

В. И. Жигун^{а}, Э. З. Плуме^а, С. А. Кристоне^а, Л. Л. Краснов^б*

*^аИнститут механики материалов Латвийского университета, Рига, LV-1006 Латвия
^бВсероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов, Москва,
105005 Россия*

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОДУЛЕЙ СДВИГА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ИЗ ОПЫТОВ НА ТРЁХТОЧЕЧНЫЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

V. I. Zhigun^{}, E. Z. Plume, S. A. Kristone, L. L. Krasnov*

METHOD FOR DETERMINING THE SHEAR MODULI OF COMPOSITE MATERIALS FROM EXPERIMENTS IN THE THREE-POINT TRANSVERSE BENDING

Keywords: composite materials, shear modulus, three-point transverse bending

In order to reduce material costs, a simple and economical method without the use of strain gages was chosen, which is not widespread in practical implementations due to the high spread of the characteristic determined and its instability. It is based on the three-point transverse bending of specimens and measuring the deflection under the load applied. In this case, the shear modulus is calculated in two different ways. The tests were carried out on isotropic and on three types of composite materials with different reinforcement schemes. The control of the results obtained was carried out by testing similar samples in tension and bending by other proven methods. The main factors preventing the obtaining of stable and reliable values of shear moduli were established, one of which is the neglect of angular displacements of cross sections of the sample during calculation of the desired characteristics. It is shown that both the methods give very underestimated values of shear modulus for both isotropic and composite materials, with a very significant spread, which does not allow one to use the method considered in the presented form without corrections. It was established, that deflection under the load

*Автор, с которым следует вести переписку: goracij.goracij@yahoo.com
Corresponding author: goracij.goracij@yahoo.com

is determined by the rotation angles of sample cross sections and by the span, and its value is equal to the product of the maximal cross-sectional rotation angle and one third of the span length. It is shown that, taking into account the identified factors and some adjustment, this method is suitable for determining the shear modulus by the first or second method for both isotropic and composite materials.

Ключевые слова: материалы композитные, модуль сдвига, трёхточечный изгиб поперечный

С целью снижения материальных затрат выбран простой и экономичный метод, не предусматривающий использования тензодатчиков, не востребованный к практической реализации из-за высокого разброса определяемой характеристики и её нестабильности. Метод основан на трёхточечном поперечном изгибе образцов с замером прогиба под точкой приложения нагрузки. Модуль сдвига вычислен двумя способами. Испытания проводили на изотропном и трёх типах композитных материалов с разными схемами армирования. Контроль результатов осуществляли в ходе испытаний аналогичных образцов на растяжение и изгиб другим апробированным методом. Установлены основные факторы, препятствующие получению стабильных и достоверных значений модулей сдвига, одним из которых является отсутствие учёта угловых перемещений поперечных сечений образца при расчёте искомых характеристик. Показано, что оба способа дают очень заниженные значения модулей сдвига как для изотропного, так и для композитных материалов с весьма существенным разбросом, что не позволяет в представленном виде использовать рассматриваемый метод для практического применения без корректировки. Установлено, что прогиб под точкой приложения нагрузки определяется углами поворота сечений образца и длиной пролёта, а его значение равно произведению максимального угла поворота сечения на одну треть длины пролёта. Показано, что при учёте выявленных факторов и некоторой корректировке данный метод пригоден для определения модулей сдвига как первым, так и вторым способом, как изотропного, так и композитных материалов.

Введение

Научно-технический прогресс неразрывно связан с созданием новых типов конструкционных материалов. Их разработка и внедрение требуют значительных материальных затрат для оценки физико-механических свойств этих материалов. Среди характеристик, требующих определения, привлекает внимание модуль сдвига. Эта характеристика выделяется как своей важностью для проектирования силовых элементов конструкций, так и отсутствием простого и надёжного метода её определения. Стан-

дартизованные методы сложны в реализации. Они связаны с большими трудозатратами, обусловленными изготовлением, подготовкой образцов и специальными приспособлениями, а также проведением экспериментальных исследований. Так, например, для определения модуля сдвига только одного образца необходимо как минимум два тензодатчика, стоимость каждого из которых на европейском рынке около 8—10 евро. Для надёжного установления значений этой характеристики требуется, как правило, четыре-пять образцов, что составляет значительные затраты даже без учёта издержек на подготовку образцов и наклейку тензодатчиков. Поэтому не прекращаются попытки совершенствования существующих и разработки новых, более приемлемых методов определения модуля сдвига. В частности, некоторые из вариантов решения этой задачи предложены в работах [1—6].

В работе [1] описан метод определения модулей упругости и модулей сдвига. Суть метода — одновременно один образец испытывают по схеме трёхточечного изгиба, а другой — по схеме четырёхточечного изгиба. В последнем варианте приведена удобная для практики формула определения модуля межслойного сдвига. Однако практическая реализация предложенного метода достаточно сложна и не опробована ни в одной из известных авторам публикаций, что лишает возможности оценить его применимость для композитных материалов.

Совершенно иной подход для определения сдвиговых характеристик композитных материалов предложен в [2]. Он основан на использовании теории Тимошенко, согласно которой максимальный прогиб короткой балки при трёхточечном изгибе представлен в виде (для удобства дальнейшего изложения здесь обозначение прогиба изменено с w на y , все остальные обозначения приведены в точном соответствии с упоминаемой работой):

$$y_{\max} = y^b + y^{\text{sh}} = \frac{Pl^3}{48EJ^b} + \frac{Pla}{G_{12}A},$$

где $a = 0,3$; оригинальные верхние индексы *изг* и *сдв* заменены на b и sh . Далее сформулирована математическая задача для определения неизвестных значений EJ^b и G_{12} . При этом сначала из опытов на простое растяжение стандартных образцов определяют модули Юнга и коэффициенты Пуассона. Затем проводят испытания на трёхточечный изгиб по крайней мере двух групп образцов при разных значениях l , J_x и площади A , записывают n соотношений в виде

$$y_n = \frac{P_n l_n^3}{48EJ_n^b} + \frac{P_n l_n a}{G_{12} A_n},$$

из которых путём решения обратной задачи для длинных и коротких балок определяют модуль сдвига. Однако данный метод достаточно сложен в реализации и весьма трудозатратен ввиду необходимости использования серии образцов разных размеров, их испытания и проведения расчётов. В работе [3] с использованием отмеченного подхода разработана методика

идентификации жесткостных характеристик однонаправленно армированных композитов. В качестве материала использован однонаправленный стеклопластик, изготовленный в виде труб пултрузионным методом. Образцы в виде плоских стержней вырезали из труб вдоль направления армирования. В отличие от работы [2] для сравнения образцы испытывали не только на изгиб и растяжение, но и на сдвиг. Испытания на сдвиг осуществляли на образцах крестообразной формы. В работе отмечено, что удовлетворительного согласования значений G_{12} , определённых предложенным способом и полученных путём испытания на сдвиг крестообразных образцов, получить не удалось. Причиной этого, по мнению авторов, является то, что при испытании разных серий образцов при разных нагрузках получают разные значения G_{12} . Связано это с тем, что зависимость касательных напряжений от угла сдвига является нелинейной.

Этот же подход, основанный на значении прогиба под точкой приложения нагрузки, состоящего из суммы двух прогибов, использован в [4] для определения модуля сдвига композитного материала. Модуль изгиба E_f и модуль сдвига вне плоскости G_{13} определяли на однонаправленных ламинатах. Чтобы иметь два отношения пролета, испытали 4- и 12-слойные образцы с одинаковой длиной пролета (50 мм), т.е. два соотношения l/h были созданы за счёт толщины образца, что могло вносить ошибку в определение упругих характеристик. Отличие от описанного метода заключается лишь в способе вычисления сдвиговой составляющей прогиба. Метод также сложен в реализации, а достоверность определяемой характеристики при этом никак не подтверждается. Кроме того, сложность заключается в том, что модуль сдвига в описанном случае определяли в процессе отверждения, когда состояние матрицы резко меняется от резиноподобного до стеклоподобного.

В работе [5] показано, что при испытании на трёхточечный изгиб вычисление модулей сдвига деревянных образцов согласно теории Тимошенко приводит к существенному занижению результатов. Авторы предложили эмпирическое уравнение, по которому можно правильно определить модуль сдвига: на основании экспериментальных результатов и численных расчетов была предложена модификация исходного уравнения изгиба Тимошенко. Авторы считают, что главная причина расхождения теории изгиба Тимошенко и предложенного модифицированного уравнения заключается в концентрации напряжений вблизи точки приложения нагрузки, которая не учитывается в теории Тимошенко.

Простотой и экономичностью выделяется метод, заключающийся в определении модулей сдвига композитных материалов из опытов на трёхточечный поперечный изгиб с помощью замера прогиба под точкой приложения нагрузки [6]. Он также основан на теории Тимошенко, а именно: на использовании зависимости, учитывающей влияние деформаций сдвига на максимальный прогиб при испытании на трёхточечный поперечный изгиб [7]. Для стержня, свободно лежащего на двух опорах, нагруженного

в середине пролёта сосредоточенной силой P , данная зависимость представлена как

$$y_{\max} = -\frac{P\left(\frac{l}{h}\right)^3}{4bE} \left[1 + \alpha \left(\frac{h}{l}\right)^2 \frac{E_x^b}{G_{xz}} \right] = -y^* (1 + 0,486\chi^2), \quad (1)$$

где y^* — максимальный прогиб стержня без учёта влияния сдвигов; $\chi = \frac{\pi h}{2l} \sqrt{E_x^b/G_{xz}}$; h — высота стержня; l — длина пролёта; α — коэф-

фициент, зависящий от формы поперечного сечения (для прямоугольного сечения $\alpha = 1,2$); E_x^b — модуль упругости при изгибе в направлении оси x , вычисленный при $l/h \approx 35-40$ (должен быть близок по значению модулю упругости образца, определённого при испытании на растяжение). При этом модуль сдвига можно определять тремя способами.

Первый заключается в его определении непосредственно по зависимости (1).

Второй, более трудоёмкий, базируется на использовании фиктивных модулей упругости. Расчёт модуля сдвига в этом случае производится по формуле

$$G_{xz} = \frac{E_x^b}{B^2}, \quad (2)$$

где

$$B^2 = \frac{E_{f_1}^b - E_{f_2}^b}{1,2 \left[E_{f_2}^b \left(\frac{h}{l_2}\right)^2 - E_{f_1}^b \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \right]},$$

$$E_x^b = E_{f_1}^b \left[1 + 1,2B^2 \left(\frac{h}{l_2}\right)^2 \right],$$

$E_{f_1}^b$ — фиктивный модуль упругости, определяемый при большем, а $E_{f_2}^b$ — при меньшем значении l/h .

Третий способ определения модуля сдвига — графический. В координатах $(h/l)^2 - \frac{1}{E_x^b}$ строят график в виде прямой, угол наклона которой к оси абсцисс равен $1/2G_{xz}$, а её пересечение с осью ординат есть $\frac{1}{E_x^b}$.

Данный способ является весьма затратным и сложным в реализации. Подробно процесс определения этих характеристик изложен в [6].

В работе [8] была произведена оценка точности методики [6] с помощью численного эксперимента на базе метода конечных элементов при известных точных значениях характеристик упругости материала образца

и варьировании радиуса закругления опор. Анализ результатов эксперимента показал, что методика [6] позволяет находить с достаточно высокой степенью точности лишь модуль упругости стеклотекстолита, ошибка определения модуля упругости не превышает 5%. Погрешность оценки межслойного модуля сдвига значительно выше, чем модуля упругости: для стеклопластика в исходном состоянии она равна $\sim 20\%$. При этом экспериментальное подтверждение полученных результатов в работе не приведено.

Непосредственное применение названного подхода при исследовании композитных материалов, как следует из работы [9], не приводит к достижению поставленной цели. Причины отрицательного исхода при решении задачи в работе не описаны.

Много работ посвящено сопоставлению значений модуля межслойного сдвига, полученных разными расчётными методами. Рассмотрим лишь некоторые из них [10—13]. В работе [10] были экспериментально исследованы эффективные модули поперечного сдвига для гофрированного картона методом блочного сдвига ASTM D4501 и испытанием на трёхточечный изгиб. Значения модулей сдвига, полученных при испытании на трёхточечный изгиб, оказались значительно ниже полученных первым методом. Было сделано предположение, что это обусловлено локальным вдавливанием картона на опорах и вкладом изгибной деформации облицовки. При сопоставлении экспериментальных результатов с данными метода конечных элементов значение модуля сдвига, полученное при испытании на трёхточечный изгиб, оказывалось примерно в два раза меньше предсказанного. В работе [11] посредством испытаний на трёхточечный изгиб балки определены модули поперечного сдвига многослойного заполнителя и изгибная жёсткость цельнокомпозитных многослойных конструкций. Их значения сравнены с найденными в ходе аналитических решений и решений методом конечных элементов. Результаты, полученные этими тремя способами, оказались сопоставимы. В работе [12] модули поперечного сдвига сотового заполнителя были определены экспериментально, численно и аналитически. Аналитический подход, основанный на классической теории ламинирования, показал большие отклонения от экспериментальных данных. В [13] результаты анализа методом конечных элементов, проведённого для изучения возможности определения модуля сдвига клея в связанной геометрии с использованием испытания на трёхточечный изгиб на образце многослойной балки, сравнивали с прогнозами двух аналитических решений. Рассмотрены предполагаемые причины значительного различия полученных результатов. Констатируется, что ни одна из них, взятая по отдельности, не может удовлетворительно объяснить имеющиеся расхождения. Исходя из этого сделан вывод, что испытание на трёхточечный изгиб с использованием образца многослойной балки для определения модуля адгезионного сдвига является нежелательным методом.

Приведённые данные в достаточной степени свидетельствуют о различии экспериментальных и расчётных значений модуля межслойного сдвига. Подтверждением этому является работа [14], где метод трёхточеч-

ного изгиба признан приемлемым лишь для оценки предела прочности композитных материалов.

Анализ опубликованных работ показывает, что одной из основных причин, препятствующих достижению прогресса в решении данной задачи, является недостаточная проработка исходной теоретической базы исследования. Она основана на зависимости, учитывающей влияние деформации сдвига на максимальный прогиб при изгибе, без учёта особенностей её использования. Учитывая потенциальную экономичность и простоту отмеченного метода определения модулей сдвига материалов различного типа, представляется целесообразным установить причины, препятствующие получению стабильных и достоверных результатов при использовании как первого, так и второго способов, а также оценить перспективность их применения. Всё это и составляет цель настоящей работы.

1. Задачи исследования

1.1. Неопределённые факторы и их значения. Можно предположить, что при использовании рассматриваемого подхода остались неучтёнными какие-то факторы, оказывающие негативное влияние на получаемые результаты.

Анализ базовой зависимости (1) показывает, что при испытании на трёхточечный поперечный изгиб как изотропных, так и композитных материалов максимальный прогиб представляет собой сумму двух составляющих, содержащих модуль упругости при изгибе E_x^b , существенно зависящий от параметра l/h . Так, снижение величины l/h с 20 до 10 приводит к уменьшению прогиба стального образца на 24,6%. Согласно ГОСТ 25603-82 модуль E_x^b достигает максимального значения при $l/h = 40$, стабилен и не зависит от дальнейшего увеличения этого параметра. Публикации с данными об изменении величины прогиба в зависимости от изменения l/h авторам неизвестны. Поэтому оценка приемлемости базовой зависимости к описанию прогиба с учётом сдвига является одним из факторов, требующих установления.

Другим важным фактором, непосредственно относящимся к рассматриваемому вопросу, является отсутствие связи с классическим подходом к оценке перемещений при поперечном изгибе. Исходя из классической теории изгиба балок следует, что трёхточечному поперечному изгибу балок свойственны два вида перемещений: линейные (прогибы) и угловые перемещения поперечных сечений вокруг нейтральной оси (углы поворота сечений Θ_x). Первые обусловлены в основном изгибающими моментами, а вторые — поперечными силами. В рассмотренных работах учитывали прогибы от поперечных сил в суммарных прогибах образцов, а непосредственный учёт угловых перемещений при расчёте определяемой характеристики в них не предусмотрен.

Вызывает неопределённость и фактор простого суммирования отмеченных перемещений, а также отсутствие связи между линейными и

угловыми перемещениями. Этот фактор не нашёл экспериментального подтверждения. При проведении испытаний с разными значениями l/h прогиб, измеренный под точкой приложения силы P , оказывается меньше, чем рассчитанный с учётом составляющей от сдвига. Особенно заметно это проявляется при малых отношениях l/h ($l/h < 25$).

1.2. Материалы и техника испытаний. Исследования проводили на изотропном (сталь) и трёх типах композитных материалов с разными видами армирования. Из композитных материалов использовали ортогонально армированный (1:1) стеклопластик, изготовленный на основе ровницы, стеклоуглепластик, наружные слои которого изготовлены на основе стеклоткани, а внутренние — из углеродной ленты, а также углепластик, наружные слои которого уложены в продольном направлении $0^\circ(1/4)$, а внутренние — под $\pm 45^\circ(3/4)$.

Из выбранных материалов изготавливали образцы в виде стержней призматической формы прямоугольного сечения, используемые как для испытания на трёхточечный поперечный изгиб исследуемым методом, так и для испытания на растяжение с целью определения модуля упругости в продольном направлении и коэффициента Пуассона. Значения E_x и ν_{yx} определяли с помощью фольговых тензодатчиков, наклеенных на образец в средней его части согласно ГОСТ 25601-80. Проводили два варианта испытаний: первый — последовательное испытание двух или более образцов при существенно различающихся значениях отношения l/h , а второй — испытание одного образца при разных отношениях l/h . В основном использовали второй вариант, обеспечивающий меньший разброс и стабильное воспроизведение значений искомых характеристик.

Испытания проводили на машине MTS. Скорость перемещения активного захвата 0,5 мм/мин. Прогиб измеряли с помощью стальной оттарированной пластинки, в конце зоны крепления которой наклеены два фольговых тензодатчика, подсоединённые к компьютеру. Прогиб измеряли автоматически от начала до окончания нагружения образца. Зависимость прогиба от силы представлена как в графическом, так и цифровом варианте с частотой опроса данных 10 раз в секунду.

Максимальное значение отношения l/h ($l/h = 40$) выбрано для того, чтобы сравнить значения модуля упругости, определённые из опытов на растяжение и поперечный изгиб. Его использовали лишь в начале испытаний выбранного материала. Три других значения отношения l/h выбраны для подтверждения достоверности полученных значений определяемой характеристики. Установку образца на разные пролёты при трёхточечном поперечном изгибе осуществляли с помощью передвижения на траверсе нижних опор на заданные расстояния.

Образцы из стали использованы для более четкого установления картины изменения прогиба от сдвига при разных значениях l/h при нагружении на трёхточечный поперечный изгиб.

Оценку свойств материалов проводили хорошо известными и апробированными методами. С целью экономии материалов и снижения трудозатрат ее осуществляли лишь на двух материалах: стали и стеклопластике.

Модуль упругости при растяжении стального стержня $E^+ = 215,3$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,31$. Как следует из этих данных, модуль сдвига равен

$$G^+ = \frac{E^+}{2(1+\nu)} = \frac{215,3}{2(1+0,31)} = 82,17 \text{ ГПа.}$$

Значение модуля упругости, определённое при изгибе с отношением $l/h = 40$, равно 215,6 ГПа. Оно хорошо согласуется с модулем упругости при растяжении.

Модули сдвига стеклопластика определяли из опытов на трёхточечный поперечный изгиб аналогичных образцов с измерением деформаций [15]. Значение модуля сдвига вычисляли по формуле

$$G_{xy}^b = \frac{3P}{4F(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)},$$

где P — сила, приложенная к образцу; F — площадь поперечного сечения образца; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — относительные деформации, измеренные тензодатчиками базой 6 мм, наклеенными под углами $\pm 45^\circ$ немного выше и ниже осевой линии образца. Полученные характеристики необходимы в качестве основы для проведения дальнейшего анализа.

2. Результаты исследования

Эксперименты показывают, что непосредственное использование зависимости (1) не представляется целесообразным из-за большого разброса данных и значительного их отличия от реальных значений. Так, например, для образцов из стали при $l/h = 14,4$ определяемое значение $G^b = 1,17$ ГПа, при $l/h = 20$ — 0,31 ГПа; для стеклопластика при $l/h = 10$ $G_{xy}^b = 0,34$ ГПа, при $l/h = 19,41$ — 0,36 ГПа. Реальные же их значения, полученные при $l/h = 40$, для этих материалов равны 82,17 и 3,64 ГПа соответственно.

Аналогичную картину даёт и использование зависимости (2).

Исходя из изложенного ранее, оценку приемлемости базовой зависимости, используемой для определения модулей сдвига, далее проводили с учётом её доработки путём исключения одного из очевидных факторов, а именно: простого суммирования прогибов от изгиба и сдвига. В зависимости (1) знак был изменён с “+” на “-”. Это обусловлено как экспериментальными, так и расчётными данными определения модуля сдвига. Общий прогиб, измеренный под точкой приложения силы, оказывается заметно меньше, чем суммарный прогиб, рассчитанный по зависимости (1). Это приводит к существенному снижению расчётного значения модуля сдвига

Табл. 1

Зависимость определяемых характеристик при трёхточечном поперечном изгибе стального образца от параметра l/h

| Характеристика | Расчёт по зависимости (1) | | | Характеристика | Расчёт по зависимости (2) | | |
|-----------------|---------------------------|-------|-------|-----------------|---------------------------|--------|--------|
| | l/h | | | | l/h | | |
| | 20 | 14,4 | 10,4 | | 20 | 14,4 | 10,4 |
| P , кН | 1,276 | 1,208 | 1,908 | P , кН | 1,276 | 1,208 | 1,908 |
| y_{\max} , мм | 0,782 | 0,300 | 0,199 | y_{\max} , мм | 0,782 | 0,300 | 0,199 |
| y^* , мм | 0,711 | 0,252 | 0,149 | E_x , ГПа | 195,68 | 180,24 | 161,50 |
| G^b , ГПа | 6,46 | 6,41 | 7,17 | G^b , ГПа | 6,98 | 5,48 | 8,25 |
| G^b/G^+ | 0,079 | 0,078 | 0,087 | G^b/G^+ | 0,085 | 0,067 | 0,1004 |

Примечания: $G^+ = 82,17$ ГПа; для G^b (расчёт по зависимости (1)) $\nu = 5,20\%$ (здесь и далее ν — коэффициент вариации); для G^b (расчёт по зависимости (2)) $\nu = 16,42\%$.

по сравнению с реальным его значением. Изменение знака способствует сближению упомянутых значений.

Расчётные и экспериментальные данные для стального стержня, применяемые для анализа, приведены в табл. 1. Видно, что корректировка базовой зависимости привела к существенной стабилизации получаемых значений определяемой характеристики. Заметим, что эти значения оказались заниженными примерно в 10 раз по сравнению с их реальными значениями. Также видно, что использование первого способа определения модуля сдвига стального образца приводит к меньшему разбросу получаемых значений для каждого отношения l/h , чем использование второго способа.

Преимущество второго способа заключается в том, что он базируется на сочетании двух отношений l/h , позволяющих регулировать разброс значений определяемого модуля сдвига. Малая величина выборки значений l/h может повышать разброс. Подбор одного или двух сочетаний l/h из большей выборки обеспечивает малый разброс и улучшает стабильность определяемой характеристики. При этом чем большее количество l/h имеется, тем меньший разброс и большую стабильность определяемой характеристики удастся обеспечить. Результаты испытаний образцов из стеклопластика представлены в табл. 2.

Модуль сдвига в плоскости основного армирования G_{xy} и модуль межслойного сдвига G_{xz} , рассчитанные по формуле (1), зависят от отношения l/h , а их значения для большинства отношений l/h заметно ниже реальных, но в гораздо меньшей степени, чем это имеет место для образцов из стали. Такая же картина наблюдается и при расчёте значений модулей сдвига стеклопластика по формуле (2) (табл. 3). Сочетание двух разных параметров l/h заметно снижает разброс значений модулей сдвига. Второй способ не даёт большого разброса значений модулей сдвига как в плоскости xy , так и в плоскости xz , в отличие от первого. Сочетание разных отношений l/h позволяет в достаточно широких пределах изменять зна-

Табл. 2

Зависимость определяемых характеристик стеклопластика при трёхточечном поперечном изгибе от параметра l/h (расчёт по зависимости (1))

| Характеристика | Плоскость xu | | | Плоскость xz | | | |
|----------------------------------|----------------|-------|-------|----------------|-------|-------|-------|
| | l/h | 19,41 | 10,00 | 5,10 | 15,47 | 7,97 | 4,06 |
| P , кН | | 0,104 | 0,458 | 0,856 | 0,200 | 0,408 | 0,640 |
| y_{\max} , мм | | 0,673 | 0,435 | 0,136 | 0,828 | 0,248 | 0,072 |
| y^* , мм | | 0,649 | 0,390 | 0,097 | 0,791 | 0,221 | 0,046 |
| G_{ij}^b , ГПа | | 2,01 | 2,43 | 2,79 | 2,51 | 3,54 | 3,02 |
| $G_{ij}^b / G_{ij}^{\text{exp}}$ | | 0,552 | 0,668 | 0,766 | 0,700 | 0,987 | 0,842 |

Примечания: $E_x^b = 23,40$ ГПа при $l/h = 40$; модули сдвига, определённые при испытании на трёхточечный поперечный изгиб с измерением деформаций равны: $G_{xy}^{\text{exp}} = 3,64$ ГПа, $G_{xz}^{\text{exp}} = 3,59$ ГПа; для плоскости xu $i = x$, $j = y$; для плоскости xz $i = x$, $j = z$; для G_{xy}^b $\nu = 13,22\%$; для G_{xz}^b $\nu = 26,9\%$.

чения модуля сдвига. Поэтому для стабилизации значений и снижения их разброса необходимо расширение сочетаний l/h , что позволит осуществить более подходящий выбор.

Таким образом, проведённые исследования показывают, что использование базовой зависимости в её исходном состоянии не позволяет получать достоверные данные о модулях сдвига рассматриваемого класса материа-

Табл. 3

Зависимость определяемых характеристик стеклопластика при трёхточечном поперечном изгибе от параметра l/h (расчёт по зависимости (2))

| Характеристика | Плоскость xu | | | Плоскость xz | | | |
|----------------------------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|---------------|----------------|
| | l/h | 19,41 | 10,00 | 5,10 | 15,47 | 7,97 | 4,06 |
| P , кН | | 0,104 | 0,458 | 0,856 | 0,200 | 0,408 | 0,640 |
| y_{\max} , мм | | 0,673 | 0,435 | 0,136 | 0,828 | 0,248 | 0,072 |
| E_f , ГПа | | 2,250 | 2,096 | 1,687 | 2,234 | 2,081 | 1,497 |
| B^2 | | 8,540 | 7,776 | 7,970 | 5,448 | 8,390 | 7,543 |
| E_x , ГПа | | 23,11 | 22,92 | 23,07 | 22,95 | 24,11 | 23,19 |
| G_{ij}^b , ГПа | | 2,71 | 2,95 | 2,90 | 4,21 | 2,87 | 3,07 |
| $G_{ij}^b / G_{ij}^{\text{exp}}$ | | 0,745 | 0,810 | 0,796 | 1,174 | 0,800 | 0,856 |
| Сочетание l/h | | 19,41— 10,00 | 10,00— 5,10 | 19,41— 5,10 | 15,47— 7,97 | 7,97— 4,06 | 15,47— 4,06 |

Примечания: $G_{xy}^{\text{exp}} = 3,64$ ГПа, $G_{xz}^{\text{exp}} = 3,59$ ГПа; для E_x в плоскости xu $\nu = 0,36\%$; для E_x в плоскости xz $\nu = 2,13\%$; для G_{xy}^b $\nu = 3,60\%$; для G_{xz}^b $\nu = 17,40\%$.

Табл. 4

Расчётные значения модулей сдвига стеклопластика, определённые первым способом

| Характеристика | Плоскость $xу$ | | | Плоскость xz | | | |
|---------------------------|----------------|--------|--------|----------------|--------|--------|--------|
| | l/h | 19,41 | 10,00 | 5,10 | 15,47 | 7,97 | 4,06 |
| Θ_0 , рад | | 0,0098 | 0,0115 | 0,0056 | 0,0120 | 0,0065 | 0,0026 |
| G_{ij}^b , ГПа | | 2,98 | 3,26 | 3,12 | 3,71 | 4,62 | 3,31 |
| G_{ij}^b / G_{ij}^{exp} | | 0,819 | 0,896 | 0,857 | 1,035 | 1,290 | 0,922 |

Примечания: $G_{xy}^{exp} = 3,64$ ГПа, $G_{xz}^{exp} = 3,59$ ГПа; Θ_0 — угол поворота сечения на опоре; для G_{xy}^b $\nu = 3,82\%$; для G_{xz}^b $\nu = 15,50\%$.

лов. Некоторая корректировка её за счёт исключения одного из отмеченных факторов способствует получению приемлемых результатов. При этом характерной особенностью испытания образцов из стали является получение значений модуля сдвига, заниженных в 10 и более раз.

Оценка влияния другого отмеченного фактора (углового перемещения) на модуль сдвига, определяемый рассматриваемыми способами, также была осуществлена на образцах, изготовленных из тех же двух типов материалов: стеклопластика и стали. Исходные данные для расчёта взяты из табл. 2 и 3. Полученные значения углов поворота сечений и расчётные значения модулей сдвига стеклопластика с учётом отмеченного фактора приведены в табл. 4.

Как видно из последней строки таблицы, полученные в результате учёта угловых перемещений значения модулей сдвига стеклопластика в обеих плоскостях значительно лучше согласуются с реальными значениями. Особенно заметно аналогичное улучшение для стали при использовании первого способа (табл. 5), если принять коэффициент формы образца $\beta = 12$ вместо $\beta = 1,2$.

Здесь следует отметить замечание С. П. Тимошенко о численном значении β : "...Поэтому нельзя дать достаточно надёжных формул для вычисления дополнительного прогиба, зависящего от величины β , т.е. прогиба,

Табл. 5

Расчётные значения модуля сдвига стального стержня, определённые первым способом с учётом угловых перемещений

| Характеристика | l/h | | |
|------------------|--------|--------|--------|
| | 20,0 | 14,4 | 10,4 |
| Θ_0 , рад | 0,0213 | 0,0105 | 0,0860 |
| G^b , ГПа | 82,54 | 81,35 | 86,77 |
| G^b / G^+ | 1,004 | 0,990 | 1,056 |

Примечание: $G^+ = 82,17$ ГПа; для G^b $\nu = 2,78\%$.

обусловленного касательными напряжениями” [16, с. 148]. По его мнению, “... большие погрешности элементарная теория может дать лишь в случае балок прямоугольного сечения, имеющих малую высоту и большую ширину”. Это нашло подтверждение при испытании образцов из стеклопластика с высотой сечения, превышающей его ширину (см. табл. 2, 3). Зависимость численного значения коэффициента β от многих факторов, подлежащих детальному исследованию, отмечена также в работе [4].

Второй способ также даёт незначительный разброс значений модуля сдвига, и его значения, определённые при разном отношении l/h , хорошо согласуются с полученным другим, апробированным методом. Так, например, для стальных образцов, испытанных при $l/h = 10,4$ и $14,4$ и $\beta = 12$, $G^b = 82,51$ ГПа. Это значение практически не отличается от значения G^+ .

Вопрос зависимости коэффициента β от формы поперечного сечения образца, относящийся к данному исследованию, представляет большой практический интерес, однако в задачи исследования он не входит. Отметим, что высота поперечного сечения всех стальных образцов в три-пять раз ниже его ширины. Возможно, это как-то сказалось на значении β образцов из стали.

Расчёты модулей сдвига таким способом здесь не приведены, так как это не входит в задачи работы. Практическая их реализация, а также других возможных способов рассматриваемого подхода требует отдельного, детального описания.

Одной из главных составляющих обоих способов, как следует из зависимостей (1) и (2), является прогиб, поэтому представляет практический интерес оценить его зависимость от основных определяющих компонентов P и l/h . Это также позволит лучше установить влияние роста поперечной нагрузки на изменения названных факторов при уменьшении величины l/h .

Исследовали одни и те же образцы при разных значениях l/h , но одинаковым для них значениями $P(l/h)^3$: при каждом изменении l/h изменялась и нагрузка, прилагаемая к образцу, причём на такую величину, чтобы выполнялось условие $P(l/h)^3 = \text{const}$. Минимальную нагрузку P при максимальном значении l/h (пролёта) устанавливали такой, чтобы максимальная нагрузка при минимальном значении пролёта соответствовала упругой зоне материала. Иными словами, чтобы зависимость $P_n \sim y_n$ имела линейный характер. Следует отметить, что указанная зависимость для всех исследованных материалов имела линейный характер вплоть до 60—70% от предельной разрушающей нагрузки при изгибе, а все исследованные характеристики определяли на её начальном участке. Здесь указанная зависимость не представлена, так как для всех использованных в работе материалов она давно и хорошо изучена (см., например, [17, 3]).

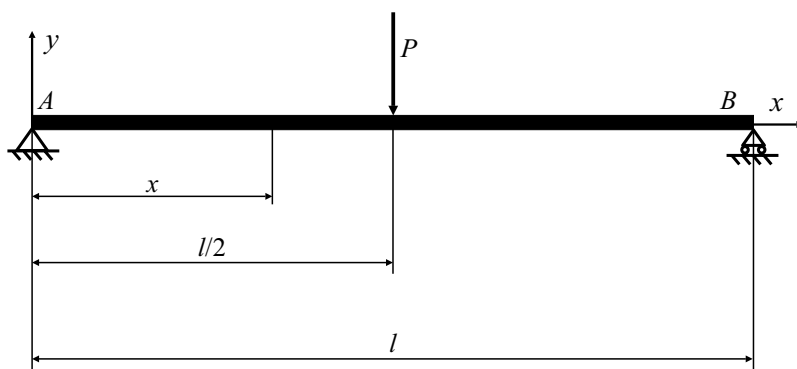
Полученные экспериментальные и расчётные значения параметров приведены в табл. 6. Из данных таблицы видно, что при трёхточечном изгибе с принятыми условиями нагружения имеет место одинаковое значение прогиба от сдвига y_Θ при всех значениях l/h для одного и того же

Табл. 6

Зависимость параметров образца от величины l/h при нагружении на трёхточечный поперечный изгиб с одинаковым значением $P(l/h)^3$

| Материал | Параметр | | | | | | |
|------------------------------------|----------|-------|----------|----------|------------|----------------------|------------------|
| | h , мм | l/h | P , кН | y , мм | y^* , мм | $y_{\text{ср}}$, мм | Θ_0 , рад |
| Сталь | 5,0 | 27,60 | 0,200 | 0,293 | 0,293 | 0,294 | 0,0064 |
| | | 20,00 | 0,525 | 0,292 | | 0,293 | 0,00878 |
| | | 14,40 | 1,408 | 0,293 | | 0,293 | 0,0122 |
| | | 10,40 | 3,738 | 0,349 | | 0,293 | 0,0169 |
| Стеклопластик (плоскость xz) | 11,3 | 12,21 | 0,200 | 0,391 | 0,354 | 0,354 | 0,0077 |
| | | 4,60 | 3,738 | 0,523 | | 0,354 | 0,0204 |
| Стеклопластик (плоскость xy) | 12,0 | 11,50 | 0,200 | 0,325 | 0,314 | 0,314 | 0,0068 |
| | | 4,33 | 3,738 | 0,464 | | 0,314 | 0,0181 |
| Стеклоуглепластик | 4,4 | 31,36 | 0,040 | 0,577 | 0,532 | 0,534 | 0,0116 |
| | | 16,36 | 0,282 | 0,579 | | 0,533 | 0,0222 |
| | | 11,81 | 0,748 | 0,577 | | 0,532 | 0,0307 |
| | | 9,54 | 1,446 | 1,496 | | 0,532 | 0,0380 |
| Углепластик | 5,4 | 25,55 | 0,102 | 0,449 | 0,400 | 0,400 | 0,0087 |
| | | 13,33 | 0,718 | 0,550 | | 0,401 | 0,0167 |
| | | 9,63 | 1,907 | 0,566 | | 0,402 | 0,0232 |
| | | 7,78 | 3,619 | 0,767 | | 0,402 | 0,0287 |

материала независимо от его типа и структуры армирования. Это свидетельствует о том, что прогиб от сдвига непосредственно не подвержен значительному влиянию поперечной нагрузки, значения которой при максимальном и минимальном l/h , например, для стального образца, различаются в $3,738:0,200 = 18,69$ раз. Прогибы y^* , рассчитанные без учёта сдвигов, также не зависят от величины l/h и имеют равное значение для каждого из материалов, что следует из принятых условий испытаний. Максимальный прогиб под точкой приложения нагрузки, обозначенный в табл. 6 как y (измеряемый), также не изменяется при изменении l/h . Однако это справедливо только для относительно больших рассмотренных пролётов ($l/h \geq 14,4$). При испытании образцов с более низкими значениями l/h , например, для стали при $l/h = 10,4$, имеет место повышенное значение измеряемого прогиба: $y = 0,349$ мм (см. табл. 6). Это обусловлено тем, что установленная нагрузка для этого значения l/h создаёт напряжения, превышающие предел упругости (образец после изгиба иногда оставляет заметную остаточную деформацию). Такая картина имеет место как для стальных образцов, так и для образцов из композитных материалов, особенностью которых является разрушение от сдвига при относительно небольших $l/h \leq 10$ в случае заметного превышения установленного уровня нагрузки. Как следует из данных табл. 6, существенные изменения наблю-



Рассматриваемая схема нагружения.

даются лишь для угла поворота сечения образца. Наблюдается обратно пропорциональная зависимость Θ_0 от l/h для всех рассмотренных материалов и указанных значений l/h . Так, для стального образца снижение величины l/h в 2,654 раза (с 27,6 до 10,4) приводит к росту значений Θ_0 в 2,653 раза. Для стеклоуглепластика снижение величины l/h в 3,287 раза приводит к росту значений Θ_0 в 3,276 раза.

Рассматриваемая схема нагружения приведена на рисунке. Максимальный угол поворота сечения образца имеет место на опорах. Это следует из решения, полученного на основе дифференциального уравнения упругой линии балки [18]

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M, \quad (3)$$

где E — модуль упругости образца в направлении оси x ; J — момент инерции поперечного сечения образца относительно нейтральной оси z ; M — изгибающий момент от внешних сил.

Для рассматриваемой схемы нагружения на трёхточечный поперечный изгиб с приложением силы в середине пролёта и началом координат, выбранным на левой опоре, уравнение (3) для текущего сечения можно представить в виде

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{2} x.$$

Дважды интегрируя это уравнение, получим

$$EJ \frac{dy}{dx} = \frac{P}{2} \frac{x^2}{2} + C,$$

$$EJy = \frac{P}{2} \frac{x^3}{6} + Cx + D.$$

Постоянные интегрирования C и D определяли исходя из граничных

условий на опорах и симметрии нагружения

$$C = -\frac{Pl^2}{16}, \quad D = 0.$$

Окончательное выражение для угла поворота представлено в виде

$$\Theta_x = \frac{3Px^2}{Ebh^3} - \frac{3Pl^2}{4Ebh^3},$$

где x — координата от левой опоры до сечения; $0 \leq x \leq l/2$. При $x = 0$

$$\Theta_0 = \Theta_{\max} = -\frac{3P(l/h)^2}{4EF} = -\frac{3P}{4F} \cdot \frac{(l/h)^2}{E} = \tau \cdot \frac{(l/h)^2}{E}, \quad (4)$$

а при $x = l/2$ — $\Theta_{l/2} = 0$. Как видно, на рассматриваемом участке от левой опоры до точки приложения силы P углы поворота сечений изменяются от максимального их значения на опоре $\Theta_0 = \Theta_{\max}$ до минимального $\Theta_{l/2} = 0$ под точкой приложения силы P . Из формулы (4) следует, что углы поворота сечений определяются не только касательными напряжениями, но и параметром $\frac{(l/h)^2}{E}$. Изменение этого параметра существенно отражается на изменении как угловых перемещений, так и прогиба.

Снижение $\frac{(l/h)^2}{E}$ приводит к одновременному уменьшению угловых перемещений, суммарное значение которых оказывается заметно ниже исходных значений (прогибов).

Представляет практический интерес установление связи между углом поворота сечения образца и прогибом для рассматриваемой схемы нагружения.

Максимальный прогиб под точкой приложения нагрузки без учёта сдвигов равен

$$y^* = \frac{Pl}{4EF} \left(\frac{l}{h} \right)^2.$$

Принимая во внимание выражение для максимального угла поворота сечения образца $\Theta_0 = \Theta_{\max}$, прогиб y^* можно представить как

$$y^* = y_{\Theta} = \frac{l}{3} \Theta_0. \quad (5)$$

Входящий в (5) параметр $l/3$, по-видимому, представляет собой расстояние от центра тяжести прямоугольного треугольника до его вершины. Одним из катетов этого треугольника является угол поворота сечения образца на опоре, другим — продольная ось образца, а гипотенузой — линия, совпадающая с кривой углов поворота сечений на участке от опоры

до центра приложения силы P (вершины треугольника). Кривая углов поворота сечений на рассматриваемом участке имеет линейный характер вследствие линейного характера зависимости $P \sim y$ на начальном участке, (который достигает 60—70% от её предельной разрушающей величины), что подтверждают данные работы [19]. Экспериментальные данные, представленные в табл. 6, хорошо подтверждают приемлемость уравнения (5) для оценки максимального прогиба для рассматриваемых типов конструкционных материалов.

Заключение

Полученные данные свидетельствуют о том, что рассмотренный метод определения модулей сдвига из опытов на трёхточечный поперечный изгиб даёт нестабильные результаты и большой разброс значений при расчёте как первым, так и вторым способом для исследованных изотропных и анизотропных материалов, что исключает возможность его практического использования. При этом установлено, что положение, при котором общий прогиб под точкой приложения нагрузки образуется суммированием прогибов от изгиба и сдвига, на чём базируются используемые зависимости, не подтверждается экспериментально. Установлена связь между линейными и угловыми перемещениями. Установлено также, что отмеченный прогиб определяется углами поворота сечений образца и длиной пролёта. Его значение равно произведению максимального угла поворота сечения и одной трети длины пролёта. Показано, что учёт прогиба от угловых перемещений и некоторая корректировка расчётных зависимостей с учётом данных проведённого исследования позволяют использовать данный метод на практике при расчёте как первым, так и вторым способом. Это также открывает широкие возможности для создания новых экономических методов определения модулей сдвига конструкционных материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мое Хеин Зин, Хту Йе Тинт, Куреев В. А.* Сравнение методик определения упругих и прочностных характеристик полимерных композитных материалов // Тр. МФТИ. — 2018. — Т. 10, № 2. — С. 136—145.
2. *Каюмов Р. А., Страхов Д. Е., Шакирзянов Ф. Р.* Определение сдвиговых характеристик армированных пластиков // Изв. КГАСУ. — 2015. — Т. 34, № 4. — С. 266—272.
3. *Каюмов Р. А., Страхов Д. Е., Шакирзянов Ф. Р., Гирманов Л. Р., Мангушева А. Р.* Идентификация жесткостных характеристик композита // Вест. технолог. ун-та. — 2016. — Т. 19, № 24. — С. 109—112.
4. *Chen C., Poursartip A., Fernlund G.* A novel method to measure laminate shear modulus development of interlayer toughened composite laminates during the curing process // Conf. Proc. Am. Soc. Compos. — 34 Techn. Conf. Atlanta, Georgia, USA, 2019. URL: <http://DOI:10.1278/asc.34/31316> (дата обращения: 03.10.2021)
5. *Hiroshi Yoshihara, Yoshitaka Kubojima, Koji Nagaoka, Masamitsu Ohta* Measurement of shear modulus of wood by static bending tests // J. Wood Sci. — 1998. — Vol. 44. — P. 15—20.

6. *Тарнопольский Ю. М., Кинцис Т. Я.* Методы статических испытаний армированных пластиков. — М.: Химия, 1981. — 272 с.

7. *Тимошенко С. П.* Соппротивление материалов. Т. 1. — М.: Наука, 1965. — 364 с.

8. *Щербакова А. О., Сапожников С. Б.* Влияние радиуса закругления опор на точность определения модуля межслойного сдвига армированных пластиков из испытаний коротких балок на изгиб // Изв. Челяб. науч. центра УРО РАН. — 2001. — № 2. — С. 101—110.

9. *Михеев П. В., Муранов А. Н., Гусев С. А.* Экспериментальное определение модуля межслойного сдвига слоистого углепластика // Конструкции из композиц. матер. — 2015. — № 4 (140). — С. 46—50.

10. *Nordstrand T. M., Carlsson L. A.* Evaluation of transverse shear stiffness of structural core sandwich plates // Compos. Struct. — 1997. — Vol. 37. — Iss. 2. — P. 145—153.

11. *Şener, Özgün Dede, Oguzhan; Atalay, Oguz; Atasoy, Mert; Kayran, Altan* Evaluation of transverse shear moduli of composite sandwich beams through three-point bending tests // ASME Int. Mech. Eng. Congr. Exposition. Proc. (IMECE) // 2018. — Vol. 92018. URL: <http://doi.org/1115/IMECE2018-87636> (дата обращения: 12.09.2021)

12. *Muhammad Ali Nasir, Feroqi M. I., Yasir Ali, Hafiz Ali* Experimental validation of the transverse shear behavior of a Nomex core for sandwich panels // Mech. Compos. Mater. // 2017. — Vol. 53, № 2. — P. 1—10.

13. *Jianmei He, Martin Y. M. Chiang, Donald L. Hunston* Assesment of sandwich beam in three-point bending for measuring adhesive shear modulus // J. Eng. Mater. Techn. // 2001. — Vol. 123, Iss. 3. — P. 322—328.

14. *Adams D.* A comparison of shear test methods // Composites World. — 2009. URL: <http://compositesworld.com/articles/a-comparison-of-shear-test-methods> (дата обращения: 04.09.2021)

15. *Жигун В. И., Плуме Э. З., Муйжниец К. Н., Краснов Л. Л.* Универсальные методы определения модулей сдвига композитных материалов // Механика композиц. материалов и конструкций. — 2020. — Т. 26, № 3. — С. 313—326.

16. *Тимошенко С. П.* Курс теории упругости. — Киев: Наук. Думка, 1972. — 501 с.

17. *Arnautov A. K.* The method of three-point bending in testing thin high-strength reinforced plastics at large deflections // Mech. Compos. Mater. — 2005. — Vol. 41, No. 5. — P. 467—476.

18. *Феодосьев В. И.* Соппротивление материалов. — М.: Наука, 1967. — 552 с.

19. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 576 с.

Поступила в редакцию 09.06.2022

Received June 9, 2022
