

*Дж. Симон, А. Джайн\**

*Mechanical Engineering Department, Indian Institute of Technology Kharagpur, Kharagpur,  
India-721302*

## **ВЛИЯНИЕ ТИПА УПАКОВКИ НА ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ МОДУЛЬ УПРУГОСТИ И КОНЦЕНТРАЦИЮ НАПРЯЖЕНИЙ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ КОМПОЗИТОВ<sup>1</sup>**

*J. Simon and A. Jain\**

### **THE EFFECT OF PACKING TYPE ON THE EQUIVALENT MODULUS AND STRESS CONCENTRATIONS OF UNIDIRECTIONAL COMPOSITES**

**Keywords:** unidirectional composites, finite-element modelling, homogenization, stress concentrations, uniform packing types

A representative volume element (RVE) with 11 uniform fiber packings is studied. The effective modulus of RVE corresponding to the different packing types is evaluated using the finite-element modelling and a semianalytical multistep rule of mixtures. The equivalent modulus of the RVE depends on the packing type. All the packing types displayed a strong transverse isotropy with less than a 1% variation in equivalent modulus in the two transverse directions. The multistep rule of mixtures could allow for changes in the moduli due to the different packing types. However, this method consistently underpredicted the equivalent modulus compared with full FE results. The effective modulus for the random packing closest to that of the elongated triangular packing type. The stress distribution in the interface varied strongly with packing type and loading direction. The sparsest packing type, i.e., the truncated hexagonal one led to both the highest equivalent modulus and the highest stress concentrations in the interface. The densest packing type, i.e., the triangular packing, led to the lowest modulus and lowest radial stress concentrations.

**Ключевые слова:** композиты однонаправленные, моделирование конечно-элементное, гомогенизация, концентрация напряжений, тип упаковки регулярный

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [atuljain@mech.iitkgp.ac.in](mailto:atuljain@mech.iitkgp.ac.in)  
Corresponding author: [atuljain@mech.iitkgp.ac.in](mailto:atuljain@mech.iitkgp.ac.in)

<sup>1</sup>Перевод с англ.

Изучен представительный элемент объема (ПЭО) с 11 типами регулярной упаковки волокон. Используя метод конечных элементов (МКЭ) и полуаналитическое многошаговое правило смесей, определен эффективный модуль упругости ПЭО, соответствующий разным типам упаковки волокон. Эквивалентный модуль упругости ПЭО зависит от типа упаковки. Все типы упаковки продемонстрировали наличие трансверсальной изотропии: различие численных значений эквивалентного модуля в двух поперечных направлениях менее 1%. Метод расчета, основанный на многоступенчатом правиле смесей, допускает изменение модулей упругости в случае разных типов упаковки и постоянно занижает значение эквивалентного модуля упругости по сравнению с рассчитанным МКЭ. Значение эффективного модуля упругости для случайной упаковки наиболее близко к таковому при удлиненной треугольной упаковке. Распределение напряжения на поверхности раздела волокно—матрица существенно зависит от типа упаковки и направления нагружения. Наиболее разреженный усеченный гексагональный тип упаковки продемонстрировал наибольшее значение эквивалентного модуля упругости и наибольшую концентрацию напряжений на поверхности раздела. Наиболее плотный треугольный тип упаковки обуславливает наименьшее значение модуля упругости и наименьшую концентрацию радиальных напряжений.

## Введение

Волокнисто-армированные композитные материалы находят все более широкое применение в таких высокотехнологичных отраслях, как аэрокосмическая и автомобильная. Однако эксплуатационные характеристики однонаправленных композитов часто ограничивают их отклик на поперечные нагрузки, при которых разрушение обычно начинается на поверхности раздела волокно—матрица, где возникают концентрации напряжений.

В [1] экспериментально установлено повреждение, начинающееся на поверхности раздела высоконапряженного волокна, далее распространяющееся по матрице. В [2] представлены изображения, полученные с помощью сканирующего электронного микроскопа (СЭМ), демонстрирующие нарушение сцепления между волокном и матрицей, приводящее к распространению трещины. Обычно такая потеря сцепления происходит на поверхности раздела волокна при наличии концентрации напряжений. Поэтому очень важно понимать распределение напряжений на поверхности раздела волокон в однонаправленных композитах.

Анализ прочности однонаправленных композитов обычно выполняют либо для упорядоченной [3—7], либо случайной [8—12] микроструктуры. При рассмотрении упорядоченной микроструктуры предпочтительны преимущественно квадратные или так называемые гексагональные упа-

ковки. Однако есть несколько способов упаковать круги в прямоугольное пространство. На основе однородной мозаики можно образовать до 11 регулярных рисунков упаковки [13]. В регулярных упаковках каждый круг можно увязать с любым другим кругом, используя комбинацию поворотов и отражений [14]. Важно отметить, что выбор квадратной или гексагональной упаковки для упорядоченных микроструктур — идеализация, удобная для теоретических исследований. В действительности, как показывает анализ изображений поперечных сечений однонаправленных композитов, полученных с помощью СЭМ, расположение волокон является случайным и может оказаться ближе к любому из 11 типов равномерной упаковки, особенно в случае малого или умеренного объемного содержания армирующих волокон. Изучение концентрации напряжений на поверхности раздела волокно—матрица может способствовать пониманию влияния разных типов упаковки волокон в однонаправленных композитах. Понимание локальной жесткости и концентрации напряжений может быть достигнуто путем изучения изменений модуля упругости и распределения межповерхностных напряжений при разных типах упаковки.

Исследование эффективных модулей упругости и концентрации напряжений в случае разных типов упаковок и сравнение их с таковыми при случайной упаковке может дать важную информацию о квадратных и гексагональных упаковках для теоретических разработок. Ранее провели исследования, направленные на понимание изменений в распределении напряжений на поверхности раздела волокно—матрица при отклонении упаковки от идеальной гексагональной [15, 16]. Однако исследований, посвященных разным идеализациям композитных структур, проведено очень мало.

В [17] исследовали коэффициент теплового расширения (КТР) композитов с металлической матрицей с учетом влияния типа упаковки. Рассмотрели только случайные и квадратные упаковки и установили, что тип упаковки оказывает значительное влияние на эквивалентный КТР. В [18] изучали поведение композитов со случайной, квадратной и гексагональной упаковками при поперечной ползучести и пришли к выводу, что такое рассмотрение приводит к неточным прогнозам поведения композитных материалов. В [19] провели систематическое исследование развития повреждений в композитах, изменяя межволоконное расстояние, и установили, что тип упаковки оказывает сильное влияние на эффективные свойства и поля локальных напряжений композитов. В [20] оценивали размер элементарной ячейки и тип упаковки на общие эквивалентные поперечные свойства однонаправленных композитов. В [7] разработали аналитические модели для предсказания эффективных свойств при квадратной, гексагональной и случайной упаковке волокон в композите.

Детально изучали и концентрацию напряжений вокруг круглых волокон. В [21] вывели аналитическое выражение для концентрации напряжений вокруг одиночного круглого волокна. Концентрацию напряжений

исследовали преимущественно в случае квадратных и гексагональных [4, 22, 23] и случайных [24] упаковок. Насколько известно авторам настоящей работы, систематического исследования эффективного модуля упругости и концентрации напряжений для упаковок, отличных от квадратных и гексагональных, не проведено.

Предпринято несколько попыток расчета эквивалентных модулей упругости однонаправленных композитов. Некоторые разработанные методы основаны на правиле смесей и моделях, предложенных в [25—28]. Также использовали метод Мори—Танака [29] и другие методы гомогенизации [30]. Указанные методы предсказывают эффективный модуль упругости однонаправленных композитов с разной степенью точности и имеют ограниченную практическую ценность при изучении концентрации напряжений, зависящей от конкретной упаковки волокон в композите. Для этой цели используют конечно-элементные расчеты [31].

Разработка аналитических моделей для предсказания эффективного отклика однонаправленных композитов не является целью настоящей работы. Для этого можно использовать несколько методов разной степени точности. Основная цель настоящей работы — изучение и сравнение эффективных модулей упругости композитов и изменения напряжений на поверхности раздела волокно—матрица, рассчитанных для 11 разных типов регулярной упаковки и случайного распределения волокон. Влияние типа упаковки на эффективные модули упругости, распределение и концентрацию напряжений на поверхностях раздела (определяемых как математическая поверхность контакта между волокном и матрицей) изучали с помощью конечно-элементных моделей и простых полуаналитических формулировок.

## 1. Теория

**1.1. Упаковка кругов в прямоугольник.** Увязывая каждый круг с другими посредством поворотов и отражений, можно получить 11 типов регулярных упаковок [13]. Например, квадратную упаковку можно получить путем вращения и отражения квадратных блоков. Точно также треугольную упаковку можно получить путем вращения и трансляции равносторонних треугольников. В ранее опубликованной литературе треугольную упаковку часто называют гексагональной. Однако в настоящей работе называем ее треугольной. Разница между гексагональной и треугольной упаковками заключается в том, что треугольную упаковку можно получить посредством повторяющихся и вращающихся треугольников, тогда как основной блок гексагональной упаковки — шестиугольник. В гексагональной упаковке отсутствует круг в центре шестиугольника. В зависимости от основного повторяющегося блока различают 11 типов упаковки: а) треугольную, б) квадратную, в) гексагональную, г) удли-

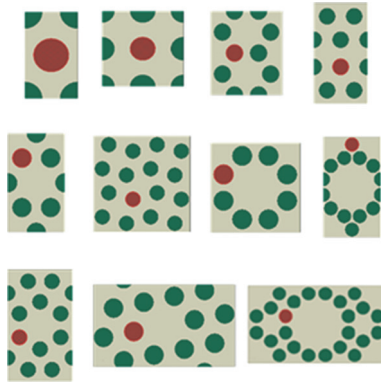


Рис. 1. Разные типы упаковки волокон: верхний ряд слева направо — треугольная, квадратная, гексагональная, удлиненная треугольная; средний ряд слева направо — тригексагональная, плосконосая квадратная, усеченная квадратная, усеченная гексагональная; нижний ряд слева направо — прямоугольная тригексагональная, плосконосая тригексагональная, усеченная тригексагональная.

ненную треугольную, д) тригексагональную (trihexagonal), е) плосконосую тригексагональную (snub trihexagonal), ж) усеченную квадратную, з) усеченную гексагональную, и) прямоугольную тригексагональную (rectitrihexagonal), к) плосконосую тригексагональную (snub trihexagonal), л) усеченную тригексагональную. Схема 11 типов упаковок приведена на рис. 1.

Для анализа и аналитического моделирования упаковок, представленных в настоящей работе, рассматриваем минимальный прямоугольный повторяющийся блок, содержащий по крайней мере одно полное волокно. Выбор прямоугольного повторяющегося блока сделан с учетом простоты применения граничных условий. Тип упаковки и минимальные прямоугольные блоки показаны на врезках графиков, иллюстрирующих распределение напряжений в разделе обсуждения результатов.

Разные типы упаковок имеют разные пределы теоретически возможного максимального объемного содержания волокон. Максимальное объемное содержание волокон, достижимое в усеченной гексагональной упаковке, ~ 35%, а в треугольной может достигать 90%. Типы упаковок с наименьшим и наибольшим пределом объемного содержания волокон иногда называют наиболее разреженной и наиболее плотной соответственно.

**1.2. Многошаговое правило смесей.** Эффективные модули упругости композита рассчитывают, используя многошаговое правило смесей. В предложенной схеме ПЭО разбивается на небольшие полосы нормированной ширины  $a$ , параллельные направлению расчета модулей упругости. Предположим, что каждая полоса находится в изонапряженном со-

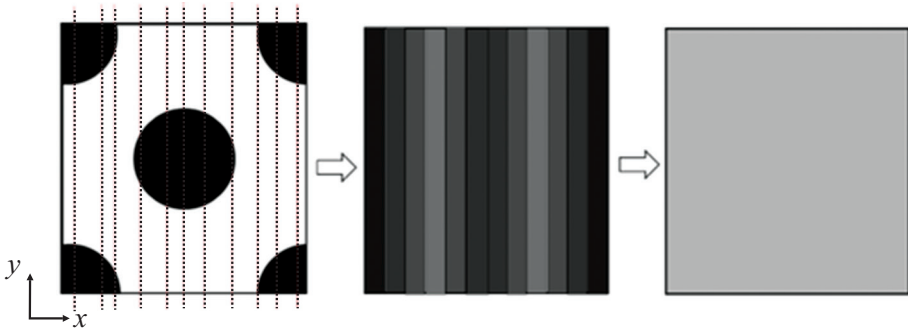


Рис. 2. Схематическое представление многошагового правила смесей: ПЭО разбивается на кратное количество полосок, эквивалентные свойства каждой из которых оценивают с помощью обратного правила смесей, а эквивалентные свойства ПЭО — посредством правила смесей.

стоянии, а эффективный модуль упругости  $E_{1strip}^i$   $i$ -й полосы вычисляем с помощью обратного правила смесей

$$\frac{1}{E_{1strip}^i} = \frac{v_{strip}^i}{E_f} + \frac{1-v_{strip}^i}{E_m}, \quad (1)$$

где  $v_{strip}^i$  — объемное содержание волокон;  $E_f$ ,  $E_m$  — модули упругости волокна и матрицы соответственно:

$$E_{eqv} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_{1strip}^i, \quad (2)$$

$N$  — количество полос.

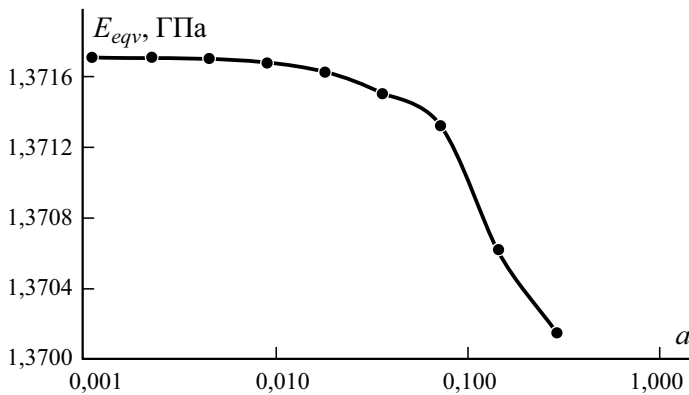


Рис. 3. Изменение предсказываемого эквивалентного модуля упругости  $E_{eqv}$  как функции нормированной толщины  $a$  полосы ПЭО с треугольной упаковкой волокон.

Схема многоступенчатого правила смесей (рис. 2) позволяет учитывать разные типы упаковки, что было невозможно при использовании простого правила смесей.

Исследование чувствительности предложенной схемы с разной шириной полосы показало, что достаточна ширина полосы, равная 0,01 радиуса волокна. Данные рис. 3 демонстрируют изменение модуля Юнга в зависимости от нормированной ширины полосы для ПЭО с треугольной упаковкой волокон.

## 2. Методология

Во всех конечно-элементных моделях, построенных с помощью программного обеспечения ABAQUS 6.14 для разных типов упаковки волокон, форма ПЭО была прямоугольной. Конечно-элементные сетки образованы из 8-узловых квадратичных четырехугольных конечных элементов CPE8R плоской деформации. Для повышения точности вычисления напряжений на поверхности раздела конечно-элементную сетку сгущали вблизи поверхности волокон до размера 0,005 от диаметра волокна.

Граничные условия прикладывали путем выполнения двухэтапных расчетов МКЭ. На первом этапе ПЭО подвергали расширению на 0,1% в направлении нагружения. При этом расчете поперечные грани задавали свободными от напряжений. Коэффициент Пуассона вычисляли как отношение усредненных деформаций в поперечном направлении и направлении нагружения

$$\nu_{xy} = -\frac{\langle \varepsilon_{yy} \rangle}{\langle \varepsilon_{xx} \rangle}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_{yy}$  и  $\varepsilon_{xx}$  — нормальные деформации в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $\langle \rangle$  обозначает усреднение по объему.

На втором этапе к тому же ПЭО прикладывали граничные условия в перемещениях, обеспечивающие его расширение 0,1% в направлении нагружения и сужение в силу эффекта Пуассона (на основе значений коэффициентов Пуассона, рассчитанных ранее) в поперечном направлении. Задание такого граничного условия наряду с использованием элементов плоской деформации гарантировало отсутствие трансляции ПЭО, поскольку все его грани были закреплены. Такие же граничные условия использовали в [32, 33] в качестве прокси для простого растягивающего нагружения, но в настоящей работе для вычисления значений коэффициентов Пуассона использовали не приближение Чамиса, а более точное вычисление.

На рис. 4 схематически изображены граничные условия, применяемые при определении модуля Юнга  $E_x$  в направлении оси  $x$ . При вы-

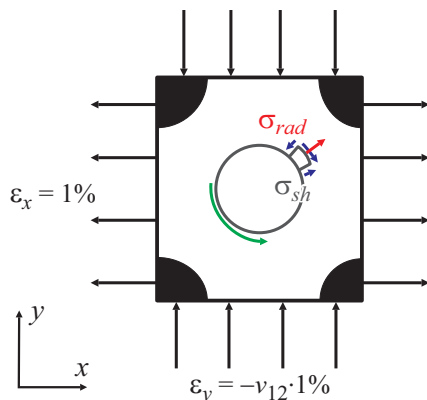


Рис. 4. Схематическое представление граничных условий для радиальных  $\sigma_{rad}$  и сдвиговых  $\sigma_{sh}$  напряжений. Начальная точка распределения напряжений соответствует началу зеленой стрелки.

числении модуля Юнга  $E_y$ , меняли местами направления перемещений, задаваемых в направлении осей  $x$  и  $y$ . Поперечные модули Юнга волокна и матрицы приняты равными 10 и 1 ГПа соответственно, а коэффициенты Пуассона — 0,22 и 0,35 соответственно. Поперечный модуль упругости в зависимости от типа углеродного волокна изменяется в пределах 5—15 ГПа [34]. Существует несколько термопластов с модулем упругости 1 ГПа [35]. Также следует отметить, что для проводимого анализа значения индивидуальных модулей упругости обычно не имеют значения. Более важный параметр — отношение поперечных модулей упругости волокна и матрицы. В настоящей работе оно принято равным 10. Рассматривали ПЭО с объемным содержанием волокон 0,3, 0,4 и 0,5.

Постобработку конечно-элементных результатов выполнили для определения эффективного модуля Юнга и распределения напряжения на поверхности раздела. Для примененных граничных условий модуль Юнга вычисляли по формуле

$$E_x = \frac{\langle \sigma_{xx} \rangle}{\langle \epsilon_{xx} \rangle}, \quad (4)$$

где  $\sigma_{xx}$  и  $\epsilon_{xx}$  — нормальное напряжение и деформация соответственно.

Радиальные и сдвиговые напряжения вычисляли в каждой узловой точке вдоль поверхности раздела (определяемой как область матрицы, близкая к волокну). Помимо радиального, осевого и сдвигового напряжений на поверхности раздела вычисляли средневзвешенное по объему напряжение в матрице, совпадающее с направлением нагружения ( $\sigma_{xx}$ , если направление нагружения по оси  $x$ ). Концентрацию напряжений на



поверхности раздела вычисляли путем нормирования значений напряжений на поверхности раздела на средневзвешенное по объему напряжение.

В конкретных типах упаковки концентрация и распределения напряжений разных волокон различались. В таких случаях дальнейшему анализу подвергали волокна с наибольшей концентрацией напряжений (отмечено красным цветом на рис. 1). Распределения напряжений построили в зависимости от угла  $\alpha$ , отсчитываемого от начальной точки в направлении движения зеленой стрелки (см. рис. 4).

Помимо изучения ПЭО с регулярными типами упаковки рассмотрели также ПЭО со случайным пространственным расположением. При всех трех рассматриваемых значениях объемного содержания волокон разработали восемь случайных реализаций по 50 волокон в каждой. ПЭО со случайным расположением волокон сгенерировали с помощью алгоритма наилучшего кандидата (НК) [36]. В алгоритм НК новое включение добавляли, создавая  $k$  случайно размещенных включений-кандидатов и выбирая наилучшего. “Наилучшего” кандидата определяли как наиболее удаленного от предыдущих. Процесс повторяли до тех пор, пока не минимизировали разницу с требуемым объемным содержанием волокон в ПЭО. Случайные микроструктуры, сгенерированные в настоящей работе, не были периодическими.

Среднее значение эквивалентного модуля для восьми реализаций сравнили с таковыми, вычисленными для разных типов упаковок, для определения типа регулярной упаковки, наиболее близкой к случайной. Комбинацию с меньшими данными ПЭО для расчета средних свойств ранее использовали и рекомендовали в [37, 38].

### 3. Результаты и обсуждение

**3.1. Эффективный модуль упругости.** Данные рис. 5 иллюстрируют изменение модуля Юнга в зависимости от типа упаковки. При одном и том же объемном содержании волокон  $\nu_f$  разница между минимальным и максимальным значениями модуля Юнга  $\sim 10\%$ . При  $\nu_f = 0,3$  значения модулей упругости  $E_x$  и  $E_y$  изменялись в диапазонах 1,51—1,62 ГПа и 1,52—1,63 ГПа соответственно. Аналогичные диапазоны при  $\nu_f = 0,4$  равны 1,78—1,95 ГПа и 1,79—1,94 ГПа, при  $\nu_f = 0,5$  2,14—2,4 ГПа и 2,15—2,4 ГПа. Наименьшие значения модулей упругости при трех рассмотренных значениях объемного содержания волокон продемонстрировал ПЭО с треугольной упаковкой. Наибольшее значение модуля упругости при  $\nu_f = 0,3, 0,4$  и  $0,5$  имели ПЭО с усеченной гексагональной, усеченной тригексагональной и усеченной квадратной упаковкой соответственно (с наиболее разреженным расположением волокон при рассматриваемом объемном содержании). Усеченная гексагональная структура имела максимальный теоретический предел объемного содержания  $\sim 35\%$ . ПЭО с  $\nu_f = 0,4$  для этого типа упаковки невозможен. По-

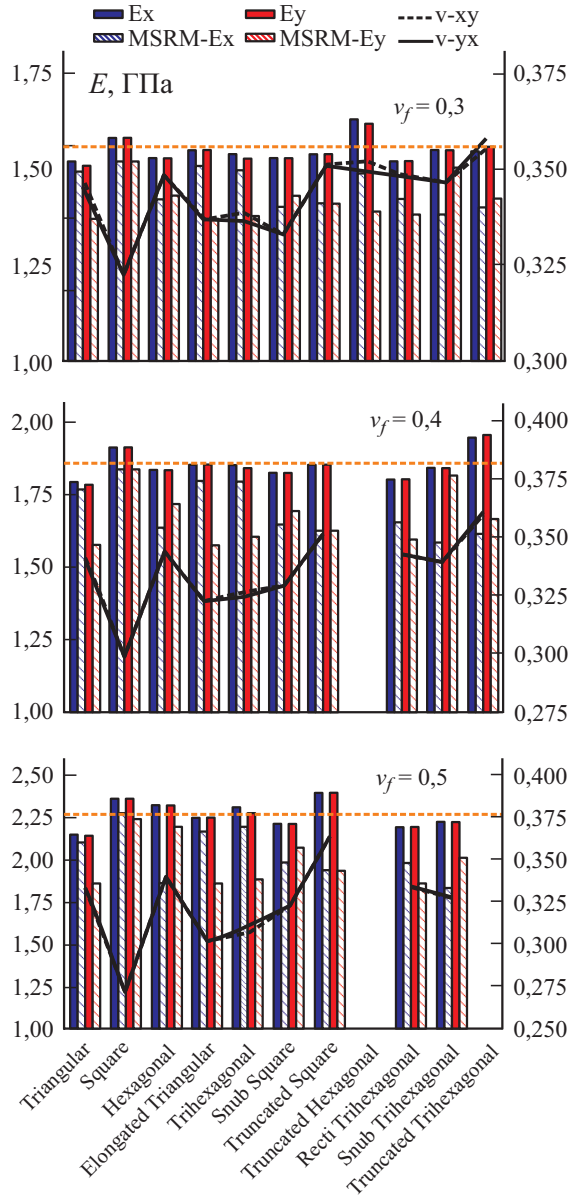


Рис. 5. Диаграммы значений модулей упругости  $E_x$  и  $E_y$  для разных упаковок волокон. Заштрихованные диаграммы соответствуют средней жесткости, рассчитанной с помощью многошагового правила смесей.

этому можно сказать, что усеченная тригексагональная структура — наиболее разреженный тип упаковки волокон в ПЭО с  $v_f = 0,4$  и более. Предел объемного содержания волокон в усеченной тригексагональной структуре менее 50%. ПЭО с  $v_f = 0,5$  для этого типа упаковки невозможен, поэтому структура усеченного квадрата — наиболее разреженный тип упаковки в ПЭО с  $v_f = 0,5$ .

Для заданного объемного содержания волокон межцентровые расстояния между двумя ближайшими волокнами максимальны в случае треугольной упаковки, тогда как у разреженных типов упаковки, таких как усеченные гексагональные, эти расстояния были небольшими для одних волокон и большими — для других. При  $\nu_f = 0,3$  межцентровые расстояния между двумя ближайшими волокнами в треугольной упаковке составляли 1,79 диаметра волокна, а усеченной гексагональной — всего 1,14 диаметра волокна.

Предел упаковки определенного волокна достигается, когда межцентровое расстояние между любыми двумя волокнами приближается к нулю. Разреженные типы упаковки имеют области, преимущественно представляющие собой матрицу, и области с высоким содержанием волокон. Это обуславливает при разреженной упаковке больший модуль Юнга, чем при треугольной, даже если общее объемное содержание волокон одинаково.

Средние значения модулей упругости, рассчитанные для восьми реализаций случайной упаковки из 50 волокон, находились в пределах значений, рассчитанных для разных регулярных типов упаковки. Эффективные модули для случайной упаковки наиболее близки к таковым удлиненной треугольной упаковки. Все типы упаковок продемонстрировали трансверсальную изотропию модуля упругости с вариацией значений  $E_x$  и  $E_y$  менее 1% для любого типа упаковки. Только в случае тригексагональной упаковки с  $\nu_f = 0,5$  расчет МКЭ продемонстрировал различие значений  $E_x$  и  $E_y$  1,31%. Многошаговое правило смесей позволило использовать разные типы упаковки, но расчет на его основе постоянно занижал значение эффективного модуля упругости.

Таким образом, значение эффективного модуля упругости зависит от типа упаковки. Наименьшей жесткостью обладала треугольная упаковка, а наибольшим эффективным модулем упругости при  $\nu_f = 0,3, 0,4$  и  $0,5$  — усеченная гексагональная, усеченная тригексагональная и усеченная квадратная упаковки соответственно.

**3.2. Распределение напряжений на поверхности раздела** (при  $\nu_f = 0,3$ ) для 11 типов упаковки волокон при нагружении в направлении осей  $x$  и  $y$  показано на рис. 6. На каждом из графиков угол  $\alpha$  отсчитывали от отрицательной оси  $y$  против часовой стрелки (см. также рис. 4). Видно, что распределение напряжений на поверхности раздела сильно зависит от типа упаковки. Радиальное напряжение достигает локального максимума в области, где линия, соединяющая центры соседних волокон, пересекается с поверхностью раздела и изменяется при изменении направления нагружения. Например, распределения напряжений при усеченной гексагональной упаковке при нагружении в направлении осей  $x$ ,  $y$  и объемном содержании волокон  $\nu_f = 0,3$  заметно различаются по величине (максимальная радиальная концентрация

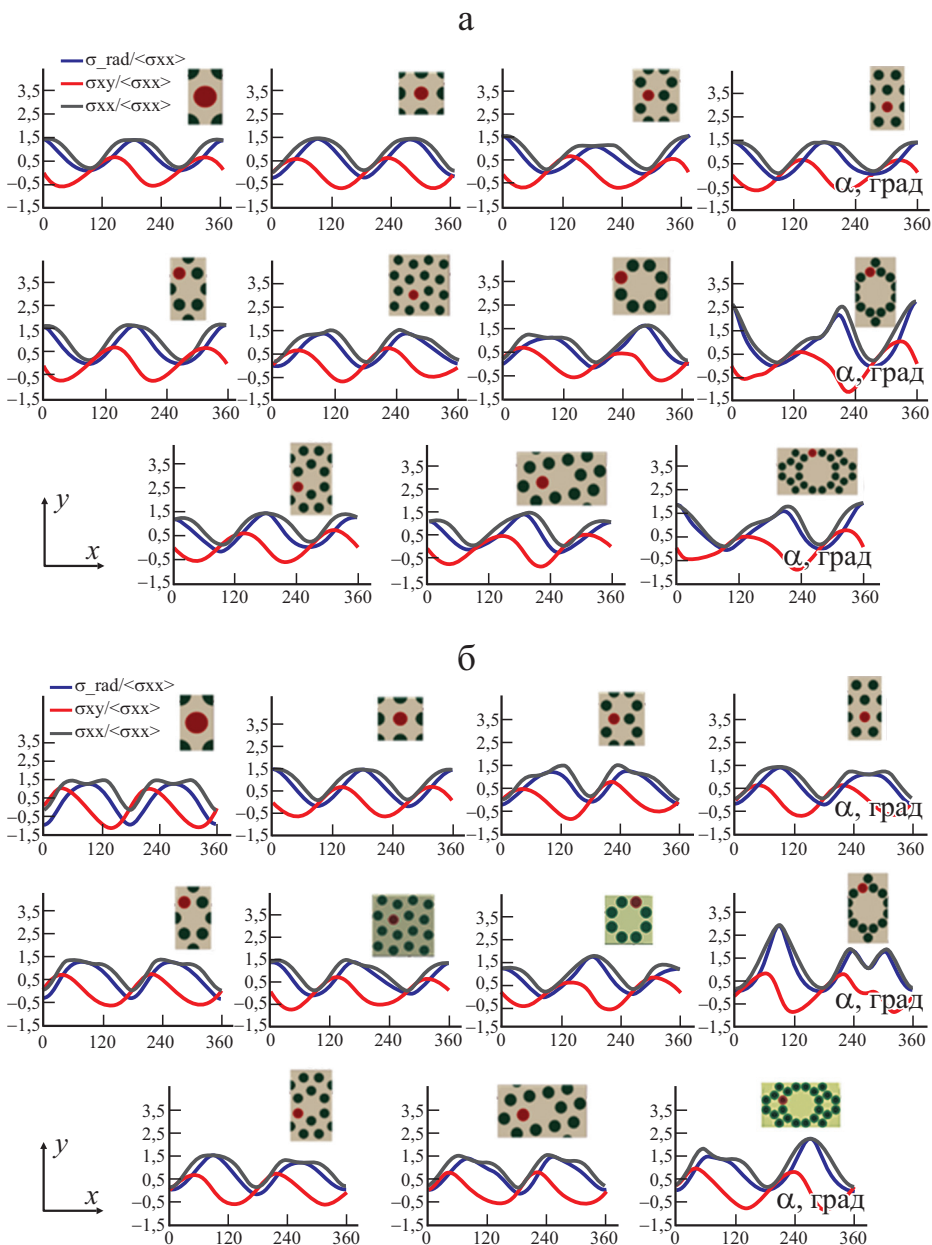


Рис. 6. Распределение радиальных  $\sigma_{rad}$ , сдвиговых  $\sigma_{xy}$  и осевых  $\sigma_{xx}$  напряжений на поверхности раздела волокна с наибольшим осевым напряжением (указан красным цветом на вставках, иллюстрирующих тип упаковки (см. рис. 1)) при нагружении в направлении осей  $x$  (а) и  $y$  (б) и  $\nu_f = 0,3$ . Тип упаковки указан на вставках.

напряжений равна 2,68 и 2,93 соответственно) и имеют разное количество локальных максимумов и минимумов.

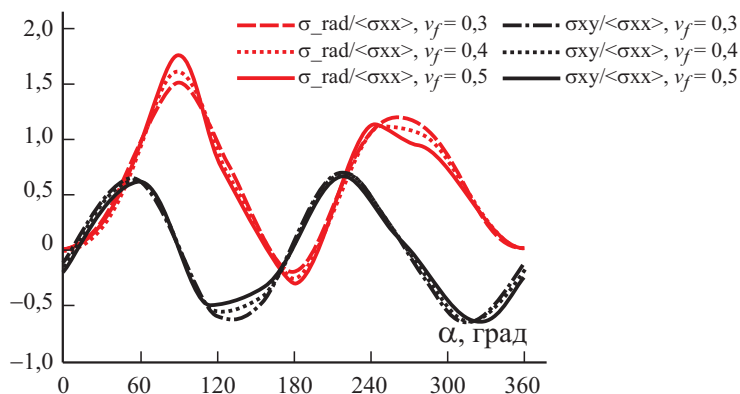


Рис. 7. Влияние объемного содержания на распределение напряжений на поверхности раздела в ПЭО с прямоугольной тригексагональной упаковкой при нагружении в направлении оси  $x$ .

**3.3. Влияние объемного содержания.** Распределение радиальных и сдвиговых напряжений при прямоугольной тригексагональной упаковке и разным объемном содержании волокон показано на рис. 7. Видно, что общий характер зависимостей одинаков с близкими значениями локальных максимумов и минимумов. С увеличением объемного содержания волокон значения максимальной концентрации радиальных напряжений возрастают и равны 1,50, 1,60 и 1,76 при  $v_f = 0,3, 0,4$  и 0,5 соответственно. Пик концентрации радиальных напряжений близок к  $\alpha = 90^\circ$ .

При других типах упаковок наблюдали одинаковую зависимость распределения напряжений от объемного содержания волокон.

**3.4. Концентрация напряжений.** Пиковые значения напряжений важны для моделирования инициирования потери сцепления волокно—матрица. На рис. 8 представлено изменение максимальной концентрации радиальных и сдвиговых напряжений при разных типах упаковки и объемном содержании волокон. При этом типы упаковок с большей эквивалентной жесткостью имели большие значения коэффициента концентрации напряжений. В случае треугольной упаковки наблюдали минимальную концентрацию радиальных напряжений, равную 1,37, 1,40 и 1,45 при  $v_f = 0,3, 0,4$  и 0,5 соответственно. Максимальную концентрацию радиальных напряжений при  $v_f = 0,3, 0,4$  и 0,5 продемонстрировали усеченная гексагональная, усеченная тригексагональная и усеченная квадратная упаковки: при нагружении в направлении оси  $x$  — 2,69, 2,52 и 2,60 соответственно, в направлении оси  $y$  — 2,93, 3,14 и 2,60 соответственно. Следует отметить, что максимальную и минимальную концентрации напряжений для одного и того же типа упаковки наблюдали при максимальном и минимальном значениях эквивалентных модулей упругости.

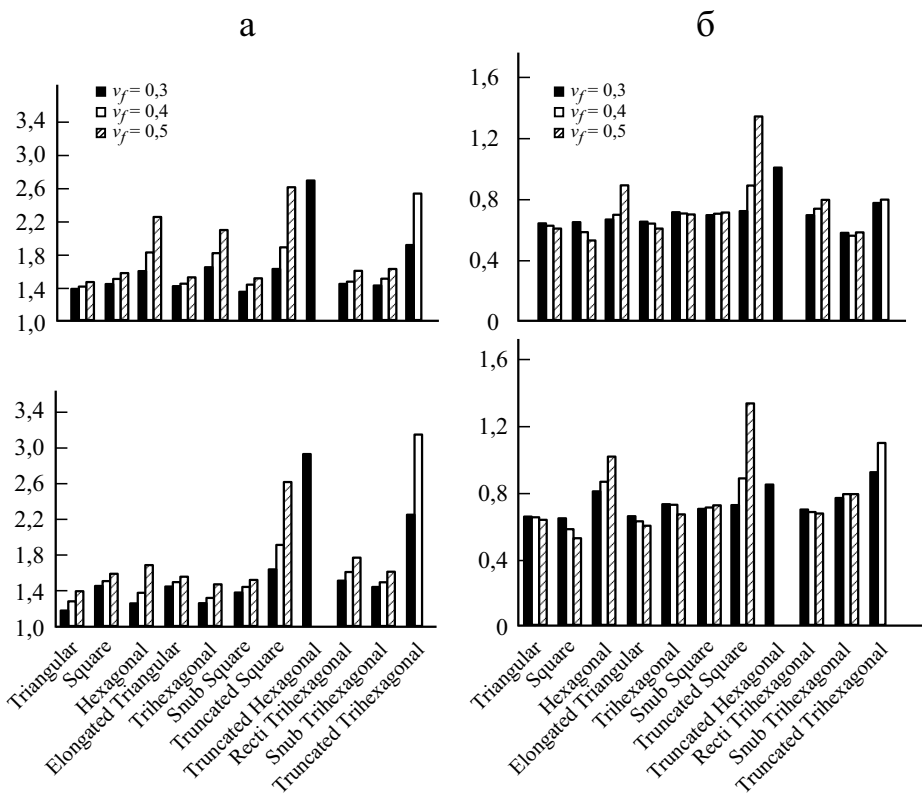


Рис. 8. Максимальная концентрации радиальных (а) и сдвиговых (б) напряжений при нагружении в направлении оси  $x$  (сверху) и  $y$  (снизу).

По мере увеличения объемного содержания волокон коэффициенты концентрации радиальных напряжений немного возрасли при квадратной, треугольной и тригексагональной упаковках и чуть в большей степени — при гексагональной и усеченной квадратной.

Поведение коэффициента концентрации сдвиговых напряжений более неустойчивое: в зависимости от типа упаковки он возрасал или уменьшался. При плосконосой тригексагональной, тригексагональной и плосконосой квадратной упаковках объемное содержание волокон имело незначительное влияние (менее 2%) на максимальный коэффициент концентрации сдвиговых напряжений. При усеченной квадратной упаковке наблюдали максимальные значения концентрации сдвиговых напряжений, равные 0,73, 0,89 и 1,34 при  $v_f = 0,3, 0,4$  и  $0,5$  соответственно, что подтверждает сильную зависимость от объемного содержания волокон в данном случае.

## Заключение

Исследовано влияние типа упаковки волокон на эффективные модули упругости однонаправленных композитов, распределение и концентрацию напряжений. Разработаны ПЭО, соответствующие 11 типам упаковки волокон, и изучен эффективный отклик и распределение напряжений на поверхности раздела. Важными выводами исследования являются следующие.

Тип упаковки оказывает существенное влияние на эффективные модули упругости композитов. Наиболее плотный тип упаковки обуславливает наименьший эффективный модуль упругости композитов, а наиболее разреженный — наибольший. В зависимости от типа упаковки волокон при их одинаковом объемном содержании значение эффективного модуля упругости может варьироваться до 10%.

Многошаговое правило смесей работает лучше, чем более часто используемое обратное правило смесей.

Значения эффективных модулей упругости при случайной упаковке наиболее близки к таковым при удлиненной треугольной (а не обычно используемой квадратной или треугольной). Таким образом, теоретические модели точнее разрабатывать на основе несколько более сложной удлиненной треугольной упаковки.

Распределение напряжений на поверхности раздела сильно зависит от типа упаковки. При объемном содержании волокон  $v_f = 0,3$  коэффициенты концентрации напряжений в зависимости от типа упаковки насадки могут изменяться от 1,39 до 2,65.

При всех рассмотренных типах упаковок наблюдали трансверсальную изотропию эффективных модулей упругости в двух перпендикулярных направлениях: различие значений модулей упругости  $E_x$  и  $E_y$  не превышало 2%. Однако поперечной изотропии для распределения напряжений на поверхностях раздела не наблюдали.

Вид распределения напряжений не зависел от объемного содержания волокон. При этом значение концентрации радиального напряжения возрастало с увеличением объемного содержания волокон при всех рассмотренных типах упаковки, а концентрация сдвиговых напряжений как уменьшалась, так и возрастала.

Проведено тщательное исследование влияния разных типов упаковки волокон на эффективные свойства и распределение напряжений в однонаправленных композитах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Agarwal B. D., Broutman L. J., and Chandrashekhara K.* Analysis and Performance of Fiber Composites. — John Wiley & Sons, 2006.
2. *Gamstedt E. K. and Sjögren B. A.* Micromechanisms in tension-compression fatigue of composite laminates containing transverse plies // *Compos. Sci. Technol.* — 1999. — Vol. 59, No. 2. — P. 167—178.

3. *Sertse H. M. et al.* Challenge problems for the benchmarking of micromechanics analysis: Level I initial results // *J. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 52, No. 1. — P. 61—80.
4. *Knight M. G., Wrobel L. C., and Henshall J. L.* Micromechanical response of fibre-reinforced materials using the boundary element technique // *Compos. Struct.* — 2003. — Vol. 62. — P. 341—352.
5. *Sabuncuoğlu B. et al.* Micro-scale finite element analysis of stress concentrations in steel fiber composites under transverse loading // *J. Compos. Mater.* — 2014. — Vol. 49. — P. 1057—1069.
6. *Maligno A. R., Warrior N. A., and Long A. C.* Finite element investigations on the microstructure of fibre-reinforced composites // *Express Polym. Lett.* — 2008. — Vol. 2. — P. 665—676.
7. *Malekmohammadi S.* Efficient Multi-Scale Modelling of Viscoelastic Composites with Different Microstructures. — University of British Columbia, 2014.
8. *Kari S. et al.* Computational evaluation of effective material properties of composites reinforced by randomly distributed spherical particles // *Compos. Struct.* — 2007. — Vol. 77. — P. 223—231.
9. *Pathan M. V. et al.* A new algorithm to generate representative volume elements of composites with cylindrical or spherical fillers // *Composites: Part B.* — 2017. — Vol. 110. — P. 267—278.
10. *Wang X. et al.* A long-range force based random method for generating anisotropic 2D fiber arrangement statistically equivalent to real composites // *Compos. Sci. Technol.* — 2019. — Vol. 180. — P. 33—43.
11. *Gusev A. A., Hine P. J., and Ward I. M.* Fiber packing and elastic properties of a transversely random unidirectional glass/epoxy composite // *Compos. Sci. Technol.* — 2000. — Vol. 60, No. 4. — P. 535—541.
12. *Wongsto A. and Li S.* Micromechanical FE analysis of UD fibre-reinforced composites with fibres distributed at random over the transverse cross-section // *Composites: Part A.* — 2005. — Vol. 36, No. 9. — P. 1246—1266.
13. *Heppes A.* Some densest two-size disc packings in the plane // *Discrete & Computational Geometry.* — 2003. — Vol. 30, No. 2. — P. 241—262.
14. Circle packing. A: Wikipedia, DOI [https://en.wikipedia.org/wiki/Circle\\_packing](https://en.wikipedia.org/wiki/Circle_packing)
15. *Choi S. and Ji W.* Effects of fiber arrangements on stress distributions over the transverse cross section of unidirectionally continuous fiber-reinforced composites // *Compos. Res. The Korean Soc. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 33, No. 1. — P. 30—37.
16. *Hojo M. et al.* Effect of fiber array irregularities on microscopic interfacial normal stress states of transversely loaded UD-CFRP from viewpoint of failure initiation // *Compos. Sci. Technol.* — 2009. — Vol. 69, No. 11. — P. 1726—1734.
17. *Hassanzadeh-Aghdam M. K. and Ansari R.* Role of fiber arrangement in the thermal expanding behavior of unidirectional metal matrix composites // *Mater. Chem. Phys.* — 2020. — Vol. 252. — P. 123273.
18. *Zhang L., Ernst L. J., and Brouwer H. R.* Transverse behaviour of a unidirectional composite (glass fibre reinforced unsaturated polyester). Part I. Influence of fibre packing geometry // *Mech. Mater.* — 1998. — Vol. 27, No. 1. — P. 13—36.



19. *Maligno A. R., Warrior N. A., and Long A. C.* Effects of inter-fibre spacing on damage evolution in unidirectional (UD) fibre-reinforced composites // *Eur. J. Mech.-A/Solids*. — 2009. — Vol. 28, No. 4. — P. 768—776.
20. *D'Mello R. J. and Waas A. M.* Influence of unit cell size and fiber packing on the transverse tensile response of fiber reinforced composites // *Mater. Multidisciplinary Digital Publishing Institute*. — 2019. — Vol. 12, No. 16. — P. 2565.
21. *Goodier J. N.* Concentration of stress around spherical and cylindrical inclusions and flaws // *TASME*. — 1933. — Vol. 55. — P. 39.
22. *Heinrich C. et al.* The influence of the representative volume element (RVE) size on the homogenized response of cured fiber composites // *Modell. Simul. Mater. Sci. Eng. IOP Publ.* — 2012. — Vol. 20, No. 7. — P. 75007.
23. *Sabuncuoglu B., Gorbatikh L., and Lomov S. V.* Analysis of stress concentrations in transversely loaded steel-fiber composites with nano-reinforced interphases // *Int. J. Solids Struct.* — 2018. — Vol. 130. — P. 248—257.
24. *Melro A. R., Camanho P. P., and Pinho S. T.* Generation of random distribution of fibres in long-fibre reinforced composites // *Compos. Sci. Technol.* — 2008. — Vol. 68, No. 9. — P. 2092—2102.
25. *Hashin Z.* Analysis of composite materials — a survey // *J. Appl. Mech.* — 1983. — P. 451—505.
26. *Halpin J. C. and Kardos J. L.* The Halpin–Tsai equations: a review // *Polym. Eng. Sci.* — 1976. — Vol. 16, No. 5. — P. 344—352.
27. *Tucker C. L. I. and Liang E.* Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites: Review and evaluation // *Compos. Sci. Technol.* — 1999. — Vol. 59, No. 5. — P. 655—671.
28. *Chamis C. C.* Mechanics of composite materials: past, present, and future // *J. Compos. Technol. Res.* — 1989. — Vol. 11, No. 1. — P. 3—14.
29. *Mori T. and Tanaka K.* Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // *Acta Metall.* — 1973. — Vol. 21, No. 5. — P. 571—571.
30. *Jain A.* Micro and mesomechanics of fibre reinforced composites using mean field homogenization formulations: A review // *Mater. Today Communications*. — 2019. — Vol. 21, No. 1 — P. 100552.
31. *Koley S., Mohite P. M., and Upadhyay C. S.* A micromechanical study and uncertainty quantification for effective properties of unidirectional fibre reinforced composites // *Compos. Struct.* — 2019. — Vol. 225. — P. 111141.
32. *Sabuncuoglu B. et al.* Micro-scale finite element analysis of stress concentrations in steel fiber composites under transverse loading // *J. Compos. Mater.* — 2015. — Vol. 49, No. 9. — P. 1057—1069.
33. *Sabuncuoglu B., Cakmakci O., and Kadioglu F. S.* Fiber/matrix interface stress analysis of flax-fiber composites under transverse loading considering material nonlinearity // *J. Reinf. Plastics Compos.* — 2020. — Vol. 39, Nos. 9—10. — P. 345—360.
34. *Miyagawa H. et al.* Transverse elastic modulus of carbon fibers measured by Raman spectroscopy // *Mater. Sci. Eng.* — 2005. — Vol. 412, No. 1. — P. 88—92.
35. *Campus Plastics, 2020. www.campusplastics.com*
36. *Mitchell D. P.* Spectrally optimal sampling for distribution ray tracing // *Proc. 18th Ann. Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques, 1991.* — P. 157—164.

37. *Kanit T. et al.* Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach // *Int. J. Solids Struct.* — 2003. — Vol. 40, Nos. 13—14. — P. 3647—3679.

38. *Jain A. et al.* Pseudo-grain discretization and full Mori—Tanaka formulation for random heterogeneous media: Predictive abilities for stresses in individual inclusions and the matrix // *Compos. Sci. Technol.* — 2013. — Vol. 87. — P. 86—93.

Поступила в редакцию 29.07.2021

Окончательный вариант поступил 28.01.2022

Received July 29, 2021 (Jan. 28, 2022)

---