

*И. Ю. Смолин\*, В. А. Зимина, С. П. Буйкова*

*Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия*

## **ОЦЕНКА ТЕМПЕРАТУРНЫХ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СЛОИСТОМ КЕРАМИЧЕСКОМ КОМПОЗИТЕ**

*I. Yu. Smolin\*, V. A. Zimina, and S. P. Buyakova*

### **ESTIMATION OF RESIDUAL THERMAL STRESSES IN A LAYERED CERAMIC COMPOSITE**

**Keywords:** residual stresses, high-temperature ceramics, layered composite, numerical modeling, analytical solution

For the first time, an analysis of the thermal stress distribution arising in a layered  $ZrB_2$ —SiC— $ZrO_2$  ceramic disk during its manufacturing was performed using numerical and analytical methods. The numerical modeling is implemented by the finite-element method considering the temperature dependence of properties of composite components. The residual stress distribution across the layers has a sawtooth character, in which stresses take both negative and positive values. A new analytical solution based on a simplified one-dimensional formulation of the problem for the central part of the disk is proposed. This solution shows that the residual stresses are determined not only by the coefficients of thermal expansion and by the biaxial elastic modulus of the connected materials, but also by the thickness and location of layers. The results of the analytical solution obtained were in a good agreement with outcomes of the numerical modeling. It is shown that, to estimate the residual stress in a laminated composite, with assumption that the properties of composite components are temperature-independent, it is appropriate to use the thermomechanical characteristics corresponding to a high temperature rather than a room or average ones. The effect of porosity on the residual stress in a laminated ceramic composite was studied. It is found that the consideration of porosity decreased the

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [smolin@ispms.ru](mailto:smolin@ispms.ru)  
Corresponding author: [smolin@ispms.ru](mailto:smolin@ispms.ru)

residual stresses only in the layers that are made porous. Results of the study provide a basis for analyzing residual stresses in laminated composites of different compositions and in specific engineering applications.

**Ключевые слова:** напряжения остаточные, керамика высоко-температурная, композит слоистый, моделирование численное, решение аналитическое

Впервые выполнен анализ распределения температурных напряжений, возникших в слоистом керамическом диске  $ZrB_2$ — $SiC$ — $ZrO_2$  при его изготовлении, с применением численных и аналитических методов. Численное моделирование реализовано методом конечных элементов с учетом зависимости свойств компонентов композита от температуры. Распределение остаточных напряжений поперек слоев имеет пилообразный характер, в котором напряжения принимают как отрицательные, так и положительные значения. Предложено новое аналитическое решение, основанное на упрощенной одномерной постановке задачи для центральной части диска. Это решение показало, что уровень остаточных напряжений определяется не только значениями коэффициентов термического расширения и двухосных модулей упругости соединенных материалов, но также толщиной и расположением слоев. Результаты полученного аналитического решения хорошо согласуются с результатами численного моделирования. Показано, что для оценок остаточных напряжений в слоистом композите в предположении, что свойства составляющих композита не зависят от температуры, целесообразнее брать термомеханические характеристики при высокой температуре, а не комнатной или средней температуре. Приведены результаты оценки влияния пористости на значения остаточных напряжений в слоистом керамическом композите. Установлено, что учет пористости приводит к уменьшению остаточных напряжений только в тех слоях, в которых она введена. Результаты исследования представляют основу для выполнения анализа остаточных напряжений для слоистых композитов разного состава и конкретных инженерных приложений.

## Введение

В последнее время большое внимание уделяется сверхвысокотемпературной керамике на основе диборида циркония ( $ZrB_2$ ) с добавками карбида кремния ( $SiC$ ). Это один из перспективных материалов для использования в экстремальных тепловых и химических условиях воздействия [1, 2]. Добавки  $SiC$  улучшают уплотнение, механические свойства и окислительную стойкость  $ZrB_2$  [3]. Недостаточно высокая

прочность и вязкость разрушения такой керамики ограничивает области ее применения. Для устранения этого недостатка дополнительно вводят в состав керамического композита диоксид циркония ( $ZrO_2$ ), который благодаря фазовым переходам позволяет увеличить вязкость разрушения и прочность керамики [4]. Таким образом, композитная керамика  $ZrB_2-SiC-ZrO_2$  обладает высокой механической прочностью, хорошей устойчивостью к окислению, вязкостью разрушения и перспективна для применения в качестве высокотемпературных теплозащитных материалов.

Для направленного регулирования и оптимизации эксплуатационных характеристик изделий перспективным является создание функционально-градиентных и слоистых композитных материалов. В таких материалах отдельные слои или слоевые участки выполняют одну или несколько самостоятельных функциональных задач [5, 6]. При оценке прочности изделий из слоистых композитов важно учитывать термические остаточные напряжения, которые возникают на границах раздела и вызваны разными значениями теплофизических свойств соседних слоев [7, 8]. В связи с этим изучение внутренних термических напряжений, закономерностей их формирования и влияния на прочность слоистых композитных материалов вызывает большой научный и практический интерес.

Методы определения остаточных напряжений подразделяют на экспериментальные, аналитические и численные. Применение аналитических и численных методов более эффективно, поскольку они значительно дешевле и доступнее по сравнению с экспериментальными методами, а их подготовка и проведение требуют меньше затрат по времени. В литературе достаточно широко используют как аналитические подходы [8—11], так и современные методы численного моделирования [12, 13] для расчета остаточных напряжений в разных слоистых композитах.

В работе [8] с помощью аналитического решения исследовано распределение термических напряжений вокруг квазитреугольного отверстия в симметричном слоистом композите, состоящем из слоев разных композитных материалов. Рассмотрено влияние таких параметров, как ориентация отверстия, степень закругления углов и соотношение сторон, угол теплового потока, последовательность укладки и свойств слоев на распределение термических напряжений вокруг отверстия. Авторы работы [9] для прогнозирования распределения температурных напряжений внутри трехслойной структуры из изотропных слоев разработали аналитическую модель на основе теории балок Эйлера—Бернулли и условий совместности деформаций на границах раздела слоев. Они получили решение для термических напряжений в замкнутой форме, учитывающее свойства и геометрию композита, которое представляет собой простую и эффективную формулу для оценки уровня напряжений в слоях. Разработка аналитической модели для прогнозирования остаточных напряжений в двухслойном теплозащитном керамическом покрытии представлена в работе [10]. Модель учитывает процесс изготовления композита, зависи-

мость коэффициента термического расширения от температуры и толщины слоев композита. Авторы [12], используя программное обеспечение ABAQUS, с помощью специальной пользовательской подпрограммы численно исследовали распределение остаточных напряжений вблизи свободного края многослойной композитной пластины с полимерными слоями. Для оценки остаточных напряжений в ламинате было проведено моделирование процесса отверждения с использованием совместного термического и конструкционного анализов. Анализ литературы показывает, что для наиболее точного определения остаточных термических напряжений важно учитывать особенности технологии получения, строения и реологии составляющих слоистого композита.

Исследованию остаточных напряжений в керамических слоистых композитах посвящено пока недостаточно работ. В основном они касаются многослойных композитов, в которых структура с чередующимися слоями вводится с целью повышения прочности и вязкости разрушения, а не керамических композитов, в которых введение слоев обусловлено функциональными задачами. Одной из важных нерешенных задач является оценка остаточных напряжений в керамических композитах системы  $ZrB_2-SiC-ZrO_2$  конкретного состава. Для решения этой задачи требуется разработка моделей и проверка их достоверности. При этом вызывает интерес не только получение точных решений для конкретных изделий, но и разработка упрощенных аналитических моделей, позволяющих производить быструю оценку влияния разных параметров с приемлемой инженерной точностью.

Цель данной работы — анализ внутренних напряжений в дискообразном образце керамического композита, состоящего из слоев  $ZrB_2-20\% SiC$  с разными добавками  $ZrO_2$  при его остывании от температуры спекания на основе как численной, так и аналитической моделей.

## 1. Постановка задачи и ее численное решение

Рассмотрим образец композита, представляющий собой диск толщиной 5 мм и диаметром 30 мм, состоящий из пяти слоев одинаковой толщины, но разного состава (рис. 1). Образец получен спеканием керамических слоев при температуре 1900 °С с последующим охлаждением до комнатной температуры [6]. Нижний и верхний слои изготовлены из  $ZrO_2$  и  $ZrB_2-20\% SiC$  соответственно, промежуточные слои представляют собой смесь  $ZrO_2$  и  $ZrB_2-20\% SiC$  в разном процентном соотношении (см. рис. 1).

Будем считать, что все слои являются однородными. В силу цилиндрической симметрии образца задача может быть рассмотрена в осесимметричной двухмерной постановке. Пусть ось симметрии  $y$  направлена перпендикулярно плоскости диска, ось  $x$  — вдоль радиуса диска. Вдоль

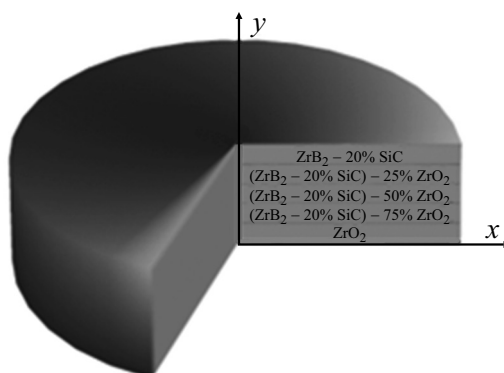


Рис. 1. Схема слоистого керамического композита  $ZrB_2$ —SiC— $ZrO_2$ .

третьей оси  $\theta$  все параметры напряженно-деформированного состояния будем считать неизменными ввиду однородности слоев.

Поскольку при остывании спеченного композита поля деформаций и напряжений зависят от поля температур, но в свою очередь изменение напряжений и деформаций не влияет на поле температур (тепло при этом не производится), то задачу можно решать в несвязанной постановке. В этом случае производится последовательный анализ сначала формирования температурного поля, а потом — напряжений и деформаций. Ввиду того, что все материальные параметры (упругие модули, теплоемкость, коэффициент теплопроводности, линейный коэффициент теплового расширения) зависят от температуры, уравнение теплопроводности следует решать в нестационарной постановке. В этом случае моделирование может быть выполнено в рамках квазистатических несвязанных задач термоупругости [14]. В соответствии с данным подходом система уравнений включает в себя уравнение теплопроводности

$$c_\varepsilon(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\lambda_T(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_T(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right), \quad (1)$$

уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{\theta\theta}}{x} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\sigma_{xy}}{x} = 0, \quad (2)$$

геометрические соотношения (соотношения Коши)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{du_y}{dy}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_x}{x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx}\right), \quad (3)$$

определяющие уравнения (соотношения Дюамеля — Неймана)

$$\sigma_{ij} = 2\mu(T)\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} [\lambda(T)\varepsilon_{kk} - 3K(T)\alpha(T)(T - T_0)] . \quad (4)$$

Здесь  $c_\varepsilon$  — теплоемкость при постоянстве деформаций;  $\rho$  — плотность;  $T$  — температура;  $\lambda_T$  — коэффициент теплопроводности;  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформаций;  $u_x$ ,  $u_y$  — компоненты вектора перемещений;  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе;  $K$  — модуль объемной упругости;  $\alpha$  — коэффициент линейного теплового расширения;  $T_0$  — температура недеформированного состояния (т.е. в данном случае — температура спекания). Плотность, температура, напряжения, деформации и перемещения являются функциями пространственных координат и времени. Материальные параметры (теплоемкость, коэффициент теплопроводности, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, линейный коэффициент теплового расширения), а также плотность являются функциями координат и температуры и зависят от времени неявно (через температуру).

Начальные условия соответствуют температуре спекания 1900 °С:

$$\sigma_{ij}|_{T=1900\text{ °С}} = 0, \quad \varepsilon_{ij}|_{T=1900\text{ °С}} = 0, \quad u_i|_{T=1900\text{ °С}} = 0,$$

где  $i, j = x, y$ .

Граничные условия задавали исходя из условий осевой симметрии при  $x = 0$ , свободных граничных условий на плоскостях диска ( $y = 0$  и  $y = 5$  мм) и на внешнем крае диска при  $x = 15$  мм:

$$\sigma_{ij}n_j|_{x=15; y=0; y=5} = 0.$$

Для уравнения теплопроводности на всех гранях, кроме  $x = 0$ , задавали условия Ньютона для теплового потока, а на оси симметрии — нулевой тепловой поток:

$$q|_{x=15; y=0; y=5} = -\beta(T - T_r), \quad q|_{x=0} = 0,$$

где  $\beta$  — коэффициент теплоотдачи;  $T_r$  — температура окружающей среды (комнатная температура).

Численное моделирование процесса формирования напряженно-деформированного состояния при остывании образца выполнено методом конечных элементов в двухмерной осесимметричной постановке, реализованным в программном комплексе ABAQUS. В настоящем анализе предполагали, что на границах раздела между разными слоями выполняются условия идеального механического и теплового контакта.

Полагали, что физико-механические характеристики компонентов композита в каждом слое зависят от температуры. Эти данные были определены из анализа литературы. Зависимости для  $ZrO_2$  взяты из работы [15]:

$$E(T) = 274,1 - 0,027T \text{ ГПа},$$

$$\nu(T) = 0,3 + 3,2 \cdot 10^{-5}T,$$

$$\lambda_T(T) = 2,072 - 3,656 \cdot 10^{-4}T + 4,347 \cdot 10^{-7}T^2 \text{ Вт/(м·К)},$$

$$c_\varepsilon(T) = 274 + 0,795T - 6,19 \cdot 10^{-4}T^2 + 1,71 \cdot 10^{-7}T^3 \text{ Дж/(кг·К)},$$

$$\alpha(T) = 7,091 \cdot 10^{-6} - 2,532 \cdot 10^{-9}T + 2,262 \cdot 10^{-12}T^2 \text{ 1/К},$$

$$\rho(T) = 5600 / (1 + 3\alpha(T)(T - 293)) \text{ кг/м}^3.$$

Для композита ZrB<sub>2</sub>—20% SiC зависимости разных характеристик от температуры были определены на основе работ [16—18]:

$$E(T) = 444,7 - 0,02599T + 4,541 \cdot 10^{-5}T^2 - 5,213 \cdot 10^{-8}T^3 + 1,261 \cdot 10^{-11}T^4 \text{ ГПа},$$

$$\nu(T) = 0,14 + 2,658 \cdot 10^{-6}T + 1,638 \cdot 10^{-5}T^2 - 8,732 \cdot 10^{-12}T^3 + 1,577 \cdot 10^{-15}T^4,$$

$$\lambda_T(T) = 97,81 - 3,577 \cdot 10^{-2}T + 8,692 \cdot 10^{-6}T^2 \text{ Вт/(м·К)},$$

$$c_\varepsilon(T) = 622,5 + 0,1T - 1,983 \cdot 10^7 T^{-2} \text{ Дж/(кг·К)},$$

$$\alpha(T) = \begin{cases} 5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/К} & \text{при } T < 600 \text{ К}, \\ 7,8 \cdot 10^{-6} \text{ 1/К} & \text{при } T \geq 600 \text{ К}, \end{cases}$$

$$\rho(T) = 5520 / (1 + 3\alpha(T)(T - 293)) \text{ кг/м}^3.$$

### Физико-механические характеристики материалов

Свойство	Материал			
	ZrB <sub>2</sub> —20%SiC		ZrO <sub>2</sub>	
	T = 20 °C	T <sub>0</sub> = 1900 °C	T = 20 °C	T <sub>0</sub> = 1900 °C
Плотность $\rho$ , г/см <sup>3</sup>	5,6	5,237	5,52	5,287
Модуль Юнга $E$ , ГПа	440	349	266	215
Коэффициент Пуассона $\nu$	0,142	0,169	0,309	0,369
Коэффициент линейного теплового расширения $\alpha \cdot 10^6$ , К <sup>-1</sup>	5,6	7,8	6,54	12,27
Теплоемкость $c_\varepsilon$ , Дж/(кг·К)	458	833	421	836
Коэффициент теплопроводности $\lambda_T$ , Вт/(м·К)	2,002	3,33	88,08	61,13

В таблице представлены используемые в расчетах значения физико-механических характеристик при комнатной температуре и температуре спекания для внешних слоев диска  $ZrB_2$ —20%SiC и  $ZrO_2$ .

Промежуточные слои диска представляют собой многокомпонентные материалы, которые могут быть и пористыми. Определение эффективных механических и тепловых характеристик для таких материалов — сложная задача, для решения которой существуют разные подходы на основе разных схем усреднения. В настоящей работе характеристики промежуточных слоев композита, состоящих из  $ZrB_2$ —20% SiC и  $ZrO_2$  в разном процентном соотношении, были определены по правилу смеси.

## 2. Анализ численных результатов

Результаты моделирования представлены на рис. 2. Было проанализировано распределение радиальных напряжений в сечении диска и более детально проведено сравнение распределений этих напряжений вдоль вертикальных линий вблизи центральной части (линия 1) и свободного края (линия 2) диска из керамического слоистого композита. Зависимости напряжений от координаты  $x$  являются разрывными; места разрывов на рис. 2 отмечены штриховыми вертикальными линиями. Видно, что в разных слоях остаточные напряжения различаются. Наблюдаются как

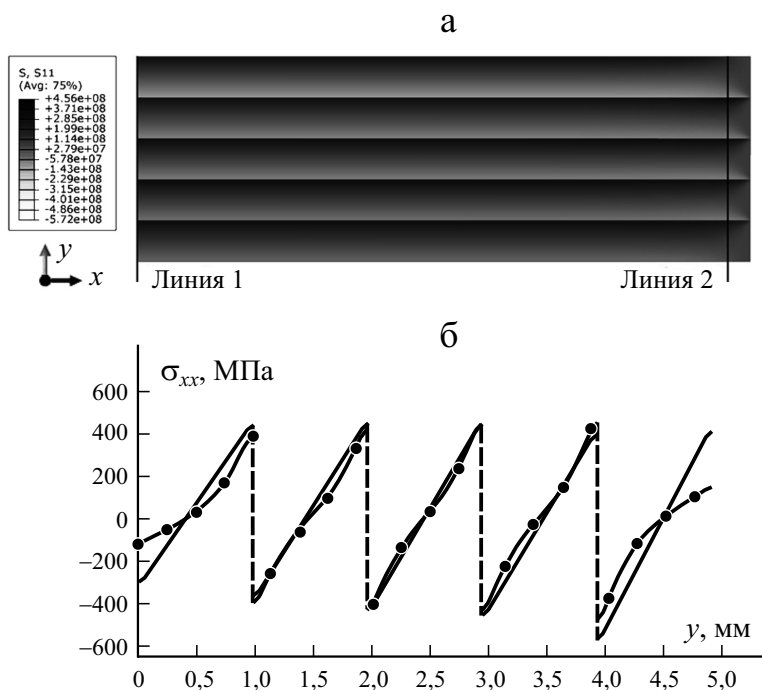


Рис. 2. Распределение остаточных напряжений: в сечении диска (а), вдоль выбранных направлений (б). (—) — линия 1; (—●—) — линия 2. Пояснения в тексте.



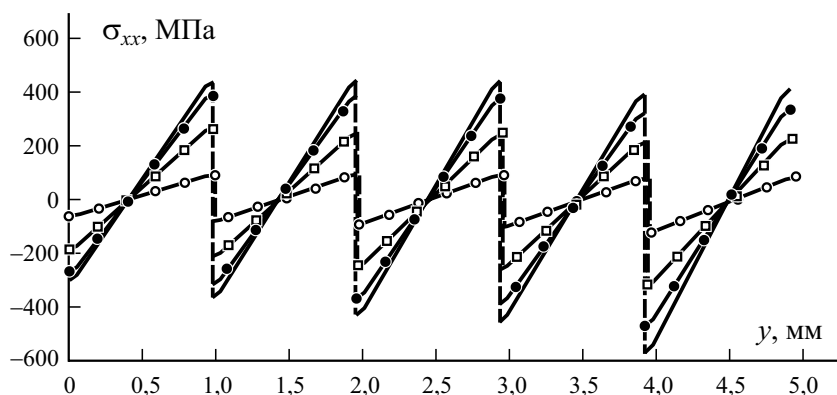


Рис. 3. Распределение остаточных напряжений по толщине при  $T = 20$  (—○—);  $960$  (—□—);  $1900$  °C (—●—). (—) —  $f(T)$ .

отрицательные (сжимающие), так и положительные (растягивающие) напряжения. В слоях диска вдоль координаты  $x$  напряжения остаются неизменными вплоть до небольшого участка на краю диска. Максимальный разброс напряжений наблюдается в центральной части диска, находящейся в стесненных условиях. На внешнем участке, близком к свободной поверхности, разброс остаточных напряжений меньше.

В упрощенной постановке задачи определения остаточных напряжений иногда пренебрегают температурной зависимостью термомеханических параметров и считают их неизменными, соответствующими некоторым значениям при постоянной температуре. Для оценки того, как влияет выбранная температура на значения остаточных напряжений в композите, были проведены расчеты для следующих случаев: когда свойства соответствуют температуре спекания, комнатной температуре и их среднему арифметическому значению. Как видно из результатов, представленных на рис. 3, наиболее близко к решению с учетом температурных зависимостей оказывается решение, полученное при температуре спекания  $1900$  °C. Для этого случая разница между значениями остаточных напряжений не превышает 18%, в то время как при  $T = 960$  °C и  $T = 20$  °C — в 2—5 раз меньше, чем при учете температурных зависимостей. Поэтому для приближенных оценок с не зависящими от температуры свойствами целесообразнее брать термомеханические характеристики при температуре спекания, а не при начальной или средней температуре.

### 3. Аналитическое решение задачи в упрощенной постановке

Для оценки остаточных напряжений в центральной части диска, а также верификации результатов численного моделирования предложено аналитическое решение поставленной задачи. Аналитическую модель построим на основе подхода, представленного в работе [19]. Считаем, что

процесс остывания происходит медленно и температура успевает равномерно распределиться по всему диску. Тогда напряжения определяются разностью начальной и конечной температур. Будем также считать, что термомеханические параметры можно охарактеризовать некоторыми постоянными значениями, не зависящими от температуры. В центральной части диска задачу можно свести к одномерной, поскольку параметры напряженно-деформированного состояния являются функциями только координаты  $y$ . В силу осевой симметрии в центре диска будет иметь место двухосное напряженное состояние  $\sigma_{xx} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma$ , а сдвиговые напряжения  $\sigma_{xy}$  и напряжения вдоль толщины диска (оси симметрии)  $\sigma_{yy}$  равны нулю. В этом случае уравнения равновесия выполняются тождественно, а для нахождения напряжений и деформаций необходимо привлечь уравнения совместности деформаций. Ненулевыми компонентами в нашем случае остаются три главные деформации  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{yy}$ . Тогда из шести условий совместности остаются три уравнения —

$$\frac{d^2 \varepsilon_{xx}}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{dy^2} = 0, \quad x \frac{d}{dy} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{\theta\theta}) = 0,$$

из которых следует, что

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon = Ay + B, \quad (5)$$

где  $A$  и  $B$  — константы интегрирования.

Из соотношений Дюамеля—Неймана находим, что

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \left[ \lambda(2\varepsilon + \varepsilon_{yy}) - 3K\alpha(T_r - T_0) \right], \quad (6)$$

$$0 = 2\mu\varepsilon_{yy} + \left[ \lambda(2\varepsilon + \varepsilon_{yy}) - 3K\alpha(T_r - T_0) \right]. \quad (7)$$

Здесь  $T_r$  — конечная (комнатная) температура;  $T_0$  — температура начального состояния (температура спекания).

Выразим  $\varepsilon_{yy}$  через  $\varepsilon$ , используя уравнение (7):

$$\varepsilon_{yy} = \frac{K\alpha(T_r - T_0)}{(\lambda + 2\mu)} - \frac{2\lambda\varepsilon}{(\lambda + 2\mu)} = \frac{(1+\nu)\alpha(T_r - T_0)}{(1-\nu)} - \frac{2\nu\varepsilon}{(1-\nu)}.$$

Тогда из уравнения (6) получим решение для напряжений в виде

$$\sigma = E' (\varepsilon - \alpha(T_r - T_0)). \quad (8)$$

Здесь  $E' = E / (1 - \nu)$  — двухосный модуль упругости, появляющийся в подобных задачах, когда напряженное состояние является двухосным. Решение в форме (8) получено с учетом связей между параметрами Ламе,

модулем объемной упругости, модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ .

Для определения констант интегрирования  $A$  и  $B$  в формуле для деформации (5) запишем условия равновесия (отсутствия сил и моментов) в интегральной форме

$$\int_0^H \sigma(y) dy = 0, \quad \int_0^H \sigma(y) y dy = 0.$$

Здесь  $H$  — толщина диска. Таким образом, получаем систему уравнений для определения констант  $A$  и  $B$

$$\begin{aligned} bA + aB &= c, \\ gA + bB &= d, \end{aligned} \quad (9)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} a &= \int_0^H E' dy, \quad b = \int_0^H E' y dy, \\ c &= (T_r - T_0) \int_0^H E' \alpha dy, \\ d &= (T_r - T_0) \int_0^H E' \alpha y dy, \quad g = \int_0^H E' y^2 dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение системы уравнений (9) будет иметь вид

$$A = \frac{bc - ad}{b^2 - ag}, \quad B = \frac{bd - cg}{b^2 - ag}. \quad (11)$$

Можно показать, что полученное решение будет также справедливым для бесконечной пластины, если ее решать не в цилиндрической, а в прямоугольной декартовой системе координат [19].

Пусть диск состоит из  $N$  слоев одинаковой толщины  $h$ . Тогда интегралы в выражениях (10) примут вид

$$\begin{aligned} a &= h \sum_{i=1}^N E'_i, \quad b = 0,5 \sum_{i=1}^N \left[ E'_i \left( (hi)^2 - (h(i-1))^2 \right) \right] = 0,5 h^2 \sum_{i=1}^N \left[ E'_i (2i-1) \right], \\ c &= (T_r - T_0) h \sum_{i=1}^N (E'_i \alpha_i), \quad d = 0,5 (T_r - T_0) h^2 \sum_{i=1}^N \left[ (E'_i \alpha_i) (2i-1) \right], \\ g &= (1/3) \sum_{i=1}^N \left[ E'_i \left( (hi)^3 - (h(i-1))^3 \right) \right] = (1/3) h^3 \sum_{i=1}^N \left[ E'_i (3i^2 - 3i + 1) \right]. \end{aligned}$$

В общем случае слоев разной толщины интегралы в выражении (10) также будут представлять собой суммы, в которые кроме упругих модулей и коэффициента теплового расширения войдут также координаты верхних и нижних границ соответствующего слоя.

#### 4. Анализ решения

Для анализа решения приведем его к более удобному виду. Преобразуем формулы для вычисления констант  $A$  и  $B$ , предварительно расписав выражения для числителей и знаменателя в формулах (11):

$$\begin{aligned}
 b^2 - ag &= h^4 \left[ 0,25 \left( \sum_{i=1}^N [E'_i(2i-1)] \right)^2 - (1/3) \left( \sum_{i=1}^N E'_i \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left( \sum_{i=1}^N [E'_i(3i^2 - 3i + 1)] \right) \right] = h^4 C, \\
 bc - ad &= 0,5h^3 (T_r - T_0) \left[ \left( \sum_{i=1}^N [E'_i(2i-1)] \right) \times \left( \sum_{i=1}^N (E'_i \alpha_i) \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left( \sum_{i=1}^N E'_i \right) \times \left( \sum_{i=1}^N [(E'_i \alpha_i)(2i-1)] \right) \right] = h^3 (T_r - T_0) D, \\
 bd - cg &= h^4 (T_r - T_0) \left[ 0,25 \left( \sum_{i=1}^N [E'_i(2i-1)] \right) \times \left( \sum_{i=1}^N [(E'_i \alpha_i)(2i-1)] \right) - \right. \\
 &\quad \left. - (1/3) \left( \sum_{i=1}^N (E'_i \alpha_i) \right) \times \left( \sum_{i=1}^N [E'_i(3i^2 - 3i + 1)] \right) \right] = h^4 (T_r - T_0) F, \\
 A &= \frac{(T_r - T_0) D}{hC} = \frac{(T_r - T_0) A'}{h}, \quad B = \frac{(T_r - T_0) F}{C} = (T_r - T_0) B'.
 \end{aligned}$$

Здесь для удобства введены новые параметры  $C, D, F, A'$  и  $B'$ , не зависящие от разницы температур и толщины слоев, а определяются только упругими модулями и коэффициентами теплового расширения всех слоев композита. Поскольку в слоистом диске двухосный модуль упругости и линейный коэффициент теплового расширения являются кусочно-непрерывными функциями координаты  $y$ , следовательно, окончательный вид зависимости радиальных напряжений от координаты  $y$  будет следующим:

$$\sigma(y) = E'(y)(T_r - T_0) \left( \frac{A'}{h} y - B' - \alpha(y) \right). \tag{12}$$

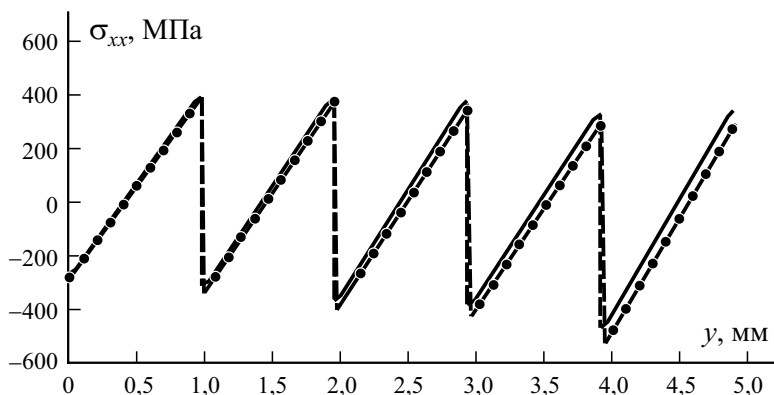


Рис. 4. Изменение термических напряжений по толщине в центральной части диска: (—) — МКЭ; (—●—) — аналитическое решение.

Решение (12) состоит из линейных участков с изменяющимся наклоном и разрывом в местах соединения слоев композита. Такой характер распределения напряжений совпадает с решениями, полученными для слоистых материалов в [11, 19]. Наклон линейных участков определяется упругими модулями слоя, разницей температур, также зависит и от упругих модулей и коэффициентов теплового расширения всех слоев композита и обратно пропорционален толщине слоев. Поэтому чем тоньше слои, тем значительно различаются напряжения на противоположных краях слоев. Можно сделать вывод о том, что различие напряжений по одну и другую сторону от интерфейса в месте соединения слоев определяется не только разностью температур, значений линейных коэффициентов теплового расширения и упругих модулей, но и положением этого места в композите, а также толщиной слоев.

На рис. 4 представлены результаты сравнения численного и аналитического решений. В аналитической модели предполагали, что физико-механические характеристики не зависят от температуры, поэтому численный расчет выполнен при этих же предположениях. Исходя из результатов расчетов, представленных в разделе 2, физико-механические характеристики слоев композита были взяты соответствующими температуре спекания. Видно, что результаты различаются не более чем на 14%, что свидетельствует о том, что аналитическое решение можно использовать для проведения инженерных расчетов.

Предложенное аналитическое решение получено для образцов цилиндрической формы. Его можно использовать и для других тонких пластин, но для изделий или образцов более сложной формы его следует применять с осторожностью, необходимы дополнительные исследования для проверки его применимости.

## 5. Влияние пористости на остаточные напряжения в слоистом композите

Для уменьшения теплопроводности керамических материалов увеличивают их пористость. Она влияет на эффективные механические и тепловые характеристики материала, и это необходимо учитывать при проведении расчетов, поскольку значения эффективных характеристик компонентов, составляющих слоистый композит, влияют на значения остаточных напряжений. Для учета влияния пористости в слоях  $ZrO_2$  и  $((ZrB_2-20\% SiC)-75\% ZrO_2)$  на распределение остаточных напряжений в композите были проведены аналитические расчеты для пористых композитов со следующими объемными долями пор в этих слоях: композит 1 — 30 и 15% пор; композит 2 — 20 и 10% пор для самого нижнего и следующего за ним слоя соответственно.

Определение характера влияния пористости на эффективные упругие модули и теплофизические характеристики является сложной задачей. В настоящее время предложено большое количество зависимостей эффективных характеристик керамик как от самой пористости, объемной доли, занятой порами, так и формы пор. Эффективные значения упругих и теплофизических характеристик пористых керамик определяли следующим образом. Для модуля Юнга значение ( $E^{eff}$ ) рассчитывали с помощью экспоненциального соотношения [20]

$$E^{eff} = E^m \exp(-2\theta / (1 - \theta)),$$

где  $E^m$  — модуль Юнга матрицы (беспористой керамики);  $\theta$  — пористость.

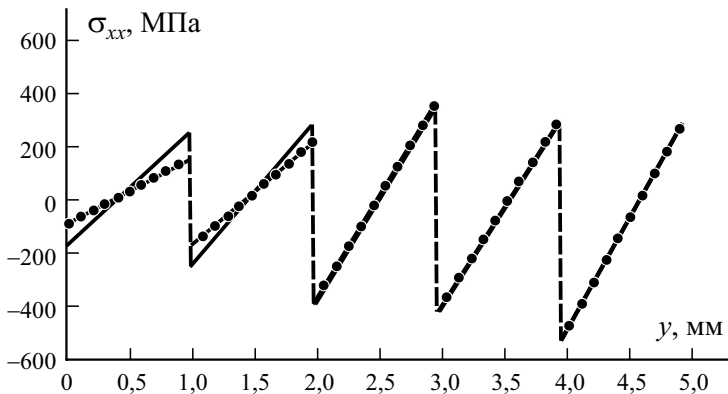


Рис. 5. Изменение термических напряжений по толщине в центральной части диска: (—●—) — компози́т 1; (—) — компози́т 2.

Эффективное значение коэффициента Пуассона пористой керамики определяли с учетом зависимости [21, 22]

$$\nu^{\text{eff}} = 0,014 + \left(1 - \frac{\theta}{0,472}\right)(\nu^{\text{m}} - 0,014),$$

где  $\nu^{\text{m}}$  — коэффициент Пуассона матрицы.

Анализ литературы показал, что пористость на коэффициент линейного теплового расширения большинства материалов не влияет. Об этом свидетельствуют как экспериментальные данные, так и аналитические оценки [23, 24]. В работе [25] приведена теоретическая оценка влияния пористости на коэффициент теплового расширения структурно-неоднородных материалов, к которым относятся рассматриваемые композиты. Показано, что если отношение модулей объемной упругости составляющих композита равно двум, то максимальное изменение эффективного коэффициента теплового расширения не превышает 5% при пористости до 50%. Стоит отметить, что согласно литературным данным для некоторых материалов такая зависимость имеется и является значительной, но для керамического композита с исследуемым составом слоев экспериментальных данных не существует. Поэтому в изучаемом в данной работе слоистом керамическом композите было решено считать, что  $\alpha^{\text{eff}}$  не зависит от пористости.

Для анализа остаточных напряжений по аналитическому решению перчисленных характеристик достаточно. Результаты расчета остаточных напряжений по соотношению (12) для двух вариантов пористости показаны на рис. 5. Сравнивая данные рис. 4 и 5, видим, что введение пористости в два слоя композита оказало сильное влияние на распределение напряжений именно в этих слоях, а в других слоях оно незначительно. Как и следовало ожидать, введение пористости привело к снижению термических напряжений в пористых слоях. Увеличение пористости в слое  $\text{ZrO}_2$  от 15 до 30% приводит к уменьшению растягивающих остаточных напряжений (наиболее опасных для керамик) на 68%. В слое  $(\text{ZrB}_2\text{—}20\% \text{SiC})\text{—}75\% \text{ZrO}_2$  изменение пористости от 10 до 20% приводит к уменьшению напряжений на 33%.

### Заключение

Разработаны аналитическая и численная модели для оценки остаточных термических напряжений, возникающих в керамическом слоистом диске при остывании от температуры спекания. Результаты численного исследования показали, что напряженно-деформированное состояние в большей части слоистого диска соответствует одномерной задаче. Из анализа аналитического решения для прогноза остаточных напряжений в

слоистых композитах следует, что уровень напряжений определяется не только значениями коэффициентов термического расширения и двухосных модулей упругости соединенных материалов, но также и толщиной и расположением слоев в диске. Поэтому при расчете остаточных термических напряжений в слоистых композитах сложного многокомпонентного состава важной задачей является определение эффективных механических и тепловых характеристик для его составляющих. В частности, выполненный анализ влияния пористости в слоистом керамическом композите на значения остаточных напряжений показал, что напряжения в пористых слоях уменьшаются с увеличением объемной доли пор в них. Это необходимо учитывать при выборе состава и в других слоях композита для получения более равномерного распределения остаточных напряжений. Результаты исследования могут быть полезными при анализе остаточных напряжений в слоистых композитах разного состава и решении конкретных инженерных задач.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FWRW-2022-0003.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ni D., Cheng Y., Zhang J., Liu J.-X., Zou J., Chen B., Wu H., Li H., Dong S., Han J., Zhang X., Fu Q., Zhang G.-J. Advances in ultra-high temperature ceramics, composites, and coatings // *J. Adv. Ceram.* — 2022. — Vol. 11, No. 1. — P. 1—56. DOI:10.1007/s40145-021-0550-6
2. Golla B. R., Mukhopadhyay A., Basu B., Thimmappa S.K. Review on ultra-high temperature boride ceramics // *Prog. Mater. Sci.* — 2020. — Vol. 111. — P. 100651. DOI:10.1016/j.pmatsci.2020.100651
3. Zhang S.C., Hilmas G.E., Fahrenholtz W.G. Mechanical properties of sintered  $ZrB_2$ —SiC ceramics // *J. Eur. Ceram. Soc.* — 2011. — Vol. 31, No. 5. — P. 893—901. DOI: 10.1016/j.jeurceramsoc.2010.11.013
4. Zhang X. H., Li W. J., Hong C. Q., Han W. B. Microstructure and mechanical properties of  $ZrB_2$ -based composites reinforced and toughened by zirconia // *Int. J. Appl. Ceram. Technol.* — 2008. — Vol. 5. — P. 499—504. DOI: 10.1111/j.1744-7402.2008.02199.x
5. Saleh B., Jiang J., Fathi R., Al-hababi T., Xu Q., Wang L., Song D., Ma A. 30 years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, applications and future challenges // *Composites: Part B.* — 2020. — Vol. 201. — P. 108376. DOI: 10.1016/j.compositesb.2020.108376
6. Булаченко А. Г., Мировой Ю. А., Дедова Е. С., Буякова С. П. Механическое поведение слоистого керамического композита  $ZrB_2$ — $ZrO_2$ —SiC // *Изв. вузов. Физика.* — 2019. — Т. 62, № 8. — С. 121—127. DOI: 10.17223/00213411/62/8/121
7. Балохонов Р. Р., Кульков А. С., Землянов А. В., Романова В. А., Евтушенко Е. П., Гатиятуллина Д. Д., Кульков С. Н. Эволюция остаточных напряжений и разрушение при термомеханическом нагружении дисперсно-упрочненных металлокерамиче-



ских композитных материалов // Физ. мезомех. — 2021. — Т. 24, № 5. — С. 5—15. DOI:10.24412/1683-805X-2021-5-5-15

8. *Bayati Chaleshtari M. H., Khoramishad H., Berto F.* Analytical thermal stress analysis of perforated symmetric composite laminates containing a quasi-triangular hole // Физ. мезомех. — 2020. — Т. 23, № 1. — С. 86—103. DOI: 10.24411/1683-805X-2020-11008

9. *Her S. C., Lin C. H.* Thermal stress analysis of a multi-layered structure // Key Eng. Mater. — 2011. — Vol. 467—469. — P. 275—278. DOI:10.4028/www.scientific.net/kem.467-469.275

10. *Song Y., Wu W., Xie F., Liu Y., Wang T. A.* Theoretical model for predicting residual stress generation in fabrication process of double-ceramic-layer thermal barrier coating system // PLoS ONE. — 2017. — Vol. 12, No. e0169738. — P. 1—20. DOI:10.1371/journal.pone.0169738

11. *Zhang X. C., Xu B. S., Wang H. D., Wu Y. X.* An analytical model for predicting thermal residual stresses in multilayer coating systems // Thin Solid Films. — 2005. — Vol. 488. — P. 274—282. DOI:10.1016/J.TSF.2005.04.027

12. *Fedulov B. N., Bondarchuk D. A., Fedorenko A. N., Lomakin E. V.* Residual stresses near the free edge of composite materials // Acta Mech. — 2022. — Vol. 233. — P. 417—435. <https://doi.org/10.1007/s00707-021-03113-2>

13. *D'Amato E.* Numerical modelling and experimental studies for shape and dimensional control in the curing process of textile composites // Compos. Struct. — 2007. — Vol. 81. — P. 11—20. DOI:10.1016/j.compstruct.2005.10.001

14. *Новацкий В.* Теория упругости. — М.: Мир, 1970. — 256 с.

15. *Yang Y.* Temperature-dependent thermoelastic analysis of multidimensional functionally graded materials, Doctoral dissertation (University of Pittsburgh. 2015) <http://d-scholarship.pitt.edu/26481/>

16. *Lugovy M., Slyunyayev V., Orlovskaya N., Mitrentsis E., Aneziris C.G., Graule T., Kuebler J.* Temperature dependence of elastic properties of ZrB<sub>2</sub>—SiC composites // Ceram. Int. — 2016. — Vol. 42. — P. 2439—2445. DOI: 10.1016/j.ceramint.2015.10.044

17. *Skripnyak V. V., Skripnyak V. A.* Predicting the mechanical properties of ultra-high temperature ceramics // Lett. Mater. — 2017. — Vol. 7, No. 4. — P. 407—411. DOI: 10.22226/2410-3535-2017-4-407-411

18. *Zimmermann J. W., Hilmas G. E., Fahrenholtz W. G., Dinwiddie R. B., Porter W. D., Wang H.* Thermophysical properties of ZrB<sub>2</sub> and ZrB<sub>2</sub>—SiC ceramics // J. Am. Ceram. Soc. — 2008. — Vol. 91, № 5. — P. 1405—1411. DOI: 10.1111/j.1551-2916.2008.02268.x

19. *Demidov V. N., Knyazeva A. G.* Stressed-strain state of multi layer foil under one-axis tension // Appl. Mech. Mater. — 2015. — Vol. 756. — P. 540—545. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.756.540

20. *Pabst W., Gregorová E.* Young's modulus of isotropic porous materials with spheroidal pores // J. Eur. Ceram. Soc. — 2014. — Vol. 34, No. 13. — P. 3195—3207. DOI:10.1016/j.jeurceramsoc.2014.04.009

21. *Roberts A., Garboczi E.* Elastic properties of model porous ceramics // J. Am. Ceram. Soc. — 2000. — Vol. 83, No. 12. — P. 3041—3048. DOI:10.1111/j.1151-2916.2000.tb01680.x

22. *Uhlířová T, Pabst W.* Poisson's ratio of porous and cellular materials with, randomly distributed isometric pores or cells // J. Am. Ceram. Soc. — 2020. — Vol. 103. — P. 6961—6977. DOI: 10.1111/jace.17139

23. *Rice R. W.* Porosity of ceramics: Properties and applications. — Boca Raton: CRC Press, 1998. — 560 p. DOI:10.1201/9781315274539

24. *Shui Z. H., Zhang R., Chen W., Xuan D.* Effects of mineral admixtures on the thermal expansion properties of hardened cement paste // *Constr. Build. Mater.* — 2010. — Vol. 24, No. 9. — P. 1796—1798. DOI:10.1016/j.conbuildmat.2010.03.006

25. *Ghabezloo S.* Effect of porosity on the thermal expansion coefficient of porous materials // *Proc. Fifth Biot Conference on Poromechanics, Vienna, Austria, 10-12 July, 2013.* DOI: 10.1061/9780784412992.220

Поступила в редакцию 26.04.2022

Окончательный вариант поступил 27.07.2022

Received Apr. 26, 2022 (July 27, 2022)

---