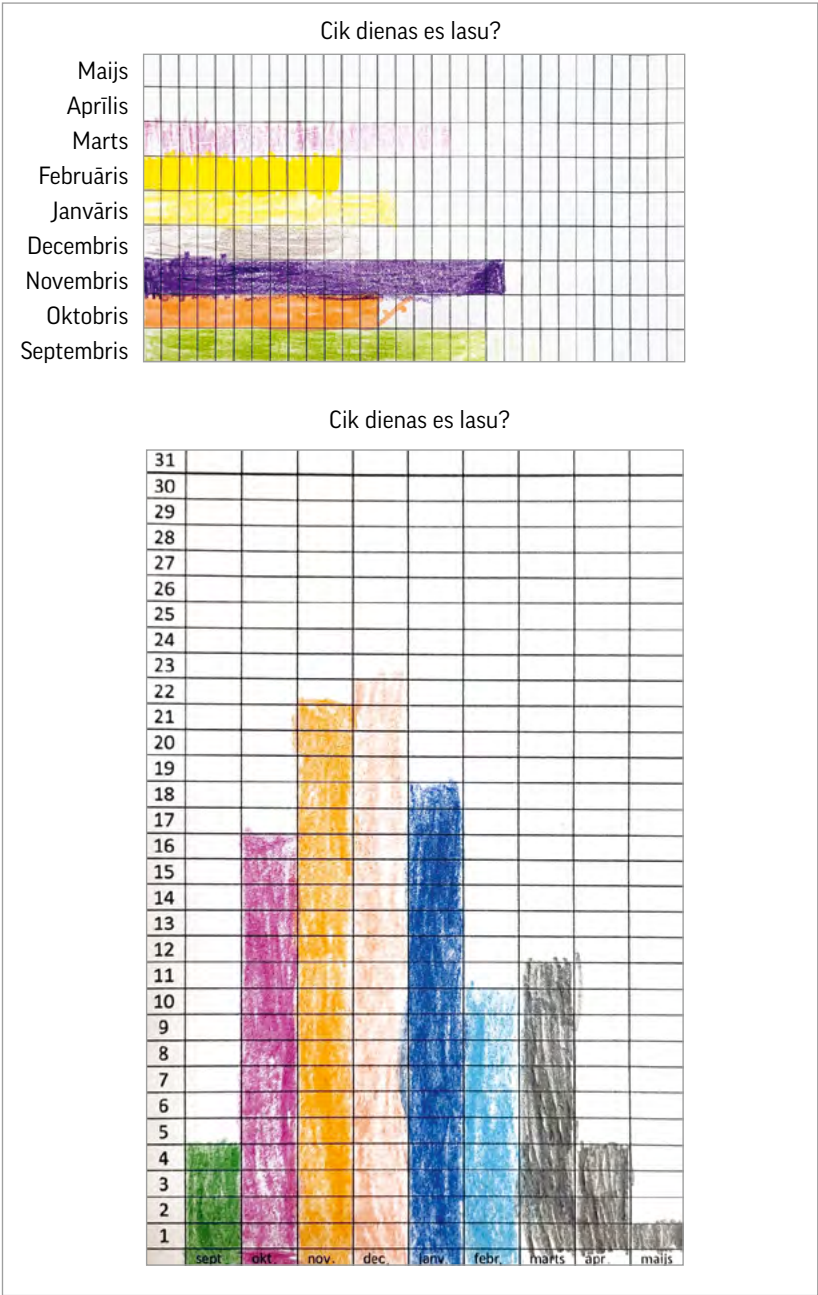
dūraiņus

Saskaiti!

$$3 + 17 = 20$$

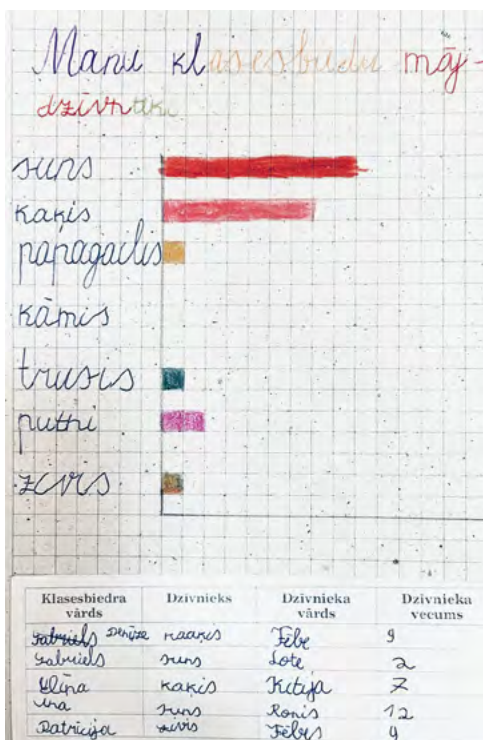
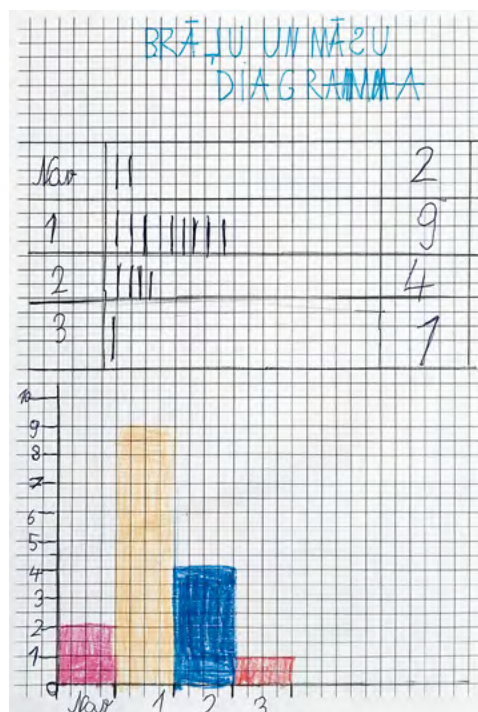
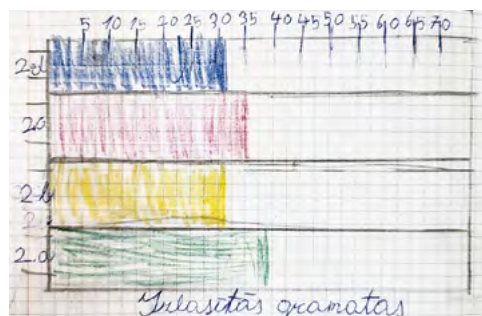


Parādot datu ieguves nozīmi ikdienā un padarot to sev nozīmīgu, skolēni iegūst un apkopo datus par savām darbībām vai klasesbiedru darbībām, piemēram, par lasīšanas ieradumiem. Atkarībā no apgūtās prasmes skolēni diagrammas sākotnēji var veidot iedotā sagatavē.



Sākot apgūt prasmi veidot stabiņu diagrammu, skolotājs vispirms izstāsta, kā sadalīt datus kategorijās vai grupās.

Vēlāk, kad skolēni paši veido stabiņu diagrammas, viņiem ir jāizlemj, kādu informāciju viņi vēlas iegūt, kādus jautājumus uzdos, lai to iegūtu, un kādas datu grupas attēlos diagrammā. Kad dati iegūti, tad domājam, kā tos attēlot diagrammā – ko un kā atlikt uz horizontālās un vertikālās ass. Diagrammās ir jāievēro arī noformējums – virsraksts, asu nosaukumi un, ja nepieciešams, papildu informācija par attēloto. Zīmējot stabiņu diagrammu, ir jāizdomā, kāda lieluma vienības tiks izmantotas, lai informācija būtu viegli nolasāma.



Prasmi ievākt datus un veidot diagrammu lieto un praktizē dažādās mācību situācijās, integrējot to arī citos mācību priekšmetos.

Vārds: Roberts
Datums: _____

APTAUJA

1 Atzīmē!

a) Tavs mīļākais dzīvnieks ir...

☐ suns
☐ kaķis
☐ zirgs
☒ cits dzīvnieks

b) Tava mīļākā krāsa ir...

☒ sarkana
☐ zila
☐ zaļa
☐ cita krāsa

c) Cik tev ir brāļu un māsu?

☐ 0
☒ 1
☐ 2
☐ 3

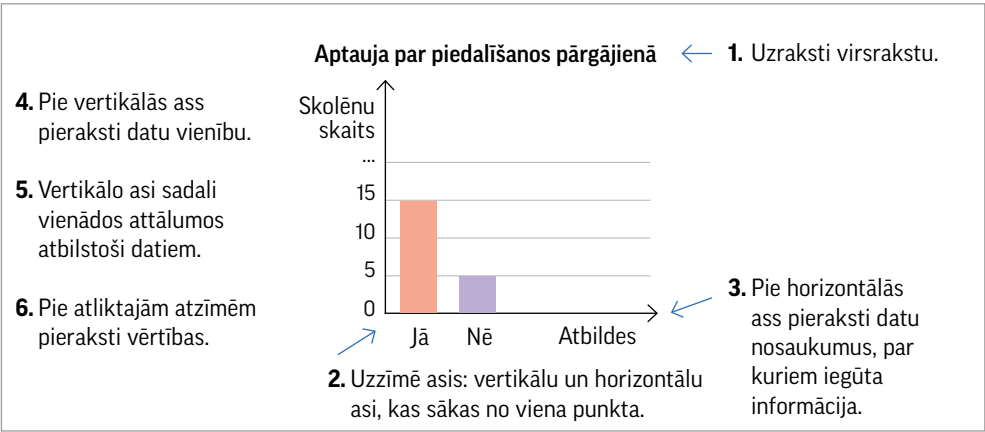
d) Tavs mīļākais mācību priekšmets ir...

☒ latviešu valoda
☐ matemātika
☐ dabaszinības
☐ sports

e) Kā tu nonāc skolā?

☐ ar kājām
☐ ar autobusu
☒ ar mašīnu
☐ ar riteņi

Diagrammas veidošanai var izmantot atgādni, kas ietver visus tās veidošanas soļus.



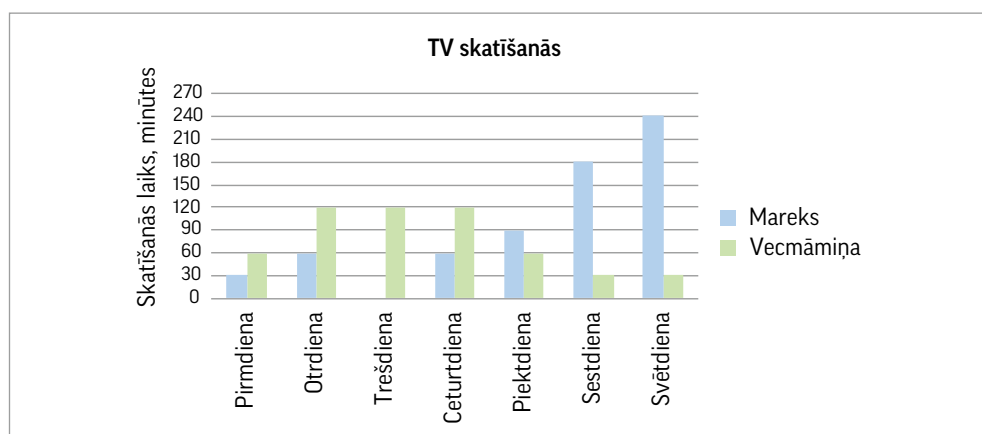
Vēlākās klasēs var izmantot tādas programmas kā *Excel* vai *GeoGebra*, lai veidotu stabiņu diagrammas. Datu attēlošanu ieteicams praktizēt regulāri, strādājot ar dažāda veida skaitļiem un mēriem, piemēram, sekundēm (sporta kontekstā), un datiem, kas ir jāpārveido citās mērvienībās.

Skolēni var veidot aptaujas par sportu. Veicot aptauju, skolēni sāk domāt par to, kas ietekmēs atbildes. Piemēram, jaunākiem skolēniem varētu būt citi mīļākie sporta veidi nekā vecākiem skolēniem. Atbildes var atšķirties arī no gadalaika: ziemā aktuālāka var būt slēpošana, pavasarī – vieglatlētikas disciplīnas.

Mācot plānot datu iegūšanu, ir jāpārdomā daudzi jautājumi, kas ar to saistās – ko vēlamies uzzināt, kā šos datus iegūsim utt., tā trenējot loģisko domāšanu. Viens no svarīgākajiem jēdzieniem, kas attīstās ar laiku, ir **mainīgums**. Aptaujāto vecums, gadalaiks, valsts, kur dzīvo, utt. – tie ir faktori, kas var ietekmēt aptaujas rezultātus. Darbojoties paši, skolēni sāks saprast, kā datu kopas lielums iespaido rezultātus un ka vienmēr ir jādomā par dažādiem faktoriem, kas var ietekmēt tālāk veiktos secinājumus par datiem. Vienā stabiņu diagrammā varam attēlot arī vairāku grupu datus.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Mareks ar vecmāmiņu sprieda, kurš no viņiem vairāk skatās televizoru. Tad Mareks nolēma veikt pētījumu – viņš vienu nedēļu reģistrēja, cik minūtes dienā viņi katrs skatās televizoru, un izveidoja stabiņu diagrammu.



Pamato, kurš skatās televizoru vairāk – Mareks vai vecmāmiņa! Vai vari izstāstīt, kādi ir viņu skatīšanās paradumi? Vai to var apgalvot pilnīgi droši, vai arī tās ir tikai tavas domas?

Redzams, ka viegli var salīdzināt ne tikai to, kā televizora skatīšanās mainās nedēļas laikā, bet arī divu cilvēku skatīšanās laikus.

Statistiskais pētījums

Mācoties, kas ir pētījums, kurā izmanto datus, skolēni apgūst pētišanas soļus: 1) izvēlamies, par ko būs pētījums; 2) plānojam, kā iegūsim datus; 3) iegūstam datus; 4) apkopojam datus; 5) analizējam datus un izdarām secinājumus.

STUNDAS PIEMĒRI

Statistikas pētījuma veikšana

https://www.siic.lu.lv/fileadmin/user_upload/lu_portal/projekti/siic/Stundu_piemiери/SP_Statistiskais_petijums.pdf



Pētījums par skolas somas masu

https://www.youtube.com/watch?v=EEvKilt3_0&list=PLuJTMJWW6Rs3fyM7inxq1hn7PUdsZzclO



<https://www.youtube.com/watch?v=5NIYHD56seg&list=PLuJTMJWW6Rs3fyM7inxq1hn7PUdsZzclO>



<https://www.youtube.com/watch?v=Izvl7Ype4cg&list=PLuJTMJWW6Rs3fyM7inxq1hn7PUdsZzclO>



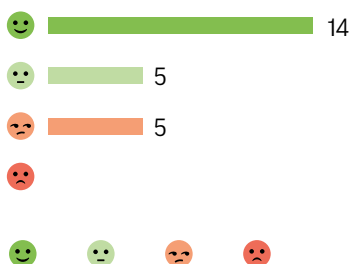
Pētījuma uzdevumu var apskatīt arī grāmatā *Matemātika 4. klasei*. Pirmā daļa. Lielvārde: Lielvārds, 2017, 42.–43. lpp.

Sektoru jeb riņķa diagramma

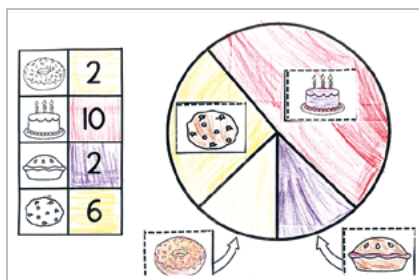
Sektoru jeb riņķa diagrammas bieži izmanto, lai vizuāli reprezentētu datus par vienu veselo. Pirms apgūt, kas ir riņķa diagramma, var pārrunāt, kā dati tiek attēloti, piemēram, ikdienas darbā, kad skolēni veic pašvērtējumu pie tāfeles, kur klases dati atspoguļojas diagrammas veidā.



Pielietotoju saskaitīšanas stratēģiju - vispirms līdz pilnam desmitam



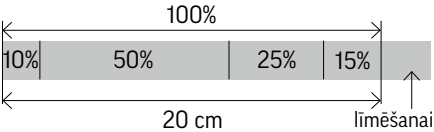
Skolēniem var radīt interesi par riņķa vai cita veida diagrammām, izmantojot dažādus kontekstus un informācijas veidus – dota tabula ar lielumiem un diagramma. Skolēnam jāparāda (jāielīmē atbilstošs attēls), kur varētu atrasties katrs no našķiem diagrammā, un jāpaskaidro, kāpēc (sk. att.). Skolēni pagaidām darbojas intuitīvi. Būtiski jau šādos piemēros pārrunāt, ka šeit apkopotī dati par visa veida kūkām, kas pieejamas, un tad tās attēlo kā vienu “veselumu”.

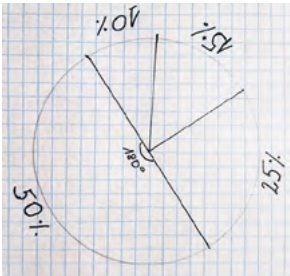


Sākotnēji skolēniem vieglāk saprotams varētu būt riņķa diagrammas nosaukums. Skolēniem jāiegūst izpratne, ka sektoru jeb riņķa diagrammā var attēlot datu skaitliskās vērtības, bet bieži datu attēlošanai izmanto daļas jeb procentus. Mācoties zīmēt diagrammu, skolēniem reizēm rodas grūtības to izprast, jo diagrammā kopā ir jāattēlo 100%, bet riņķim vesels jeb pilns apgrieziens ir 360° .

STUNDAS PIEMĒRS

SR Veido un skaidro sektoru diagrammas zīmēšanas algoritmu.

Skolotāja darbība	Skolēnu darbība	Komentārs, ko tas dod skolēnam
Iedod skolēniem datus procentos un aicina tos attēlot sloksnītē kā vienā veselā. Jāpārlicinās, ka skolēni saprot, piemēram, ka 50% ir 10 cm, 10% ir 2 cm.	Skolēni zīmē 20 cm garu sloksnīti un atliek uz tās iedotos datus (10%, 50%, 25%, 15%). 	Skolēni lieto jau zināmo, lai veidotu plānu sektoru diagrammas zīmēšanai.

Dod norādījumus, kā veidot riņķi. Skolēniem ir jāatgādina, ka riņķa centrs atrodas vienādā attālumā no katra punkta uz riņķa līnijas.	Skolēni izgriež un salīmē sloksnīti, veidojot riņķi. Uz rūtiņu papīra iezīmē centru un attiecīgi novieto riņķi uz papīra. 	Vizuāli redz, kā riņķī izvietojas 100%.
Aicina zīmēt riņķi uz papīra. Pārrunā, ka rādiuss ietekmē riņķa līnijas lielumu, kā lietojam cirkuli.	Skolēni atzīmē vairākus punktus uz riņķa līnijas un ar cirkuli zīmē riņķa līniju. Riņķis var būt mazliet lielāks nekā sloksnīte. 	Veido pārnesumu no modeļa uz vizualizāciju savos pierakstos.
Aicina skolēnus atlikt uz riņķa atbilstošus procentu dalījumus.	Skolēni noliek sloksnīti atpakaļ uz riņķa līnijas, atliek datu robežas uz riņķa un savieno riņķa centru ar atliktajiem procentu dalījumiem. Ar lineālu savieno atzīmes ar riņķa centru. 	Ievēro, ka viss riņķis ir sadalīts sektoros, kas atbilst procentiem.

Aicina mērīt leņķu lielumus. Vada diskusiju par leņķu lielumiem un pieraksta procentus un leņķa lielumus visiem redzamā vietā.	Skolēni mēra leņķus, salīdzina ar klasesbiedriem grupās un kopīgi. Vienojas par leņķa lielumiem. <i>Tabula ar procentiem un leņķa lielumiem.</i>	Atkārtot, kā mērīt leņķus ar transportieri. Saproto, ka mērīšanas rezultāti var nedaudz atšķirties atkarībā no izmantotā instrumenta un interpretācijas.
Vada sarunu, kā varētu noteikt leņķa lielumus citādāk, nelietojot sloksnītes. Uzdod skolēniem pārdomāt zināmus procentus. Veicina skolēnus atklāt algoritmu.	Skolēni atsevišķi un grupās spriež, kā leņķa lielums un procenti ir saistīti – kā varētu noteikt leņķa lielumu, zinot procentu vērtības. Lieto zināmas sakarības, piemēram, 50% no riņķa ir 180°, 25% ir 90°.	Iespēja atklāt, kā rēķina leņķa lielumus atbilstoši procentiem. Paši var iegūt sakarību, kā aprēķina sektora leņķa lielumu, piemēram, procentus uzrakstot kā decimāldaļu un reizinot ar 360°. Tas dod pārlicību, ka skolēni paši var atklāt matemātiskas sakarības.
Vada sarunu par to, kā veidot sektoru diagrammu. Var piedāvāt izpildīt vienkāršu uzdevumu.	Skolēni patstāvīgi raksta vai stāsta, kā darīt un kāpēc tā varam rīkoties.	Iegūst pārlicību, ko ir sapratuši un prot izdarīt, kas vēl pagaidām neizdodas.

Uzdevumā skolēni paši veido sloksnītes un darbojas ar procentiem, zinot, ka viens vesels ir 100%, pēc tam ir jāpārrunā, kāda veida informāciju šādi var attēlot – piemēram, aptauju rezultātus, kur katrs dalībnieks uz jautājumu sniedz vienu atbildi. Būtiski ir spriest par to, ka attēlot informāciju, piemēram, par dzīvnieku pārvietošanās ātrumu, var tikai stabīnu, bet ne sektoru diagrammā. Veicot uzdevumu, vissvarīgākais ir sarunāties par to, kā varēs aprēķināt leņķu lielumus diagrammai. Skolēniem būtu jāpamāna, cik katram sektoram liels ir leņķis un ka kopējā grādu summa ir 360 (vai tuvu tam). Vajag dot iespēju skolēniem pašiem atklāt, kā rēķināt šo leņķu lielumu, piemēram, ka ikviena sektora leņķa lielums ir datu daļas lielums no kopējā (piemēram, 25% ir $\frac{1}{4}$) $\cdot 360$; vai arī meklējot, cik grādu atbilst 1%, un tad reizinot ar doto procentu skaitu, u. c. Redzot šo piemēru, skolēniem būs vieglāk atcerēties un saprast, kāpēc, zīmējot sektoru diagrammas, nepietiek zināt procentus, bet ir arī atsevišķi jāizrēķina leņķa lielums.

Pilnveidojot prasmi darbā ar diagrammām, skolēniem pašiem ir jāiegūst dati un jāveido riņķa diagramma, tai skaitā izmantojot digitālās prasmes.



Svarīgi atcerēties

- Jāpatur prātā, ka dažreiz skolēniem rodas grūtības ar procentiem. Jāatgādina, ka riņķa diagramma dod mums vizuālu priekšstatu par apkopotiem datiem, ja tie veido vienu veselu.
- Ne vienmēr, skaitliskos datus pārvēršot procentos, varēsīm iegūt veselus procentus. Tad parasti tos noapaļo līdz vesalam, tādējādi procentu summa varētu mazliet atšķirties no 100. Piemēram, tabulā dotie dati procentos noapaļoti līdz simtdaļām jeb veseliem procentiem.

Tabulā redzam rezultātus no skolēnu padomes vēlēšanām. 6. klasē mās 18 skolēni un ir 5 kandidāti uz amatu. Noapaļojam līdz veseliem procentiem.

6. klases skolēnu padomes kandidāti	Saņemtās balsis	Daļa no visām balsīm (dalīts ar 18)	Noapaļots līdz simtdaļām	Procenti
Anna	3	0,1666...	0,17	17%
Bertolds	1	0,0555...	0,06	6%
Māris	4	0,222...	0,22	22%
Liene	7	0,3888...	0,39	39%
Raitis	3	0,1666...	0,17	17%

Redzam – ja saskaitām procentus, sanāk 101. Tas rosina sarunāties un domāt, kāda veida, apjoma datus ir vērts pārvērst procentos.

- Kļūdas rodas arī, mēģinot attēlot datus ar nepiemērotu diagrammu:
 - riņķa diagramma rāda, cik lielu daļu no visas kopas veido kāda no grupām;
 - stabiņu diagramma rāda, cik liela ir katra grupa neatkarīgi no kopas sastāva.

Kopīgi ar skolēniem jau šajā vecumposmā var aplūkot dažāda veida diagrammas, spriest par to, ka diagrammas var arī maldināt, piemēram, ja uz vertikālās ass atliek dažādas iedaļas vērtības.



Jautājumi pārdomām

Kā pēctecīgi mās veidot tabulu?

Cik lielā mērā piktogrammu izmantošana veicina tālāku stabiņu diagrammas veidošanas izpratni?

Kā visveiksmīgāk attīstīt izpratni par riņķa jeb sektoru diagrammu veidošanu?

Kā vislabāk pārliecināties par to, kā skolēni sapratuši pētījuma veikšanu, kurā izmantoti dati?

Kā veicināt procentu izpratni, izmantojot statistikas kontekstu?

Literatūra tālākai uzzīņai

- English, L. D. (2013). Surviving an Avalanche of Data. *Teaching Children Mathematics*, 19(6), 364–372.
- English, L. D., Fox, J. L., & Watters, J. J. (2005). Problem Posing and Solving with Mathematical Modeling. *Teaching Children Mathematics*, 12(3), 156–163.
- Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124–158.
- Harper, S. R. (2004). Students' Interpretations of Misleading Graphs. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 9(6), 340–343.
- Lacefield, W. O. (2009). The Power of Representation. *Teaching Children Mathematics*, 15(6), 324–326.
- OECD (2003). PISA 2025 Learning in the Digital World Assessment. Framework. <https://www.oecd.org/en/topics/sub-issues/learning-in-the-digital-world/pisa-2025-learning-in-the-digital-world.html>
- Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., Smith, N. L., & Suydam, M. N. (2004). *Helping Children Learn Mathematics*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Boston: Allyn & Bacon.
- Whitin, D. J., & Whitin, P. (2003). Talk Counts: Discussing Graphs with Young Children. *Teaching Children Mathematics*, 10(3), 142–148.

2.4. Ģeometrijas elementi

2.4.1. Telpiskā domāšana

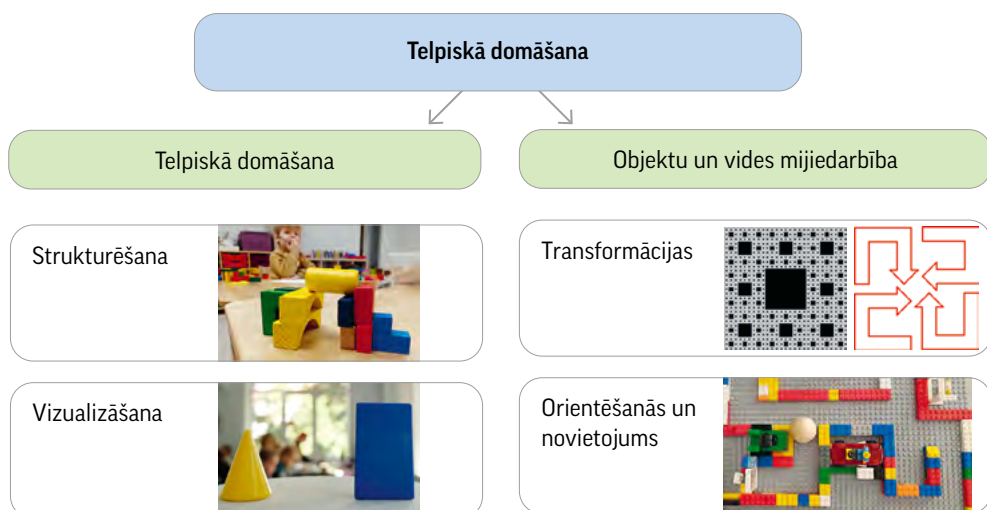
Telpiskā domāšana pēdējos gados ir ļoti daudz pētīta joma izglītības zinātnēs, un kļūst arvien skaidrāka tās nozīmība skolēnu vispārējā attīstībā un sniegunā matemātikā. Mēdz lietot dažādus terminus, ar tiem saprotot līdzīgu ideju (telpiskā spriešana, telpiskās spējas, vizuāli telpiskā domāšana, telpiskās prasmes, telpiskā izjūta u. c.), kas palīdz realizēt lielās idejas par ģeometriju.

Literatūrā ir atrodamas dažādas telpiskās domāšanas definīcijas, piemēram,

- vizuāli telpiskā spriešana ir spēja lietot prātā radītus vizuālus tēlus, lai risinātu problēmas – uztvertu, atšķirtu, manipulētu un atsauktu atmiņā nelingvistiskus attēlus prātā;
- telpiskā domāšana ir viens no domāšanas veidiem, tā sastāv no trīs elementu kopuma: konceptiem par telpu, reprezentēšanas rīkiem un spriešanas procesiem. Telpas koncepti atšķir šo domāšanas veidu no citiem.

Dažādi telpiskās domāšanas iedalījumi iekļauj vizuāli telpisko uztveri un vizuāli telpisko spriešanu. Tā sastāv no telpas vizualizēšanas un orientēšanās telpā.

Līdzīgi ir spriedis profesors Toms Lourijs (*Tom Lowrie*), piedāvājot šādu dalījumu:



(Pēc Lowrie, 2017)

Pētījumi liecina, ka vizuāli telpiskās prasmes, tādas kā vizuālā uztvere, telpiskā domāšana, mentālās rotēšanas prasmes, ietekmē skolēna sniegumu matemātikā, kā arī citos STEM (*Science, Technology, Engineering, Mathematics*) priekšmetos. Telpiskās domāšanas prasmes var izmantot kā nozīmīgu prognozi skolēna turpmākajam sniegumam matemātikā. Grūtības šajās prasmēs var parādīties kā grūtības veidot skaitļu reprezentācijas, kārtot skaitļus secīgi, kā arī ģeometrijā un izpratnē par daļām.

Ļoti būtiski apzināties, ka telpiskās prasmes ir apgūstamas un attīstāmas (Sowder & Wearne, 2006). Nav pareizi pieņemt, ka gadījumā, ja skolēnam nav labi attīstīta telpiskā domāšana, tas tā arī paliks un neko tur nevar darīt. Tā ir attīstāma un ir jāattīsta, sistemātiski dodot iespēju skolēniem domāt par telpiskiem izaicinājumiem, lietot matemātisku valodu saistībā ar telpu un veidot spriedumus. Interesanti, bet, iespējams, likumsakarīgi, ka daudziem skolēniem ar lasīšanas grūtībām vizuāli telpiskās prasmes ir labāk attīstītas par citām. Līdz ar to matemātikas stundās, kurās tiek lietotas un attīstītas vizuāli telpiskās prasmes, skolēni, kuriem citi spriešanas veidi nav tik spēcīgi, var gūt pārliecību par savām prasmēm matemātikā, priecāties, ka viņiem sanāk, noticēt, ka viņi var.

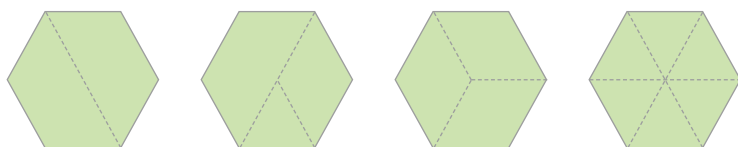
Tehnoloģiju ietekmē attīstīt telpisko domāšanu kļūst reizē vienkāršāk (pateicoties digitāliem risinājumiem), taču cilvēkiem ir arī daudz vairāk nepieciešams uztvert un saprast kompleksu vizuāli telpisku informāciju, piemēram, grafiskos interfeisa līdzekļus, kas attēlo sarežģītu daudzdimensionālu vizuālo informāciju. Šobrīd tehnoloģiskās attīstības gaisotnē ir liels pieprasījums pēc indivīdiem ar augsti attīstītu vizuāli telpisko domāšanu.

Piedāvājot skolēniem aktivitātes, kas attīsta telpisko domāšanu, un problēmsituāciju uzdevumus, ir būtiski sarunāties par to, ko darām, ne tikai lai mācītos formulēt savus spriedumus un saprastu citu spriedumus, bet arī lai veidotu bagātīgu vārdu krājumu, ko lietot, raksturojot telpu sev apkārt. Lai gan domāšana, kas saistīta ar valodas lietošanu, ir cits domāšanas veids, tie ir cieši saistīti ar vizuāli telpisko domāšanu. Ir atklāts, ka bērna leksikā sastopamā vārdu bagātība, raksturojot telpu, ir tieši saistīta ar bērna telpisko domāšanu (vai, pateicoties bagātai leksikai, ir augstāk attīstīta telpiskā domāšana vai otrādi, gan vēl nav skaidrs).

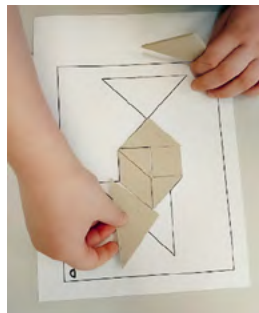
Figūru konstruēšana un dekonstruēšana

Ir jāierauga vairākas idejas un jāattīsta vairākas prasmes.

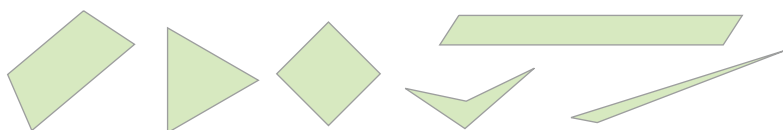
1. Spēja saskatīt vienu figūru kā vairāku figūru kopumu.



2. Prasme prognozēt, kāda figūra iederēsies tukšajā vietā. Vēlāk prāt, kāda pagriežta vai otrādi apgriežta figūra iederēsies.



3. Spēja atteikties no stereotipiem par figūrām, par to novietojumu (trapece un trijstūris vienmēr ir ar garāko malu uz leju, kvadrāts, kas novietots šķībi, vairs nav kvadrāts), par to formu jeb izskatu (domājot par četrstūri, domājam tikai par izliektiem četrstūriem u. c.).



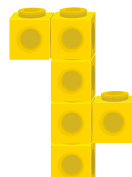
4. Prasme ieraudzīt, kā izskatīsies figūra, kas veidojas, savienojot divas, trīs, četras vai vairākas figūras.

Vizualizēšana

1. Spēja paturēt prātā (vizualizēt) redzētu plaknes figūru, formu, attēlu, telpisku figūru.

Skolotājs parāda skolēniem attēlu, to aizsedz un tad lūdz uzzīmēt.

Skolotājs parāda skolēniem no klucīšiem saliktu figūru, tad paslēpj un lūdz salikt tādu pašu.



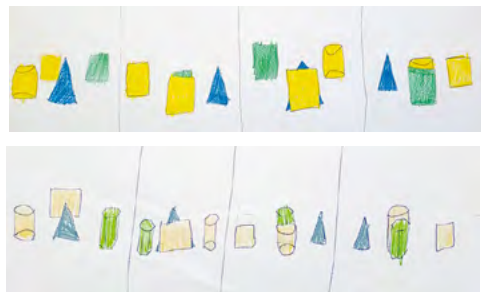
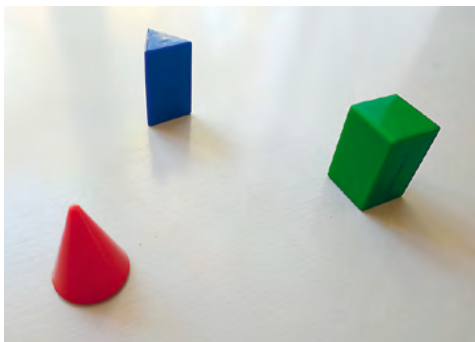
2. Spēja iztēloties, kā izskatīsies figūra, figūru grupa no dažādiem skatu punktiem.



Aktivitāte skolēniem

SR Shematiski zīmē figūras no dažādiem skatu punktiem.

Skolotājs novieto klases priekšā telpisku figūru un lūdz skolēniem uzzīmēt, kā tā izskatās no skolotāja skatu punkta, no loga puses, no durvju puses.

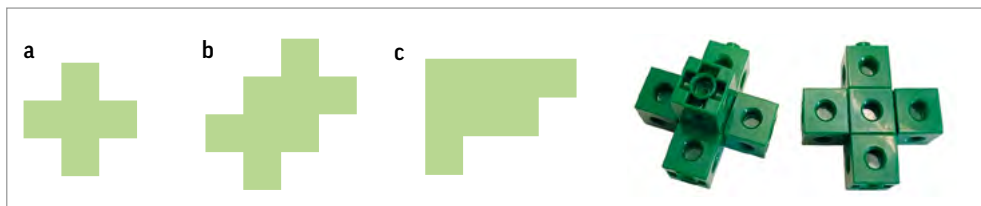




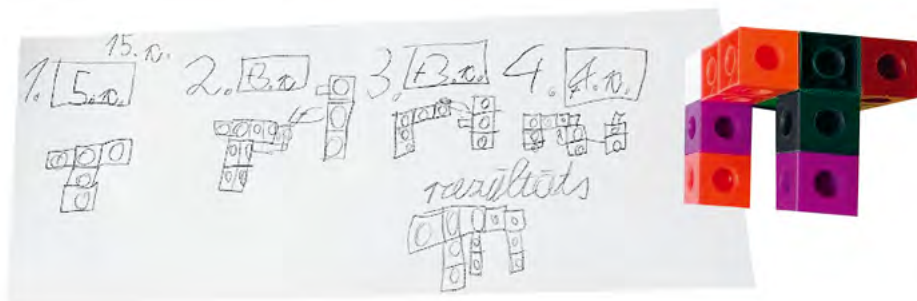
Aktivitāte skolēniem

SR Izmantojot dotos figūru attēlus, veido šo figūru.

Darbojamies pretēji – skolotājs parāda skolēniem figūras “ēnu” un lūdz izveidot figūru, kam ir šāda ēna.

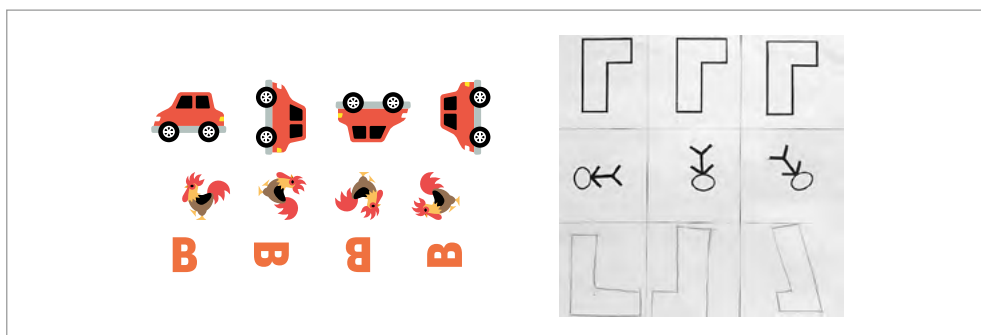


3. Prasme nolasīt un attēlot telpisku figūru zīmējumus.
Veido shematisku attēlu telpiskas figūras izveidošanai.



Transformācijas

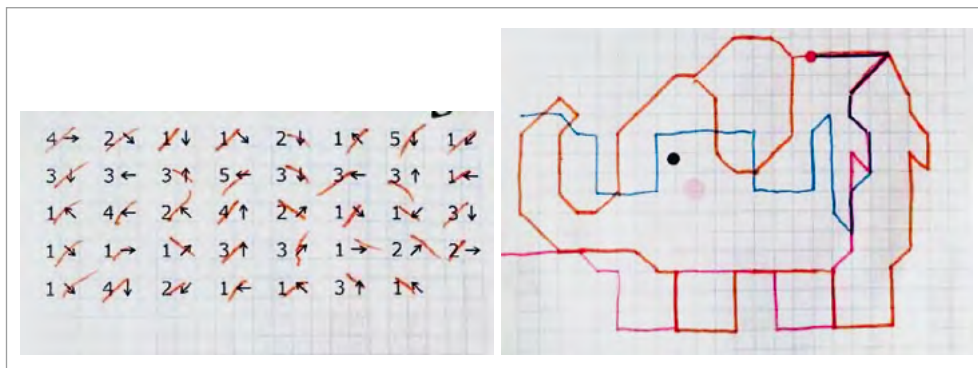
Prasme prātā pagriezt figūru, attēlot to.



Orientēšanās

1. Spēja orientēties plaknē.

Seko instrukcijām, veidojot zīmējumu rūtiņu tīklā.



Stāsta ceļu, izmantojot vienkāršotu karti.



2. Prasme orientēties telpā.

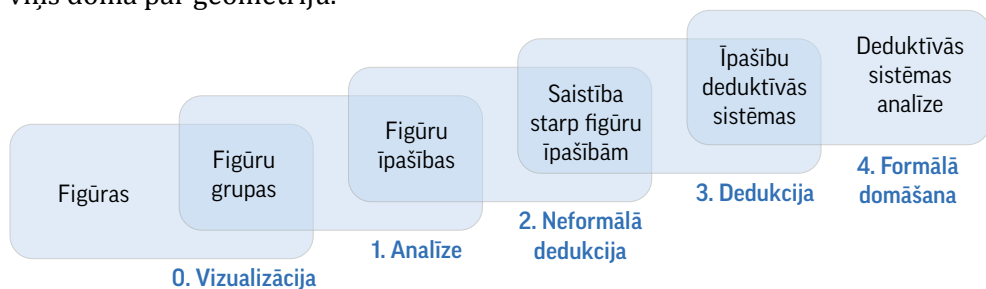
Skolēns stāsta par ceļu jeb savu iešanu uz skolu, par skolas apkaimi, seko instrukcijām.

2.4.2. Ģeometriskās domāšanas līmeņi

Mēs visi būtu ļoti pārsteigti, ja, prasot 4 gadus vecam bērnam – “Kas ir šī figūra?” –, bērns atbildētu: “Kvadrāts, jo tā pretējās malas ir paralēlas, malas ir vienāda garuma un visi leņķi ir taisni.”

Jebkurš teiktu – nē, tāda atbilde no 4 gadus veca bērna nav iespējama, jo bērns tā nedomā. Bērna ģeometriskā domāšana vēl nav tik attīstīta.

Katrs var attīstīt spēju domāt un spriest ģeometriskā kontekstā. Aplūkojot jaugtājumu, kā attīstās ģeometriskā domāšana, izmantosim holandiešu izglītības pētnieku Pīres van Hīles (*Pierre van Hiele*) un Dinas van Hīles-Geldofas (*Dina van Hiele-Geldof*) izveidoto modeli, kas ir pasaulē plaši atzīts (Hiele, 1999). To veido pieci līmeņi: vizualizācija, analīze, neformālā dedukcija, dedukcija un formālā domāšana (sk. att.). Ir svarīgi paturēt prātā, ka van Hīles līmeņi nosaka nevis to, ko cilvēks zina par ģeometriju, piemēram, definīcijas vai teorēmas, bet to, kā viņš domā par ģeometriju.



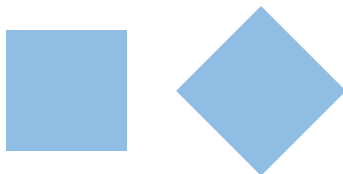
P. van Hīles ģeometriskās domāšanas teorijas vizualizācija (Walle et al., 2010)

Ģeometriskās domāšanas līmeņi (Pīres van Hīles apraksts)

0. līmenis: vizualizācija

Visi sāk ar 0. līmeni. Šajā līmenī cilvēks redz ģeometrisku objektu kā veselu attēlu. Nav fokusa uz jebkādam tā īpašībām. Skolēns atpazīst un var nosaukt figūru, piemēram, iemācās atpazīt kvadrātu, riņķi, konusu, piramīdu.

Šajā domāšanas līmenī skolēns bieži apmuls, ja maina objekta orientāciju. Piemēram, ja pagriež kvadrātu, var domāt, ka tas vairs nav kvadrāts, bet ir “dimants” vai “pūķis”.



Var būt arī tā, ka skolēns pārlieku vispārina kādu īpašību, piemēram, nosauc doto figūru par trijstūri, kaut gan visas tās malas nav nogriežņi.



0. līmenī skolēns nespēj izteikt pamatojumus. Ja prasām – “Kā tu zini, ka tas ir taisnstūris?” –, atbilde varētu būt: “Jo tā to sauc.” Skolēns nevar pateikt, ka tas ir taisnstūris, jo tā leņķi ir taisni un pretējās malas vienādas un paralēlas.

Ar laiku, iegūstot pieredzi darboties ar figūrām, skolēni sāk izmantot īpašības un sāk domāt par figūru kopām, piemēram, par visiem taisnstūriem vai par visām lodēm.

Lai veicinātu attīstību, ir svarīgi, ka bērni paši darbojas un atbild uz jautājumiem, kas saistīti ar ģeometrisku figūru īpašībām vai to elementiem, piemēram:

Cik malu ir figūrai? Cik ir leņķu?

Nomēri un pieraksti malu garumus!

Vai leņķi ir plati, šauri, taisni?

Izskaiti, cik rūtiņu ir starp pretējām malām!

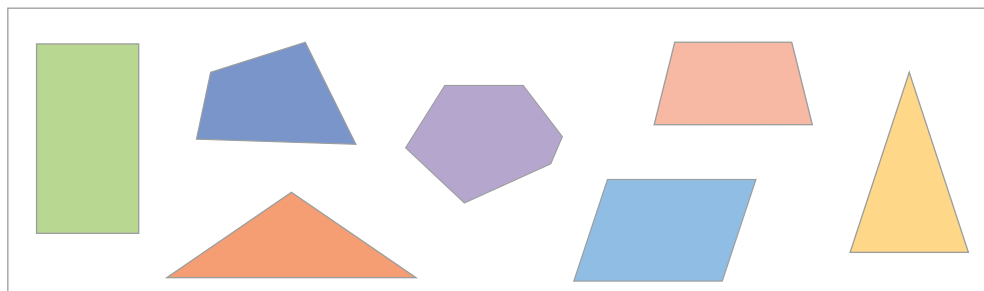
Vai figūra ir simetriska?



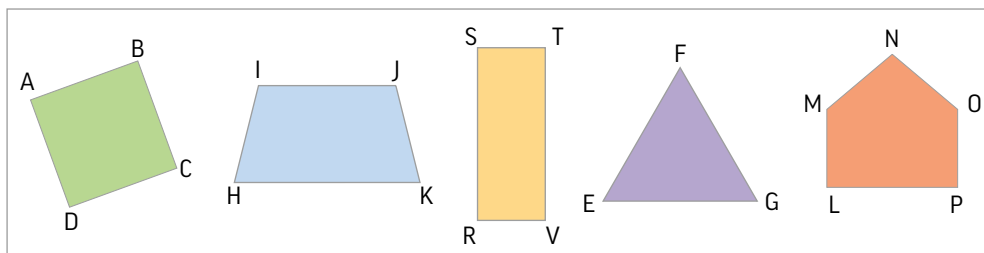
Aktivitāte skolēniem

SR Stāsta par doto figūru, ko redz attēlā.

Pastāsti par daudzstūriem! Cik katrai figūrai ir malu? Cik katrai figūrai ir virsotņu? Cik figūrām ir vienāds malu skaits? (1. klase)



3. klasē daudzstūrus raksturo jau precīzāk, izmantojot virsotnes, malas, nosaucot taisnos, šauros, platos leņķus, mērot malu garumus un aprēķinot perimetru.

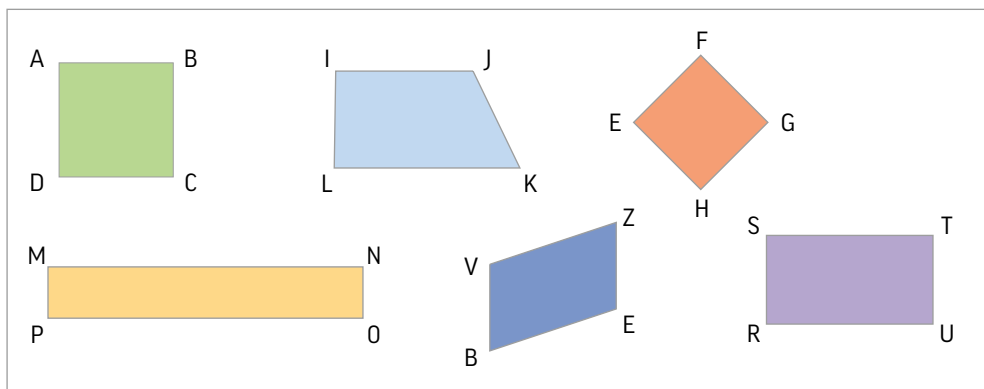


Aktivitāte skolēniem

SR Atpazīst figūras starp vairākām, ja dots apraksts vai kāds figūras elements, saskata kopīgo un atšķirīgo.

Izmantojot dotās figūras, nosaki:

- Kas visām figūrām ir kopīgs?*
- Izvēlies figūru un raksturo, kāpēc tā ir atšķirīga no citām figūrām!*
- Nosauc četrstūrus, kuru malu garumi visi ir vienādi!*
- Nosauc taisnstūrus!*



Aktivitāte skolēniem

SR Ar vārdiem raksturo telpisku figūru.

Spēle "Uzmini manu figūru"

Skolēniem parāda apmēram 10 telpiskās figūras, ar kurām viņi jau ir strādājuši, un tās ieliek necaurspīdīgā maisiņā. Skolotājs izvelk vienu, bet nerāda skolēniem. Skolēniem ir jāuzmin, kuru figūru skolotājs ir izvilcis. Pa grupām vai atsevišķi

skolēni var prasīt jautājumus, uz kuriem atbilde ir “jā” vai “nē”. Var minēt uzreiz nosaukumu, bet, ja minēts nepareizi, tad spēle ir zaudēta.

Jautājumi varētu būt:

Vai ir virsotnes?

Vai visas malas ir vienādas? u. c.

Ar šādu pieredzi skolēni lēnām tiecas uz nākamo līmeni – analīzi.

Ir svarīgi ievērot: kaut gan mēs runājam par skolēniem, der atcerēties, ka jebkurai cilvēkam, kuram nav ģeometriskās pieredzes, ir iespējams palikt 0. līmenī arī pieaugušo vecumā. Te redzam, cik būtiski ir dot skolēniem iespēju attīstīt ģeometrisko domāšanu.

1. līmenis: analīze

Analīzes līmenī skolēni jau sāk domāt par figūru kopām, ne tikai par atsevišķām figūrām. Šajā līmenī skolēni labāk saprot ģeometriskās figūras kā kopumu, to īpašības un var tās vispārināt.

Piemēram, visas dotās figūras ir trijstūri, jo tām ir 3 malas un 3 leņķi.



Iepriekš skolēniem, skatoties uz figūru, piemēram, likās, ka, figūru novietojot citādi, tā jau ir cita figūra, varbūt pat ar citām īpašībām. Rodas izpratne, ka orientācija vai lielums neietekmē spriedumus par to, kas tā ir par figūru.

1. līmenī skolēni spēj secināt par figūru īpašībām. Piemēram:

- Visiem paralelogramiem pretējie leņķi ir vienādi.
- Visiem paralelogramiem diagonāles to krustpunktā dalās uz pusēm.
- Visiem taisnstūriem abas diagonāles ir vienādas.

Ir ļoti svarīgi, ka skolotāji dod iespēju skolēniem pašiem atklāt šīs īpašības. Kaut gan figūru īpašības sākumskolā netiek formāli pierādītas, skolēniem ir jādod iespēja mērīt un apskatīt daudzus un dažādus piemērus, lai pārliecinātos par doto figūru īpašībām.

1. līmenī skolēni var saskatīt figūras īpašības, bet vēl nesaredz to savstarpējo saistību, klasificējot figūras. Piemēram, ja taisnstūri definē kā četrstūri ar vienādām pretējām malām, kam visi leņķi ir taisni, tad secinām, ka arī kvadrāts ir taisnstūris. Skolēni šo apgalvojumu var atkārtot, ja skolotājs to pasaka, bet šajā līmenī to nevarēs formulēt paši. Visprecīzāk viņi to var formulēt, kad jau ir pazīstami gan ar garuma, gan ar leņķa lieluma jēdzieniem. Ar laiku un vingrinoties deduktīvā domāšana lēnām sāk attīstīties. Atcerēsimies, ka neformālā dedukcija (loģiski secinājumi no vispārīgā uz atsevišķo) sāk veidoties ap 5. vai 6. klasi – ap šo vecumu bērni, pēc Piažē teorijas, sāk abstrakti domāt, bet tas nav viennozīmīgi.

2. līmenis: neformālā dedukcija

Šajā līmenī skolēns spēj saprast loģiskus spriedumus, tādus kā: ja $a \dots$, tad $b \dots$; ja a un $b \dots$, tad $c \dots$. Piemēram:

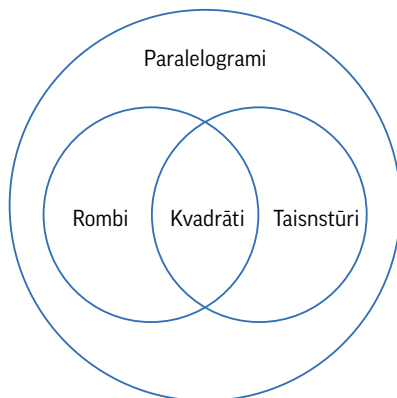
Ja ABCD ir taisnstūris un visas tā malas ir vienādas, tad ABCD ir kvadrāts.

Skolēns var uzrakstīt precīzu definīciju bez liekas informācijas.

Skolēns saprot figūru apakškopas vai speciālgadījumus, piemēram:

Kvadrāts ir taisnstūris, jo tam piemīt taisnstūra īpašības.

Kopu savstarpējās attiecības var precīzi izskaidrot vārdos vai lietojot Venna diagrammu.



Neformālās dedukcijas līmenī skolēni var saprast un rakstīt īsus pierādījumus. Ar laiku un vingrinoties tie kļūst sarežģītāki.

3. līmenis: dedukcija

Deduktīvs skats uz figūru īpašību sistēmu. Šajā līmenī skolēni spēj veidot pierādījumus, saprot definīciju, aksiomu un teorēmu nepieciešamību, to savstarpējo saistību.

Tomēr viņi vēl nespēj domāt, ka aksiomas un definīcijas var mainīties, lietojot citu sistēmu (piemēram, Eiklīda vai Lobačevska ģeometriju).

4. līmenis: formālā domāšana

Ceturto līmeni var dēvēt par “matemātiķu līmeni” – domājam deduktīvā aksiomātiskā ģeometrijas sistēmā. Studenti spēj salīdzināt un saprast dažādas ģeometrijas aksiomu sistēmas.

Kopš tā laika, kad van Hīle izveidoja savu teoriju, ir veikti ļoti daudzi zinātniski pētījumi. Viens no secinājumiem ir, ka līmeņus nevar precīzi nodalīt un cilvēku domāšana var svārstīties starp līmeņiem. Aplūkojot atsevišķus jēdzienus, tā var būt vienā līmenī, bet citā situācijā augstāk vai zemāk. Vispār van Hīles teorija tiek uzskatīta par labu aprakstu ģeometriskās domāšanas attīstībai un dod skolotājiem vadlīnijas, kā veicināt ģeometriskās domāšanas izaugsmi.



Svarīgi paturēt prātā

- Līmeņi seko cits pēc cita, tos nevar izlaist. Pētījumi rāda, ka līmeņu robežas nevar skaidri novilkt. Skolēns var būt vienā līmenī, domājot par vienu tēmu, bet citā līmenī, domājot par citu. Skolotāja loma ir ļoti svarīga, lai atbalstītu skolēnu viņa esošajā līmenī un to attīstītu tālāk.
- Maldīgs ir priekšstats, ka skolēna domāšana ir augstākā līmenī, ja viņam ir zināšanas, ko iemācās no galvas, piemēram, ja viņš pasaka “visi kvadrāti ir taisnstūri” vai eksāmenā uzraksta pierādījumu, kas kopīgi apskatīts stundā.
- Skolotājs, kurš māca, pieņemot, ka skolēni atrodas vienā domāšanas līmenī, kaut realitātē skolēni ir citā līmenī, neko nepanāks. Viņu sarunas nesasniegs vēlamo un rezultātā – mācīšanās mērķi.



Aktivitāte skolēniem

Lai veicinātu attīstību līdz 1. līmenim (darbojas vizualizācijas līmenī), **skolēniem ir**

- jātaisa, jātausta, jāzīmē, jāloka figūras;
- jāsalīdzina dotās figūras (modeļi, zīmējumi), jāstāsta, ko viņi saskata (meklē īpašības);
- jāskatās figūras dotajās lielākajās figūrās, reālajā dzīvē;
- jāsaliek figūras no mazākām figūrām;
- jāapraksta figūras, jārunā par figūrām.

Lai veicinātu attīstību līdz 2. līmenim (darbojas analīzes līmenī), **skolēniem ir**

- jāmēra lielumi figūrās, jāmeklē vairāk īpašību, izmantojot lielumus;
- jāklasificē jeb jāšķiro figūras grupās vairākos veidos;
- jāsalīdzina figūru kopas, piemēram, kvadrāti un taisnstūri;
- jāatpazīst figūras, ja dotas to īpašības;
- jāapraksta dotās figūru kopas īpašības, piemēram, trijstūri;
- jālieto matemātiski termini.

Lai veicinātu attīstību līdz 3. līmenim (darbojas neformālās dedukcijas līmenī), **skolēniem ir**

- jāformulē figūru īpašības;
- jāprecizē figūru definīcijas;
- jāprot noteikt, kas ir pietiekams un kas ir nepieciešams nosacījums, piemēram, lai figūra atbilstu konkrētai kopai – četrstūris, taisnstūris, kvadrāts;
- jāveido īsi pierādījumi vai pamatojumi;
- jāmeklē vairāki veidi, kā atrisināt problēmas.

Mācību norise

Van Hile ir ieteicis, ka skolēniem ir jādod iespēja iepazīties un izpētīt jebkādu jaunu mācību materiālu (Hiele, 1999). Novērojot skolēnus un veidojot neformālas sarunas, skolotājs iegūst informāciju par skolēnu iepriekšējām zināšanām. Piemēram, vai skolēns zina, kas ir taisnstūris, ko skolēns zina par kvadrātiem. Skolotājs tad var attiecīgi plānot vai, ja vajadzīgs, mainīt izvēlētās aktivitātes.



Jautājumi pārdomām

Kāpēc telpiskās domāšanas attīstīšana ir būtiska? Kā es to īstenoju savā praksē?

Kurā spriešanas līmenī, izmantojot van Hiles ģeometriskās domāšanas attīstības līmeņus, spēj spriest un domāt skolēni līdz 3. klasei, skolēni 4.–6. klasē?

Kā praksē rīkojamies, ja mērķis ir mācīt domāt ģeometriski, izmantojot van Hiles 2. līmeni, bet secinām, ka skolēns ar grūtībām domā 1. līmenī?

Literatūra tālākai uzziņai

Clements, D. H., & Sarama, J. (2017/2019). *Learning and teaching with learning trajectories [LT]2*. Retrieved from LearningTrajectories.org

Gifford, S., Gripton, C., Williams, H., Lancaster, A., Bates, K. E., & others. (2022). *Spatial Reasoning in Early Childhood*. <https://doi.org/10.31234/osf.io/jnwpu>

Harris, D. (2023) Spatial reasoning in context: bridging cognitive and educational perspectives of spatial-mathematics relations. *Front. Educ.*, 8, 1302099. <https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1302099>

Hiele, P. M. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play. *Teaching Children Mathematics*, 5–6, 310–316.

Newcombe, N. S. (2010). Picture this: Increasing math and science learning by improving spatial thinking. *American Educator*, 34, 29.

Newcombe, N. S., & Frick, A. (2010). Early education for spatial intelligence: Why, what, and how. *Mind Brain Educ.*, 4, 102–111.

Ramful, A., Lowrie, T., & Logan, T. (2017). Measurement of spatial ability: Construction and validation of the spatial reasoning instrument for middle school students. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 35(7), 709–727.

Sowder, J. T., & Wearne, D. (2006). What do we know about eighth grade student achievement? *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11(6), 285–293.

Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics Teaching Developmentally*. Boston: Pearson.

2.4.3. Ģeometriskās domāšanas attīstība

Ģeometrija ir bagāta ar dažādu konceptu apguvi, tajā tiek izmantota telpa, problēmrisināšanas pieredze un prasme pielietot risinājumus reālajā dzīvē. Sākumskolā ģeometrijas apguves jautājumiem ir pievērsta lielāka uzmanība, pakāpeniski attīstot spriešanas līmeņus: nodalot atsevišķus tematus un tai pašā laikā lietojot ģeometrijas elementus, lai apgūtu citus matemātiska satura jautājumus. Īpaša uzmanība veltīta telpiskuma izjūtai (*spatial sense*), kas definēta kā intuīcijas attīstīšana par figūrām (plaknes un telpas) un to savstarpējo saistību.

Ģeometrisku figūru atpazīšanas un analizēšanas trajektorija

- ♦ Nosauc daudzstūri, izmantojot malu/virsotņu skaitu. (1. klase)
- ♦ Grupē ģeometriskus objektus pēc kopīgas pazīmes, atlasa atšķirīgo, lieko, skaidrojoš/ pamatojot savu rīcību, izvēli, grupē figūras pēc paša izvēlētas pazīmes. (1. klase)
- ♦ Apraksta doto figūru, atpazīst figūru pēc apraksta. (1. klase)
- ♦ Atšķir un zīmē figūras pēc būtiskas pazīmes, piemēram, pēc virsotņu/malu skaita, kādas malas dotā garuma. (2. klase)
- ♦ Koordinātu plaknē nolasa punkta koordinātas, atzīmē punktus pēc to koordinātām, nosaka attālumu no punkta līdz taisnei. (6. klase)
- ♦ Veido jaunus telpiskus objektus no telpiskām figūrām (kubiem, taisnām regulārām prizmām (skolēni nelieto šo nosaukumu), piramīdām, cilindriem, konusiem). (1. klase)
- ♦ Raksturo, salīdzina kubus, taisnstūru skaldņus, piramīdas, izmantojot terminus "virsotne", "šķautne", "skaldne". (3. klase)
- ♦ Raksturo telpisku ķermeni (daudzskaldnis, piramīda, cilindrs, konuss), raksturo tāda telpiska ķermeņa skatus dažādās plaknēs, kas sastāv no vienādiem kubiem, raksturo plaknes figūras, kuras veido tā virsmu. (6. klase)

Figūru modelēšanas un zīmēšanas prasmju attīstības trajektorija

- ♦ Novelk taisnu līniju ar lineālu, ar brīvu roku pa rūtiņām, izveido figūru atbilstoši dotajām norādēm. (1. klase)
- ♦ Uzzīmē noteikta garuma nogriežni, lauztu līniju, taisnstūrus, izmantojot lineālu, rūtiņas, novelk laužas līnijas atbilstoši dotajiem nosacījumiem (1. klase), zīmē nogriežni, kas 2 reizes garāks/īsāks par doto. (2. klase)
- ♦ Modelē ar kociņiem, zīmē trijstūrus, četrstūrus pēc dotajiem nosacījumiem (kādas malas garums, leņķu veidi), zīmē riņķi ar cirkuli. (3. klase)
- ♦ Zīmē šauru, taisnu un platu leņķi. (4. klase)
- ♦ Zīmē riņķa līniju ar doto rādiusu vai diametru; izmanto cirkuli, lai konstruētu nogriežni, kas vienāds ar doto nogriežni, 2–4 reizes garāks par doto nogriežni. (5. klase)

- ♦ Sadala soļos darbības, kas nepieciešamas, lai rūtiņu lapā uzzīmētu kvadrātu vai cita veida taisnstūri, un pieraksta algoritmu, pārbauda to, precīzi izpildot soļus pēc dotās instrukcijas, ja nepieciešams, veicot labojumus algoritma pierakstā. (1. klase)
- ♦ Zīmē vienkāršas simetriskas figūras rūtiņu lapā. (1. klase)
- ♦ Veido un redīgē, atlasa, dublē un grupē ģeometrisku figūru attēlus, izmantojot IT – zīmēšanas standartrikus. (2. klase)
- ♦ Uzzīmē daudzstūri atbilstoši 2 vai 3 nosacījumiem par leņķiem, malām, to savstarpējo novietojumu. (5. klase)
- ♦ Sadala nogriezni 2 vai 3 nogriežņos, ja dota nogriežņu garumu attiecība, rūtiņu lapā sadala figūru 2 vai 3 daļās, ja dota laukumu daļu attiecība. (6. klase)
- ♦ Koordinātu plaknē zīmē figūrai centrāli simetrisku figūru pret doto punktu (pagriež par 180° ap doto punktu). (6. klase)
- ♦ No dotajiem izklājumiem veido telpisku figūru modeļus (taisnstūru skaldņu, piramīdu, cilindru, konusu). (3. klase)
- ♦ Zīmē taisnstūra paralēlskaldņa virsmas izklājumu plaknē atbilstoši dotajiem izmēriem, telpiskā ķermeņa skatus dažādās plaknēs. (6. klase)

Figūru savstarpējā novietojuma izpratnes attīstības trajektorija

- ♦ Stāsta par objektu novietojumu (pa labi/kreisi, augšā/apakšā, priekšpusē/aizmugurē, virs/zem, starp u. c.). (1. klase)
- ♦ Veido jaunas figūras no dotajām, tās savietojot vai pārklājot, kā arī sadalot doto figūru vairākās, spriež par iespējamību iegūt konkrētu daudzstūri, doto daudzstūri sadalot 2 daļās, dotos daudzstūrus savietojot. (2. klase)
- ♦ Rūtiņu lapā uzzīmē savā starpā paralēlas un perpendikulāras taisnas līnijas vai nogriežņus, izmanto 2 lineālus (vismaz viens no tiem ir uzstūris), lai zīmētu paralēlas taisnas līnijas baltā lapā un pārbaudītu, vai līnijas/daudzstūra malas ir paralēlas. (4. klase)

Figūru īpašību, spriedumu veidošanas attīstības trajektorija

- ♦ Noskaidro, ka figūras ir vienādas, tās uzliekot vienu uz otras. (1. klase)
- ♦ Iegūst simetriskas figūras, lokot, izgriežot vai zīmējot, lokot taisnstūri, kvadrātu, patvaļīgu četrstūri utt., nosaka, vai figūras ir simetriskas. (1. klase)
- ♦ Nosaka figūru kopīgās un atšķirīgās īpašības. (1. klase)
- ♦ Raksturo rūtiņu lapā uzzīmētu daudzstūru īpašības, lieto jēdzienus “šaurš leņķis”, “taisns leņķis”, “plats leņķis”, “paralēlas malas”, “perpendikulāras malas”. (4. klase)
- ♦ Raksturo daudzstūru īpašības (arī ieliektu daudzstūru, bet šis jēdziens nav jālieto). (5. klase)
- ♦ Spriež par taisnstūra paralēlskaldņa īpašībām un zīmē taisnstūra paralēlskaldņa virsmas izklājumu plaknē, ja dots tā zīmējums un izmēri vai tikai izmēri. (6. klase)

- ♦ Veido un vārdiski raksturo figūras koordinātu plaknē, izmantojot figūru vienādību, simetriju pret taisni, pagriešanu par 90° , 180° (simetrija pret punktu), jēdzienus “attālums no punkta līdz taisnei”, “paralēli”, “perpendikulāri”. (6. klase)
- ♦ Veido piemēru un pretpiemēru, lai ilustrētu patiesumu apgalvojumiem par taisnstūru laukumiem. (3. klase)
- ♦ Nosaka un pamato patiesumu apgalvojumiem par plaknes figūru perimetru un laukumu, lieto jēdzienus “paties apgalvojums”, “aplams apgalvojums”. (4. klase)

Aprēķini (kas nav saistīti ar garuma, laukuma, tilpuma aprēķināšanu)

- ♦ Sadala doto figūru, piemēram, taisnstūri, riņķi, divās (četrās) vienādās daļās. (1. klase)
- ♦ Izveido plānu, kurā attēloti tuvējās apkārtnes objekti (piemēram, klase, istaba) ar izvēlētu piemērotu samazinājumu, aprēķina objektu izmērus plānā (lieto kalkulatoru). (3., 5. klase)
- ♦ Aprēķina leņķa lielumu kā divu citu leņķu lielumu summu vai starpību (ja visiem leņķiem ir kopīga virsotne). (5. klase)
- ♦ Aprēķina riņķa līnijas garumu, izmantojot sakarību “riņķa līnijas garums ir aptuveni 6 riņķa līnijas rādiusa garumi”. (5. klase)

Būtiskās idejas

- Lai spriestu par figūrām, aplūko to īpašības, piemēram, malu vai leņķu vienādību, malu paralelītāti, perpendikularitāti, simetriju. Figūru var raksturot, izmantojot elementu novietojumu, elementu lielumu (garumu un leņķa lielumu), figūras laukumu vai tilpumu.
- Figūras var aprakstīt, skatoties, kā tās novietotas plaknē vai telpā. Lai precīzi aprakstītu figūru un tās atrašanās vietu, var izmantot koordinātu plakni.
- Figūras var pārvietot plaknē vai telpā – pārbīdīt, novietot simetriski vai rotēt.
- Figūras var apskatīt no dažādām perspektīvām. Spēja aprakstīt figūru no dažādiem skatu punktiem palīdz saprast saistību starp divu un trīs dimensiju figūrām un mentāli iztēloties izmaiņas.
- Skolēniem jāattīsta spēja reālajā dzīvē saskatīt figūras un to lietojumu un otrādi – saskatīt, kā figūras un to īpašības tiek lietotas reālajā dzīvē.

Figūru atpazīšana un definēšana

Skolēni bieži domā, ka matemātika nav saistīta ar reālo dzīvi, tāpēc viņiem ir apzināti jāpalīdz saskatīt matemātikas esamību, piemēram, jaunākiem skolēniem jāpalīdz ieraudzīt ģeometriskas figūras ikdienas dzīvē. Jautājumi, ko uzdosim, būs atkarīgi no klases telpas un vides.



Aktivitāte skolēniem

SR Atpazīst figūras apkārtējā vidē.

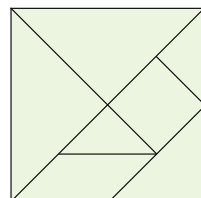
Skolotājs rāda uz vienu klases logu un lūdz skolēniem to uzskicēt. Parāda uz ekrāna dažus zīmējumus, kopīgi sarunājas, kas skolēnu zīmējumos un skolotāja zīmējumos ir kopīgs, nonāk līdz tam, kā var saukt šo figūru? (Taisnstūris.) Tad aicina skatīties un atpazīt, kur vēl ir redzami taisnstūri klasē. Skolēni minēs gal-dus, durvis, grāmatplauktus un citus priekšmetus. Skolotājs skaidro, ka matemā-tiski šīs figūras var nebūt gluži taisnstūris, jo stūri, piemēram, galdiem var būt noapaļoti, lai būtu drošāk, bet var teikt, ka forma ir līdzīga taisnstūrim.

Kādas figūras vēl redzamas? Varētu būt, ka klasē atrodas puķu pods, kam pamatne ir riņķa formā, galds, kuram nav taisnstūra forma. Var lūgt skolēniem atrast un uzzīmēt figūras, ko viņi redz ārpus klases, piemēram, uz ielas ir daudzstūra for-mas (astņstūru) stop zīme, veikalā ir konfekšu vai kūku kastes.



Figūru veidošana un sadalīšana

Lai palīdzētu skolēniem attīstīt spriešanu par figūrām, to veidošanu un īpašībām, var izmantot tangramu. Tangramu puzzle var uztaisīt arī skolēni paši no biezāka papīra, izman-tojot aprakstus mācību līdzekļos vai <https://images.app.goo.gl/SdFP7y48nGdpj9M9A>. Tangrama komplekts sastāv no vienādsānu taisnleņķa trijstūriem: 2 lieliem, 1 vidēji liela un 2 maziem, 1 kvadrāta un 1 paralelograma (sākumskolas skolēniem nav jālieto šis nosaukums).

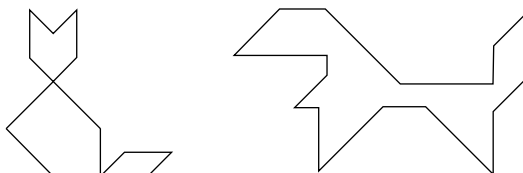


Tangrams ir interesants un izaicinošs visos vecumos, to var izmantot dažādās klasēs dažādiem mērķiem.

Vienalga, kurā vecumā skolēni sāks likt figūras kopā, veidojot jaunas kompleksas figūras, ir svarīgi dot pietiekami daudz laika, lai iepazītos ar tām (Hiele, 1999).



Figūru veidošanai var izmantot jau uzzīmētas kontūras, kas ir jāpiepilda ar tangrama gabaliem.



Skolotājs var aicināt parādīt saliktās figūras klasei un pastāstīt par tām vairāk. Tādējādi skolēni sāks izmantot matemātiskus jēdzienus un skolotājs var šādās aktivitātēs iepazīstināt skolēnus ar jauniem jēdzieniem.

1. klasē skolēni mācās par daudzstūriem un tangramus var izmantot, lai dotu priekšstatu, ka ir daudz un dažādu figūru, neaprobežoties tikai, piemēram, ar trijstūri vai viena veida četrstūri – taisnstūri. Skolēnus var aicināt skaitīt, cik malu, cik virsotņu ir katrai figūrai. Izmantojot un demonstrējot figūras, var lūgt atbildēt uz jautājumiem:

Vai vienmēr malu skaits un virsotņu skaits būs vienāds?

Kā atšķiras lielais trijstūris un mazais? Kas tiem ir līdzīgs?

Kas piecstūrim un kvadrātam ir kopīgs? Ar ko tie atšķiras?



Aktivitāte skolēniem

SR Veido dažādas figūras no dotajām figūrām un stāsta par tām.

Skolēniem, izmantojot mazos trijstūrus, jāuztaisa dažādas figūras.

Trīs no iespējamām figūrām:



Skolēni ievēros, ka figūrām ir malas ar vienādu garumu, ka divi trijstūri var veidot citu trijstūri, paralelogramu vai kvadrātu. Skolotājam arī uzmanīgi jāklausa, vai netiek veidoti nepareizi secinājumi vai vispārinājumi nevietā, jo no atsevišķiem piemēriem nevaram vispārināt.

Noslēgumā skolotājam ir svarīgi ar skolēniem veidot kopsavilkumu.

Piemēram, skolēni varētu minēt vai skolotājs varētu palīdzēt veidot šādu kopsavilkumu:

Mēs iemācījāmies, ka daudzstūrim ir tikpat daudz malu, cik virsotņu.

Reizēm var būt vairāk nekā viens veids, kā salikt figūru.

Kvadrātu var sadalīt divos vienādos trijstūros.

Joprojām ir jāatceras, ka visi skolēni vienā klasē nekad nebūs vienā ģeometriskās domāšanas līmenī. Skolēniem pašiem lietojot uzskates materiālus, ir iespējams veicināt ģeometriskās domāšanas izaugsmi vairākos līmeņos.

Figūras un to īpašības

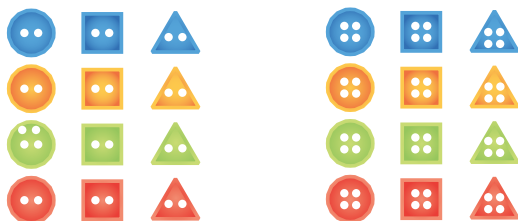
Sākotnēji skolēni mācās saskatīt figūras un stāstīt par tām, grupēt, izmantojot kādu īpašību (pazīmi), ko var saskatīt kopīgi vairākām figūrām. Lai attīstītu skolēnu domāšanu (Hīles 1. līmenis), ir jāvingrinās saredzēt īpašības un to, kā objekti atšķiras viens no otra. Kaut gan, piemēram, pogas nav īsti ģeometriski objekti, tās sākotnēji dod iespēju saprast īpašības un attīsta spēju to izteikt vārdos.



Aktivitātes skolēniem

SR Grupē figūras pēc vienas vai vairākām dotajām pazīmēm vai formulē savu grupēšanas pazīmi.

Materiāli: kartītes ar pogām vai pogas.



3 formas: trijstūra, kvadrāta un riņķa forma (var būt arī piecstūra, lai iznāktu vairāk).

4 krāsas: zila, zaļa, dzeltena, sarkana (var izmantot jebkādas citas 4 krāsas).

Pogu caurumi: 2 un 4.
Kopā būs 24 kartītes (vai 32).
Katrai grupai 1 kartīšu komplekts.

1. aktivitāte

Skolotājs lūdz skolēniem:

1. Sagrupējiet kartītes 2 grupās un paskaidrojiet, kā jūs sadalījāt! Drīkst būt tikai 2 grupas, un katra kartīte ir jāliek vienā vai otrā grupā.
Katra grupa skaidro, kā veidoja grupas un sadalīja kartītes.
2. Sadaliet kartītes 2 grupās citādi nekā pirmo reizi! Pierakstiet vai izstāstiet klasesbiedriem un skolotājam.
3. Sadaliet kartītes 2 grupās atkal citādi nekā pirmo vai otro reizi!

Kopīgi pārrunā, kā skolēni nolēmuši, kā notiks dalīšana, kas ir nepieciešams, lai veiktu šādu sadalīšanu. Būtiski, ka skolēni iegūst pieredzi formulēt principus, pēc kuriem notiek dalīšana, jeb neformāli veido pazīmi klasificēšanai divās grupās. Dažas atbildes varētu būt:

Sarkanās pogas – ne-sarkanās pogas.

Pogas ar “taisnām” malām – pogas, kam nav “taisnu malu”, jeb riņķa formas pogas.

Kvadrāta pogas – ne-kvadrāta pogas.

Pogas ar 2 caurumiem – pogas ar 4 caurumiem.

Ir svarīgi, ka skolēni paši izskaidro, kā viņi grupējuši un kā nolēmuši, kur likt katru objektu.

2. aktivitāte “Pogu virkne”

Pirmo piemēru skolotājs rāda uz ekrāna, un visa klase darbojas kopīgi.

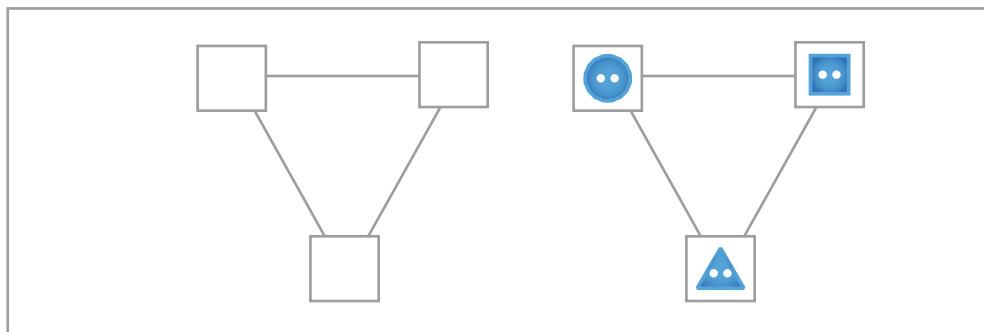
Skolotājs noliek vienu kartīti uz ekrāna un lūdz skolēniem izvēlēties nākamo kartīti – tā var atšķirties no pirmās tikai vienā veidā (cita forma, cita krāsa vai cits pogas caurumu skaits), piemēram, pirmā ir dzeltena kvadrātveida poga ar diviem caurumiem, otrā – dzeltena kvadrātveida poga ar četriem caurumiem. To noliek blakus un lūdz izvēlēties nākamo kartīti, izmantojot tos pašus nosacījumus – atšķirību tikai vienā veidā.

Skolēni spēli turpina grupās paši, sākot ar citu kartīti. Var arī likt skolēniem uzzīmēt kartīšu virkni uz papīra, lai nostiprinātu izpratni, ko nozīmē, ka pogas atšķiras tikai vienā veidā.

3. aktivitāte

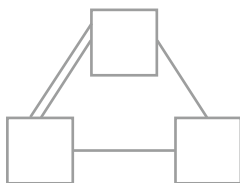
Izmanto laukuma (savienotie kvadrāti) sagataves un kartītes ar pogām. Nogrieznis, kas savieno kvadrātus, norāda atšķirību skaitu. Nolieciet kartītes tā, lai viena ir katrā kvadrātā, un tā, lai ir viena atšķirība starp tām savienotajos kvadrātos. Viens nogrieznis starp kvadrātiem rāda vienu atšķirību.

Piemēram,



Ir iespējams daudz atbilžu. Skolēni var atklāt, ka, liekot kartītes, nevar mainīties vienīgi pogu caurumu skaits, jo ir tikai 2 veidi, bet jāaizpilda trīs vietas. Ir ļoti svarīgi, ka skolēni paši to atklāj un skaidro. Tas palīdzēs veidot secīgus un loģiskus spriedumus un vēlāk veidot pierādījumus.

Nākamajā situācijā ir atkal jāsaliek pa vienai kartītei katrā kvadrātā, bet šoreiz starp kvadrātiem, kur ir divas līnijas, jāliek kartītes, kas atšķiras divos veidos, piemēram, abas ir sarkanas, bet vienai ir 4 caurumi, otrai divi, vienai ir riņķa forma, otrai kvadrāta.



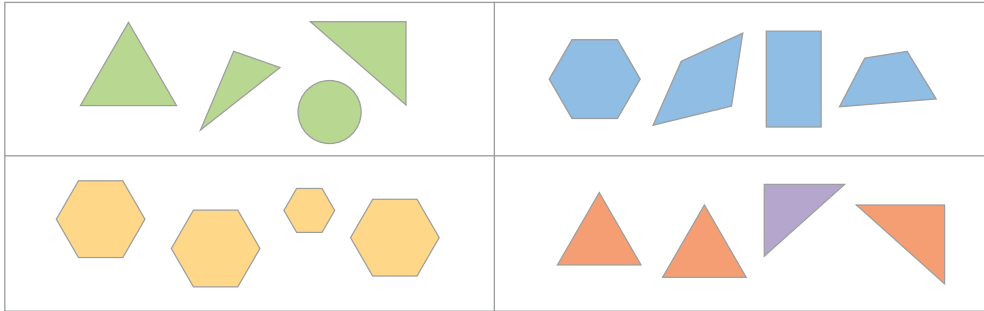
Tālāk attēlā redzamais uzdevums ir sarežģītāks, jo skolēniem ir jāizgudro pazīme, kam neatbilst kāda no dotajām figūrām grupā. Skolotājs var veidot dažādas šādas laukumu sagataves, tādējādi diferencējot mācību procesu.



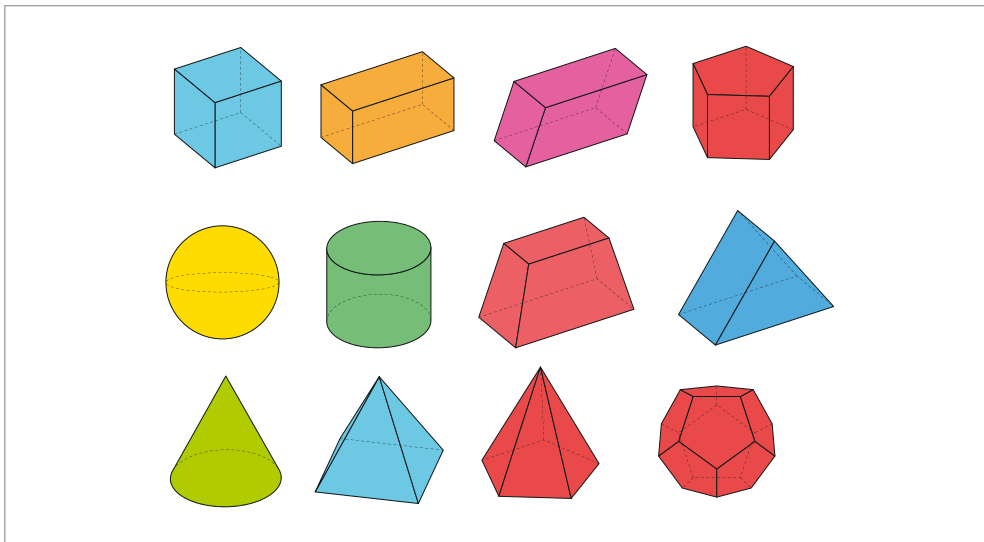
Aktivitāte skolēniem

SR Skaidro, kura figūra grupā neiederas.

Izpēti attēlus un nosaki, kura figūra katrā grupā neiederas!



Līdzīgi domājam par telpiskām figūrām jeb telpiskiem ķermeņiem, tos aprakstot, grupējot un sākot iegaumēt to nosaukumus. Jaunākās klasēs vienmēr nav jālieto precīzs telpiskās figūras nosaukums, skolēni mācās stāstīt, cik kopīgā vai atšķirīgā saskata katrā no šīm figūrām, piemēram, ar ko lode atšķiras no cilindra un kas tiem tomēr ir līdzīgs.



Būtiski ir dot iespēju skolēniem saskatīt šīs formas arī reālajā dzīvē – futbola bumba, konservu kārbā, kurpju kaste u. c. sadzīviskas lietas – un spriest, kā mēs varam vai nevaram tās raksturot ar ģeometrisko figūru palīdzību.



Aktivitāte skolēniem

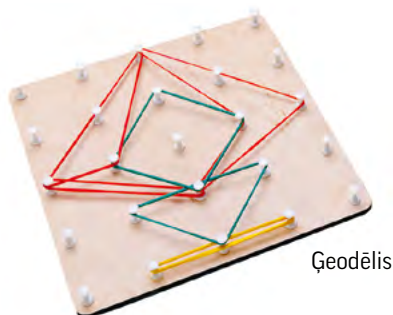
SR Šķiro telpiskas figūras, ja dotas vairākas pazīmes.

Lietojot telpiskās figūras, skolēniem tās ir jāsašķiro pēc vairākām pazīmēm. Piemēram, vai objekts ripo vai slīd.

Te var izmantot arī ikdienā sastopamus objektus, piemēram, bumbas, iepirkumu kastes, papīra dvieļu ruļļa iekšējo papes gabalu u. c. Kad skolotājs ir devis vairākas pazīmes, var lūgt skolēniem pašiem izdomāt vēl kādu pazīmi, kuru var izmantot, lai šķirotu objektus.

Prasme modelēt un zīmēt figūras

Izmantojot dažādas reprezentācijas, skolēni sākotnēji var no taustāmiem priekšmetiem veidot ģeometriskas figūras – te noder kociņi, ģeodēlis, tangrams u. c.



Ģeodēlis

Vizuālais attēlojums ir zīmējums, ko var veidot dažādi: ir figūras zīmējums bez dotiem lielumiem, ir precīzi zīmējumi, kas atbilst dotajiem lielumiem, un zīmējumi, kas ir atbilstošās situācijas “modeļi”.

Sākumā var uzdot skolēniem attēlot nogriežņus.

UZDEVUMA PIEMĒRI

Uz balta papīra ar lineālu zīmē nogriežni. (Nav būtisks izmērs, ir jāparāda figūras “forma”).

Uzzīmē 5 cm garu nogriežni 1) uz balta papīra, 2) uz rūtiņu papīra. (Zīmējumu veido precīzi atbilstoši dotajam garumam.)

Dots nogrieznis AB, kura garums ir 36 cm, punkts P to sadala uz pusēm. Izveido atbilstošu zīmējumu. (Zīmējums ir situācijas modelis, vizualizācija, tiek ievērots nevis garums, bet ideja par tā sadalīšanu uz pusēm.)

Nogriežņus kā vizualizācijas bieži izmanto arī situāciju uzdevumu risināšanā kā shematisku zīmējumu.

Atsevišķiem skolēniem var rasties grūtības, ja ir jāzīmē figūra, kas neietilpst dotajā lapā, – tad ir jāveido nevis precīzs zīmējums, bet tā vizualizācija, un skolēnam ir jāsaprot šī abstrakcija. Piemēram, dots taisnstūris, kura malu garumi ir 12 m un 10 m; dots taisnstūrveida zemes gabals, kura divu malu garumi ir 20 m, un 15 m, utt.

Biežāk vērojamās kļūdas un maldīgie priekšstati

Līdzīgi ir tad, kad lūdzam skolēnus zīmēt taisni, staru, leņķi, kas ietver bezgalības jēdzienu, un to mēs attēlojam burtnīcas lapā, kas ir galīgs lielums. Šis ir viens no mirkļiem, kad skolēnam, ja viņam nav izpratnes par pašu figūru, var veidoties maldīgs priekšstats, ka arī taisnei ir garums, staram ir garums un leņķa malai ir garums.

Telpiskas figūras

Iepazīšanās ar telpiskām figūrām notiek, aplūkojot modeļus, raksturojot tos un tad aicinot pētīt, kā tos var izveidot.

Izklājumi

Lai gūtu labu izpratni par telpiskiem ķermeņiem, skolēniem ir jāredz, kā no plaknes figūrām veidojas telpiska figūra, un jāskatās ģeometriskas formas ikdienas objektos. Iesākumā var izmantot sagrieztu kartona kasti.



Ja salokām kasti (taisnstūru paralēlskaldni), redzam, ka daļēji kartons pārklājas, lai kaste turētos kopā. Ja nogriežam “nevajadzīgos gabalus” (ir vairākas izvēles), redzam: kasti veido 6 taisnstūri jeb skaldnes.



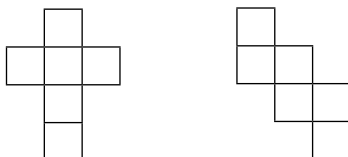
Ir jāsaprot viens no pamatjēdzieniem, proti, ka telpiskai figūrai – taisnstūru paralēlskaldnim – var būt vairāk nekā viens virsmas izklājums. Lai to izprastu,

var lietot saspraužamus taisnstūrus vai lūgt skolēniem atnest no mājām tukšas kartona kastes (piemēram, tējas vai griķu iepakojuma kartona kastītes u. c.). Tad skolēni strādā grupās – veido no kastēm izklājumus un tos uzzīmē.

Kubs

Lai vairāk iedziļinātos dažādos virsmas izklājumos, apskatām kubus, tiem visas skaldnes ir vienādas.

Kubu varam veidot no abiem šiem izklājumiem.



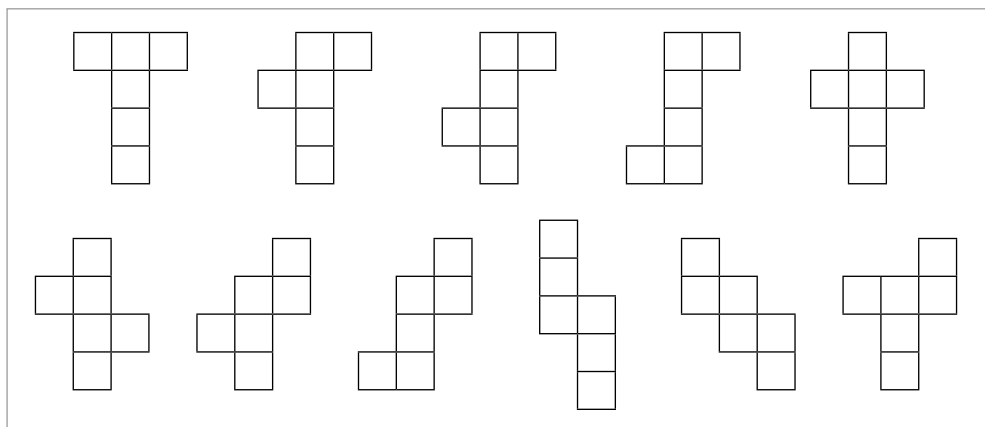
Dabiski klasē rodas jautājums: vai kubam ir citi izklājumi?

Skolotāja vadītā sarunā var konstatēt, ka ikvienam izklājumam ir vajadzīgi 6 kvadrāti (skaldnes), kuri ir savienoti ar vismaz 1 kopīgu malu (šķautni). Daži kvadrātu sakārtojumi neder. Piemēram:



Ja kvadrāts ar P burtu ir kastes pamats un mēģinām būvēt kasti, redzam, ka skaldnes pārklāsies un neveidos kubu.

Ir ieteicams skolēniem pašiem veidot izklājumus. Skolotājs var lūgt izmantot 6 papīra kvadrātus un izveidot figūras, lai atrastu izklājumus. Kad skolēns domā, ka ir atradis jaunu izklājumu, to var uzzīmēt uz rūtiņu papīra, izgriezt un salocīt. Kubam ir 11 izklājumi, ko skolēni var atklāt, mēģinot dažādas kombinācijas, un salīdzināt ar iepriekš atrastajiem izklājumiem.

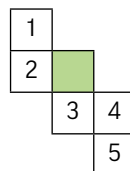


Svarīgākais, veicot šo aktivitāti, nav atrast visus 11 izklājumus, bet vingrināt telpisko domāšanu, pašiem spriežot un attīstot matemātisko problēmu risināšanas prasmi. Bieži skolēniem izklājumi atkārtosies. Kopīgi var pārrunāt, kā saprotam, kas ir cits izklājums. Ja pagriež izklājumu, tas var izskatīties citādāk, bet tomēr ir tas pats izklājums.

Skolotājs var mudināt meklēt atbildes uz dažādiem jautājumiem par dažādiem izklājumiem.

UZDEVUMA PIEMĒRS

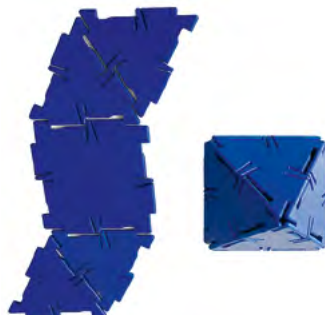
*No zīmējumā redzamā virsmas izklājuma tika izgatavots kubs.
Kura kuba skaldne atradīsies tieši pretī izkrāsotajai skaldnei?*



Ir svarīgi to kopīgi pārrunāt, prasot skolēniem, lai viņi izstāsta, kā ir nonākuši pie atbildes.

Vēlāk uz skaldnēm var uzzīmēt simetriskus un asimetriskus zīmējumus un prasīt, kā izskatīsies kaste, kad tā ir salikta.

Aplūkojot telpiskas figūras un to izklājumus, ieteicams neaprobežoties ar taisnstūra paralēlskaldni, bet aplūkot dažādas figūras, izmantot dažādus izklājumus telpisku figūru veidošanai, piemēram, piramīdas izklājuma pamats ir kvadrāts.



Jautājumi pārdomām

Kāpēc jāveicina skolēnu izpratne par figūru, ka to var izveidot no vairākām citām figūrām vai sadalīt vairākās figūrās?

Kā veicināt skolēnu izpratni par figūru īpašībām?

Kāpēc un kuru satura jautājumu apgūvē var izmantot tangramu?

Kā izmantot modeļus, lai veicinātu izpratni par telpiskām figūrām?

Literatūra tālākai uzziņai

Burger, W., & Shaughnessy, M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31–48.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. In M. Lindquist, & A. Schulte, *Learning and Teaching Geometry, K-12 NCTM 1987 Yearbook* (pp. 1–16). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Hannibal, M. A. (1999). Young Children's Developing Understanding of Geometric Shapes. *Teaching Children Mathematics*, 5, 353–357.
- Hiele, P. M. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play. *Teaching Children Mathematics*, 5–6, 310–316.
- Mayberry, J. (1983). The van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(1), 58–69.
- Reys, R., Lindquist, M., Lambdin, D., & Smith, N. (2015). *Helping Children Learn Mathematics*. Hoboken NJ: John Wiley & Sons.
- Walle, J. A. (2006). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. New York: Pearson Education.
- Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics Teaching Developmentally*. Boston: Pearson.
- Wheatley, G. H., & Reynolds, A. M. (1999). "Image Maker": Developing Spatial Sense. *Teaching Children Mathematics*, 5, 374–378.

2.5. Mērīšanas un mēru koncepta veidošana

Viens no datu ieguves un uzkrāšanas veidiem ir mēri un mērīšana, kas ļoti cieši saistās ar reālās dzīves un zinātnes situāciju aprakstīšanu. Mērīšana iekļauj salīdzināšanu ar noteiktu vērtību – izvēlētu etalonu. Garums tiek salīdzināts garuma vienībās, laukums – laukuma vienībās, laiks – laika vienībās utt. Jēgpilna mērīšana un novērtēšana ir atkarīga no mērinstrumenta un mērīšanas vienības izvēles. Lai to veiktu, svarīga ir izpratne par mērīšanas instrumentu un korekta tā lietošana. Nosacīti varam mērus iedalīt vairākās grupās:

- garums, leņķa lielums, laukums, tilpums (saistīti ar ģeometrijas apguvi);
- laiks, nauda, temperatūra, masa;
- atsevišķas saliktās mērvienības, piemēram, ātruma noteikšanai.

Mēri un mērīšana sasaista aritmētiku ar reālo pasauli.

Ar vārdiem vai mainīgajiem (formulu veidā) uzrakstītas sakarības dod iespēju, piemēram, laukuma un tilpuma noteikšanai izmantot aprēķinus, parāda metodi, kā noteikt laukuma vai tilpuma skaitlisko vērtību. Lai to izdarītu, ir nepieciešami garuma mērījumi.



Svarīgi paturēt prātā

- Vide, kurā skolēns uzturas, un viņa iegūtā pieredze ļoti ietekmē to, kādas prasmes un jēdzieni jau ir viņa rīcībā un ko viņš būs spējīgs iegūt mācību stundā. Piemēram, ja kādam ģimenē darbs vai hobijs saistās ar mērīšanu, tad skolēnam varētu būt daudz plašākas zināšanas un prasmes nekā tiem, kuri šādā vidē neatrodas. Arī dzīvesvieta var ietekmēt izpratnes attīstību. Ja skolēns dzīvo ģimenes mājā ar dārzu vai laukos, pastāv daudz vairāk iespēju, ka viņš ir novērojis un piedalījies praktiskā mērīšanā, attīstījis šo prasmi ārpus skolas. Cita veida mērīšanas prasmes varētu būt ieguvīšis skolēns, kas dzīvo daudzdzīvokļu ēkā pilsētā.
- Ir svarīgi noskaidrot skolēnu iepriekšējo pieredzi. To var uzzināt, praktiski dodot iespēju skolēniem veikt mērīšanu un tad pārrunājot, vai viņi to jau prot, kā zina, ka prot, un tad noskaidrojot, kas ir jāiemācās par mērīšanas procesu.
- Mērot garumu, laukumu, tilpumu, nekad nevar iegūt pilnīgi precīzus rezultātus, jo vienmēr var lietot mazāku jeb precīzāku mērvienību. Piemēram,

pildspalvas garums, mērot centimetros, ir 14, bet, ja mērām milimetros, var būt 141 milimetrs.

- Ir mērījumi, kurus veic netieši, mērot kādu citu lielumu. Piemēram, ja ir uzdevums izmērīt riņķa līnijas garumu, tad ar lineālu to tiešā veidā nevar izdarīt, bet jāizmēra rādiusa garums un jāaprēķina riņķa līnijas garums. Ja modelē riņķa līniju ar auklu, tad to var atritināt un izmērīt auklas garumu. Ja ir jānosaka ātrums, tad veic ceļa un laika mērījumus un aprēķina ātrumu.

“Nepietiek, ka skolēni tikai prot nosaukt dažādu mēru vienības un zina to savstarpējās lielumu attiecības. Ļoti svarīgi, lai viņiem būtu priekšstatī par mēru vienību reālo lielumu. Arī tas vēl ir par maz – skolēniem ir jāapgūst iemaņas mēru praktiskā lietošanā – mērīšanā, kā arī dažādu mērvienību pārveidošanā. [...] Viņiem jāatrisina dažādi uzdevumi.” (Dukurs, Mencis, 1965, 264)

2.5.1. Garums, tā mērīšana un aprēķināšana

Garuma mērvienību apguves attīstības trajektorija

- ♦ Pieraksta un lasa mērvienības (dm, cm, m). (1. klase)
- ♦ Mērvienības, līdzīgi kā skaitļus, grupē pa desmit – 10 centimetri veido 1 decimetru, 1 metrā ir 10 dm, 100 cm (1 dm = 10 cm; 1 m = 10 dm; 1 m = 100 cm). (1. klase)
- ♦ Vienlaikus lieto vairākus garuma mērus (m, dm, cm). (1. klase)
- ♦ Lasa zīmējumu, lietojot izteikumus “2 reizes garāks”, “2 reizes īsāks”. (2. klase)
- ♦ Salīdzina garumus, kuri izteikti mm, cm, m, km. (3. klase)
- ♦ Samazina attālumu, kas noteikts dabā. (3. klase)
- ♦ Veido tabulu garuma mērījumu un aprēķinu pierakstīšanai objekta plānā. (3. klase)
- ♦ Izprot, ka mērogs rāda attiecību starp diviem lielumiem – attālumu kartē un attālumu dabā. (6. klase)

Garuma mērīšanas un lielumu iegūšanas attīstības trajektorija

- ♦ Salīdzina garumus (īsāks, garāks, vienāds) bez mērīšanas – uzliekot figūras vienu uz otras. (1. klase)
- ♦ Pārliecinās par plaknes figūru vienādību, tās praktiski uzliekot vienu uz otras. (1. klase)
- ♦ Garuma mērīšanai izmanto lineālu. (1. klase)
- ♦ Salīdzina objektus dažādi – savietojot, mērot ar kādu trešo objektu. (1. klase)
- ♦ Mēra un aprēķina laužas līnijas garumu. (1. klase)
- ♦ Objektu mērīšanai izvēlas piemērotu mērinstrumentu, atbilstošas mērvienības (cm, dm, m, mm), mērīšanas precizitāti, datu fiksēšanas veidu, veicot mērījumus arī dabā, salīdzinot mērīšanas rezultātus, spriežot par atšķirību cēloņiem. (2. klase)

- ♦ Zīmē visus taisnstūrus (rūtiņu tīklā) ar doto perimetru, skaidro, kā zina, ka uzzīmēti visi iespējamie. (3. klase)
- ♦ Nosaka garumu, attālumu aptuveni, cenšas iztēloties (piemēram, cik daudz ir 1 km salīdzinājumā ar skrejceļa garumu sporta laukumā u. tml.). (3. klase)
- ♦ Pētījumā iegūst datus, veicot mērījumus un aprēķinus; apkopo un attēlo iegūtos datus. (4. klase)
- ♦ Nosaka riņķa līnijas garumu. (5. klase)
- ♦ Veic mērījumu aprēķinus, lai uzzīmētu apkārtnes objekta plānu. (6. klase)
- ♦ Koordinātu plaknē nosaka attālumu no punkta līdz taisnei. (6. klase)

Mērīt garumu nozīmē atbildēt uz jautājumu “cik garuma vienību ietilpst”

Pirms sākt ar garuma vienības izpratni, skolēniem jāparāda vajadzība pēc tās – šajā gadījumā meklējam atbildi uz jautājumu – cik garuma vienību?

Vienības izpratne garuma mērīšanai – sākotnēji tie var būt nosacīti mēri: soļi, sloksnītes, plaukstas, tad ieviešam vienoto mērvienību “centimetrs”.

Mērīšanas jēgas attīstīšanai ir ļoti svarīgi, ka skolēni izmanto konkrētus objektus – auklas, grāmatas u. c.

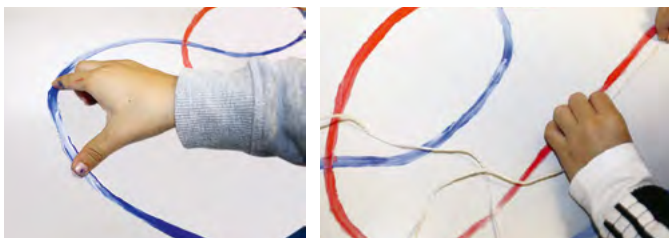


Aktivitāte skolēniem

SR Veido stratēģiju, kā mērīt netipiskā situācijā.

Skolēniem tiek dots uzdevums domāt, kā varētu izmērīt attālumu.

Gliemeži rāpojot atstājuši savas pēdas uz galda. Kā var zināt, kurš no gliemežiem norāpoja īsāko ceļu?



Skolēni meklē veidus, kā izmērīt – savus pirkstus, klucīšus, aukliņas. Atbildes uzraksta uz nelielas lapiņas, saliek trauciņā. Kopā salīdzina problēmas risinājuma metodes un veidus.

Mērīšanas vienības

Vienības izpratnes veidošana – sākotnēji izmantojam skolēnam pieejamus materiālus – zīmuļus, grāmatas, plaukstas u. c., mērāmo objektu savietojam ar izvēlēto mērīšanas vienību.

Cik zīmuļu var nolikt gar tavu grāmatu? Kāpēc ir dažādas atbildes – piemēram, 2 vai mazāk nekā 2, vairāk nekā 2, liekot pie vienas un tās pašas grāmatas?

Būtiska ir saruna ar skolēniem par to, kāpēc kādam zīmuļu skaits bija 2, bet citam 4. Kad skolēni redz, ka ir dažādas atbildes, viņi būs gatavi pieņemt ideju, ka ir mērvienību standarti un ir jāvienojas par mērīšanas vienību.



Aktivitātes skolēniem

SR Novērtē garumu, mēra garumu noteiktās vienībās.

Ievadaktivāte, kuras mērķis ir nonākt līdz būtībai, kāpēc mēra.

1. *Vai skolotāja galdu varētu novietot starp diviem grāmatu plauktiem klasē? Vai skolēnu galdu varētu šādi novietot?*

Šajos divos jautājumos ietilpst arī prasme salīdzināt skaitļus. Mazs bērns varbūt var atsevišķi saskaitīt, ka ir 7 bērni un 5 krēsli, bet vēl nespēs atbildēt, vai visiem bērniem pietiks krēslu. Tāpat var mērīt galda garumu un vietu starp grāmatu plauktiem, bet izpratne, ka galda garumam ir jābūt īsākam par novietošanas vietas garumu, ir jāattīsta.

2. Sākotnēji var likt novērtēt pēc acumēra, cik sloksnīšu gara varētu būt mācību grāmatas vāka viena mala. Tad, lietojot vienāda garuma sloksnītes un mācību grāmatu, skolotājs jautā skolēniem, cik sloksnīšu var nolikt gar grāmatas malu, un pārrunā atbildes – “vairāk nekā”, “mazāk nekā”.

Tad izmanto papīra sloksnītes (vai klucīšus) ar 1 cm garu malu, lai atbildētu uz jautājumu: “Cik **centimetru** var salikt gar tavas grāmatas malu?” Turpina mērīt citus objektus, piemēram, skolēnu galdus.

3. Skolēnam ir jāizmēra, ar cik viņa soļiem var izteikt telpas garumu. Jautājums: *ja tagad skolotājs mērīs ar saviem soļiem, vai būs apmēram tas pats skaitlis, vairāk soļu vai mazāk? Kāpēc tā ir?*

Ja skolēni domā, ka būs tikpat daudz vai vairāk, skolotājs mēra ar soļiem, ļaujot skolēniem skaitīt un redzēt, ka ir mazāks soļu skaits. Jāļauj skolēniem diskutēt un pārrunāt. Uzreiz pateikt skolēniem, ka skolotājam būs mazāks soļu skaits, jo skolotāja solis ir garāks, nav efektīvi, jo šī ir lielāka ideja, ne vienkāršs fakts, skolēniem līdz tai būtu jānonāk pašiem.



Jautājums pārdomām

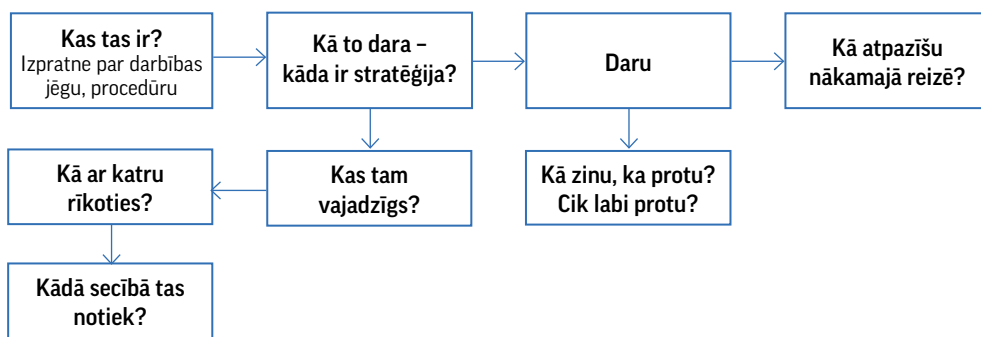
Kas būtu jāizrunā ar skolēniem, sākot mācīties jaunu mērīšanas prasmi? Kāpēc?

Lineāls un dažādas garuma mērvienības

Skolēni drīz saprot, ka mērīt ar zīmuli vai mazām papīra sloksnītēm prasa daudz laika un ir neveikli (sloksnīšu garums ir 1 cm). Visdrīzāk viņi paši varbūt zinās un ieteiks, ka varētu izmantot lineālu. Ja nē, skolotājs var pārrunāt ar klasi, skaidrojot, ka ir izgudrots vieglāks veids, kā mērīt, – izmantojot lineālu.

Mērīšana un mērījuma fiksēšana vien nebūs efektīva, ja bērnam nebūs intereses vai iemesla domāt par rezultātu. Ieteicams pirms mērīšanas izteikt viedokli par to, kāds varētu būt garums, lielums (kā vispār nonākt pie šādas atbildes), un tad veikt mērījumu. Garums būs tuvāk 10 vai 20 cm? Būs vairāk vai mazāk par 15 cm? (Walle et al., 2010).

Apgūstot praktisku prasmi – mērīt ar lineālu –, izmantojam šādu algoritmu:



Apgūstot prasmi, skolēnam ir jāiegūst atbildes uz jautājumiem:

- *Kas tas ir?*
- *Kas ir mērīšana?*
- *Kam nosakām garumu ar lineālu?*
- *Kā to dara?*
- *Kas tam vajadzīgs?* – Lineāls, mērlente, metramērs u. c.
- *Kā ar katru instrumentu rīkoties? Kādā secībā tas notiek?*

Domājot, kā notiks mērīšana, ir svarīgi pārrunāt – ko redzam uz lineāla, ko ar to darīsim, uzsverot, ka sākums ir 0, gan arī kā nolasām rezultātu – 1 norāda 1 mērvienības garumu.

Ieteicams pārrunāt, ka ir dažādi rīki garuma mērīšanai, pat lāzera mērāmie rīki.

Kurus no dotajiem instrumentiem izmanto garuma mērīšanai? Apvelc!



Iekrāso garuma mērus!

12 h	6 m	6 min	8 cm	9 kg	3 h	2 dm	30 min	25 cm	2 m
------	-----	-------	------	------	-----	------	--------	-------	-----

Jo garāki objekti jāmēra centimetros, lietojot parasto lineālu, jo grūtāk kļūst to paveikt. Kad centimetri ir izprasti, tad skolēni ir gatavi saprast, kāpēc ir vajadzīgi decimetri, metri un kilometri, kā arī mazāka mērvienība – milimetrs.

Skolēni var veidot decimetru un pat metra sloksnītes, ar kurām darbojoties iegūst decimetra un metra garuma izjūtu. Tomēr ir jāpārdomā, cik jēgpilni notiek šī instrumentu veidošana un vai to nav lietderīgāk aizstāt ar sarunu par precīzu mērlenti un to dažādību.



Izaicinošāks uzdevums skolēniem varētu būt – kā mērīt un vai to var izdarīt, ja lineālam ir nolūzis gals (neredzam 0). Kad mērīšana ir pabeigta, nākamais solis

ir domāt, kā pierakstām iegūtos datus, kā saīsināt mērvienību pierakstu. Mērot ir ļoti svarīgi, lai skolēni lietotu metra lineālu vai mērlenti, kur ir skaidri redzami gan centimetri, gan decimetri, gan metri.

Skolēni, izmantojot acumēru, var sākotnēji noteikt, cik metru plata vai gara ir viņu klase, un tad ar “metru” – koka lineālu – veikt mērīšanu.

Ir svarīgi, lai skolēniem, pirms viņiem liek pārveidot garumu starp mm, cm, dm un km darba lapās, būtu pieredze lasīt šos mērus, izmantojot lineālu vai mērlenti, saskatīt mērvienību saistību reālās situācijās. Skolēni tad daudz labāk saprot, ka var teikt 30 cm jeb 3 dm, jeb 300 mm, jeb 0,3 m.

Lieta	Garums vai platums
pankājais	3 m 1 cm
masa tāfele	1 m
durvis	29 cm 5 mm
logs	49 cm 2 mm

Lieta	Garums
bedroomis	177 cm
trijstūra mācību galda	20 cm
plauktis	76 cm 6 mm
delis	37 cm 9 mm
stangas	34 cm 7 mm

Mana zīmula garums ir	16 cm 1 mm
dzēsgrauķis	8 cm 1 mm
šķērslis	15 cm
līnes	10 cm 5 mm
lineāls	16 cm 3 mm

Domājot, kā skolēni lieto apgūtās prasmes jaunā situācijā, ieteicams piedāvāt praktiskas situācijas, kurās skolēniem ir jāplāno, kā un ko viņi mērīs, piemēram, kā izmērīt un noteikt, cik gara lentīte būs nepieciešama dāvanu kastītei.

STUNDAS PIEMĒRS

“Lentīte dāvanu kastītei”

https://www.siic.lu.lv/fileadmin/user_upload/lu_portal/projekti/siic/Stundu_piemeri/SP_Lentite_davanu_kastitei.pdf



Apkārtmēra jeb perimetra mērīšana un aprēķināšana

Perimetra mērīšanas un lielumu iegūšanas attīstības trajektorija

- ♦ Mēra daudzstūra malu garumus un aprēķina perimetru. (2. klase)
- ♦ Aprēķina perimetru figūrām, kurām malu garumi vienādi, veidojot dažādu pierakstu (kā summu, kā reizinājumu ar 3, 4 vai 5). (2. klase)

♦ Aprēķina taisnstūra perimetru. Figūras ar vienādu perimetru var atšķirties. (3. klase)
Pie jēdziena par taisnstūra un citu figūru **perimetru** skolēni nonāk, risinot uzdevumu ar reālu saturu, piemēram, cik garu līstīti vajag gleznas rāmīša pagatavošanai. Tā var iegūt arī definīciju, ka taisnstūra (figūras) visu malu garumu summu sauc par taisnstūra (figūras) apkārtmēru jeb perimetru.

Sākumā skolēni mēra perimetru reālām figūrām; tad var veikt mērījumus dotajām figūrām un tikai pēc tam nonākt līdz taisnstūra perimetra aprēķināšanas izteiksmei un veikt aprēķinus nemērot. Tālākas izpratnes veicināšanai risina “apvērstos” uzdevumus.

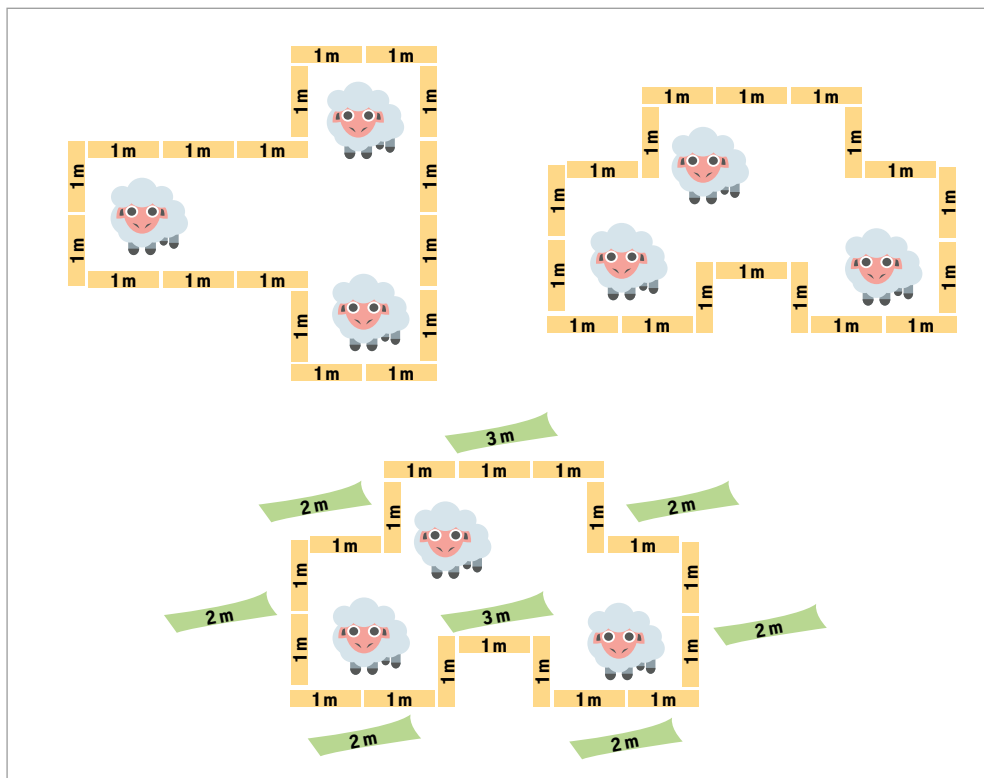


Aktivitāte skolēniem

SR Modelē figūru un tās perimetra aprēķināšanu.

Izveido modeli – nožogojumu aitām, izmantojot dotās sloksnītes! Aprēķini tā perimetru! Salīdzini ar klasesbiedru, kādus nožogojumus jūs izveidojāt – vai tie ir vienādi?

Skolēnu risinājumu piemēri:



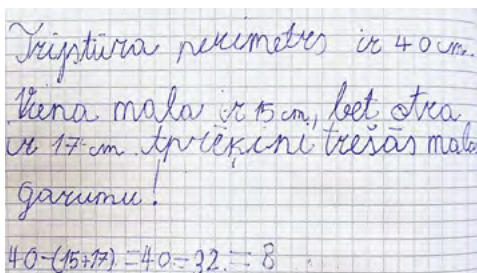
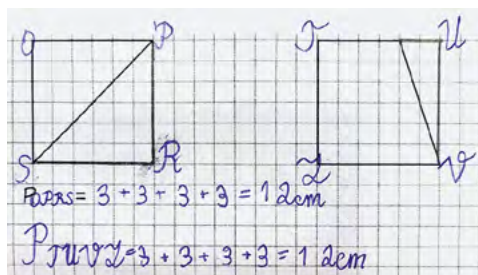
SR Zīmē iespējamus taisnstūrus, ja dots to perimetrs.

Uzzīmējiet taisnstūri, kura perimetrs ir 18 cm (malu garumi ir veseli centimetri)! Salīdziniet savus zīmējumus! Vai varat uzzīmēt visus iespējamus dažādos taisnstūrus, kuriem ir šāds perimetrs? Kā zināt, ka esat uzzīmējuši visus gadījumus?

Kad skolēni ir izpratuši apkārtmēra jeb perimetra jēgu, to var sākt izmantot aprēķinos – nosakot figūras perimetru vai kādu no tās elementu garumiem, ja perimetrs ir zināms.

UZDEVUMA PIEMĒRS

Papildini tā, lai veidojas kvadrāts! Nosauc kvadrātu! Aprēķini perimetru!



Biežāk vērojamās kļūdas un maldīgie priekšstati

- Skolēniem bieži rodas maldīgi priekšstati par garuma mērīšanu, ja to, “kā mēs mērām”, rāda, pirms ir iegūta izpratne par to, “kāpēc mēs mērām” un “ar ko mērām”.
- Skolēni mēdz pielikt pie mērāmā objekta pašu lineāla sākumu vai iedaļu 1, nevis 0. Ir būtiski skolēniem saprast: ja mērīšanu sāk pie citas atzīmes, nevis pie nulles, piemēram, mērīt sāk pie 1, tad vēl ir jāveic mērījuma aprēķini – no gala rezultāta ir jāatņem 1.
- Skolēni dažkārt domā – ja mērvienība ir lielāka, tad izmērītais lielums arī būs lielāks; kļūdās salīdzinot, piemēram, 203 cm un 2 m vai 25 cm un 0,02 m.
- Izpratnes trūkums par to, kas ir figūras perimetrs, – skolēni vispārina perimetra aprēķināšanu kā 2 lielumu (garums + platums) saskaitīšanu, piemēram, arī trijstūrim, rēķinot perimetru, to dubulto. Tā var notikt, ja formāli ļoti daudz vingrinās aprēķināt tikai taisnstūra perimetru. Tādēļ var piedāvāt domāt par perimetru arī kā par $2 \cdot \text{garums} + 2 \cdot \text{platums}$.

2.5.2. Leņķa mērīšana

Leņķa lieluma mērvienība, mērīšanas un lielumu iegūšanas attīstības trajektorija

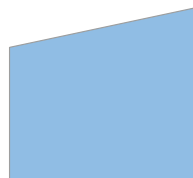
- ♦ Nosaka leņķa lielumu (šaurš, plats) salīdzinājumā ar taisnu leņķi. (3. klase)
- ♦ Mēra leņķa lielumu grādos. (4. klase)
- ♦ Nosaka leņķa veidu (šaurš, taisns, plats, izstiepts, atvērts) un salīdzina leņķus pēc to lieluma grādos vai savstarpējā novietojuma (ja virsotne ir kopīga). (5. klase)

Leņķa iepazīšana, nesaistot to ar staru

Leņķis tiek aplūkots kā daudzstūra elements, nevis kā atsevišķa figūra. Sākotnēji skolēnu pieredze par leņķiem ir tāda, ka tie ir nemainīgi objekti, ne pagriezieni. Piemēram, dotajā četrstūrī ir 2 taisni leņķi, 1 šaurš leņķis un 1 plats leņķis. Priekšstatu par taisnu leņķi skolēni iegūst, vērojot galda, grāmatas, loga rūtis (taisnstūrveida) stūrus, kā arī veidojot taisnstūrus, loto spēles kartītes u. c. Tālāk leņķa jēdzienu aplūko, izmantojot figūras, piemēram, trijstūri, četrstūri.

Sākumā izmantojam tikai izliektus daudzstūrus, jo aplūkojam tikai taisnu, šauru un platu leņķi.

Leņķu salīdzināšana, “mērīšana” sākotnēji nozīmē salīdzināšanu ar taisnu leņķi. Lai noteiktu taisnu leņķi, par etalonu var izmantot trijstūra lineālu – uzstūri, kā arī objektus, kuri ir taisnstūris, vai rutiņu režģi – arī no caurspīdīga materiāla. Vēlams kopā ar skolēniem konstatēt, kā no neregulāras papīra lapas (to salokot) var iegūt precīzu taisnu leņķi.



Figūrām, kuru malu garumi ir vienādi, ne vienmēr būs vienādi visu leņķu lielumi

Lai parādītu, ka daudzstūra raksturošanai nepietiek tikai ar malu skaitu un malu garumiem, var izmantot taisnstūri (figūra, kuru skolēni jau pazīst) un tādu paralelogramu, kam no šī taisnstūra atšķiras tikai leņķu lielums.



Aktivitāte skolēniem

SR Salīdzina figūras, izmantojot malu garumus un novērtējot leņķu lielumu. Salīdzina taisnstūri ar paralelogramu (jēdziens “paralelograms” nav jālieto), kura malu garumi ir tādi paši kā taisnstūrim, bet leņķi nav taisni; nosaka šīm figūrām kopīgo un atšķirīgo.



Zīmē/veido daudzstūrus, ja doti to elementi – virsotņu skaits, leņķu veidi u. c., piemēram, uzzīmē vai izveido no kociņiem četrstūri, kuram tikai 2 leņķi ir taisni!

Leņķa kā tādas figūras uztvere, kuru veido divi stari un apgabals starp tiem

Ir svarīgi, ka vēlāk skolēniem veidojas izpratne par leņķi kā staru (vai malu) pagriezienu rezultātu.

Lai palīdzētu attīstīt domāšanu par leņķa veidošanu kā dinamisku procesu, skolēniem nepieciešams aktīvi darboties.



Aktivitāte skolēniem

SR Praktiski modelē leņķi un stāsta par tā lieluma izmaiņām.

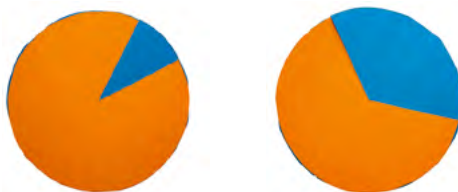
Praktiski veido leņķa modeli, lai raksturotu dažāda veida leņķus! Skaidro, kas ir stars! Vārdiski apraksti, kas ir leņķis!

Pirms leņķa lieluma mērīšanas grādos skolēniem jāsaprot, kas ir leņķa lielums, kas to nosaka, kā to var redzēt un parādīt. Skolēni salīdzina leņķus, tos tieši savietojot un savietošanai lietojot arī digitālos rīkus. Skolēni secina, ka, pagarinot leņķa malas, leņķa lielums nemainās, un stāsta, kas jāmaina, lai doto leņķi samazinātu vai palielinātu, modelē to praktiski.

Var izmantot plastmasas stienīšus, kurus var savienot un mainīt atvērumu.

Skolēni rāda mazākus un lielākus leņķus. No sākuma ir ieteicams salīdzināt leņķus ar taisnstūri. Mainot stienīšu garumu, ir svarīgi domāt, kas ir leņķa lielums, ka tas nav atkarīgs no modeļi izmantotā nogriežņa garuma.

Lai labāk izprastu leņķa mērus, var izmantot divus krāsainus riņķus, kuriem abiem ir viens griezumš līdz riņķa centram. Saliekot vienu otrā, var tos grozīt, redzot, kā vienas krāsas laukums kļūst lielāks, otras mazāks. Var aicināt skolēnus šādi veidot leņķus (sk. att.), piemēram, zilu platu leņķi, zilu šauru leņķi, oranžu atvērtu leņķi.



Ieteicams leņķa lieluma izpratnei izmantot stara pagriešanu – ja izmantojam riņķu modeli, tad pārrunājam, kā tajos saskatīsim staru. Stara izpratnei un tā pagriešanai var izmantot digitālos rīkus. Turpmāk tas palīdzēs veidot izpratni par izstieptu leņķi (180°) un pilnu leņķi (360°).



Vingrināties nosaukt un pierakstīt leņķus var arī, izmantojot digitālās iespējas. Leņķa nosaukšanai un pierakstīšanai izmanto 1 lielo vai 3 lielos burtus un leņķa simbolu.

SR Lietojot pieņemtos apzīmējumus, nosauc un pieraksta leņķus.

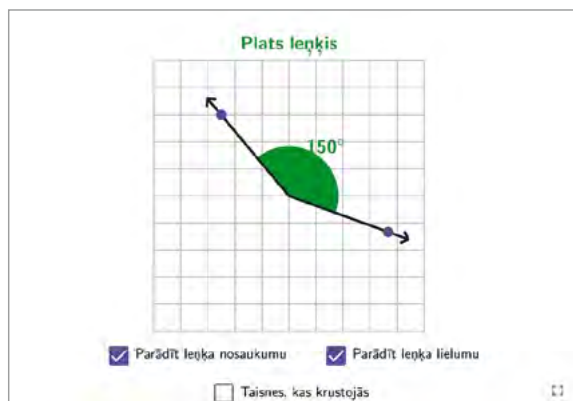
<https://www.geogebra.org/m/twpy9jkq>



Sākotnēji skolēnam ir iespēja pētīt un mēģināt saprast, cik liels ir atbilstošais leņķis. Tad var vingrināties izveidot noteiktus leņķus – šaurus, taisnus, platus leņķus, pagriežot staru, var arī izmantot digitālās iespējas.

SR Nosaka leņķa veidu (šaurš, taisns, plats) un salīdzina leņķus pēc to lieluma grādos vai savstarpējā novietojuma (ja tiem ir kopīga virsotne).

<https://www.geogebra.org/m/qcag23hf>



Skolēniem ir jāapgūst praktiska prasme – mērīt leņķus ar **transportieri**.

Kad mērām leņķa lielumu, tāpat kā mērot citus ģeometriskos lielumus, meklējam atbildi uz jautājumu, cik garuma, laukuma, tilpuma vienību ietilpst, tagad jautājam, cik grādu veido leņķi?



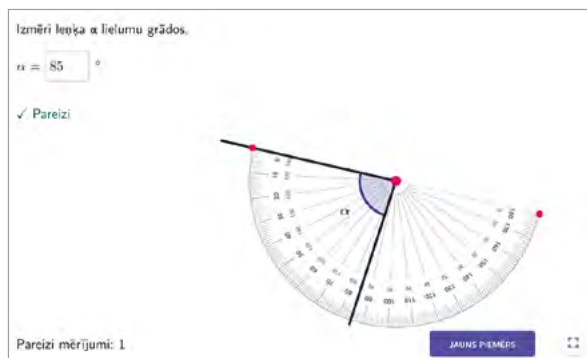
Vingrināties mērīt leņķus var arī, izmantojot digitālās iespējas. Skolēni vingrinās pareizi novietot transportieri un nolasīt mērījumu no transportiera skalas.

SR Mēra leņķa lielumu ar transportieri (lielāks nekā 0° un mazāks nekā 180°).

Izmēri leņķi, izmantojot transportieri, un ieraksti mērījumu, lai pārbaudītu!

<https://www.geogebra.org/m/ecqcsamr>





Skaidrojot, kā mēra leņķi, raksturo kopīgo un atšķirīgo nogriežņa garuma un leņķa lieluma mērīšanā.

Sīkāks apraksts ir apskatāms Skola 2030 mācību plānošanas e-vidē “MAPE”: *Leņķa mērīšana. Mācīšanās stratēģijas.*



Svarīgi paturēt prātā

- Skolēniem ir nepieciešams saprast, ka leņķa mērs nav atkarīgs no tā, cik “gari” tiek zīmēti stari, kas veido leņķi.
- Lai veicinātu izpratni par izstieptu, atvērtu un pilnu leņķi, skolēniem lūdz izmantot modeļus, t. sk. leņķa modeli ar mainīgu atvērumu, un skaidrot, kā viņi saprot, kas ir izstiepts leņķis, pilns leņķis, atvērts leņķis. Atvērtu leņķi skolēni iepazīst arī, veidojot un raksturojot ieliektu daudzstūri (nosaukums “ieliekts daudzstūris” nav jālieto).
- Skolēniem ir svarīgi saprast, ka nezināmu leņķa lielumu var noteikt ne tikai mērot, bet arī veicot aprēķinus – saskaitot vai atņemot zināmus leņķu lielumus.
- Leņķu mērīšanas prasme nepieciešama, lai vēlāk ar izpratni apgūtu sektoru jeb riņķa diagrammas zīmēšanu.



Aktivitāte skolēniem

SR Veido leņķus un aprēķina leņķa lielumu.

Ar staru sadali izstieptu leņķi divos leņķos, izmēri vienu no iegūtajiem leņķiem (vai abus leņķus, ja nepieciešams)! Secini, kā noteikt otra leņķa lielumu grādos! Uzzīmē 3, tad 4 no viena punkta izejošus starus! Spried, izmantojot mērījumus ar transportieri, un formulē sakarības starp leņķu lielumiem, ko veido 3 vai 4 stari ar kopīgu sākumpunktu!

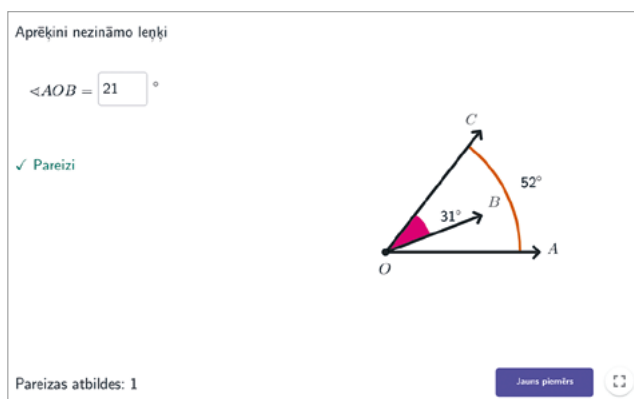
Aprēķini leņķa lielumu kā 2 citu leņķu lielumu summu vai starpību (ja visiem leņķiem ir kopīga virsotne)!



Vingrināties noteikt nezināmā leņķa lielumu var arī, izmantojot digitālās iespējas.

SR Aprēķina leņķa lielumu kā divu citu leņķu lielumu summu vai starpību (ja visiem leņķiem ir kopīga virsotne).

<https://www.geogebra.org/m/zmk3wbpn>



Biežāk vērojamās kļūdas un maldīgie priekšstati

- Ja skolēniem liek mērīt leņķa lielumu ar transportieri, pirms viņi labi pazīst šauru leņķi un platu leņķi, var rasties apļamības, nolasot leņķa lielumu no transportiera skalas.
- Skolēni mēra nogriežņa garumu vai leņķa “platumu” ar lineālu, bet ne leņķa atvērumu grādos un ar transportieri.
- Izdara spriedumus: jo garāki nogriežņi, kuri veido leņķa malas, jo lielāks leņķis.



Jautājumi pārdomām

Kā jūs skaidrojat skolēniem, kas ir grādi? Kā jūs varat palīdzēt skolēnam izprast grāda jēdzienu un tā lietojumu?

Kā jūs skaidrotu to, ka nereti skolēniem rodas grūtības precīzi un pareizi izmērīt leņķa lielumu?

Kā jūs organizēsiet jēgpilnu vingrināšanos, lai attīstītu skolēnu prasmi mērīt leņķi?

2.5.3. Laukums un tā mērīšana

Laukuma jēdzienu skolēni sāk apjaust, ja viņus aicina salīdzināt dažādu priekšmetu virsmas laukumu. Piemēram, koka lapu uzliekot uz burtnīcas lapas, viņi saprot, ka burtnīcas lapa ir lielāka.

Laukuma mērvienību apguves attīstības trajektorija

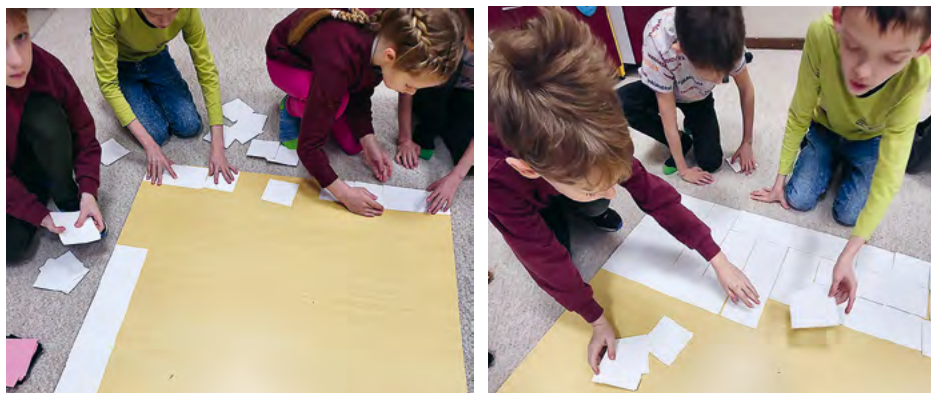
- ♦ Nosaka laukumu ar rūtiņām. (3. klase)
- ♦ Izprot, ka laukuma vienība 1 cm^2 (1 dm^2 , 1 m^2) ir kvadrāts, kura malas garums ir 1 cm (1 dm , 1 m). (4. klase)
- ♦ Zina, ka, veicot aprēķinus, ir jāpāriet uz vienādām mērvienībām. (5. klase)
- ♦ Izsaka lielākas laukuma mērvienības mazākās, un otrādi. (6. klase)

Laukuma mērīšanas un lielumu iegūšanas attīstības trajektorija

- ♦ Pārliecinās par plaknes figūru vienādību, tās praktiski uzliekot vienu uz otras. (1. klase)
- ♦ Nosaka taisnstūra laukumu kvadrātos/rūtiņās. Nosaka dažādu figūru laukumu kā vienību skaitu vai nu precīzi, vai aptuveni, nokļājot to ar vienādu kvadrātu/rūtiņu režģi. (2. klase)
- ♦ Saskata sakarību taisnstūra laukuma aprēķināšanai. (3. klase)
- ♦ Zīmē rūtiņu lapā taisnstūrus ar noteiktiem laukumiem (vienādiem, dažādiem). (3. klase)
- ♦ Aprēķina taisnstūra laukumu, ja zināms malu garums, izmantojot mērvienības cm^2 , dm^2 , m^2 . (4. klase)
- ♦ Saprot, ka laukums nemainās, ja figūru sadala un savieto citādi. (4. klase)
- ♦ Zina, ka vienlielu figūru laukumi ir vienādi. Vienādas figūras ir arī vienlielas, bet vienlielas var būt arī dažādas figūras. (4. klase)
- ♦ Nosaka laukuma aptuveno vērtību reālu objektu taisnstūrveida virsmām un pārbauda to, izmantojot arī digitālos rīkus. (4. klase)
- ♦ Aprēķina taisnstūra laukumu, ja malu garumiem ir dažādas mērvienības. Spriež par figūras laukumu, to sadalot figūrās, kurām prot noteikt laukumu. (5. klase)
- ♦ Aprēķina paralēlskaldņa virsmas laukumu. (6. klase)

Būtiskās idejas

1. Laukumu var noteikt, noskaidrojot, cik vienādu kvadrātu noklāj figūru.



2. Taisnstūru, trijstūru un citu figūru laukumu var aprēķināt, lietojot formulas, lai pašiem nav jāzīmē un jāskaita rūtiņas. Bet pamatā vienmēr jāatbild uz jautājumu, cik vienības kvadrātu noklāj doto laukumu.
3. Visbiežāk dzīvē jautājam, cik kvadrātcentimetru vai cik kvadrātmētru. Būtiski ir, kā skolēni iegūst izpratni, ko tas nozīmē.
4. Laukuma aprēķināšanā bieži sadala figūru tādās daļās, kurām protam aprēķināt laukumu, tad rēķina šo daļu laukumus un tad saskaita kopā.
5. Dažādām figūrām var būt vienādi laukumi.
6. Taisnleņķa trijstūra laukumu var iegūt no atbilstošā taisnstūra, un tas ir puse no šī taisnstūra laukuma.



Svarīgi paturēt prātā

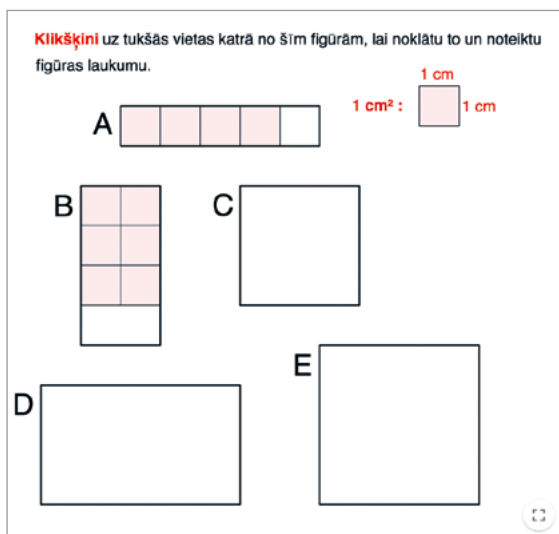
- Skolēni sapratīs laukuma jēdzienu daudz vieglāk un labāk, ja viņi iepazīsies ar to, paši pārklājot figūras un atbildot uz jautājumu, cik kvadrātu. No sākuma lieto papīra, koka vai plastmasas kvadrātus. Kvadrātcentimetra kvadrāti sākumā ir pārāk mazi. Var lietot arī nestandarta kvadrātus, piemēram 3×3 cm, nosakot, cik šādu kvadrātu noklās visu figūru.
- Pirms sāk rēķināt laukumu, būtiski ir to novērtēt, izmantojot kvadrātus vai caurspīdīgus trafaretus.



Lai skolēns pilnveidotu laukuma izjūtu, var dot uzdevumu vispirms novērtēt laukuma lielumu un tad savu novērtējumu pārbaudīt, laukumu pārklājot.

SR Nosaka taisnstūra laukumu, nenoklājot visu figūras laukumu ar kvadrātiem. Saskata sakarību laukuma aprēķināšanai un formulē to vārdiski.

<https://www.geogebra.org/m/tmndbf3s>



Pirms skolēni iegūst laukuma aprēķināšanas formulu, var vingrināties laukumu lieluma salīdzināšanā, to pārklājot.

<https://www.geogebra.org/m/jefhgexw>



Vecākiem skolēniem var piedāvāt uzdevumu, kurā ir doti divi dažādu lielumu taisnstūri un norādīti to malu garumi. Sākotnēji aicinām skolēnus novērtēt un izteikt hipotēzi, kurš laukums varētu būt lielāks, un tad to pārbaudīt, taisnstūrus savietojot. Šie ir pirmie soļi arī vizuāla pierādījuma veidošanai.

Domājot par **laukuma aprēķināšanu**, būtiski ir ar modeļu (kvadrātu) palīdzību nonākt līdz atziņām, kā to varētu aprēķināt. Kā aprēķināt taisnstūra laukumu, ko izsaka kvadrātu skaits, kas nolikts gar taisnstūra malām, ja nepietiek kvadrātu, lai noklātu visu laukumu, vai ja nolemjam tos vairs neizmantot.

4. klasē rosinām skolēnus pašus atklāt, kāda ir taisnstūra laukuma aprēķināšanas formula.

STUNDAS PIEMĒRI

SR Atklāj un formulē taisnstūra laukuma formulu.

Skolēni, izmantojot dotos kvadrācentimetrus, izveido taisnstūri un tad izstāsta darbības gaitu tā, lai klasesbiedrs izveido tādu pašu taisnstūri.

<https://www.youtube.com/watch?v=Nz4kx9isTDk&list=PLuJT-MJWW6Rs3fyM7inxq1hn7PUdsZzcl0&index=171>



Piedāvājam skolēniem problēmsituāciju – izmērīt taisnstūra laukumu ar kvadrācentimetriem, nonākot situācijā, kad nav tik daudz šo modeļiņu, lai varētu noklāt laukumu.

<https://www.youtube.com/watch?v=FEw1cAlu7tw&list=PLuJT-MJWW6Rs3fyM7inxq1hn7PUdsZzcl0>



Būtiska ir skolēnu izpratnes veicināšana, kā nonākt līdz idejai par laukuma aprēķināšanas sakarību.

<https://www.youtube.com/watch?v=11iNFz2OCg4&list=PLuJT-MJWW6Rs3fyM7inxq1hn7PUdsZzcl0>



Kā pierakstīt taisnstūra laukuma aprēķinus? Tradicionāli esam izmantojuši divus spriešanas un pierakstīšanas veidus.

Varam spriest, ka rindā ir nolikti 6 cm^2 , un, ja tādas ir 4 rindas, tad taisnstūra laukums ir:

$$6 \text{ cm}^2 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^2$$

					1 cm ²
					1 cm ²
					1 cm ²
1 cm ²	1 cm ²	1 cm ²	1 cm ²	1 cm ²	1 cm ²

Varam spriest, ka gar vienu taisnstūra malu izvietoti 6 kvadrāti, kuru malu kopējais garums ir 6 cm, gar otru 4 kvadrāti, kuru kopējais malu garums ir 4 cm:

$$6 \cdot 4 = 24 (\text{cm}^2)$$



Figūras veidošanā, domājot, kā iegūt laukuma formulu, var izmantot arī *GeoGebra* sagatavi.

<https://www.geogebra.org/m/tsmv638y>



Kad ir iegūta izpratne, kas ir laukums un kā to varētu aprēķināt, var vingrināties laukuma aprēķināšanā, rosinot skolēnus arī stāstīt, kā un kāpēc veic šādus aprēķinus.

<https://www.geogebra.org/m/d9vuwse5>



Svarīgi paturēt prātā

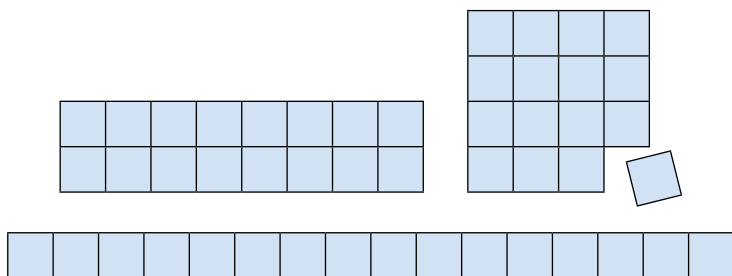
Ja laukumu par ātru saista ar formulām, skolēniem rodas grūtības atšķirt perimetru un laukumu un to, kad kuru formulu lieto.

Lai šo risku mazinātu, vēl pirms formulu atklāšanas (2. klase) skolēni var pētīt saistību, vai taisnstūriem, kuriem ir vienāds laukums, ir vienāds perimetrs.

STUNDAS PIEMĒRS

SR Skolēns pēta, vai dažādiem taisnstūriem ar vienādu laukumu ir vienāds perimetrs.

Skolēniem tiek iedoti sagriezti kvadrātcentimetri – 16 gabali vienā komplektā. Pavisam ir 3 šādi vienādi komplekti. Skolēniem no tiem ir jāizveido dažādi taisnstūri un jāveic pētījums par to perimetru garumu. Skolēni šādā veidā attīsta savas pētnieciskās prasmes un padziļina izpratni par perimetra un laukuma jēdzieniem. Mācību procesā ir būtiski, kā skolotājs plāno uzdevumu, kā skolēni strādās un kā tiks sniegts nepieciešamais atbalsts.



Par to, kā sniegt atbalstu skolēnam pētījuma gaitā, var uzzināt šeit:

https://www.youtube.com/watch?v=J2_xbu9EHhc&list=PLuJTMJWW6Rs3fyM7inxq1hn7PUdsZzclO



Par to, kā veidot sarunu ar skolēniem, kā pētījumā tiks sadalīti pienākumi, var uzzināt šeit:

<https://www.youtube.com/watch?v=3FzokCnj-nE&list=PLuJT-MJWW6Rs3fyM7inxq1hn7PUdsZzcl0>



Ideja, ka divām figūrām, kuras izskatās dažādas, var būt vienādi laukumi, ir sarežģīta, un to sākotnēji skolēns var pieņemt par patiesu, balstoties pieredzē – modelējot figūras. Te ir ļoti ieteicams lietot materiālus, piemēram, tangramus, lai veicinātu izpratni. Izmantojot divus vienādus vienādsānu taisnleņķa trijstūrus, redzam, ka varam veidot kvadrātu vai vienādsānu trijstūri un ka tiem abiem ir vienādi laukumi. Izmantojot visus tangrama elementus, var veidot dažādas figūras, kuru laukumi būs vienādi.

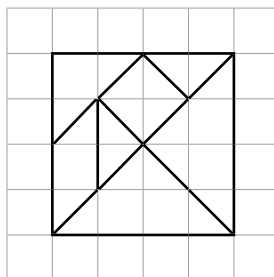


Aktivitāte skolēniem

SR Veido figūras ar vienādu laukumu.

Sākotnēji skolotājs aicina skolēnus iepazīties ar visām tangrama figūrām un spriest par tām un to laukumiem.

Materiāli: tangrama figūras – katram skolēnam vai pārim.



1. Cik figūru ir tangramā? Kādas figūras? Vai kādas no tām ir vienādas?



Atbilde: tangramā ir 7 figūras: 5 trijstūri, no tiem 2 vienādi lieli trijstūri, 2 vienādi mazi trijstūri, 1 vidēja lieluma trijstūris, un 2 četrstūri, no kuriem 1 ir kvadrāts.

2. Vai varam pārklāt kādu tangrama figūru ar citām figūrām? Kādi ir šo figūru laukumu lielumi, ja to salīdzina?

Atbilde: jā, ir vairāki veidi, piemēram, ar abiem mazajiem trijstūriem un vidējo trijstūri var pārklāt lielo trijstūri. Lielā trijstūra laukums ir tikpat liels cik 4 mazo trijstūru laukumi.

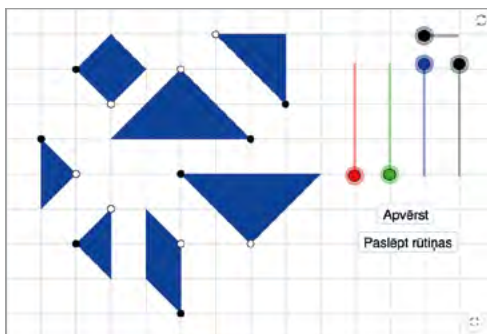


Veidot ģeometriskas figūras (arī ar trūkstošiem elementiem) var arī, izmantojot digitālās iespējas. Skolēns, pārvietojot un grozot tangrama figūras, var izveidot doto attēlu. Modelī arī var mainīt figūru krāsas un to spilgtumu, pielāgojot ērtākam skatījumam.



<https://www.geogebra.org/m/q8ys8cdg>

1. Izveido kvadrātu ar izgrieztu trijstūri.



Skolēniem pašiem darbojoties ar tangrama figūrām, iespējams attīstīt ģeometrisko domāšanu, telpisko izjūtu un vizualizāciju.

Būtiski ir veidot sarunu par to, ko viņi redzējuši un prot izstāstīt:

- figūras var salikt kopā, veidojot citas figūras;
- darbojoties ir nepieciešams pārvietot un grozīt figūras, saliekot kopā pareizās malas;
- ir būtiski ievērot malas garumu, leņķa lielumu un citas īpašības;
- var saskatīt, piemēram, ka kvadrātu var dalīt uz pusēm pa diagonāli un abas puses ir trijstūri, un otrādi;
- darbojoties var veidot spriedumus, ka maziem trijstūriem ir taisnais leņķis un viena mala (pret taisno leņķi) ir garāka par divām citām vienādajām malām.

Sarunas laikā var uzdot konkrētus jautājumus:

Izstāsti, no kurām figūrām var izveidot kvadrātu!

No kurām figūrām sastāv kvadrāts?

Kuras figūras saliekot kopā, var iegūt figūru, kurā ir vienāda garuma vismaz 2 malas?

.....

Visi šie novērojumi palīdzēs vēlāk saprast ģeometriju, veidot spriedumus un pierādījumus. Vēlams ieraugāmās idejas ar skolēniem pārrunāt, lai palīdzētu tās ieraudzīt un formulēt.

STUNDAS PIEMĒRS (starpriekšmetu saikne ar vizuālo mākslu)

Skolēnus var aicināt veidot savus attēlus no tangrama figūrām, kurām ir vienādi laukumi, dodot arī ar vizuālo mākslu saistītus nosacījumus. Tad likt samainīt savus zīmējumus ar klasesbiedriem un mēģināt pārklāt iedotos attēlus. Figūras var arī izkrāsot, veidot dizainu un sarīkot tematisku izstādi, izmantojot savus ģeometriskos mākslas darbus. (Ieteicams ieskicēt figūras, lai varētu atcerēties vai salīdzināt, kā tika veidots attēls, vai to nofotografēt.)

Virsmas laukums

Lai spriestu un domātu, kā veidojas telpiskas figūras virsma un tās laukumi, varam sākt ar ķermeni, ko veido 6 vienādi kubi. Var rosināt skolēnus iztēloties, ka šī figūra ir jānokrāso vienā krāsā – jānoklāj tās virsma ar krāsu.



Skolēniem ir svarīgi saskatīt, ka 6 atsevišķi kubi kopā veido jaunu telpisku figūru. "Iekšējās skaldnes" nepieskaitām pie virsmas laukuma, jo tās nav jāpārklāj. Redzam, ka noklāt varētu figūras priekšpusi un aizmuguri, kreiso un labo pusi, augšpusi un apakšpusi, kas savā starpā ir vienādas.

Lai izrēķinātu virsmas laukumu šai figūrai, redzam, ka tās garums ir 3 mērvienības, platums 1 mērvienība un augstums 2 mērvienības. Virsmu veido 6 skaldnes, bet divas pretējās ir vienādas, tāpēc virsmas laukumu aprēķinām:

$$2 \cdot (3 \cdot 2) = 12$$

$$2 \cdot (1 \cdot 2) = 4$$

$$2 \cdot (1 \cdot 3) = 6$$

Saskaitām $12 + 4 + 6 = 22$ (kvadrātvienības). Šādā vienkāršā sākuma situācijā skolēni var veikt pārbaudi, saskaitot, cik kvadrātus viņi redz uz figūras virsmas. Ja kuba šķautnes garums būtu centimetrs, tad sanāktu 22 kvadrātcentimetri jeb 22 cm^2 .

Skolēni tālāk var būvēt vēl citas telpiskas figūras un aprēķināt tām virsmas laukumu. Figūras var būt arī neregulāras formas.

Aplūkojot šāda veida figūru, skolēni domā, kā saskaitīt visu virsmu laukumus, tos neatkārtojot. Šādi vingrinoties, skolēni arī saskaras ar problēmu, kuras risinājumam nav vienkāršas formulas, ko izmantot.



Demonstrējot taisnstūra paralēlskaldni (ne kubu), skolotājs var vaicāt: “Cik daudz ietinamā papīra (dāvanu papīra) ir vajadzīgs, lai noklātu šo ķermeni? Parasti, kad ietinam dāvanas, izlietojam vairāk papīra nekā vajadzīgs, lai noklātu virsmu, jo iesaiņojot papīram ir jāpārklājas. Bet cik ir nepieciešams, lai nosegtu tieši visas skaldnes?” Ir jāgaida, kamēr skolēni paši nonāk pie secinājumiem, ka var izmantot atsevišķo taisnstūru laukumus, ir jāizmēra garums, platums un augstums. Šos mērījumus varam izmantot, lai aprēķinātu atsevišķos laukumus, tāpat kā skolēni pirms tam mācījās par laukumu plaknē.



Aktivitāte skolēniem

SR Pēta un iegūst paralēlskaldņa virsmas laukuma aprēķināšanas sakarību.

Aprēķini virsmas laukumu taisnstūra paralēlskaldņa formas kastei, ja tās izmēri ir $12 \times 4 \times 6$ cm.

Skolēni var paši atklāt, ka taisnstūra paralēlskaldnim ir iespējami 3 dažādi šķautņu garumi, un tad var veidot sarunu par to, kas ir platums, augstums un garums.

Piemēram, ja garums ir 12 cm, platums 4 cm un augstums 6 cm, būs:

2 skaldnes, kam katrai aprēķināsim laukumu: $12 \cdot 4 \text{ cm}^2$

2 skaldnes, kam katrai aprēķināsim laukumu: $12 \cdot 6 \text{ cm}^2$

2 skaldnes, kam katrai aprēķināsim laukumu: $4 \cdot 6 \text{ cm}^2$

Saliekot kopā, virsmas laukums sanāk: $2 \cdot 48 + 2 \cdot 72 + 2 \cdot 24 = 288 \text{ cm}^2$

Skolēni var domāt tālāk, kā būs tad, ja kaste ir kubs? Kā varam viegli atrast virsmas laukumu? Darbojoties praktiski, skolēniem labāk paliks prātā, kā aprēķināt virsmas laukumu, veidosies izpratne un atziņa, kā veidojas formula, un, ja tā nav zināma vai ir piemirsusies, viņi var spriest, kuru figūru laukumi ir jāaprēķina, lai iegūtu visas virsmas laukumu.

Laukumu apguve skolā iespējami daudz saistāma ar ikdienas dzīvi

Sākumā var praktiski mērīt laukumu – galda virsmai, klases telpai u. c., tad risināt situāciju uzdevumus, līdz nonākt pie lielāku problēmsituāciju risināšanas, kur jau tiek izmantoti matemātiskās modelēšanas soļi – remonta plānošana, puķu dobes iekārtošana u. c., kas būtu arī praksē realizējami projekti.

Mērvienību pārveidojumus iegūstam praktiskā darbībā.

Dot iespēju skolēniem, izmantojot gatavus modeļus, skaidrot, kāpēc $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$, kāpēc $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$ u. tml. Ja 1 kvadrātdecimetrs ir kvadrāts, kura malas garums ir 10 cm, tad tā laukums ir $10 \text{ cm}^2 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2$. Izmantot šos sagatavotos modeļus un veikt laukuma mērīšanu, piemēram, kādam objektam skolas koridorā, pagalmā utt.

Skolēni ir jāiepazīstina arī ar sadzīvē lietotajām laukuma mērvienībām, piemēram, ka meža platības, labības lauka lielumu mēra hektāros, kas ir kvadrāts ar malas garumu 100 m.



Jautājumi pārdomām

Ar kādu aktivitāšu palīdzību pilnveidot skolēna izpratni par laukumu, lai neveidotos maldīgais priekšstats, ka figūras laukumu aprēķina, malas garumu reizinot ar malas garumu?

Kā savā praksē pilnveidojam skolēna prasmes noteikt un aprēķināt laukumu gan plaknes, gan telpiskām figūrām?

2.5.4. Tilpums un tā mērīšana

Tilpuma mērvienību apguves attīstības trajektorija

- ♦ Tilpumu mēra litros. (1. klase)
- ♦ Nolasa mērtrauka skalas vērtību – litrs, mililitrs. (3. klase)
- ♦ Lieto vienības – kubus – tilpuma noteikšanai, praktiski veido 1 dm^3 modeli, spriež, nosaka, cik 1 cm^3 veido 1 dm^3 . (6. klase)
- ♦ Lieto mērvienības $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$. (6. klase)
- ♦ Izsaka lielākas tilpuma mērvienības mazākās, un otrādi. (6. klase)

Tilpuma mērīšanas un lielumu iegūšanas attīstības trajektorija

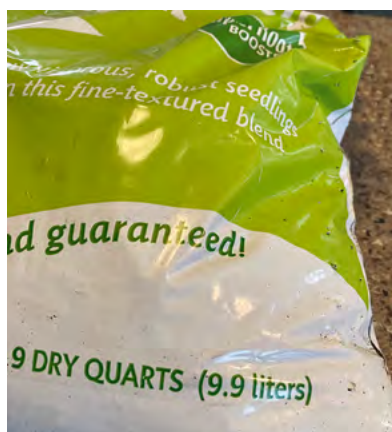
- ♦ No tabulas iegūst informāciju par tilpumu. (1. klase)
- ♦ Izmantojot vienu un to pašu skaitu kubu, veido dažādas telpiskas figūras/ķermeņus. (1. klase)
- ♦ Spriež par iespējamo dažādo telpisko figūru skaitu. (1. klase)
- ♦ Telpiskai figūrai mēra (aprēķina) tilpumu. Nosaka taisnstūru skaldņa tilpumu, izmantojot noteiktas vienības – kubus. (3. klase)
- ♦ Aprēķina taisnstūra paralēlskaldņa tilpumu. (6. klase)

Būtiskās idejas

- Tilpums ir jēdziens, ko katrs cilvēks sastop ikdienas dzīvē. Spriest un novērtēt aptuvenu apjomu ir svarīga prasme, ko vajag atkārtoti vingrināt. Tilpumu definē kā telpas daļu, ko aizņem ķermenis, bet skolēnam tas var daudz ko neizteikt, ja praktiski ar to nedarbojas.
- Pirmā tilpuma mērvienība, ko mācām, un varbūt arī vissvarīgākā, ir litrs. Sākam ar to, cik ir viens litrs, to izjutot praktiski – pārlejot ūdeni no litra trauka glāzēs, lejot litrus spainī, iepazīstoties ar sadzīves situācijām, kurās izmantojam litrus – dzērienu pudeles veikalā u. c.
- Pēc Žana Piažē teorijas, bērniem līdz apmēram 11 gadu vecumam ir priekšstats, ka glāzē, kas ir augstāka, būs vairāk šķidruma nekā glāzē, kas ir zemāka, bet platāka. Bērni apgūst izpratni par tilpuma nemainīgumu, paši pārlejot šķidrumu no viena trauka otrā un atklājot, ka trauka augstums var maldināt.
- Runājot par tilpumu, ir būtiski spriest arī par masu sadzīves un dabaszinību kontekstā. Ja paņemam traukus, kuriem ir vienāds tilpums, un vienā ielejam ūdeni, bet otrā ieberam smiltis, tos nosverot, būs redzams, ka masa atšķiras.
- Spriežam un praktiski darbojamies ar litra mērvienību.



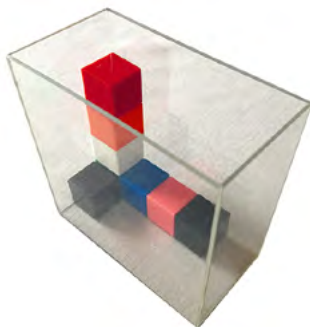
Būtiski ir gūt priekšstatu, ka litra burkā, kaut gan parasti litru izmantojam šķidru vielu tilpuma noteikšanai, varam iebērt arī smiltis, miltus, cukuru u. c. vielas. Litros mēra ne tikai šķidrumus, bet arī, piemēram, kūdru, zemi (sk. att.), smiltis un citus beramus materiālus.



Kad ir iegūta izpratne par litru, tad mācāmies par mazākām mērvienībām, piemēram, 1 mililitru (ml).

Priekšstatu par tilpumu sākotnēji var iegūt, izmantojot vienādus kubus. Varam prasīt, cik kubu ietilpst dotajā telpiskajā figūrā. Attēlā redzam taisnstūra paralēlskaldni, kam apakšējo kārtu varam nosegt ar apmēram 5 kubiem, tos

liekot garumā, un no 2 (varam arī teikt $2\frac{1}{2}$) kubiem platumā un 5 kubiem augstumā. Figūrā varēs ievietot aptuveni $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ kubus. Mēs sakām, ka tilpums ir apmēram 50 kubi.



Aktivitāte skolēniem

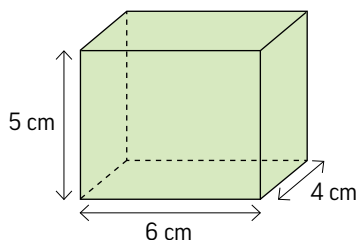
SR Novērtē kastes tilpumu, ja nevar ievietot precīzu skaitu kubiņu.

Cik kubiņu ietilpst kastē?

Materiāli: dažāda izmēra kastes.

Skolotājs aicina skolēnus atbildēt uz jautājumu: cik kubiņu (var nebūt kubikcentimetri) ietilpst kastē?

Skolēni sastapsies ar situāciju, kad klucītis gandrīz ietilpst, tomēr to vairs nevar brīvi ielikt kastē – ir pārāk maz vietas. Praksē tiek novērtēts kastes tilpums.



Tikai pēc praktiskas darbošanās, līdzīgi kā spriežot par laukuma aprēķināšanu, var pāriet pie vingrinājumiem, kur dota informācija – attēlā redzams taisnstūra paralēlskaldnis ar 4 cm garumu, 6 cm platumu un 5 cm augstumu; domājam, kā varam izrēķināt tilpumu:

pārklājam kastes pamatu ar $4 \cdot 6$ kubikcentimetru kubiem; tad liekam 5 šādas kārtas, iegūstot $4 \cdot 6 \cdot 5 = 120$ kubikcentimetrus.

Priekšstatu par kubikcentimetru arī sākam ar tā modeli, un to izmantojam konkrētās situācijās.

Ja lietojam kubikcentimetra kubus un apskatām konkrēto kastīti (sk. att.), tos varēs ievietot 5 platumā, 10 garumā un 10 augstumā. Kopā iegūstam $10 \cdot 10 \cdot 5 = 500$ šādus kubus vai sakām 500 kubikcentimetrus un rakstām 500 cm^3 . Kastes tilpums ir 500 cm^3 .

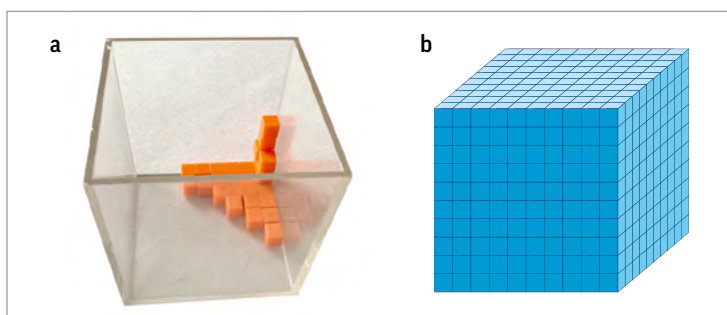


Var aicināt skolēnus noteikt tilpumu vairākām kastēm, izmantojot kubiņus, un tad pārrunāt, ka ir daudz vieglāk veikt mērījumus, mērot garumu, platumu un augstumu ar lineālu un tad veikt aprēķinus, nekā censties kasti piepildīt ar kubiņiem.



Tad varam modelēt arī kubikdecimetru.

Savukārt, lietojot kubikcentimetra klucīšus, var pamatot, cik daudz kubikcentimetru ietilpst kubikdecimetrā. Ja ir pieejams, vislabāk lietot caurspīdīgu $10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}$ kubu. Skolēni paši var sākt veidot modeli (att. a) un secināt, ka kastē ietilpst $10 \cdot 10 \cdot 10$ kubikcentimetri (att. b). Nav nepieciešami 1000 klucīši, lai skolēni par to pārliecinātos un izteiktu spriedumus. Var redzēt, ka ar 100 klucīšiem var izklāt kasti un, liekot tos uz augšu, būs 10 kārtas. Secinām, ka būtu vajadzīgi $100 \cdot 10 = 1000$ klucīšu.



Svarīgi paturēt prātā

Bieži pat pieaugušie nezina litru un kubikdecimetru saistību. Lai iepazīstinātu skolēnus ar šo ideju, var lietot kubikdecimetra plastmasas kasti, kurā lej litru ūdens.



Aktivitāte skolēniem

SR Pamato ar demonstrējumu sakarību starp litru un kubikdecimetru.

Lai pārrunātu litra un kubikdecimetra saistību, skolotājs var ņemt caurspīdīgu 1 litra pudeli un jautāt: kur var ieliet vairāk (jeb kas aizņem lielāku tilpumu) – pudelē vai kubikdecimetra kubā? Uzskatāmībai ūdeni var iekrāsot, lai būtu labāk redzams lejot (ja aprīkojums ir pietiekamā skaitā, to dara skolēni paši).

Skolēni varētu ieteikt liet no pudeles kubikdecimetra kastē. Pielejam pilnu litra pudeli un tad sākam liet kastē. Skolēni drīz sapratīs, ka tilpums ir tas pats. Secinām, ka $1 \text{ litrs} = 1 \text{ kubikdecimetrs} = 1000 \text{ kubikcentimetri}$.



Atceramies, ka viena mērvienība, ko bieži lietojam dzīvē, ir metrs. *Cik liels ir kubikmetrs?*

Veidojam modeli – kubikmetru (m^3), pētot, cik tas ir liels un kāda ir lielumu saistība.

Darbu sākam, lietojot metra lineālus. *Cik 1 cm^3 kubu būs vajadzīgs, lai noklātu pamatu?*

$100 \cdot 100 = 10\,000 \text{ cm}^3$. Lai būvētu kubikmetru, nepieciešamas 100 šādas kārtas. Kopā būtu vajadzīgi $1\,000\,000$ kubikcentimetra kubi.

Cik litru ir vienā kubikmetrā? $1\,000\,000 : 1000 = 1000$ litri.



Aktivitāte skolēniem

SR Novērtē tilpumu un pārbauda savu novērtējumu praktiski, izmantojot ūdeni.

“Novērtējam trauka tilpumu”

Materiāli: litra mērtrauks, tukšas 1 litra, 2 litru un cita lieluma pudeles, piemēram, ūdens pudeles vai sulas pakas (etiķetes noplēstas, lai tilpuma mērs nav redzams). Skolotājs lūdz klases uzmanību un ielej mērtraukā 1 litru ūdens (ieteicams pielikt drusku krāsas, lai labāk var redzēt). Prasa, vai dažādās pudelēs varēs ieliet vairāk, mazāk vai tikpat daudz ūdens? Lej no mērtrauka ūdeni un salīdzina minēto daudzumu ar litru.

Ja ir pietiekami daudz materiālu, ieteicams šo aktivitāti veikt pašiem skolēniem, vispirms novērtējot un tad to praktiski pārbaudot.

“Novērtējam tilpumu”

SR Novērtē tilpumu un pamato to ar aprēķiniem.

Tiek rīkotas dzimšanas dienas svinības, kurās piedalīsies 10 bērni. Katram bērnam plānojam divas glāzes sulas. Cik daudz sulas ir jānopērk, lai visiem pietiktu? Sulu pērkam 1 litra pakās.

Varam aptuveni izrēķināt, cik sulas glāžu būs vienā litrā (ieteicams izmantot dažādas glāzes). Pārbaudām, lejot ar ūdeni pilnas glāzes litra mērtraukā. Uzsveram, ka ikdienā parasti domājam par “apmēram”. Ja, piemēram, 4 (5) glāzes ir 1 litrs, vai mēs turpināsim liet vai varam citādi izgudrot, cik litru ir jāpērk? (Viens risinājums: ja plānojam, ka 2 bērniem vajag 1 litru sulas un ir 10 bērnu, tad $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ litri.)

“Kādas mērvienības lietojam?”

SR Noskaidro retāk lietotas mērvienības, ko izmanto reālās situācijās.

1. *Pie skolas vai parkā tiek veidota jauna dobe. Tai nepieciešams pasūtīt piemērotu kūdras maisījumu. Kā tu zināsi, cik kūdras maisījuma pasūtīt? Kādās mērvienībās veikalā pārdod melnzemi?*
(Veikalā tā ir maisos, un tās tilpumu mēra litros; ja nepieciešams daudz, tad kubikmetros.)



2. *Medmāsa bieži slimniekiem veic injekciju – zāļu ievadīšanu organismā, izmantojot šļirci. Noskaidro, kā mēra ievadīto zāļu daudzumu!*



Paralēlskaldņa tilpuma sakarības iegūšanai var izmantot modeli, ar kura palīdzību skolēni modelē – vēro un skaita kubus, domā, kā tiek aprēķināts tilpums kubos (kubikcentimetros) paralēlskaldnim (paralelograma prizmai).

Modeli ir attēlots paralēlskaldnis, kuram katra skaldne ir iekrāsota atšķirīgā krāsā un tajā var iezīmēt kubus, no kuriem tas sastāv.

<https://www.geogebra.org/m/kxqxjgtj>





Lai vingrinātos tilpuma aprēķināšanā, var izmantot digitālās iespējas, piemēram, uzdevumā uz paralēlskaldņa šķautnēm ir attēlotas vienību atzīmes. Pēc tām skolēnam ir jāaprēķina figūras tilpums un rezultāts jāieraksta lodziņā.

<https://www.geogebra.org/m/swsbnmdh>



Turpinot pilnveidot izpratni par telpisku ķermeņu tilpuma noteikšanu, var veikt pētniecisku uzdevumu, izmantojot *GeoGebra* simulāciju.

<https://www.geogebra.org/m/k6vytek8>

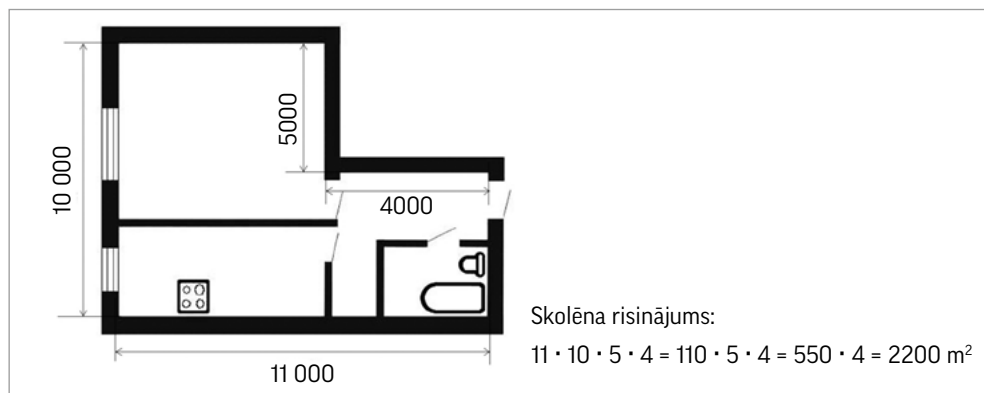


SR Ar skaitlisku izteiksmi pieraksta virsmas laukumu un tilpumu daudzskaldnim, kuru var sadalīt taisnstūra paralēlskaldņos.

Modelī ir attēlots ķermenis, kuru veido divi dažāda lieluma paralēlskaldņi atšķirīgās krāsās, ar iezīmētām mērvienībām – kubiem. Skolēnu uzdevums ir vērot, kā mainās tilpuma aprēķināšana, ja maina šķautņu garumu un ķermeņa novietojumu. Ir dota formula, kuru izmantojot aprēķina ķermeņa kopējo tilpumu. Pavelkot sarkanos punktus, skolēns var mainīt figūru lielumu un sekot līdzi, kā mainās tilpuma aprēķina skaitļi.

Biežāk vērojamās kļūdas un maldīgie priekšstati

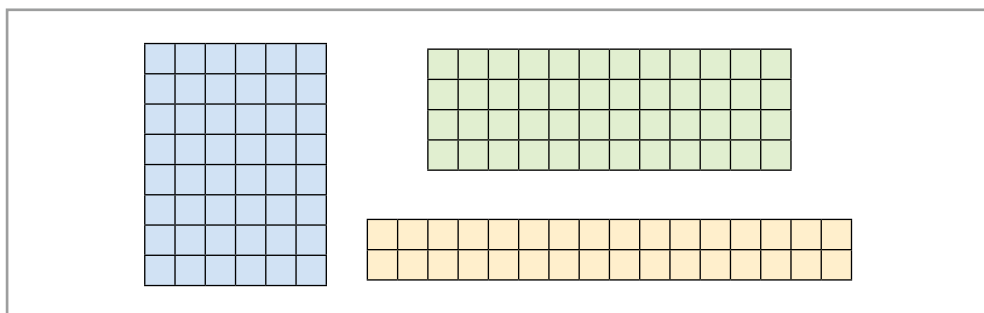
- Salīdzinot lielumus, netiek ievērotas mērvienības, piemēram, salīdzinot 20 cm^2 un 2 m^2 , tiek salīdzinātas tikai skaitliskās vērtības.
- Kļūdas laukuma/tilpuma aprēķinos saistās ar laukuma/tilpuma jēdziena neizpratni, kas rodas no tā, ka skolēni pārāk ātri ir mudināti izmantot formālo laukuma/tilpuma aprēķināšanas veidu pēc formulas.
- Izpratnes trūkums, kad jādarbojas reālos kontekstos. Skolēni vispārina laukuma aprēķināšanu kā garuma un platuma reizinājumu.



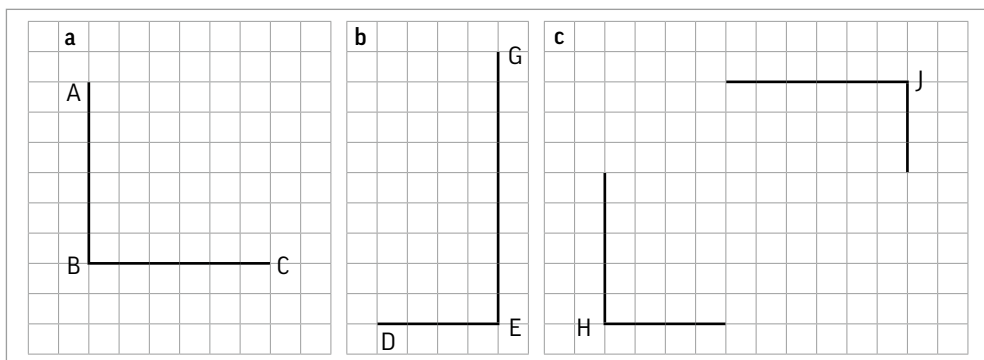
Attēlā redzams, ka skolēns, lai aprēķinātu figūras laukumu, sareizina visus dotos garumus, kā rezultātā neiegūst prasīto. Vispārinājums var rasties, kad skolēni rēķina laukuma lielumu tikai taisnstūriem, nevis arī citām figūrām.

- Skolēni sajauc, ko nozīmē aprēķināt perimetru un ko nozīmē aprēķināt laukumu. To palīdz risināt uzdevumi, kuros prasīts vienlaikus aprēķināt abus lielumus, piemēram,

Salīdzini taisnstūru perimetrus un tad laukumus! Ko tu vari secināt?



Papildini zīmējumus tā, lai veidotos taisnstūri! Aprēķini katras figūras perimetru un laukumu!



Tas arī dod skolēniem labāku izpratni par to, kā perimetrs un laukums ir saistīti.

- Skolēni domā, ka laukums un virsmas laukums ir atsevišķi jēdzieni. Skolēniem jādod iespēja klasē mērīt, rēķināt un pārrunāt dažādu telpisku figūru virsmas laukumu aprēķināšanu.

2.5.5. Citi mēri

Laiks

Mācot laika mērus, jāievēro, ka laiks neapšaubāmi grūtāk padodas mūsu uztverei nekā garums, tilpums un masa. Viens no pamatojumiem ir tas, ka laika mērīšanai izmantojam citas skaitīšanas sistēmas, piemēram, 60. Laika mērus nevar demonstrēt, liekot skolēniem tos parādīt – redzu 10 cm nogriezni – vai pacilāt – rādu, ka cukura pakā ir 1 kg cukura. Te jārikojas citādi. Turklāt laika mēri nav decimālās sistēmas mēri – tas sagādā zināmas grūtības to pārveidošanā un darbībās ar tiem.

Laika mērvienību un tā mērīšanas apguves trajektorija

- ♦ Zina, ka gadā ir 12 mēneši, dienu skaits ikvienā mēnesī ir atšķirīgs (28–31), 7 dienas veido nedēļu. (1. klase)
- ♦ Zina, ka diennaktī ir 24 stundas. (1. klase)
- ♦ Laika mērīšanai izmanto dažādu veidu pulksteņus, saprot, ka informāciju par laiku uz tiem attēlo dažādi. (1. klase)
- ♦ Zina, ka vienā stundā ir 60 minūtes. (1. klase)
- ♦ Zina, ka laika mērvienības ir sekunde, minūte, stunda, diena, nedēļa, mēnesis, gads. (2. klase)
- ♦ Nolasa, pieraksta pulksteņa laiku no digitālā un analogā pulksteņa (ar precizitāti līdz minūtei), no hronometra. (2. klase)
- ♦ Atrod informāciju kalendārā. (2. klase)
- ♦ Lieto laika jēdzienu ātruma koncepta izpratnei. (4. klase)
- ♦ Lieto laika jēdzienu, grafiski attēlojot kustību (5. klase)

Būtiskās idejas

- Sākotnēji skolēni iepazīst nedēļu – dienas un to nosaukumus. Tas saistās ar viņu ikdienu. Tā kā latviešu valodā ar vārdu “diena” apzīmē dažādus jēdzienus (diena un nakts, darba diena, diennakts), jāpievērš uzmanība to precizēšanai.
- Noskaidro, ka dienā ir 24 stundas (var vienoties, ka diennakti īsāk sauksim par dienu), ka stundā ir 60 minūtes. Apgūstot stundas jēdzienu, jāpievērš skolēnu uzmanība, ka arī to lietojam dažādi – mācību stunda ir īsāks laika sprādis nekā pulksteņa stunda. Apgūt pulksteņa laikus nav prasme, ko iemācās pāris stundās. Lai iegūtu šo prasmi, vajag regulāri to lietot un atkārtot visā mācību procesā, lūdzot vecākiem palīdzēt vingrināties lasīt pulksteņa laiku arī mājās. Vecākiem ir ieteicams iegādāties analogo pulksteni, ko turēt redzamā vietā.

Analogais vai digitālais pulkstenis

Kad apspriežam laika jeb pulksteņa mācīšanu, viens no pirmajiem jautājumiem ir – vai vēl ir vērts mācīt lasīt analogo pulksteni, jo pasaulē arvien vairāk lieto digitālos. Argumenti par tā mācīšanu joprojām ir pārliecinoši. Izmantojiet analogos pulksteņus, jo tie vizuāli parāda laika izmaiņas, piemēram, desmit minūtes pāri trijiem varam modelēt, saskatīt, kā tas notiek, saskatīt pulkstenī 60 minūtes. Izmantojiet digitālos pulksteņus, lai mācītu absolūtās laika vērtības, piemēram, pulkstenis ir 3 un 45 minūtes, – tā ātrāk var noteikt laiku (Bock et al., 2003). Vissvarīgākais ir tas, ka analogais pulkstenis dod iespēju labāk attīstīt laika jēgu, redzot, kā pārvietojas pulksteņa rādītāji.

Ja pulkstenis rāda 2.57, mēs zinām, ka tūlīt būs 3.00. Izprast to, ka stunda ilgst 60 minūtes, ir vienkāršāk ar analogo pulksteni, digitālajā ne vienmēr var pamanīt, ka pēc 59, nāk atkal 0, jo minūtē ir 60 sekundes un stundā 60 minūtes. Skolēniem bieži to ir grūti izprast un atcerēties bez vizuālā materiāla.



Vingrināties nolasīt laiku un atlikt to pulkstenī var arī, izmantojot digitālo modeli.

<https://www.geogebra.org/m/mqtpcrn>



Daudziem skolēniem ir vieglāk vizualizēt, kā rādītāji kustas, domājot par pulksteņa ciparnīcu, un tā izrēķināt pagājušo laiku vai to, cik rādīs pulkstenis pēc zināma laika sprīža, nekā pieskaitīt vai atskaitīt notikuma ilgumu kā aritmētisku darbību.

Lai pulksteņa laiks kļūtu par ikdienas rutīnas prasmi, ir bieži jāvingrinās. Piemēram, var uzdot skolēniem jautājumus:

Cik ir pulkstenis? Cikos mums sākās skola? Cikos beidzas visas stundas? Cikos sākās šī stunda? Cikos tā beigsies?

Cikos tu celies no rītiem skolas dienās? Cikos celies brīvdienās?



Aktivitāte skolēniem

SR Vizualizē notikuma laiku gan analogā, gan digitālā pulkstenī.

Izveido savu dienas plānu, to vizualizējot ar analogo un digitālo pulksteni!



Aktivitāte skolēniem

SR Aptuveni novērtē minūtes ilgumu.

Lai labāk saprastu laika ilgumu ar sajūtām, var lūgt skolēniem aizvērt acis un sēdēt klusumā 1 minūti vai 30 sekundes vai citu laika brīdi. Lūgt, lai paceļ rokas, kad viņi domā, ka ir pagājusī 1 minūte.



Aktivitāte skolēniem

SR Prognozē un pēc tam pārbauda dažādu notikumu ilgumu.

Prognozē un pēc tam pārbaudi, ko vari izdarīt 100 sekundēs!

Aktivitātes	Prognoze	Rezultāts
Cik reizes vari sasist plaukstu 100 sekundēs?	90 reizes	113 reizes
Cik reizes vari uzrakstīt savu vārdu 100 sekundēs?	40 reizes	9 reizes
Cik reizes vari piecelties un atsēsties 100 sekundēs?	40 reizes	67 reizes
Cik reizes vari palēkties 100 sekundēs?	100 reizes	126 reizes
Cik reizes vari aizskaitīt līdz 20 100 sekundēs?	10 reizes	8 reizes

Viens no pulksteņa apgūšanas veidiem ir ievērot šādu secību:

- Vispirms ir jāiegaumē, ka analogā pulksteņa stundas ir 1–12.
- Skolēni vingrinās atpazīt veselās stundas, piemēram, 1.00, 11.00, skatoties tikai uz pulksteņa mazo rādītāju. Iemācās pierakstīt laiku. Mācās lasīt laiku, izmantojot pulksteni.
- Kad skolēni ir pieraduši atpazīt stundu, var pievērst uzmanību minūšu rādītājam.

Skolotājs lieto īstu pulksteni vai mācību pulksteni, kuram stundu rādītājs kustas līdz minūšu rādītājam, lai ievērotu, ka stundu rādītājs lēnām kustas no viena skaitļa uz nākamo, kamēr minūšu rādītājs apiet vienu riņķi apkārt visam pulkstenim.

Skolēniem var iemācīt teikt “gandrīz 8” vai “nedaudz pēc 11”. Minūtes nozīmi var atlikt līdz tam brīdim, kad ir apgūtas stundas. Uzsvars ir uz to, kur pulksteņa ciparnīcā atrodas īsais (stundas) rādītājs.

- Nākamais solis ir atpazīt pusstundu, kad minūšu rādītājs ir pusceļā, ejot apkārt pa ciparnīcu, un stundu rādītājs ir starp skaitļiem, kas norāda veselās stundas. Rakstīt un saprast, piemēram, ko nozīmē 5.30.

Paralēli skolēni vingrinās lietot zināšanas par skaitļu taisni un to, kā skaitīt pa 5 un pa 10 uz priekšu un atpakaļ. Ir vēlams, lai būtu pulkstenis, kur šie skaitļi ir skaidri redzami.



STUNDAS PIEMĒRS

Skolēni vingrinās attēlot savā pulkstenī stundas un minūtes.

https://www.youtube.com/watch?v=KItQZE_HGOs&list=PLuJTMJWW6Rs3fyM7inxq1hn7PUdsZzcl0



Kad skolēniem viegli izdodas lasīt pulksteni, skaitot 5, 10, 15... 55, 60 vai 0, var uzdot tādus jautājumus kā, piemēram,

Pulkstenis ir 7.40. Cik būs pulkstenis pēc 5 minūtēm, 15 minūtēm? Cik rādīja pulkstenis pirms 5 minūtēm? Cik rādīja pulkstenis pirms stundas? Cik būs pulkstenis pēc stundas?

- Sāk izmantot un lietot visas minūtes.

Lai iemācītos 24 stundu pulksteni, var papildināt pulksteni ar skaitļiem tā, lai skolēni sākt asociēt, piemēram, 15.00 ar 3.00. Dot skolēniem lasīt vilcienu sarakstus vai televīzijas programmas, ļaujot saprast, kāpēc 24 stundu pulkstenis ir svarīgs.

- Izpratni par pulksteni paplašina līdz sekundēm, par to kā, stundas ir saistītas ar diennaktīm, nedēļām, mēnešiem, gadiem un citām laika grupām.

Laika mēru pārveidošana ir saistāma ar reālās dzīves situāciju aplūkošanu.

Ja cilvēks katru dienu tikai 5 minūtes sava laika izlieto nelietderīgi, cik liels zaudējums tad rodas gada laikā? Cik tas ir stundu? Cik tas ir darba dienu?

Laika lietošana parasti saistās ar reālām situācijām:

1) jānoskaidro notikuma ilgums; 2) jāaprēķina notikuma sākums; 3) jāaprēķina notikuma beigas.

Izpratne par laika lietošanu palīdz skolēniem tālāk apgūt arī ātruma konceptu.

Masa

Iepazīstinot skolēnus ar masas mērvienībām, sākumskolā ir būtiski korekti lietot jēdzienu “masa” (lai vēlāk skolēniem nav jāmaina jēdzienu lietojums; skolotājam jāpatur prātā, ka svars ir smaguma spēks, ko mēra ņūtonos). Masa tiek mērīta, veicot pētījumus dabaszinībās, arī matemātikā ieteicams to apgūt, izmantojot reālos kontekstus.

Masas mērvienību apguves attīstības trajektorija

- ♦ Masu mēra kilogramos. (1. klase)
- ♦ Saskaita un atņem lielumu (masa gramos, kilogramos, tonnās) skaitliskās vērtības, lietojot atbilstošus mērvienību apzīmējumus. (3. klase)
- ♦ Lieto masu, risinot uzdevumus ar praktisku un matemātisku kontekstu. (4. klase)
- ♦ Izlasa lielumu, kas pierakstīts kā lieluma vienības daļa (piemēram, $\frac{3}{5}$ kg), nosaka daļu no masas vienībām. (5. klase)
- ♦ Lieto procentus, lai atrisinātu uzdevumu ar dabaszinātņu mācību jomas saturu, piemēram, par masas daļām. (6. klase)

Iepazīstinot skolēnus ar masas mērvienībām, ir būtiski, lai skolēni varētu praktiski ar tām darboties – ar kilograma etalonu, kilogramu smagu cukura paku utt.,

dot iespēju skolēniem novērtēt iespējamo masu un tad pašiem, izmantojot svarus, to pārbaudīt.

Mācot par gramu, sākotnēji novērtējam pieejamo objektu masu – zīmulim, burt-nīcai u. c., un tad to var pārbaudīt, izmantojot svarus.

Pēc tam jau skolēni var veikt aptuvenos novērtējumus dotajiem objektiem.

				
1 _____	3 _____	800 _____	12 _____	60 _____

Lielāka masas mērvienība – tonna – var tikt asociēta ar to, cik sver neliela auto-mašīna. Govs masa var būt 500 kg, tātad divas govīs jau svērs veselu tonnu.

Būtiski skolēnam ir saprast, kāda ir masas mērvienību savstarpējā sakarība:

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$$

$$1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$$

Lai skolēni iegūtu priekšstatu par to, ka arī masas mērvienības var būt dažādas, var aplūkot senās mērvienības vai arī ASV lietotās: unce, kas ir 28,35 g, mārciņa, kas ir 0,454 kg.



Jautājumi pārdomām

Izskaidrojiet, kā jūs mācāt to, ko nozīmē kaut ko mērīt. Kas ir kopīgs un kas atšķirīgs, ja mācām mērīt garumu, laukumu, tilpumu, leņķa lielumu, masu, laiku?

Kā mācāt apgūt mērīšanas prasmi?

Kā palīdzat skolēnam iegūt izpratni par dažādajām mērvienībām un to, ko ar katru mēra?

Kādas praktiskas aktivitātes jūs plānojat, lai skolēni reālajā dzīvē lietotu savas mērīšanas prasmes?

Literatūra tālākai uzziņai

Bennett, A. B. Jr., & Nelson, L. T. (2004). *Mathematics for Elementary Teachers: A Conceptual Approach*. Boston: McGraw Hill.

Bock, K., Irwin, D. E., Davidson, D. J., & Levelt, W. (2003). Minding the clock. *Journal of Memory and Language*, 48(4), 653–685.

Cullen, A. L., Cullen, C. J., & O'Hanlon, W. A. (2018). Effects of an Intervention on Children's Conceptions of Angle Measurement. *International Journal of Research in Education and Science*, 4(1), 136–147.

- Dukurs, K., Mencis, J. (1965). *Aritmētikas metodika*. Rīga: Liesma.
- McMaster, H. (2023). Teaching volume measurement: Does the space and the matter, matter? *Australian Primary Mathematics Classroom*, 28(4), 19–27.
- Mencis, J. (1984). *Matemātikas metodika pamatskolā*. Rīga: Zvaigzne.
- Mullins, S. B., & LaCroix, T. J. (2018). Measurement and Conservation of Length: A Teaching Experiment with Tony and Sam. *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 267–271). Greenville, SC: University of South Carolina & Clemson University.
- Preston, R., & Thompson, T. (2004). Integrating Measurement Across the Curriculum. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 9(8), 436–441.
- Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2015). *Helping Children Learn Mathematics*. Hoboken NJ: John Wiley & Sons.
- Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Boston: Pearson.

Izmantotās mācību grāmatas

- Dzene, M., Gaša, I. (2023). *Matemātika 1. klasei. 1.daļa* Rīga: RaKa.
- Dzene, M., Gaša, I. (2024). *Matemātika 1. klasei. 2.daļa* Rīga: RaKa.
- Dzene, M., Gaša, I. (2024). *Matemātika 2. klasei. 1.daļa* Rīga: RaKa.
- France, I., Lāce, G. (2013). *Matemātika 5. klasei.* Lielvārde: Lielvārds.
- France, I., Lāce, G. (2015). *Matemātika 6. klasei.* Lielvārde: Lielvārds.
- Helmane, I., Dāvīda, A. (2013). *Matemātika 1. klasei. Pirmā daļa.* Lielvārde: Lielvārds.
- Helmane, I., Dāvīda, A. (2014). *Matemātika 1. klasei. Otrā daļa.* Lielvārde: Lielvārds.
- Helmane, I., Dāvīda, A. (2014). *Matemātika 2. klasei. Pirmā daļa.* Lielvārde: Lielvārds.
- Helmane, I., Dāvīda, A. (2015). *Matemātika 2. klasei. Otrā daļa.* Lielvārde: Lielvārds.
- Helmane, I., Dāvīda, A. (2015). *Matemātika 3. klasei. Pirmā daļa.* Lielvārde: Lielvārds.
- Helmane, I., Dāvīda, A. (2016). *Matemātika 3. klasei. Otrā daļa.* Lielvārde: Lielvārds.
- Helmane, I., France, I., Dāvīda, A., Dzērve, I. (2017). *Matemātika 4. klasei. Pirmā daļa.* Lielvārde: Lielvārds.
- Helmane, I., France, I., Dāvīda, A., Dzērve, I. (2018). *Matemātika 4. klasei. Otrā daļa.* Lielvārde: Lielvārds.
- Mencis, J. (jun.), Kumerdanka, A. (2022). *Matemātika 4. klasei. 1. daļa.* Rīga: Zvaigzne ABC.
- Mencis, J. (jun.), Kumerdanka, A. (2023). *Matemātika 4. klasei. 2. daļa.* Rīga: Zvaigzne ABC.
- Krastiņa, E., Volāne, E., Dreilinga, E. (2020). *Raibu raibā pasaule. 1. klase. Matemātika 1.* Rīga: Zvaigzne ABC.
- Krastiņa, E., Volāne, E., Dreilinga, E. (2020). *Raibu raibā pasaule. 1. klase. Matemātika 2.* Rīga: Zvaigzne ABC.
- Krastiņa, E., Volāne, E., Dreilinga, E. (2021). *Raibu raibā pasaule. 2. klase. Matemātika 1.* Rīga: Zvaigzne ABC.
- Krastiņa, E., Volāne, E., Dreilinga, E. (2021). *Raibu raibā pasaule. 2. klase. Matemātika 2.* Rīga: Zvaigzne ABC.
- Laukalēja, E. (2025). *Raibu raibā pasaule. 3. klase. Matemātika 1.* Rīga: Zvaigzne ABC.

Matemātikas metodika
1.–6. klasei

LU Akadēmiskais apgāds
Aspazijas bulvāris 5–132, Rīga, LV-1050, Latvija
www.apgads.lu.lv
Interneta grāmatnīca: gramatas.lu.lv

Iespiests SIA “Jelgavas tipogrāfija”