

*P. T. S. Freire^{a,b,d}, S. G. Nunes^{e,d}, S. C. Amico², H. Дж. Аль-Рамахи^d,
P. Йоффе^d, Я. Варна^{e,d,*}*

^a*Centre for Innovation and Technology in Composite Materials, Department of Mechanical Engineering, Federal University of São João del Rei (UFSJ), Brazil.*

^b*Department of Natural Sciences, Federal University of São João del Rei (UFSJ), Brazil.*

^c*Laboratory of Experimental Mechanics of Materials, Riga Technical University, Riga, Latvia*

^d*Department of Materials Engineering, Federal University of Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, Brazil*

^e*Department of Engineering Sciences and Mathematics, Luleå University of Technology, Luleå, Sweden*

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОДАТЛИВОСТИ И РЕЛАКСАЦИИ ПОЛИМЕРОВ В ОДНОМ ИСПЫТАНИИ НА РАСТЯЖЕНИЕ¹

*R. T. S. Freire, S. G. Nunes, S. C. Amico, N. J. Al-Ramahi, R. Joffe, and J. Varna**

ON DETERMINATION OF THE LINEAR VISCOELASTIC COMPLIANCE AND RELAXATION FUNCTIONS FOR POLYMERS IN ONE TENSILE TEST

Keywords: linear viscoelasticity, relaxation, Laplace transforms, FEM, quasi-elastic method

Usually, the viscoelastic (VE) response of polymers for applications in composites is obtained in uniaxial strain- or stress-controlled tests. However, analyzing multimaterial structures by the Finite Element Method (FEM) or by other numerical or analytical tools, a material model in terms of a complete set of compliance functions and/or relaxation functions is required. In this paper, a methodology and exact analytical expressions for calculating the whole set of VE functions is presented based on the relaxation modulus $E(t)$ and Poisson's ratio $\nu(t)$ determined in strain-controlled tests. The method is based on Laplace transforms, where an exact inversion is possible if a linear VE model with functions in Prony series is used. Results of the analytical model are compared with the FEM simulation, where specific boundary conditions to determine each particular VE function are used. Finally, the applicability of the so called quasi-elastic method

*Автор, с которым следует вести переписку: janis.varna@ltu.se
Corresponding author: janis.varna@ltu.se

¹Перевод с англ.

is investigated, where the expressions of elasticity theory are used to calculate a given viscoelastic function at an instant of time t_k using the instant values of $E(t_k)$ and $\nu(t_k)$. For isotropic materials, the three approaches render almost coinciding results.

Ключевые слова: вязкоупругость линейная, релаксация, преобразования Лапласа, МКЭ, метод квазиупругий

Вязкоупругий отклик полимеров для применений в композитах определяют обычно путем испытаний с контролируемой одноосной деформацией или напряжением. Однако при анализе конструкций из нескольких материалов методом конечных элементов (МКЭ) или других численных или аналитических инструментов необходима модель материала с полным набором функций податливости и/или функций релаксации. В настоящей работе представлена методика и точные аналитические выражения для расчета всего набора вязкоупругих функций на основе модуля релаксации и коэффициента Пуассона, определенных в испытаниях с контролируемой деформацией. Метод основан на преобразованиях Лапласа, когда возможно точное обратное преобразование при использовании линейной вязкоупругой модели с функциями в рядах Прони. Результаты аналитической модели сравнили с результатами моделирования МКЭ, в которых использовали конкретные граничные условия для определения каждой конкретной вязкоупругой функции. Исследовали применимость так называемого квазиупругого метода, в котором для вычисления заданной вязкоупругой функции в момент времени t_k по мгновенным значениям $E(t_k)$ и $\nu(t_k)$ использовали выражения теории упругости. Для изотропных материалов эти три подхода дали почти совпадающие результаты.

Введение

Использование полимеров и полимерных композитов в разных областях применения постоянно возрастает, особенно с акцентом на расширение области применения для жестких условий эксплуатации, например, при повышенных температурах, а также при разработке новых многомасштабных материалов [1—6], в которых вязкоупругим поведением полимеров, зависящим от времени, пренебрегать нельзя. Наиболее типичными для определения линейных вязкоупругих характеристик изотропных материалов являются испытания на одноосную релаксацию или ползучесть [3]. Например, в испытании на релаксацию за быстрым приложением деформации ε_1 следует выдержка материала при этой деформации. Релаксацию напряжений и изменение поперечной деформации (к сожалению, ее измеряют нечасто) используют для определения вязкоупругого модуля $E(t)$ и коэффициента Пуассона $\nu(t)$.

Однако оценка вязкоупругих функций для композитов и моделирование сложных конструкций из нескольких материалов требуют моделей состояния и численных процедур, которые используют разные, зависящие от времени, функции — матрицу функций податливости при ползучести $S_{ij}(t)$ и матрицу функций релаксации жесткости $C_{ij}(t)$. Теоретически эти функции определяют в испытаниях с конкретными граничными условиями, которые очень сложно (иногда невозможно) реализовать. Примером может служить функция релаксации сдвигового напряжения $G(t)$, являющаяся информацией, вводимой в конечно-элементное программное обеспечение ANSYS [7]. Поэтому для пересчета необходимы точные выражения, заменяющие ненужное дополнительное испытание.

Для задач линейной вязкоупругости часто используют принцип соответствия, согласно которому после интегрального преобразования в область Лапласа соотношения между напряжениями и деформациями будут такими же, как и в случае линейной упругости, и можно использовать методы и выражения, полученные в теории упругости [8, 9]. Проблема заключается в обратном преобразовании решения, полученного в области Лапласа, во временную область. Точное обратное преобразование во многих случаях невозможно или очень сложное, поэтому разрабатывают приближенные методы обратного преобразования. В [9] предложили два простых приближенных метода обратного преобразования (метод коллокации и прямой метод), которые будут точными, как предполагают, когда приложенные нагрузки или перемещения будут иметь форму ступенчатой функции Хевисайда, как в идеализированном испытании на ползучесть или релаксацию. Прямой метод, который проще метода коллокации, представляет прямую зависимость между решениями в обеих областях. Для функции $f(t)$ с малой кривизной по осям $\lg t$ зависимость с ее преобразованием $\bar{f}(p)$ выражена как $f(t) = \left[p\bar{f} \right]_{p=\beta/t}$, где $\beta \approx 0,5$.

Численный метод вычисления нестационарных функций релаксации композитов применяли в [10, 11]. Предполагая, что усредненные функции можно представить в рядах Прони, соответствующую задачу теории упругости в области Лапласа решают численно для заранее заданных M значений параметра Лапласа p . Для этого необходимо выполнить $6M$ решений МКЭ для используемого представительного элемента объема (ПЭО). Затем применяют метод наименьших квадратов для подгонки численных результатов, таким образом определяя требуемые коэффициенты ряда Прони для гомогенизированного материала. Использование больших значений M улучшает описание его поведения в области Лапласа. Однако точность решения во временной области может не повыситься. На самом деле решение во временной области зависит от поведения преобразования в особых точках, поэтому на точность решения влияет выбор значений p . Решение не единственное. Оптимальный выбор алгоритмов обратного преобразования обсуждали в [11].

В [10] времена релаксации для всех составляющих материала и их гомогенизированного поведения одинаковы. Это является приближением, поскольку времена релаксации гомогенизированного поведения, как правило, отличаются от времен релаксации составляющих [12]. Однако результаты [4] свидетельствуют о том, что такая процедура приводит к результатам, очень близким к получаемым при прямом вязкоупругом моделировании МКЭ. Следует отметить, что существуют разные подходы к моделированию ползучести, всесторонний анализ которых можно найти в [13].

Цель настоящей работы — определение матричных функций релаксации $C_{ij}(t)$ и податливости $S_{ij}(t)$ изотропного материала с известными вязкоупругими откликами $E(t)$ и $\nu(t)$ в испытании на релаксацию. Точное решение (коэффициенты ряда Прони для всех функций) можно найти с помощью аналитических выражений в области Лапласа. Эти выражения являются рациональными функциями, содержащими многочлены в знаменателях, и поэтому особые точки (имеющие действительные и отрицательные значения) находят с помощью простой численной процедуры. Аналитическое точное обратное преобразование во временную область выполняли после представления рациональных функций в виде простых дробей. Смоделированные функции жесткости и податливости сравнили с вязкоупругими функциями, полученными при моделировании МКЭ ступенчато-линейного нагружения с граничными условиями, характерными для каждой функции. Наконец, исследовали применимость так называемого квазиупругого метода, когда значение заданной вязкоупругой функции в фиксированный момент времени t_k вычисляли с использованием упругих выражений с $E(t_k)$ и $\nu(t_k)$ в качестве входных данных.

1. Линейные вязкоупругие модели

1.1. Модель вязкоупругого отклика в испытаниях с контролируемой одноосной деформацией. Линейный вязкоупругий отклик изотропных материалов часто характеризуют приложенная ступенчато-линейная одноосная деформация $\varepsilon_1(t)$, измеряемое напряжение $\sigma_1(t)$ и поперечная деформация $\varepsilon_2(t)$. Понимая, что для изотропных материалов можно опустить индексы вязкоупругих функций, решили сохранить их для упрощения объяснения разных случаев нагружения, используемых в МКЭ, и для идентификации измеренных или рассчитанных откликов. В используемой модели линейный вязкоупругий отклик описали интегралом суперпозиции Больцмана [9]

$$\sigma_1(t) = \int_0^t E_1(t-\xi) \frac{d\varepsilon_1}{d\xi} d\xi, \quad (1)$$

$$\varepsilon_2(t) = -\int_0^t \nu_{12}(t-\xi) \frac{d\varepsilon_1}{d\xi} d\xi, \quad (2)$$

где функции релаксации $E_1(t)$ и $\nu_{12}(t)$ определили следующим образом:

$$E_1(t) = E_1^0 + \sum_{m=1}^M E_1^m e^{\left(\frac{-t}{q_m}\right)}, \quad (3)$$

$$\nu_{12}(t) = \nu_{12}^0 + \sum_{m=1}^M \nu_{12}^m e^{\left(\frac{-t}{q_m}\right)}. \quad (4)$$

Коэффициенты E_1^m и ν_{12}^m рядов Прони в уравнениях (3) и (4) — постоянные, не зависящие от температуры, состояния старения или уровня деформации. Обычно времена релаксации q_m предполагают, поскольку они не имеют физического смысла.

В силу конечного количества членов, используемых в рядах Прони, подгоночный параметр E_1^0 нельзя идентифицировать как резиноподобный модуль материала, поскольку он намного больше последнего и включает кроме него вклад всех непредусмотренных членов ряда Прони с $q \gg q_M$, которые в ограниченном диапазоне времени, используемом для определения параметра, имеют почти постоянное значение.

Функция релаксации напряжений при $t = 0$ представляет собой мгновенный упругий отклик (модуль стекловидности). Уравнение (4) представляет собой вязкоупругий “коэффициент Пуассона”, значение которого при $t = 0$ — мгновенный отклик Пуассона:

$$E_1(0) = E_1^0 + \sum_{m=1}^M E_1^m, \quad (5)$$

$$\nu_{12}(0) = \nu_{12}^0 + \sum_{m=1}^M \nu_{12}^m. \quad (6)$$

Для определения коэффициентов ряда Прони используют так называемое релаксационное испытание, обычно состоящее из очень быстрого нагружения (L-шаг) до заданного уровня деформации ε_0 с последующим удержанием постоянной деформации (H-шаг). Предполагая, что L-шаг намного короче H-шага, и игнорируя данные наблюдений на L-шаге и даже большее количество данных в начале H-шага, можно получить приближенное описание релаксации, используя идеализацию о том, что деформация приложена как ступенчатая функция Хевисайда $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 H(t - 0)$. Согласно уравнениям (1), (2) отклик в идеализированном испытании имеет вид

$$\sigma_1(t) = E_1(t) \varepsilon_0, \quad (7)$$

$$\varepsilon_2(t) = -\nu_{12}(t) \varepsilon_0. \quad (8)$$

В отличие от предположения об идеализированном испытании время передачи данных t_1 в реальном испытании не равно нулю, и уравнения (7) и (8) применимы только при $t \gg t_1$. Точные выражения для реального ис-

пытания L—H с контролируемой деформацией можно получить из уравнений (1)—(4). На L-шаге образец линейно нагружают с постоянной скоростью деформирования, достигающей максимума ε_0 за t_1 с ($0 < t \leq t_1$) с вязкоупругим откликом

$$\sigma_1(t) = \varepsilon_0 \left[E_1^0 \frac{t}{t_1} + \frac{1}{t_1} \sum_{m=1}^M E_1^m q_m \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{q_m}\right)} \right) \right], \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \frac{t}{t_1}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_2(t) = -\varepsilon_0 \left[\nu_{12}^0 \frac{t}{t_1} + \frac{1}{t_1} \sum_{m=1}^M \nu_{12}^m q_m \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{q_m}\right)} \right) \right], \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \frac{t}{t_1}. \quad (10)$$

На следующем H-шаге приложенная деформация постоянна, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, в течение t^* с ($t_1 < t \leq t_1 + t^*$), и отклик имеет вид

$$\sigma_1(t) = \varepsilon_0 \left[E_1^0 + \frac{1}{t_1} \sum_{m=1}^M E_1^m q_m e^{-\left(\frac{t}{q_m}\right)} \left(e^{\left(\frac{t_1}{q_m}\right)} - 1 \right) \right], \quad (11)$$

$$\varepsilon_2(t) = -\varepsilon_0 \left[\nu_{12}^0 + \frac{1}{t_1} \sum_{m=1}^M \nu_{12}^m q_m e^{-\left(\frac{t}{q_m}\right)} \left(e^{\left(\frac{t_1}{q_m}\right)} - 1 \right) \right]. \quad (12)$$

В настоящей работе уравнения (9)—(12) использовали для определения коэффициентов ряда Прони путем подгонки экспериментальных данных $\sigma_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ данных испытания L—H (см. кривую деформирования на рис. 1—а). Выражения (9)—(12) линейны относительно коэффициентов E_1^m и ν_{12}^m , времена релаксации q_m предполагают обычно равными 1, 10, 100... с, поэтому аппроксимация методом наименьших квадратов не вызывает затруднений. Дополнительное ограничение коэффициентов ряда Прони $m = 1, 2, \dots, M$ заключается в том, что все они имеют одинаковый знак.

Иногда данные о поперечных деформациях недоступны и необходимы дополнительные предположения. Наиболее распространенным является предположение о том, что поперечная деформация на H-шаге постоянна, $\nu_{12}(t) = \nu_{12}(0)$ или что объемный модуль K остается постоянным (не зависящим от времени). В последнем случае его значение можно найти из мгновенного отклика как

$$K = K(0) = \frac{E_1(0)}{3(1 - 2\nu_{12}(0))}. \quad (13)$$

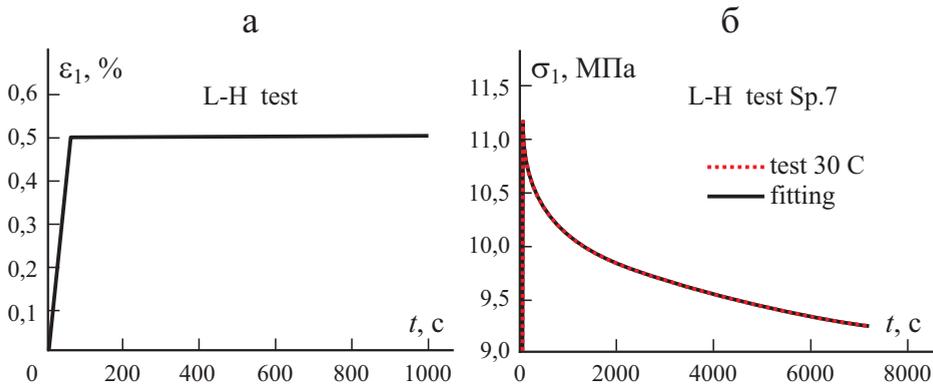


Рис. 1. Испытание L—H для образца 7, нагруженного до деформации 0,5% со скоростью деформирования 0,5%/мин при $T = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$: линейно-ступенчатое изменение деформации со временем (а); зависимость напряжения от времени (б).

Этот особый случай, включенный в подпрограмму конечно-элементного программного обеспечения ANSYS, использовали во всех численных примерах настоящей работы. Можно показать, что при $K = \text{const}$ отклик поперечной деформации $\varepsilon_2(t)$ на приложенную деформацию $\varepsilon_1(t)$ аналогичен отклику осевого напряжения

$$\varepsilon_2(t) = -\frac{1}{2}\varepsilon_1(t) + \frac{1}{6K} \int_0^t E_1(t-\xi) \frac{d\varepsilon_1}{d\xi} d\xi. \tag{14}$$

Следовательно, коэффициенты ряда Прони для $\nu_{12}(t)$ можно найти из известных коэффициентов для $E_1(t)$:

$$\nu_{12}^0 = \frac{1}{2} - \frac{E_1^0}{6K}, \nu_{12}^m = -\frac{E_1^m}{6K}, m = 1, 2, 3, \dots \tag{15}$$

1.2. Вязкоупругая трехмерная модель в формулировке деформации.

Используя “векторное” обозначение Фойгта, отклик ортотропного материала по напряжению на наклонных участках нагружения с регулируемой деформацией определяют выражения

$$\sigma_i(t) = \sum_{j=1}^3 \int_0^t C_{ij}(t-\xi) \frac{d\varepsilon_j}{d\xi} d\xi, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{16}$$

$$\sigma_k(t) = \int_0^t C_{kk}(t-\xi) \frac{d\varepsilon_k}{d\xi} d\xi, \quad k = 4, 5, 6, \tag{17}$$

$$C_{ij}(t) = C_{ij}^0 + \sum_{m=1}^{M_C} C_{ij}^m e^{\left(-\frac{t}{r_m}\right)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \tag{18}$$

Времена релаксации для $C_{ij}(t)$ и $E_1(t)$ могут быть разными.

Для изотропных материалов $C_{12}(t) = C_{13}(t) = C_{23}(t)$, $C_{11}(t) = C_{22}(t) = C_{33}(t)$ и $C_{44}(t) = C_{55}(t) = C_{66}(t)$. Тогда поведение материала описывают функции $C_{11}(t)$, $C_{12}(t)$ и $C_{66}(t)$.

1.3. Вязкоупругая трехмерная модель в формулировке напряжения.

Подобные соотношения на основе симметрии использовали для $S_{ij}(t)$. Реакция по деформации на наклонных участках нагружения с контролируемым напряжением определяют выражения

$$\varepsilon_i(t) = \sum_{j=1}^3 \int_0^t S_{ij}(t-\xi) \frac{d\sigma_j}{d\xi} d\xi, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (19)$$

$$\varepsilon_k(t) = \int_0^t S_{kk}(t-\xi) \frac{d\sigma_k}{d\xi} d\xi, \quad k = 4, 5, 6, \quad (20)$$

$$S_{ij}(t) = S_{ij}^0 + \sum_{m=1}^{M_S} S_{ij}^m e^{\left(-\frac{t}{\tau_m}\right)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6. \quad (21)$$

Времена релаксации для $S_{ij}(t)$ и $E_1(t)$ могут быть разными.

Для изотропных материалов $S_{12}(t) = S_{13}(t) = S_{23}(t)$, $S_{11}(t) = S_{22}(t) = S_{33}(t)$ и $S_{44}(t) = S_{55}(t) = S_{66}(t)$. Тогда поведение материала описывают функции $S_{11}(t)$, $S_{12}(t)$ и $S_{66}(t)$.

1.4. Вязкоупругая двухмерная модель. Предполагая, как и в классической теории слоистых композитов для тонких слоев, что $\sigma_3 = 0$, соотношения между напряжениями и деформациями упрощаются:

$$\sigma_i(t) = \sum_{j=1}^2 \int_0^t Q_{ij}(t-\xi) \frac{d\varepsilon_j}{d\xi} d\xi \quad i, j = 1, 2, \quad (22)$$

$$\sigma_6(t) = \int_0^t Q_{66}(t-\xi) \frac{d\varepsilon_6}{d\xi} d\xi, \quad (23)$$

$$Q_{ij}(t) = Q_{ij}^0 + \sum_{m=1}^{M_Q} Q_{ij}^m e^{\left(-\frac{t}{\theta_m}\right)}, \quad i, j = 1, 2, 6, \quad (24)$$

Времена релаксации θ_m для $Q_{ij}(t)$ и q_m для $E_1(t)$ могут быть разными.

Для изотропных материалов $Q_{11}(t) = Q_{22}(t)$. Тогда поведение материала описывают функции $Q_{11}(t)$, $Q_{12}(t)$, $Q_{66}(t)$.

2. Экспериментальное определение $E_1(t)$ для эпоксидной системы

Вязкоупругий отклик эпоксидной смолы Araldite LY 5052/Aradur HY 5052 (Huntsman) определили на образцах размером 160×15×4 мм, изготовленных путем смешивания эпоксидной смолы и отвердителя в течение

5 мин в пропорции 100:38 по весу согласно рекомендации производителя и вакуумной дегазации в течение ~ 12 мин. Смолу заливали в форму из силиконового каучука при комнатной температуре ($\cong 23\text{ }^\circ\text{C}$) и закрепляли между двумя металлическими пластинами, выстланными тефлоновой тканью для облегчения извлечения из формы (подробнее см. [14]). После отверждения в течение 24 ч при комнатной температуре и извлечения из формы образцы подвергли доотверждению в печи при $105\text{ }^\circ\text{C}$ в течение 4 ч до степени отверждения 0,992 (рассчитанной по кинетической модели отверждения [15, 16] с использованием параметров, приведенных в [17]).

Испытания на растяжение L—H, описанные в разделе 1.1, с линейным наклонным участком деформирования, показанным на рис. 1—а, выполнили на универсальной испытательной машине Instron 3366 с механическими захватами и датчиком нагрузки 10 кН. Длина образца между захватами 100 мм. Использование наждачной бумаги для закрепления образцов в захватах предотвратило их выскальзывание. Осевую деформацию измеряли стандартным динамическим экстензометром Instron 2620-601, прикрепленным к образцу резиновыми лентами, с измерительной базой 50 мм. Образцы испытали в климатической камере Instron 3119-406. На L-шаге до деформации 0,5% скорость деформирования составляла 0,5%/мин. На H-шаге приложенную деформацию поддерживали постоянной в течение 120 мин и измеряли релаксацию напряжения. Восстановление деформации в данном испытании не регистрировали, но ранее ее наблюдали в течение 12 ч для других образцов. Результаты показали, что механический отклик был обратим, поэтому вязкопластические деформации отсутствовали [14].

Кривая изменения напряжения, полученная для одного из образцов (образец 7), представлена на рис. 1—б. Данные подгоняли с помощью уравнений (9) и (11) в соответствии с процедурой, подробно описанной в [14]. Коэффициенты ряда Прони, полученные с помощью этой процедуры, представлены в табл. 1, а качество подгонки показано на рис. 1—б (шкалу выбрали такой, чтобы были видны очень небольшие различия).

По данным табл. 1 с помощью уравнения (5) установили, что $E_1(0) = 2370,5\text{ МПа}$. Поперечную деформацию в эксперименте не измеряли; однако 30-секундное квазистатическое испытание на растяжение показало, что $\nu_{12}(0) = 0,33$. Затем значение $K = \text{const}$ рассчитали с помощью

Табл. 1

Коэффициенты рядов Прони для величины E_1^m , определенные по данным испытания L—H (см. рис. 1—б, $E_1^0 = 1700,1\text{ МПа}$), и коэффициенты ν_{12}^m , вычисленные с помощью уравнения (15); $\nu_{12}^0 = 0,37808$ ($K = 2324,02\text{ МПа}$)

| $q_m, \text{ c}$ | 10^1 | 10^2 | 10^3 | 10^4 |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $E_1^m, \text{ МПа}$ | 121,7 | 115,8 | 129,3 | 303,6 |
| ν_{12}^m | -0,008728 | -0,008305 | -0,009273 | -0,021777 |

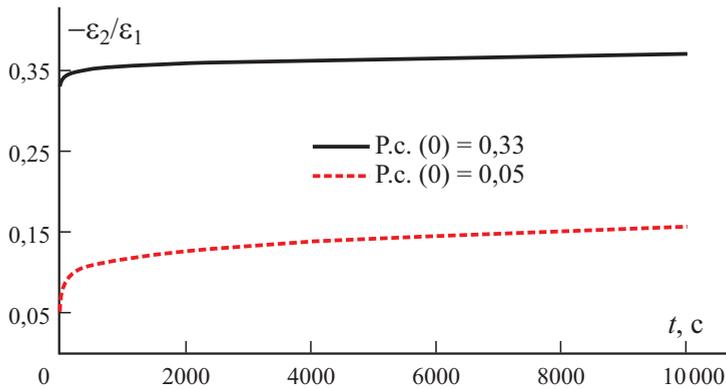


Рис. 2. Отношение поперечной/осевой деформаций (вязкоупругий коэффициент Пуассона), смоделированное в идеальном одноосном испытании на релаксацию со ступенчатым приложением осевой деформации при $\nu_{12}(0) = 0,33$ (—) и $0,05$ (- - -).

уравнения (13), а коэффициенты ряда Прони для $\nu_{12}(t)$ — с помощью уравнения (15). Расчетные значения ν_{12}^m приведены в табл. 1. На рис. 2 представлены зависимости $\nu_{12}(t)$, рассчитанные с помощью уравнения (6) при $\nu_{12}(0) = 0,33$, $K = 2324,02$ МПа и $\nu_{12}(0) = 0,05$, $K = 877,96$ МПа.

3. Трехмерные конечно-элементные расчеты вязкоупругого отклика

Полный набор вязкоупругих функций $S_{ij}(t)$, $C_{ij}(t)$, $Q_{ij}(t)$ для эпоксидного материала определили при моделировании вязкоупругого отклика с использованием программного обеспечения ANSYS и экспериментально найденных функций $E_1(t)$ и $\nu_{12}(t)$ (см. коэффициенты рядов Прони в табл. 1) в качестве входных данных. Расчеты МКЭ выполнили для (а) проверки того, что аналитические выражения, представленные далее, не имеют ошибок и (б) демонстрации точности вязкоупругой процедуры МКЭ для определения коэффициентов ряда Прони, моделирующего испытания L—H с конкретными граничными условиями. Согласно описанию руководства для пользователя ANSYS [7] формулировка вязкоупругой модели, принятая в ANSYS, несколько отличается от описанной в разделе 1. Для изотропного материала её записывают в терминах функции релаксации сдвига $G(t) = G_{12}(t)$ и функции объемной релаксации $K(t)$, и коэффициенты ряда Прони для этих функций необходимо использовать в качестве входных данных:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t 2G(t-\xi) \frac{de_{ij}}{d\xi} d\xi + \delta_{ij} \int_0^t K(t-\xi) \frac{d\Delta}{d\xi} d\xi, \quad (25)$$

где e и Δ — девиаторная и объемная деформации соответственно, равные

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}, \quad (26)$$

$G(t)$ и $K(t)$ должны быть представлены в виде

$$G(t) = G(0) \left[\alpha_0 + \sum_n \alpha_n e^{\left(\frac{-t}{q_n}\right)} \right], \quad (27)$$

$$K(t) = K(0) \left[\beta_0 + \sum_n \beta_n e^{\left(\frac{-t}{q_n}\right)} \right], \quad (28)$$

$$\alpha_r = \frac{G^r}{G(0)} \quad \text{и} \quad \beta_r = \frac{K^r}{K(0)}, \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Напряжения определили с помощью программного обеспечения ANSYS Mechanical APDL, используя адаптированную схему интегрирования, предложенную в [18] и модифицированную в [19]. В этой процедуре интеграл вида

$$S_n = \int_0^t e^{\left(\frac{-t-\xi}{q_n}\right)} \frac{d\varepsilon}{d\xi} d\xi \quad (29)$$

вычисляют приращениями

$$S_n(t_{k+1}) = S_n(t_k) e^{\left(\frac{-\Delta t}{q_n}\right)} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\left(\frac{-t_{k+1}-\xi}{q_n}\right)} \frac{d\varepsilon}{d\xi} d\xi, \quad (30)$$

где $\Delta t = t_{k+1} - t_k$. Для аппроксимации интеграла использовали правило средней точки

$$S_n(t_{k+1}) = S_n(t_k) e^{\left(\frac{-\Delta t}{q_n}\right)} + e^{\left(\frac{-\Delta t}{2q_n}\right)} (\varepsilon(t_{k+1}) - \varepsilon(t_k)). \quad (31)$$

Коэффициенты рядов Прони для $G(t)$ и $K(t)$ необходимо использовать в качестве входных данных в ANSYS. Определение параметров для $G(t)$ при использовании коэффициентов ряда Прони для $E_1(t)$ и $\nu_{12}(t)$, что является одной из задач данного исследования, будет описано в разделе 4. Предполагали, что K не изменяется со временем ($K(t) = K(0)$). Его значение нашли с помощью уравнения (13).

Используя МКЭ, смоделировали вязкоупругий отклик в испытании L—H с параметрами нагружения, найденными экспериментально (см. раздел 2), с применением разных граничных условий к представительной

ячейке. Коэффициенты рядов Прони для функций жесткости и податливости определили путем аппроксимации результатов функциями, описывающими испытание L—H при конкретных граничных условиях. Времена релаксации (запаздывания), использованные при подгонке, были одинаковыми для всех функций: $q_m = 1, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4$ и 10^5 с.

Использовали трехмерную представительную ячейку длиной 5 мм, шириной 0,2 мм и толщиной 1 мм. Для моделирования использовали трехмерные 20-узловые конечные элементы SOLID186. Конечно-элементную сетку создали, задав 12 разделений/мм. На плоскостях $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и $x_3 = -0,2$ мм задали симметричные граничные условия. Поскольку все поля напряжений и деформаций в анализируемых задачах однородны, не было необходимости анализа сходимости решения в зависимости от плотности сетки. Фактически только один конечный элемент справился бы с данной задачей. Несколько элементов использовали только для проверки правильности применения граничных условий. Любая концентрация напряжений указывала бы на наличие проблемы.

Типы граничных условий и соответствующие подгоночные функции перечислены далее.

А. Одноосная приложенная деформация $\varepsilon_1(t)$ со свободными боковыми границами. Верхняя ($x_2 = 1$ мм) и передняя ($x_3 = 0$) грани объемного элемента свободны от усилий.

Коэффициенты рядов Прони для $E_1(t)$ и $\nu_{12}(t)$ получены из уравнений (9)—(12). Этот случай самопредсказуемого нагружения используют для проверки правильности формулировки и процедуры, применяемых в МКЭ, и оценки точности. Этот случай — самопредсказуемый, поскольку коэффициенты рядов Прони для $E_1(t)$ и $\nu_{12}(t)$ являются экспериментальной входной информацией для определения $G(t)$ и $K(t)$.

На L-шаге $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_0 \frac{t}{t_1}$, $0 < t < t_1$; на H-шаге $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_0$, $t \geq t_1$.

Б. Одноосная приложенная деформация $\varepsilon_1(t)$ и нулевые поперечные перемещения. На верхней грани ($x_2 = 1$ мм) объемного элемента $u_2 = 0$; $u_3 = 0$ на грани $x_3 = 0$. С учетом напряжения, полученного при таком моделировании, коэффициенты рядов Прони для функций жесткости $C_{11}(t)$ и $C_{12}(t)$ определили с помощью подгоночных функций.

На L-шаге $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_0 \frac{t}{t_1}$, $0 < t \leq t_1$,

$$\sigma_i(t) = \varepsilon_0 \left[C_{1i}^0 \frac{t}{t_1} + \frac{1}{t_1} \sum_{m=1}^M C_{1i}^m q_m \left(1 - e^{\left(-\frac{t}{q_m} \right)} \right) \right], \quad i = 1, 2, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \frac{t}{t_1}. \quad (32)$$

На H-шаге $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_0$, $t_1 < t \leq t_1 + t^*$,

$$\sigma_i(t) = \varepsilon_0 \left[C_{li}^0 + \frac{1}{t_1} \sum_{m=1}^M C_{li}^m q_m e^{\left(\frac{-t}{q_m}\right)} \left(e^{\left(\frac{t_1}{q_m}\right)} - 1 \right) \right], \quad i=1,2, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0. \quad (33)$$

В. Одноосная приложенная деформация $\varepsilon_1(t)$ и нулевые поперечные перемещения в плоскости. На поверхности $x_2 = 1$ мм $u_2 = 0$, а на поверхности $x_3 = 0$ усилия отсутствуют. При таком моделировании коэффициенты рядов Прони для функций жесткости $Q_{11}(t)$ и $Q_{12}(t)$ определяли с использованием подгоночных функций.

На L-шаге $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_0 \frac{t}{t_1}$, $0 < t \leq t_1$,

$$\sigma_i(t) = \varepsilon_0 \left[Q_{li}^0 \frac{t}{t_1} + \frac{1}{t_1} \sum_{m=1}^M Q_{li}^m q_m \left(1 - e^{\left(\frac{-t}{q_m}\right)} \right) \right], \quad i=1,2. \quad (34)$$

На H-шаге $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_0$ ($t_1 < t \leq t_1 + t^*$), $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_0$ ($t > t_1$),

$$\sigma_i(t) = \varepsilon_0 \left[Q_{li}^0 + \frac{1}{t_1} \sum_{m=1}^M Q_{li}^m q_m e^{\left(\frac{-t}{q_m}\right)} \left(e^{\left(\frac{t_1}{q_m}\right)} - 1 \right) \right], \quad i=1,2. \quad (35)$$

Г. Одноосное приложенное напряжение $\sigma_1(t)$ и свободные от усилий боковые поверхности. Значение σ_0 равно 12,12 МПа. Поверхности $x_2 = 1$ мм и $x_3 = 0$ свободны от усилий.

При таком моделировании коэффициенты рядов Прони для функций податливости $S_{11}(t)$ и $S_{12}(t)$ определили с использованием подгоночных функций.

На L-шаге $\sigma_1(t) = \sigma_0 \frac{t}{t_1}$, $0 < t \leq t_1$,

$$\varepsilon_i(t) = \sigma_0 \left[S_{li}^0 \frac{t}{t_1} + \frac{1}{t_1} \sum_{m=1}^M S_{li}^m q_m \left(1 - e^{\left(\frac{-t}{q_m}\right)} \right) \right], \quad i=1,2. \quad (36)$$

На H-шаге $\sigma_1(t) = \sigma_0$, $t_1 < t \leq t_1 + t^*$,

$$\varepsilon_i(t) = \sigma_0 \left[S_{li}^0 + \frac{1}{t_1} \sum_{m=1}^M S_{li}^m q_m e^{\left(\frac{-t}{q_m}\right)} \left(e^{\left(\frac{t_1}{q_m}\right)} - 1 \right) \right], \quad i=1,2. \quad (37)$$

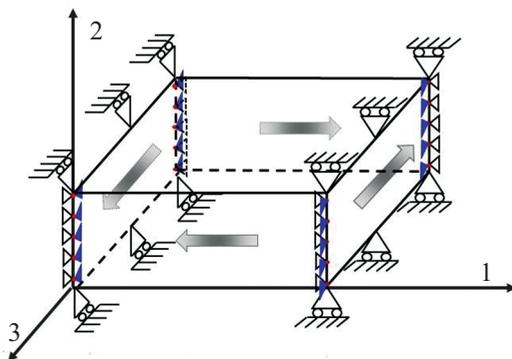


Рис. 3. Граничные условия, используемые при нагружение чистым сдвигом.

Д. Сдвиговое нагружение. Моделирование сдвигового нагружения в плоскости выполнено на ПЭО размерами $5 \times 2 \times 1$ мм. Конечно-элементную сетку объема создали, задав шесть разделений/мм. Задание граничных условий иллюстрируют данные рис. 3 [20]: точки на поверхности $x_3 = -w$ имеют одинаковое перемещение в направлениях x_3 (синие треугольники) и x_2 (кружки), как и соответствующие точки на поверхности $x_3 = 0$. Аналогично точки на поверхностях $x_1 = 0$ и $x_1 = L$ имеют одинаковое перемещение в направлениях x_1 (пустые треугольники) и x_2 (кружки). Верхняя поверхность свободна от усилий. Условия симметрии приложены к нижней поверхности элемента.

Приложенные касательные перемещения соответствуют деформациям сдвига $\gamma(t) = \gamma_0 \frac{t}{t_1}$, $0 < t \leq t_1$, $\gamma(t) = \gamma_0$, $t > t_1$. Значение γ_0 равно 0,02.

При таком моделировании коэффициенты ряда Прони для функции релаксации $C_{66}(t) = G_{12}(t)$ определили с использованием подгоночных функций.

На L-шаге $\gamma(t) = \gamma_0 \frac{t}{t_1}$, $0 < t \leq t_1$,

$$\sigma_{12}(t) = \gamma_0 \left[C_{66}^0 \frac{t}{t_1} + \frac{1}{t_1} \sum_{m=1}^M C_{66}^m q_m \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{q_m}\right)} \right) \right], \quad \gamma_{12} = \gamma_0 \frac{t}{t_1}. \quad (38)$$

На H-шаге $\gamma(t) = \gamma_0$, $t_1 < t \leq t_1 + t^*$,

$$\sigma_{12}(t) = \gamma_0 \left[C_{66}^0 + \frac{1}{t_1} \sum_{m=1}^M C_{66}^m q_m e^{-\left(\frac{t}{q_m}\right)} \left(e^{\left(\frac{t_1}{q_m}\right)} - 1 \right) \right], \quad \gamma_{12} = \gamma_0. \quad (39)$$

Этот случай также является самопредсказуемым и используется для проверки процедуры МКЭ.

4. Аналитические выражения для вязкоупругих функций, полученные с помощью преобразования Лапласа

4.1. Вязкоупругие уравнения состояния в области Лапласа. Выполнение преобразования Лапласа уравнений (16)—(24) (p — параметр Лапласа) приводит к соотношениям

$$\bar{\sigma}_i = p \sum_{j=1}^3 \bar{C}_{ij} \bar{\varepsilon}_j, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad \bar{\sigma}_k = p \bar{C}_{kk} \bar{\varepsilon}_k, \quad k = 4, 5, 6, \quad (40)$$

$$\bar{C}_{ij}(p) = \frac{C_{ij}^0}{p} + \sum_{m=1}^{M_C} \frac{C_{ij}^m}{p + \frac{1}{r_m}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, \quad (41)$$

$$\bar{\varepsilon}_i = p \sum_{j=1}^3 \bar{S}_{ij} \bar{\sigma}_j, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad \bar{\varepsilon}_k = p \bar{S}_{kk} \bar{\sigma}_k, \quad k = 4, 5, 6, \quad (42)$$

$$\bar{S}_{ij}(p) = \frac{S_{ij}^0}{p} + \sum_{m=1}^{M_S} \frac{S_{ij}^m}{p + \frac{1}{\tau_m}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, \quad (43)$$

$$\bar{\sigma}_i = p \sum_{j=1}^2 \bar{Q}_{ij} \bar{\varepsilon}_j, \quad i, j = 1, 2; \quad \bar{\sigma}_6 = p \bar{Q}_{66} \bar{\varepsilon}_6, \quad (44)$$

$$\bar{Q}_{ij}(p) = \frac{Q_{ij}^0}{p} + \sum_{m=1}^{M_Q} \frac{Q_{ij}^m}{p + \frac{1}{\theta_m}}, \quad i, j = 1, 2, 6. \quad (45)$$

4.2. Выражения для функций податливости изотропных материалов. Выражения для функций вязкоупругой податливости $\bar{S}_{ij}(p)$, $i, j = 1, 2$, получили при одноосных испытаниях с приложением деформации $\varepsilon_1(t)$. Их можно выразить через коэффициенты рядов Прони и времена релаксации $E_1(t)$ и $\nu_{12}(t)$. Изображения по Лапласу уравнений (1)—(4), соответствующие нагружению только с компонентой приложенной деформации $\bar{\varepsilon}_1$, равны

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{E}_1 p \bar{\varepsilon}_1, \quad \bar{E}_1 = \frac{E_1^0}{p} + \sum_{m=1}^M \frac{E_1^m}{p + \frac{1}{q_m}}, \quad (46)$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = -\bar{\nu}_{12} p \bar{\varepsilon}_1, \quad \bar{\nu}_{12} = \frac{\nu_{12}^0}{p} + \sum_{m=1}^M \frac{\nu_{12}^m}{p + \frac{1}{q_m}}. \quad (47)$$

При том же нагружении, только с одной компонентой, напряжения выражения (42) дают

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{S}_{11} p \bar{\sigma}_1, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \bar{S}_{12} p \bar{\sigma}_1. \quad (48)$$

Из уравнений (46)—(48) следуют известные выражения, связывающие изображения функций податливости с $\bar{E}_1(p)$ и $\bar{v}_{12}(p)$:

$$\bar{S}_{11} = \frac{1}{p^2} \frac{1}{\bar{E}_1}, \quad \bar{S}_{12} = -\frac{1}{p} \frac{\bar{v}_{12}}{\bar{E}_1}. \quad (49)$$

Сначала выполнили некоторые формальные перестановки в соотношении для \bar{E}_1 , переписав соответствующее уравнение (46) в виде

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 = & \left[E_1^0 \left(p + \frac{1}{q_1} \right) \dots \left(p + \frac{1}{q_M} \right) + E_1^1 p \left(p + \frac{1}{q_2} \right) \left(p + \frac{1}{q_3} \right) \dots \left(p + \frac{1}{q_M} \right) + \right. \\ & \left. + E_1^M p \left(p + \frac{1}{q_1} \right) \dots \left(p + \frac{1}{q_{M-1}} \right) \right] \times \left[p \left(p + \frac{1}{q_1} \right) \left(p + \frac{1}{q_2} \right) \left(p + \frac{1}{q_3} \right) \dots \left(p + \frac{1}{q_M} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (50)$$

Знаменатель в уравнении (50) можно записать в виде $p \prod_{m=1}^M \left(p + \frac{1}{q_m} \right)$.
Введя функцию

$$S_k^q(p) = \prod_{i \neq k}^M (p + x_i), \quad \text{где } x_i = 0; \frac{1}{q_1}; \frac{1}{q_2}; \frac{1}{q_3}; \dots; \frac{1}{q_M}, \quad (51)$$

уравнение (50) можно записать, как

$$\bar{E}_1 = \frac{\sum_{k=0}^M E_1^k S_k^q(p)}{p \prod_{m=1}^M \left(p + \frac{1}{q_m} \right)}. \quad (52)$$

Аналогично для $\bar{v}_{12}(p)$

$$\bar{v}_{12} = \frac{\sum_{k=0}^M v_{12}^k S_k^q(p)}{p \prod_{m=1}^M \left(p + \frac{1}{q_m} \right)}. \quad (53)$$

Подставив уравнения (52) и (53) в (49), получим

$$\bar{S}_{11} = \frac{1}{p} \frac{\prod_{m=1}^M \left(p + \frac{1}{q_m} \right)}{\sum_{k=0}^M E_1^k S_k^q(p)}, \quad \bar{S}_{12} = -\frac{1}{p} \frac{\sum_{k=0}^M v_{12}^k S_k^q(p)}{\sum_{k=0}^M E_1^k S_k^q(p)}. \quad (54)$$

Согласно (51) знаменатель в уравнении (54) является полиномом степени $M + 1$, у которого, как ожидали, $M + 1$ корней будут неположительными действительными числами. Их можно вычислить численно:

$$p_i = -\frac{1}{\tau_i}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad \text{и} \quad p_0 = 0. \quad (55)$$

Числители рациональных функций в уравнении (54) — полиномы M -й степени. Следовательно, эти функции можно представить в виде суммы простых дробей, используя известное правило разложения на простые дроби:

$$\bar{S}_{11} = \frac{1}{E_1(0)} \left(\frac{\tilde{S}_{11}^0}{p} + \frac{\tilde{S}_{11}^1}{p + \frac{1}{\tau_1}} + \frac{\tilde{S}_{11}^2}{p + \frac{1}{\tau_2}} + \dots + \frac{\tilde{S}_{11}^M}{p + \frac{1}{\tau_M}} \right), \quad (56)$$

$$\bar{S}_{12} = -\frac{1}{E_1(0)} \left(\frac{\tilde{S}_{12}^0}{p} + \frac{\tilde{S}_{12}^1}{p + \frac{1}{\tau_1}} + \frac{\tilde{S}_{12}^2}{p + \frac{1}{\tau_2}} + \dots + \frac{\tilde{S}_{12}^M}{p + \frac{1}{\tau_M}} \right).$$

В уравнении (56) $E_1(0)$ — это мгновенный отклик, заданный уравнением (5). Обратное преобразование уравнения (56) во временной области не вызывает затруднений. Результатом является сумма экспонент (ряд Прони для податливостей).

Предположение о том, что корни будут неположительными действительными числами, основано на результате обратного преобразования. Комплексные корни привели бы к колебательному поведению, а положительные — к экспоненциально возрастающему отклику. Все выполненные численные расчеты корней подтвердили это предположение.

Коэффициенты \tilde{S}_{11}^i и \tilde{S}_{12}^i , $i = 0, 1, \dots, M$ можно определить, потребовав, чтобы уравнения (54) и (56) были эквивалентны в $M + 1$ произвольно выбранной точке. Это привело бы к необходимости решения системы из $M + 1$ линейного алгебраического уравнения для каждого набора констант. Такая задача легко решается численно. Вместо этого предлагаем использовать еще более эффективную процедуру, приводящую к следующим аналитическим выражениям для коэффициентов.

Сначала определяем новую функцию, а именно:

$$S_k^\tau(p) = \prod_{i \neq k}^M (p + y_i), \quad \text{где} \quad y_i = 0, \frac{1}{\tau_1}, \frac{1}{\tau_2}, \frac{1}{\tau_3}, \dots, \frac{1}{\tau_M}. \quad (57)$$

Эта функция аналогична функции $S_k^q(p)$, определенной формулой (51), с той лишь разницей, что вместо величины q_i используют величину τ_i .

Используя $S_k^\tau(p)$, условие равенства уравнений (56) и (54) можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^M \tilde{S}_{11}^i S_i^\tau(p) = \prod_{m=1}^M \left(p + \frac{1}{q_m} \right) \text{ и } \sum_{i=0}^M \tilde{S}_{12}^i S_i^\tau(p) = \sum_{m=0}^M v_{12}^m S_m^q(p). \quad (58)$$

Используя $p = p_k = -\frac{1}{\tau_k}$ в уравнении (58), получим, что

$$\tilde{S}_{11}^k S_k^\tau\left(-\frac{1}{\tau_k}\right) = \prod_{m=1}^M \left(-\frac{1}{\tau_k} + \frac{1}{q_m} \right), \quad \tilde{S}_{12}^k S_k^\tau\left(-\frac{1}{\tau_k}\right) = \sum_{m=0}^M v_{12}^m S_m^q\left(-\frac{1}{\tau_k}\right) \quad (59)$$

или

$$\tilde{S}_{11}^k = \frac{\prod_{m=1}^M \left(-\frac{1}{\tau_k} + \frac{1}{q_m} \right)}{S_k^\tau\left(-\frac{1}{\tau_k}\right)}, \quad \tilde{S}_{12}^k = \frac{\sum_{m=0}^M v_{12}^m S_m^q\left(-\frac{1}{\tau_k}\right)}{S_k^\tau\left(-\frac{1}{\tau_k}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (60)$$

В результате обратного преобразования получим, что

$$S_{ij}(t) = S_{ij}^0 + \sum_{m=1}^M S_{ij}^m e^{\left(-\frac{t}{\tau_m}\right)}, \quad \text{где } S_{ij}^k = \frac{\tilde{S}_{ij}^k}{E_1(0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, M. \quad (61)$$

Вывод выражений для функций релаксации $C_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, приведен в Приложении 1, для $C_{66}(t) = Q_{66}(t) = G_{12}(t)$ — в Приложении 2, а для $Q_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, — в Приложении 3.

5. Квазиупругие выражения для вязкоупругих функций

В квазиупругом приближении значение любой вязкоупругой функции ползучести или релаксации в произвольный момент времени t рассчитываем с использованием упругих соотношений и известных значений $E_1(t)$ и $v_{12}(t)$ в этот момент. Точность этого простого метода оценим в разделе 6.

Зависимость вязкоупругих податливостей и функций релаксации от времени рассчитываем по формулам

$$S_{11}(t) = \frac{1}{E_1(t)}, \quad S_{12}(t) = -\frac{v_{12}(t)}{E_1(t)}, \quad (62)$$

$$C_{11}(t) = \frac{E_1(t)(1 - v_{12}(t))}{(1 + v_{12}(t))(1 - 2v_{12}(t))}, \quad C_{12}(t) = \frac{E_1(t)v_{12}(t)}{(1 + v_{12}(t))(1 - 2v_{12}(t))},$$

$$C_{66}(t) = G_{12}(t) = \frac{E_1(t)}{2(1 + v_{12}(t))}. \quad (63)$$

Компоненты $Q_{ij}(t)$ двухмерной вязкоупругой матрицы жесткости в классической теории слоистых композитов вычисляем по формулам

$$Q_{11}(t) = \frac{E_1(t)}{1 - \nu_{12}(t)\nu_{12}(t)}, \quad Q_{12}(t) = \frac{\nu_{12}(t)E_1(t)}{1 - \nu_{12}(t)\nu_{12}(t)}, \quad Q_{66}(t) = G_{12}(t). \quad (64)$$

6. Численные результаты и анализ

В аналитическом методе, основанном на преобразованиях Лапласа, использовали коэффициенты рядов Прони E_1^m и ν_{12}^m и времена релаксации q_m , приведенные в табл. 1, для нахождения особых точек в выражениях, полученных в разделе 4 для вязкоупругих функций податливости и жесткости. Эти особые точки (корни многочленов) являются временами релаксации и запаздывания для вязкоупругих функций. Полиномиальные функции $S_{ij}(t)$ и $G_{12}(t)$ имеют M корней. Значения вычисленных коэффициентов рядов Прони (для S_{ij}^k следуют из уравнений (60) и (61), для G_{12}^k — из уравнения (A2.5)) представлены в табл. 2.

Следует отметить, что значения времен релаксации, приведенные в табл. 2, довольно близки к использованным для описания результатов испытаний для $E_1(t)$ и $\nu_{12}(t)$. Несмотря на сходство, для $S_{ij}(t)$ и $G_{12}(t)$ они не одинаковы. Перечисленные коэффициенты ряда Прони соответствуют этим временам релаксации, а не таковым для $E_1(t)$.

Уравнения (A1.3)—(A1.4) для $C_{ij}(t)$ и (A3.3)—(A3.4) для $Q_{ij}(t)$ в области Лапласа имеют в знаменателе произведение двух полиномов, поэтому число особых точек равно $2M$. Времена релаксации и соответствующие коэффициенты рядов Прони приведены в табл. 3.

В последующих таблицах и рисунках при сравнении разных методов результаты, соответствующие представленному аналитическому методу, имеют индекс “an”. Моделирование с использованием квазиупругого метода обозначено, как “Q—E”. Результаты моделирования при

Табл. 2

Коэффициенты рядов Прони для $S_{ij}(t)$ и $G_{12}(t)$

| $\tau_m, \text{с}$ | S_{11}^k | S_{12}^k | $\rho_m, \text{с}$ | $G_{12}^k, \text{МПа}$ |
|--------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------------|------------------------|
| | 1/МПа | | | |
| — | $S_{11}^0 = 5,8819 \cdot 10^{-4}$ | $S_{12}^0 = 2,2238 \cdot 10^{-4}$ | — | $G_{12}^0 = 616,8370$ |
| 10,53751 | $-2,2521 \cdot 10^{-5}$ | $-1,1260 \cdot 10^{-5}$ | 9,93476 | 51,3425 |
| 105,4144 | $-2,3996 \cdot 10^{-5}$ | $-1,1998 \cdot 10^{-5}$ | 99,3834 | 48,1800 |
| 1063,796 | $-2,9542 \cdot 10^{-5}$ | $-1,4771 \cdot 10^{-5}$ | 993,156 | 53,1870 |
| 11799,41 | $-9,0278 \cdot 10^{-5}$ | $-4,5140 \cdot 10^{-5}$ | 9842,13 | 121,6189 |

Табл. 3

Коэффициенты рядов Прони для $C_{ij}(t)$ и $Q_{ij}(t)$ (МПа)

| r_m, c | C_{11}^k | C_{12}^k | θ_m, c | Q_{11}^k | Q_{12}^k |
|----------|-----------------------|----------------------|---------------|-----------------------|------------|
| | $C_{11}^0 = 3146,448$ | $C_{12}^0 = 912,781$ | — | $Q_{11}^0 = 1983,646$ | — |
| 9,934755 | 68,4568 | -34,228 | 9,934755 | 51,34284 | -51,3425 |
| 99,38337 | 64,2401 | -32,12 | 99,38337 | 48,18034 | -48,18 |
| 993,1562 | 70,9173 | -35,458 | 993,1563 | 53,1871 | -53,187 |
| 9842,132 | 162,1638 | -81,080 | 9842,132 | 121,6229 | -121,617 |
| 10,53751 | 0,00013 | 0,000128 | 10,13177 | 68,45283 | 68,45306 |
| 105,4145 | 0,00019 | 0,000193 | 101,2712 | 66,97977 | 66,98003 |
| 1063,798 | 0,00236 | 0,002356 | 1014,373 | 76,55477 | 76,55497 |
| 11799,55 | 0,01151 | 0,011512 | 10350,69 | 190,2292 | 190,2304 |

$\nu_{12}(0) = 0,05$ и $0,33$ представлены на рис. 4—7. Данные табл. 3 использовали для вычисления зависимости вязкоупругих функций от времени.

Следует отметить, что $S_{11}(t)$ не зависит от выбранного значения $\nu_{12}(0)$, тогда как $S_{12}(t)$ и другие функции зависят.

Вязкоупругое трехмерное моделирование МКЭ испытаний L—H выполнили, используя коэффициенты ряда Прони для $G_{12}(t)$, полученные с использованием выражений, приведенных в Приложении 2, и предположения $K = K(0)$. Коэффициенты ряда Прони определили путем подгонки расчетных откликов, следуя описанию, данному в разделе 3. Далее эти результаты представлены с индексом FEM. Коэффициенты рядов Прони использовали для моделирования вязкоупругого отклика при нагружении согласно функции Хевисайда, создавая кривые, подобные

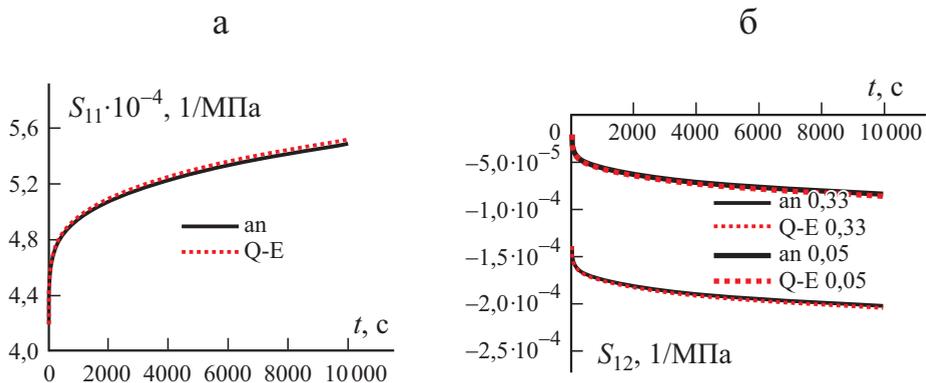


Рис. 4. Кривые податливости при ползучести $S_{ij}(t)$: а — S_{11} ; б — S_{12} . Сплошные линии соответствуют расчету предложенным аналитическим методом (“an”), штриховые — квазиупругим методом (“Q—E”). Цифры 0,33 и 0,05 — значения $\nu_{12}(0)$.

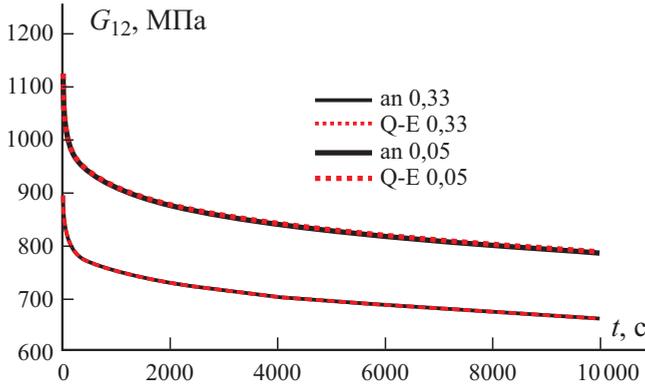


Рис. 5. Сдвиговая функция релаксации $G_{12}(t)$. Обозначения те же, что на рис. 4.

представленным на рис. 4—7. Полученные кривые визуально неотличимы от аналитических, поэтому на рисунках не представлены. Вместо этого ввели средние меры расхождений D между аналитическими и МКЭ кривыми, а именно:

$$D_{FEM}^f = \frac{1}{N} \sum_{abs} \left[\frac{f_{FEM}(t_k) - f_{an}(t_k)}{f_{an}(t_k)} \right], \tag{65}$$

$$D_{Q-E}^f = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{abs} \left[\frac{f_{Q-E}(t_k) - f_{an}(t_k)}{f_{an}(t_k)} \right], \quad t_k = 1, 2, \dots, s.$$

В уравнении (65) D_{FEM}^f — усредненное по времени расхождение соответствующей вязкоупругой функции f_{FEM} и аналитического реше-

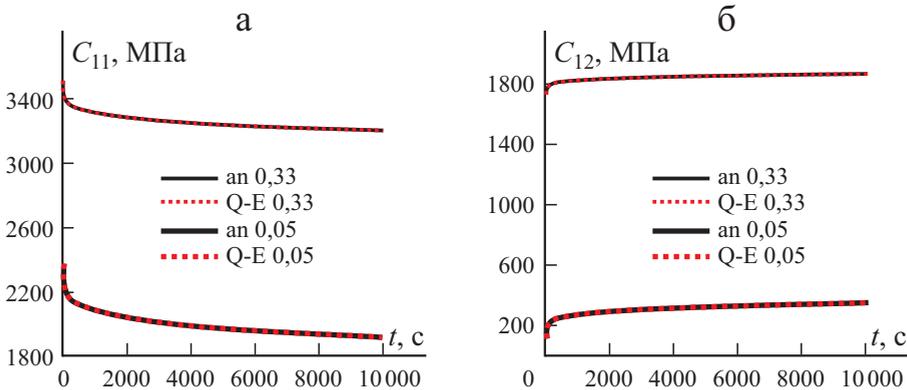


Рис. 6. Функции релаксации $C_{ij}(t)$. Обозначения те же, что на рис. 4.

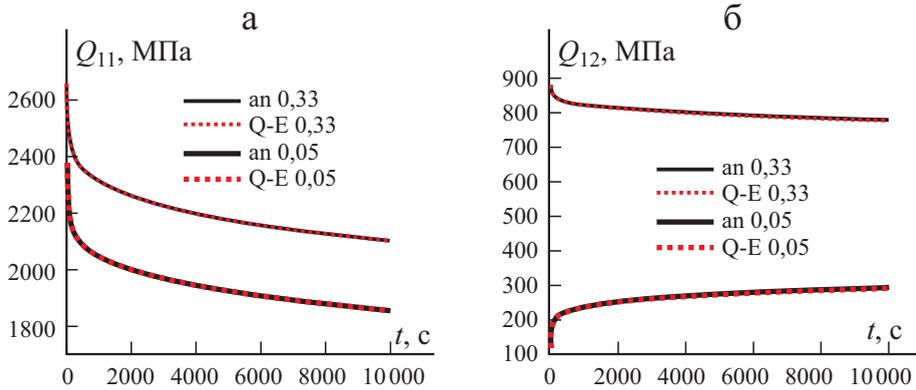


Рис. 7. Функции релаксации $Q_{ij}(t)$. Обозначения те же, что на рис. 4.

ния f_{an} ; D_{Q-E}^f — усредненное по времени расхождение между квазиупругим и аналитическим решениями. Кроме этих параметров в табл. 4 также представлены максимальные значения относительного расхождения err_{max} между квазиупругим и аналитическим решениями.

Для функции $E_1(t)$ величина D_{FEM}^f — расхождение, рассчитанное с помощью уравнения (3) с использованием коэффициентов рядов Прони, полученных путем подгонки результатов эксперимента L—H в “аналитическом” решении (а) и подгонки результатов МКЭ эксперимента L—H (б). Для $v_{12}(t)$ коэффициенты ряда Прони для их использования в “аналитическом” решении определили с помощью уравнения (15). Применив для входных данных $E_1(t)$ и $v_{12}(t)$ квазиупругий метод, получили, что $D_{Q-E}^f \equiv 0$ и $err_{max} \equiv 0$. Эти расхождения крайне малы, и некоторые заметные различия возникли только для квазиупругого метода при вычислении $S_{11}(t)$ и $S_{12}(t)$ при больших значениях t (см. рис. 4).

Табл. 4

Усредненные по времени расхождения значений вязкоупругих функций D_{FEM}^f , рассчитанных МКЭ и аналитическим решением, и D_{Q-E}^f , рассчитанных квазиупругим и аналитическим решениями, при $v_{12}(0) = 0,33$

| % | $E_1(t)$ | $v_{12}(t)$ | $G_{12}(t)$ | S_{11} | S_{12} | C_{11} | C_{12} | Q_{11} | Q_{12} |
|-----------------|----------|-------------|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| D_{FEM}^f (%) | 0,0299 | 0,0407 | 0,0385 | 0,030 | 0,041 | 0,0098 | 0,0090 | 0,0259 | 0,0151 |
| D_{Q-E}^f | — | — | 0,036 | 0,302 | 0,410 | 0,0105 | 0,0085 | 0,0253 | 0,132 |
| err_{max} (%) | — | — | 0,0531 | 0,443 | 0,600 | 0,0158 | 0,0150 | 0,0393 | 0,187 |

Табл. 5

Коэффициенты рядов Прони для $S_{ij}(t)$ (1/МПа) при $v_{12}(0) = 0,33$

| τ_m, c | S_{11}^k an | S_{11}^k МКЭ | S_{11}^k Q-E | S_{12}^k an | S_{12}^k МКЭ | S_{12}^k Q-E |
|-------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| | $S_{11}^0=5,798 \cdot 10^4$ | $S_{11}^0=5,958 \cdot 10^4$ | $S_{11}^0=6,073 \cdot 10^4$ | $S_{12}^0=-2,18 \cdot 10^4$ | $S_{12}^0=-226 \cdot 10^4$ | $S_{12}^0=-220 \cdot 10^4$ |
| 1 | 0,000 | $-4,506 \cdot 10^{-6}$ | 0,000 | 0,000 | $2,250 \cdot 10^{-6}$ | 0,000 |
| 10^1 | $-2,204 \cdot 10^{-5}$ | $-2,174 \cdot 10^{-5}$ | $-2,269 \cdot 10^{-5}$ | $1,102 \cdot 10^{-5}$ | $1,087 \cdot 10^{-5}$ | $1,127 \cdot 10^{-5}$ |
| 10^2 | $-2,425 \cdot 10^{-5}$ | $-2,416 \cdot 10^{-5}$ | $-2,396 \cdot 10^{-5}$ | $1,213 \cdot 10^{-5}$ | $1,208 \cdot 10^{-5}$ | $1,207 \cdot 10^{-5}$ |
| 10^3 | $-2,817 \cdot 10^{-5}$ | $-2,842 \cdot 10^{-5}$ | $-2,892 \cdot 10^{-5}$ | $1,408 \cdot 10^{-5}$ | $1,421 \cdot 10^{-5}$ | $1,427 \cdot 10^{-5}$ |
| 10^4 | $-8,370 \cdot 10^{-5}$ | $-8,064 \cdot 10^{-5}$ | $-8,193 \cdot 10^{-5}$ | $4,185 \cdot 10^{-5}$ | $4,032 \cdot 10^{-5}$ | $4,311 \cdot 10^{-5}$ |
| 10^5 | 0,000 | $-1,862 \cdot 10^{-5}$ | $-2,826 \cdot 10^{-5}$ | 0,000 | $9,310 \cdot 10^{-6}$ | 0,000 |

Квазиупругий подход систематически несколько завышал изменение функций податливости, но полученные значения являются приемлемыми.

Моделирование МКЭ для нахождения $E_1(t)$, $v_{12}(t)$ и $G_{12}(t)$ является самопредсказуемым, поскольку $E_1(t)$ и $v_{12}(t)$ — входные данные для нахождения $G_{12}(t)$, использованные при моделировании МКЭ. Поэтому соответствующие результаты, приведенные в табл. 4, можно использовать для оценки адекватности процедур МКЭ и точности расчетов.

Коэффициенты рядов Прони, приведенные в табл. 2 и 3, нельзя сравнивать с полученными посредством МКЭ, поскольку они соответствуют разным временам релаксации/запаздывания. Для сравнения с точки зрения коэффициентов рядов Прони данные для вязкоупругих функций, полученные на основе аналитической процедуры и квазиупругого подхода, аппроксимировали рядами Прони с использованием тех же времен релаксации/запаздывания, что и при подгонке данных эксперимента L—H при моделировании МКЭ. Сравнение можно выполнить на основе данных табл. 5—7.

Значения коэффициентов, определяемых с помощью аналитических выражений, МКЭ и квазиупругого метода, довольно близки. В некоторых

Табл. 6

Коэффициенты рядов Прони для $C_{ij}(t)$ (МПа) при $v_{12}(0) = 0,33$

| τ_m, c | C_{11}^k an, | C_{11}^k МКЭ | C_{11}^k Q-E | C_{12}^k an | C_{12}^k МКЭ | C_{12}^k Q-E |
|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| | $C_{11}^0=3145,05$ | $C_{11}^0=3144,63$ | $C_{11}^0=3145,63$ | $C_{12}^0=1913,48$ | $C_{12}^0=1913,71$ | $C_{12}^0=1913,21$ |
| 1 | 0,35 | 0,00 | 0,36 | -0,18 | 0,000 | -0,18 |
| 10^1 | 68,51 | 69,19 | 68,34 | -34,26 | -34,60 | -34,17 |
| 10^2 | 64,18 | 64,13 | 64,23 | -32,09 | 32,07 | -32,12 |
| 10^3 | 71,19 | 71,20 | 71,07 | -35,59 | -35,60 | -35,54 |
| 10^4 | 163,16 | 162,57 | 162,79 | -81,56 | -81,29 | -81,39 |
| 10^5 | 0,0 | 0,51 | 0,00 | 0,00 | -0,26 | 0,00 |

Табл. 7

Коэффициенты рядов Прони для $Q_{ij}(t)$ (МПа) при $v_{12}(0) = 0,33$

| τ_m, c | Q_{11}^k an | Q_{11}^k МКЭ | Q_{11}^k Q-E | Q_{12}^k an | Q_{12}^k МКЭ | Q_{12}^k Q-E |
|-------------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| | $Q_{11}^0 = 1986,19$ | $Q_{11}^0 = 1983,22$ | $Q_{11}^0 = 1981,37$ | $Q_{12}^0 = 754,61$ | $Q_{12}^0 = 752,30$ | $Q_{12}^0 = 748,93$ |
| 1 | 0,00 | 3,54 | 0,00 | 0,00 | 3,58 | 0,00 |
| 10^1 | 119,62 | 120,29 | 119,87 | 16,78 | 16,50 | 17,28 |
| 10^2 | 115,25 | 115,20 | 115,16 | 18,99 | 18,99 | 18,83 |
| 10^3 | 129,28 | 129,33 | 129,50 | 22,50 | 22,54 | 22,89 |
| 10^4 | 309,97 | 308,51 | 309,99 | 65,26 | 64,65 | 65,81 |
| 10^5 | 0,00 | 3,46 | 4,45 | 0,00 | 2,69 | 4,48 |

случаях имеет место расхождение, не приводящее к заметным различиям в смысле их нестационарного поведения. Причина заключается в том, что вязкоупругий отклик в определенный момент времени зависит не только от ближайшего к нему времени релаксации, но и от “соседних” времен релаксации и коэффициентов рядов Прони. Это может обусловить различия коэффициентов рядов Прони, даже если подогнать весьма похожее поведение во времени.

Заключение

Определение характеристик вязкоупругих полимеров обычно выполняют с помощью одноосных испытаний, в которых чаще всего измеряют отклик в осевом направлении. Только в нескольких случаях измеряют также поперечный отклик. Однако при численном моделировании отклика композитов и сложных композитных конструкций в качестве входных данных необходимы другие вязкоупругие функции, такие как зависящие от времени матрицы податливости при ползучести и жесткости при релаксации.

В настоящей работе представлены аналитические выражения для расчета всей совокупности вязкоупругих функций для изотропных материалов, выведенные с использованием решений в области Лапласа с точным обратным преобразованием во временную область, что возможно, если вязкоупругие функции представлены в экспонентах рядов Прони. Времена релаксации/запаздывания (особые точки в области Лапласа) нашли как корни многочленов.

Используя в качестве входных данных рассчитанную функцию релаксации сдвига и предположение о том, что объемный модуль не изменяется со временем, вязкоупругий отклик смоделировали с помощью программного обеспечения ANSYS. Изменяя граничные условия для трехмерной конечно-элементной модели, получили временные зависимости для всех трех- и двухмерных вязкоупругих функций. В высшей степени хорошее

численное соответствие между аналитическими и конечно-элементными результатами — доказательство отсутствия ошибок в достаточно сложных аналитических выражениях.

В работе оценили точность очень простой процедуры, называемой квазиупругим методом. В этом методе значение функции релаксации в определенный момент времени вычисляли с помощью упругих выражений, в качестве входных данных использовали значения требуемых нестационарных параметров в данный момент времени. Показали, что этот метод, будучи теоретически некорректным, предоставляет достаточно точные значения вязкоупругих функций и может быть предложен в качестве практического инструмента.

Благодарность. Авторы благодарны фонду ERDF в рамках активности 1.1.1.2 “Помощь в проведении постдокторских исследований” для конкретной цели оперативной программы “Развитие и занятость” (проект № 1.1.1.2/VIAA/4/20/641), координации совершенствования высшего образования (CAPES/Бразилия) и Шведскому фонду международного сотрудничества в области исследований и высшего образования (STINT).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khokhlov A. V.* Creep and long-term strength of a laminated thick-walled tube of nonlinear viscoelastic materials loaded by external and internal pressures // *Mech. Compos. Mater.* — 2022. — Vol. 57, No. 6. — P. 731—748.
2. *Saseendran S., Wysocki M., and Varna J.* Evolution of viscoelastic behavior of a curing LY5052 epoxy resin in the glassy state // *Adv. Manufacturing: Polym. Compos. Sci.* — 2016. — Vol. 2, No. 2. — P. 74—82.
3. *Pupure L., Joffe R., and Varna J.* Methodology for macro-modeling of bio-based composites with inelastic constituents // *Compos. Sci. Technol.* — 2018. — Vol. 163. — P. 41—48.
4. *Vlasov D. D. and Polilov A. N.* The possibility of creep prediction of viscoelastic polymer composites using frequency dependences of complex modulus components // *Mech. Compos. Mater.* — 2022. — Vol. 58, No. 1. — P. 31—42.
5. *Saseendran S., Berglund D., and Varna J.* Viscoelastic model with complex rheological behavior (VisCoR): incremental formulation // *Adv. Manufacturing: Polym. Compos. Sci.* — 2020. — Vol. 6, No. 1. — P. 1—16.
6. *Kablov E. N. and Startsev V. O.* The influence of internal stresses on the aging of polymer composite materials: a review // *Mech. Compos. Mater.* — 2021. — Vol. 57, No. 5. — P. 565—576.
7. ANSYS 2019, R3—Structural Analysis Guide, www.ansyshelp.ansys.com
8. *Lee E. H.* Stress analysis in viscoelastic bodies // *Q. Appl. Math.* — 1955. — Vol. 13, No. 2. — P. 183—191.
9. *Schapery R. A.* Stress analysis of viscoelastic composite materials // *J. Compos. Mater.* — 1967. — Vol. 1. — P. 228—267.
10. *Hirse Korn M., Marcin L., and Godon T.* Multi-scale modeling of the viscoelastic behavior of 3D woven composites // *Composites: Part A.* — 2028. — Vol. 112. — P. 539—548.

11. *Levesque M., Gilchrist M. D., Bouleau N., Derrien K. and Baptiste D.* Numerical inversion of the Laplace-Carson transform applied to homogenization of randomly reinforced linear viscoelastic media // *Computational Mech.* — 2007. — Vol. 40. — P. 771—789.
12. *Beurthey S. and Zaoui A.* Structural morphology and relaxation spectra of viscoelastic heterogeneous materials // *Eur. J. Mech., A/Solids.* — 2000. — Vol. 19. — P. 1—16.
13. *Rabotnov Yu. N.* Elements of Hereditary Solid Mechanics. — Moscow: Mir Publishers, 1980.
14. *Nunes S. G., Saseendran S., Joffe R., Amico S. C., Fernberg P. and Varna J.* On temperature-related shift factors and master curves in viscoelastic constitutive models for thermoset polymers // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 56. No. 5. P. 573—590.
15. *Turi E. A.* Thermal analysis in polymer characterization // *Eastern Analytical Symp.* — N. Y. City, Heyden, 1981.
16. *Svanberg J. M. and Holmberg J. A.* Prediction of shape distortions Part I. FE-implementation of a path dependent constitutive model // *Composites: Part A.* — 2004. — Vol. 35, No. 6. — P. 711—721.
17. *Bolasodun B. O., Rufai O., Nesbitt A. and Day R. J.* Comparison of the isothermal cure kinetics of araldite LY 5052/4 4'DDS epoxy system using a differential scanning calorimetry and a microwave heated calorimeter // *Int. J. Mater. Eng.* — 2014. — Vol. 4. — P. 148—165.
18. *Wilson E. L., Taylor R. L., Doherty W. P. and Ghaboussi J.* Incompatible displacement models // *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics* / Eds. S. J. Fenves, et al. — Academic Press, 1973. — P. 43—57.
19. *Simo J. C.* On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects // *Computer Methods in Appl. Mech. Eng.* — 1987. — Vol. 60, No. 2. — P. 153—173.
20. *Al-Ramahi N. J., Joffe R., and Varna J.* Investigation of end and edge effects on results of numerical simulation of single lap adhesive joint with non-linear materials // *Int. J. Adhes. Adhes.* — 2018. — Vol. 87. — P. 191—204.

Поступила в редакцию 10.06.2022

Окончательный вариант поступил 10.08.2022

Received June 10, 2022 (Aug. 10, 2022)

Приложение 1. Функции релаксации $C_{11}(t)$ и $C_{12}(t)$

В области Лапласа соотношения между функциями податливости \bar{S}_{ij} и функциями релаксации \bar{C}_{ij} , $i, j = 1, 2$, для изотропного материала можно получить из уравнений (40) и (42):

$$\bar{C}_{11} = \bar{C}_{22} = \bar{C}_{33} = \frac{1}{p^2} \frac{\bar{S}_{11} + \bar{S}_{12}}{(\bar{S}_{11} - \bar{S}_{12})(\bar{S}_{11} + 2\bar{S}_{12})}, \quad (\text{A1.1})$$

$$\bar{C}_{12} = \bar{C}_{13} = \bar{C}_{23} = -\frac{1}{p^2} \frac{\bar{S}_{12}}{(\bar{S}_{11} - \bar{S}_{12})(\bar{S}_{11} + 2\bar{S}_{12})}. \quad (\text{A1.2})$$

Подстановка в (A1.1) и (A1.2) выражений (54) для \bar{S}_{11} и \bar{S}_{12} дает

$$\bar{C}_{11} = \frac{\left[\prod_{m=1}^M \left(p + \frac{1}{q_m} \right) - \sum_{k=0}^M v_{12}^k S_k^q(p) \right] \left(\sum_{k=0}^M E_1^k S_k^q(p) \right)}{p \left[\prod_{m=1}^M \left(p + \frac{1}{q_m} \right) + \sum_{k=0}^M v_{12}^k S_k^q(p) \right] \left[\prod_{m=1}^M \left(p + \frac{1}{q_m} \right) - 2 \sum_{k=0}^M v_{12}^k S_k^q(p) \right]}, \quad (A1.3)$$

$$\bar{C}_{12} = \frac{\left(\sum_{k=0}^M v_{12}^k S_k^q(p) \right) \left(\sum_{k=0}^M E_1^k S_k^q(p) \right)}{p \left[\prod_{m=1}^M \left(p + \frac{1}{q_m} \right) + \sum_{k=0}^M v_{12}^k S_k^q(p) \right] \left[\prod_{m=1}^M \left(p + \frac{1}{q_m} \right) - 2 \sum_{k=0}^M v_{12}^k S_k^q(p) \right]}. \quad (A1.4)$$

$2M + 1$ особых точек уравнения (A1.3), необходимых для обратного преобразования, находим численно как корни многочленов в знаменателе ($p_k = 0, -\frac{1}{r_1}, -\frac{1}{r_2}, -\frac{1}{r_3}, \dots, -\frac{1}{r_{2M}}$). Затем, используя разложение на простые дроби,

находим постоянные C_{11}^k и C_{12}^k аналогично тому, как описано в разделе 4.2. Выражения во временной области имеют вид

$$C_{ij}(t) = C_{ij}^0 + \sum_{m=1}^{2M} C_{ij}^m e^{\left(-\frac{t}{r_m} \right)}, \quad (A1.5)$$

$$C_{11}^k = \frac{1}{(1+v_{12}(0))(1-2v_{12}(0))} \frac{\left[\prod_{m=1}^M \left(-\frac{1}{r_k} + \frac{1}{q_m} \right) - \sum_{m=0}^M v_{12}^m S_m^q \left(-\frac{1}{r_k} \right) \right] \left(\sum_{m=0}^M E_1^m S_m^q \left(-\frac{1}{r_k} \right) \right)}{S_k^r \left(-\frac{1}{r_k} \right)}, \quad (A1.6)$$

$$C_{12}^k = \frac{1}{(1+v_{12}(0))(1-2v_{12}(0))} \frac{\left(\sum_{m=0}^M v_{12}^m S_m^q \left(-\frac{1}{r_k} \right) \right) \left(\sum_{m=0}^M E_1^m S_m^q \left(-\frac{1}{r_k} \right) \right)}{S_k^r \left(-\frac{1}{r_k} \right)}, \quad (A1.7)$$

В (A1.6) и (A1.7)

$$S_k^r(p) = \prod_{i \neq k}^{2M} (p + z_i), \text{ где } z_i = 0, \frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}, \dots, \frac{1}{r_{2M}}. \quad (A1.8)$$

Приложение 2. Вязкоупругие сдвиговые функции

$$C_{66}(t) = Q_{66}(t) = G_{12}(t) \text{ и } S_{66}(t)$$

В области Лапласа соотношения между сдвиговым напряжением и сдвиговой деформацией для изотропного материала запишем как

$$\bar{C}_{66} = \frac{1}{p^2} \frac{1}{\bar{S}_{66}} = \frac{1}{2p^2} \frac{1}{\bar{S}_{11} - \bar{S}_{12}}. \tag{A2.1}$$

Подставив (54) в (A2.1), получим, что

$$\bar{C}_{66} = \frac{1}{2p} \frac{\sum_{k=0}^M E_1^k S_k^q(p)}{\prod_{m=1}^M \left(p + \frac{1}{q_m} \right) + \sum_{k=0}^M \nu_{12}^k S_k^q(p)}. \tag{A2.2}$$

Сдвиговая податливость при ползучести имеет вид

$$\bar{S}_{66} = \frac{2}{p} \frac{\prod_{m=1}^M \left(p + \frac{1}{q_m} \right) + \sum_{k=0}^M \nu_{12}^k S_k^q(p)}{\sum_{k=0}^M E_1^k S_k^q(p)}. \tag{A2.3}$$

Сингулярные точки (A2.2) находим численно и обозначаем как $p_k = -\frac{1}{\rho_k}$, $k = 1, \dots, M$. Сингулярные точки (A2.3) такие же, как для \bar{S}_{11} : $p_k = -\frac{1}{\tau_k}$, $k = 1, 2, \dots, M$.

Представив, как описано ранее, рациональные функции в виде простых дробей, получили

$$C_{66}(t) = C_{66}^0 + \sum_{m=1}^M C_{66}^m e^{\left(-\frac{t}{\rho_m} \right)}, \quad S_{66}(t) = S_{66}^0 + \sum_{m=1}^M S_{66}^m e^{\left(-\frac{t}{\tau_m} \right)}, \tag{A2.4}$$

$$C_{66}^k = \frac{1}{2(1+\nu_{12}(0))} \frac{\sum_{m=0}^M E_1^m S_m^q \left(-\frac{1}{\rho_k} \right)}{S_k^p \left(-\frac{1}{\rho_k} \right)}, \tag{A2.5}$$

$$S_{66}^k = \frac{2}{E_1(0)} \frac{\prod_{m=1}^M \left(-\frac{1}{\tau_k} + \frac{1}{q_m} \right) + \sum_{m=0}^M \nu_{12}^m S_m^q \left(-\frac{1}{\tau_k} \right)}{S_k^\tau \left(-\frac{1}{\tau_k} \right)},$$

где

$$S_k^\rho(p) = \prod_{i=0}^M (p + w_i), \quad w_i = 0, \frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \frac{1}{\rho_3}, \dots, \frac{1}{\rho_M}. \tag{A2.6}$$

Приложение 3. Функции релаксации напряжения $Q_{11}(t)$ и $Q_{12}(t)$

Соотношения между функциями релаксации напряжений и функциями податливости в области Лапласа упрощаются для случаев, когда можно пренебречь нормальным напряжением из плоскости ($\sigma_3 = 0$), как это предполагают в классической теории слоистых композитов. Для изотропных слоев (например, полимеров, алюминия и т. д.) имеем

$$\bar{Q}_{11} = \bar{Q}_{22} = \frac{1}{p^2} \frac{\bar{S}_{11}}{(\bar{S}_{11} - \bar{S}_{12})(\bar{S}_{11} + \bar{S}_{12})}, \tag{A3.1}$$

$$\bar{Q}_{12} = -\frac{1}{p^2} \frac{\bar{S}_{12}}{(\bar{S}_{11} - \bar{S}_{12})(\bar{S}_{11} + \bar{S}_{12})}. \tag{A3.2}$$

Подстановка (54) в (A3.1) и (A3.2) дает

$$\bar{Q}_{11} = \frac{\left(\sum_{k=0}^M E_1^k S_k^q(p)\right) \prod_{m=1}^M \left(p + \frac{1}{q_m}\right)}{p \left[\prod_{m=1}^M \left(p + \frac{1}{q_m}\right) + \sum_{k=0}^M v_{12}^k S_k^q(p) \right] \left[\prod_{m=1}^M \left(p + \frac{1}{q_m}\right) - \sum_{k=0}^M v_{12}^k S_k^q(p) \right]}, \tag{A3.3}$$

$$\bar{Q}_{12} = \frac{\left(\sum_{k=0}^M v_{12}^k S_k^q(p)\right) \left(\sum_{k=0}^M E_1^k S_k^q(p)\right)}{p \left[\prod_{m=1}^M \left(p + \frac{1}{q_m}\right) + \sum_{k=0}^M v_{12}^k S_k^q(p) \right] \left[\prod_{m=1}^M \left(p + \frac{1}{q_m}\right) - \sum_{k=0}^M v_{12}^k S_k^q(p) \right]}. \tag{A3.4}$$

Особые точки \bar{Q}_{11} и \bar{Q}_{12} находим численно как корни многочленов в знаменателе ($p_k = 0, -\frac{1}{\theta_1}, -\frac{1}{\theta_2}, -\frac{1}{\theta_3}, \dots, -\frac{1}{\theta_{2M}}$). Затем, используя разложение на простые дроби, находим постоянные Q_{11}^k и Q_{12}^k , как описано в разделе 4.2. Выражения после обратного преобразования имеют вид

$$Q_{ij}(t) = Q_{ij}^0 + \sum_{m=1}^{2M} Q_{ij}^m e^{\left(-\frac{t}{\theta_m}\right)}, \tag{A3.5}$$

$$Q_{11}^k = \frac{1}{(1+v_{12}(0))(1-v_{12}(0))} \frac{\prod_{m=1}^M \left(-\frac{1}{\theta_k} + \frac{1}{q_m}\right) \left(\sum_{m=0}^M E_1^m S_m^q\left(-\frac{1}{\theta_k}\right)\right)}{S_k^\theta\left(-\frac{1}{\theta_k}\right)}, \tag{A3.6}$$

$$Q_{12}^k = \frac{1}{(1+v_{12}(0))(1-v_{12}(0))} \frac{\left(\sum_{m=0}^M v_{12}^m S_m^q \left(-\frac{1}{\theta_k} \right) \right) \left(\sum_{m=0}^M E_1^m S_m^q \left(-\frac{1}{\theta_k} \right) \right)}{S_k^\theta \left(-\frac{1}{\theta_k} \right)}, \quad (\text{A3.7})$$

В (A3.6) и (A3.7)

$$S_k^\theta(p) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{2M} (p + v_i), \text{ где } v_i = 0, \frac{1}{\theta_1}, \frac{1}{\theta_2}, \frac{1}{\theta_3}, \dots, \frac{1}{\theta_{2M}}. \quad (\text{A3.8})$$