

МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

MECHANICS
OF COMPOSITE
MATERIALS

2022

5

ЛАТВИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
LATVIAN ACADEMY of SCIENCES

**МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ
МАТЕРИАЛОВ**

**MECHANICS
of COMPOSITE MATERIALS**

2022 ● Т. 58 ● 5 ● 863—1092

Сентябрь—октябрь
September—October

<https://doi.org/10.22364/mkm.58.5>

Выходит 6 раз в год с января 1965 г.
Issued since 1965, bimonthly

ЛАТВИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РИГА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *A. K. Chate*
EDITOR-IN-CHIEF *A. K. Chate*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

X. Альтенбах (зам. главного редактора, Германия), *Я. Андерсонс* (зам. главного редактора, Латвия), *А. Анискевич* (Латвия), *Я. Варна* (Швеция, Латвия), *А. Красников* (Латвия), *О. Старкова* (Латвия), *С. В. Шешенин* (Россия)

EDITORIAL BOARD

H. Altenbach (ass. editor, Germany), *J. Andersons* (ass. editor, Latvia), *A. Aniskevich* (Latvia), *J. Varna* (Sweden), *A. Krasnikovs* (Latvia), *O. Starkova* (Latvia), *S. V. Sheshenin* (Russia)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

M. Айдогду (Турция), *С. Д. Акбаров* (Турция), *С. К. Амиго* (Бразилия), *А. Артейру* (Португалия), *Л. Асп* (Швеция), *Е. Барканов* (Латвия), *В. Беккер* (Германия), *В. Н. Бурлаенко* (Украина), *И. Гузь* (Великобритания), *Нгуен Дин Дык* (Вьетнам), *В. А. Еремеев* (Италия), *Г. Кан* (Китай), *В. Карвелли* (Италия), *А. Катунин* (Польша), *Сон С. Ким* (Южная Корея), *Е. Конту* (Греция), *Е.-М. Крачун* (Румыния), *А. Кривцов* (Россия), *В. Кулаков* (Латвия), *Г. Куликов* (Россия), *С. В. Ломов* (Бельгия, Россия), *Ю. Маяк* (Эстония), *Г. Михасёв* (Беларусь), *А. Муц* (Польша), *В. Н. Паймушин* (Россия), *С. В. Панин* (Россия), *Л. Плачиди* (Италия), *Р. Родригес-Рамос* (Куба), *Т. Садовский* (Польша), *С. Б. Сапожников* (Россия), *М. Ди Скьюва* (Италия), *Р. Талreja* (США), *Ю. Токовий* (Украина), *Э. В. Ярве* (США)

ADVISORY BOARD

M. Aydogdu (Turkey), *S. D. Akbarov* (Turkey), *S. C. Amico* (Brazil), *A. Arteiro* (Portugal), *L. Asp* (Sweden), *E. Barkanov* (Latvia), *W. Becker* (Germany), *V. N. Burlayenko* (Ukraine), *I. Guz'* (United Kingdom), *Nguyen Dinh Duc* (Vietnam), *V. A. Eremeyev* (Italy), *G. Kang* (China), *V. Carvelli* (Italy), *A. Katunin* (Poland), *Seong S. Kim* (South Korea), *E. Kontou* (Greece), *E. M. Craciun* (Romania), *A. Krivtsov* (Russia), *V. Kulakov* (Latvia), *G. Kulikov* (Russia), *S. V. Lomov* (Belgium, Russia), *J. Majak* (Estonia), *G. Mikhasev* (Belarus), *A. Muc* (Poland), *V. N. Pajmushin* (Russia), *S. V. Panin* (Russia), *L. Placidi* (Italy), *R. Rodriguez-Ramos* (Cuba), *T. Sadowski* (Poland), *S. B. Sapozhnikov* (Russia), *M. Di Sciuva* (Italy), *R. Talreja* (USA), *Yu. Tokovyy* (Ukraine), *E. V. Iarve* (USA)

ПОЧЕТНАЯ РЕДКОЛЛЕГИЯ

Л. Агаловян (Армения), *А. Богданович* (США), *А. Н. Гузь* (Украина), *А. Дуда* (Германия), *А. Д. Заманов* (Азербайджан), *М. Калнинь* (Латвия), *В. В. Коврига* (Россия), *С. Т. Милейко* (Россия), *Ю. М. Плескачевский* (Беларусь), *В. А. Поляков* (Латвия), *Н. Щербина* (Украина)

HONORARY BOARD

L. Aghalovyan (Armenia), *A. Bogdanovich* (USA), *A. N. Guz'* (Ukraine), *A. Duda* (Germany), *A. D. Zamanov* (Azerbaijan), *M. Kalniņš* (Latvia), *V. V. Kovriga* (Russia), *S. T. Mileiko* (Russia), *Yu. M. Pleskachevskii* (Belarus), *V. A. Polyakov* (Latvia), *N. Shcherbina* (Ukraine)

Журнал издается на английском языке Springer Science+Business Media, Inc. (США, ISSN 0191-5665) и аннотируется в следующих изданиях:

The Journal is published in English by Springer Science+Business Media, Inc. (USA, ISSN 0191-5665) and is abstracted or indexed in:

Science Citation Index Expanded (SciSearch), Journal Citation Reports/Science Edition, SCOPUS, INSPEC, Chemical Abstracts Service (CAS), Google Scholar, EBSCO, CSA, Academic OneFile, Academic Search, ChemWeb, CSA, Environmental Sciences, Current Contents/Engineering, Computing and Technology, Earthquake Engineering Abstracts, EI-Compendex, Gale, INIS Atomindex, OCLC, Polymer Library, Reaction Citation Index, Referativnyi Zhurnal (VINITI), SCImago, Summon by ProQuest.

Р. А. Турусов^{а,б,}, И. А. Поликарпова^{а,б}, М. А. Орлов^б, А. Ю. Сергеев^а,
В. И. Солодилов^{а,б}*

*^аФедеральный исследовательский центр химической физики им. Н. Н. Семенова РАН,
Москва, Россия*

^бФГБОУ ВО “МГТУ им. Н. Э. Баумана”, Москва, Россия

^аМосковский государственный строительный университет, Россия

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРЕФОРМЫ ПРИ ПОСЛОЙНОЙ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ НАШИВКЕ РОВИНГА

R. A. Turusov, I. A. Polikarpova, M. A. Orlov, A. Yu. Sergeev, and V. I. Solodilov*

STRESS-STRAIN STATE OF A PREFORM MADE BY THE TAILORED FIBER PLACEMENT

Keywords: tailored fiber placement, composite material, mathematical model, contact layer, residual stresses

Simple theoretical models are proposed that describe the kinetics of stress changes in the process of tailored fiber placement and take into account technological parameters. Based on the results of experimental studies of the stress-strain state of the sewn material, the tangential and normal stresses (edge effects) that occur in its structure during layer-by-layer stitching are performed. It is shown that the magnitude and nature of the stress distribution depend on the properties of the substrate and its material, and the thickness and the compaction of the material during stitching of the roving layer.

Ключевые слова: нашивка ровинга автоматизированная, материал композитный, модель математическая, слой контактный, напряжения остаточные

Предложены простейшие теоретические модели, описывающие кинетику изменения напряжений в процессе послойной автоматизированной нашивки ровинга и учитывающие технологические

*Автор, с которым следует вести переписку: ia-polikarpova@mail.ru
Corresponding author: ia-polikarpova@mail.ru

параметры процесса. По результатам экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния нашивного материала проведены расчеты касательных и нормальных напряжений (краевые эффекты), возникающих в его структуре при послойной нашивке. Показано, что величина и характер распределения напряжений зависят от упругих свойств подложки и материала, толщины подложки и материала, а также уплотнения материала в процессе нашивки слоя ровинга.

Введение

Повышение массовой эффективности деталей и узлов ракетно-космической, авиационной, морской и транспортной техники — актуальная задача на сегодняшний день. Особый интерес представляют технологии получения изделий с неоднородными свойствами, заданными в строгом соответствии с условиями напряженного состояния изделия в ходе его эксплуатации. Одна из таких ключевых технологий — способ автоматизированной нашивки ровинга (Tailored Fiber Placement — TFP). Данный способ позволяет осуществлять укладку ровинга в строгом соответствии с заранее рассчитанной траекторией. При этом сначала определяют напряженно-деформированное состояние изделия с учетом его геометрии и условий эксплуатации, а затем рассчитывают траекторию укладки ровинга и разрабатывают управляющую программу. После этого изготовливают преформы на соответствующем оборудовании с числовым программным управлением. На следующем этапе полученная преформа пропитывается связующим под давлением (RTM) или под вакуумом (VaRTM) с последующим отверждением по заданному температурному режиму. Далее производится механическая обработка заготовки, если необходимо.

В научной литературе отмечен интерес к исследованию изделий и испытаний их с целью улучшения физико-механических свойств. В [1] представлены результаты исследования образцов с использованием процесса TFP, армированных в соответствии с рассчитанной траекторией, с целью применения их в составе суппортов, рам и других элементов конструкций велосипедов. В [2] представлены результаты оценки влияния ортогонального армирования преформ на их физико-механические свойства. Преформы были получены нашивкой ровинга из углеродного волокна, а прошиты арамидными, полиэтиленовыми и полиэфирными волокнами и пропитаны связующим под вакуумом. Также исследовали влияние натяжения нити, расстояния между соседними проходами и частоты прошивки. Результаты показали, что прошивка арамидными волокнами снижает прочность при растяжении и изгибе на 3—8%. Возможности применения технологии TFP для получения пластин с отверстиями изучали в работе [3]. Результаты исследования применения автоматизированной нашивки ровинга с целью увеличения прочности образцов с одиночным отверстием, представленные в [4], показали, что наличие отверстия в пластинах, полученных

способом прессования, снижают прочность при растяжении до 61% от прочности образца без отверстия. Однако дополнительное армирование преформы методом нашивки позволяет достичь прочности образцов до 94% от прочности образца без отверстия при незначительном увеличении массы. В [5] предложен программный комплекс, сочетающий в себе модуль для определения напряженно-деформированного состояния и модуль для разработки программы программируемой нашивки ровинга. Технология получения крыльчатки компрессора методом автоматизированной нашивки ровинга, работающей при более высоких частотах вращения, чем алюминиевый аналог, предложена авторами [6]. В работе [7] представлены результаты исследований образцов с отверстиями при растяжении и циклических испытаниях. Образцы были изготовлены на основе мультиаксиальных тканей, плетеных преформ и методом автоматизированной нашивки ровинга. Авторы отмечают, что прочность образцов со схемой нашивки $[\pm 45^\circ]$ была ниже, чем образцов без отверстий, но выше, чем образцов со схемой нашивки $[0^\circ/90^\circ]$ и $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ]_n$. В [8] представлены результаты расчета напряжений, возникающих в структуре материала при TFR, при одноосном растяжении с использованием метода конечных элементов. В работе [9] представлены результаты оценки влияния ширины стежка и расстояния между двумя соседними проходами на степень волнистости (непрямолинейности) материала. Влияние различных схем нашивки ровинга на прочность и трещиностойкость образцов исследовали в [10]. Прочность при растяжении образцов с отверстием, полученных методом автоматизированной нашивки ровингом, — около 92,7% от прочности образца без отверстия, а образцов с просверленным отверстием — 38% от прочности образца без отверстия.

Одной из ключевых проблем технологии TFR является наличие волнистости, возникающей в результате прошивки ровинга нитью. В технологии композитных материалов известно, что искривление волокон в некоторой степени снижает несущую способность в этом направлении армирования. Другой важнейшей проблемой является уплотнение и изменение свойств слоя материала в результате прошивки. Более частое ортогональное армирование приводит к увеличению межслойной прочности материала, но в то же время это ведет к получению более плотной структуры материала и к неоднородности свойств по высоте преформы. Еще одной проблемой является появление напряжений в структуре преформы в процессе послойной нашивки слоев ровинга. Накапливаемые сжимающие остаточные напряжения в слоях обуславливают затруднение, а в некоторых случаях и к невозможности процесса пропитки преформы связующим, образованию зон, обедненных или обогащенных связующим. Возникающие напряжения наследуются готовым изделием и могут приводить к появлению расслоений и трещин в нем. Решение некоторых проблем возможно за счет подбора значений технологических параметров: шага нашивки, расстояния между соседними проходами, траектории проходов и т.д. на основе проведенных всесторонних исследований.

Настоящая работа посвящена изучению остаточных напряжений в преформе, возникающих в процессе послойной нашивки ровинга.

1. Постановка задачи

Особенность процесса автоматизированной нашивки ровинга — изменение свойств, прежде всего плотности материала в результате прошивки. Игла с нитью пришивает ровинг сначала к подложке в направлении, перпендикулярном подложке, затем каждый последующий слой пришивается к предыдущему пакету. В процессе нашивки ровинг претерпевает изменение плотности и свойств по высоте преформы. Таким образом, исследование процесса послойной нашивки ровинга приобретает важнейшее значение с точки зрения технологии получения изделий с задаваемыми высокими физико-механическими свойствами.

1.1. Напряженно-деформированное состояние в преформе при послойной нашивке ровинга. На упругую подложку 0 толщиной d с модулем упругости E_0 слой за слоем нашивается ровинг с одновременной прошивкой его сначала к подложке, затем каждый последующий слой нашивается на предыдущий слой и весь предыдущий пакет (рис. 1). Таким образом, иглы, прошивая каждый слой, разрыхляют его в плоскости, в результате чего он претерпевает относительную деформацию. При этом положительная деформация $\varepsilon_c > 0$ означает увеличение объема, но обязательно изменение плотности слоя, отрицательная деформация $\varepsilon_c < 0$ означает уменьшение объема преформы. Под усадкой будем полагать изменение габаритных размеров слоя материала в плоскости. Модуль Юнга наращиваемого материала E , толщина слоя Δ , номер наращиваемого слоя j .

Рассмотрим случай, когда иглы, пробивая верхний слой, не воздействуют на остальной пакет, а изменение плотности происходит лишь в наращиваемом (укладываемом) слое. Слой для простоты расчетов считаем изотропным.

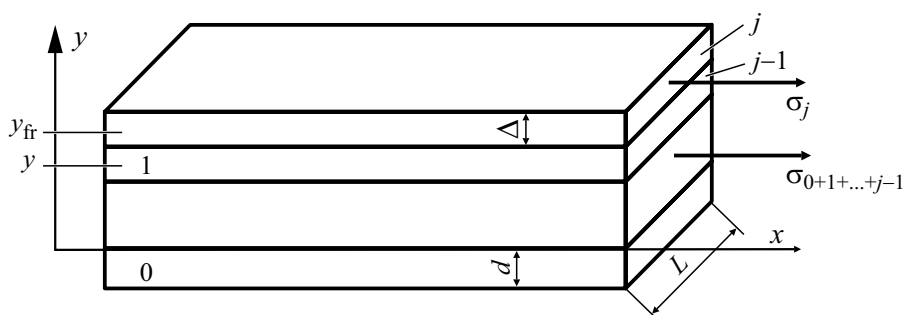


Рис. 1. Схема сил, действующих на элементарное тело: 0 — подложка; 1 — массив нашитого материала.

Примем следующие обозначения: 0 — упругая подложка; $[1, \dots, j, j+1, j_n]$ — наращиваемые слои материала толщиной Δ ; E_0 и E — модули Юнга подложки и наращиваемого слоя соответственно; y_{fr} — координата высоты полученного образца (координата фронта роста пакета); d — толщина подложки; L — длина модели по оси x ; по оси z длина равна L .

Пусть нарастили уже $(j-1)$ слоёв, каждый из которых имеет толщину Δ , и наращивается слой j . Запишем уравнение равновесия

$$\sigma_j \cdot \Delta \cdot L + \sigma_{0+1+\dots+j-1} \cdot [\Delta(j-1) + d] L = 0. \quad (1)$$

Условия совместности деформаций —

$$\varepsilon_j = \varepsilon_{0+1+\dots+(j-1)}. \quad (2)$$

При этом

$$\varepsilon_j = \frac{\sigma_j}{E} + \varepsilon_c, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{0+1+\dots+(j-1)} = \frac{\sigma_{0+1+\dots+(j-1)}}{E_{0+1+\dots+(j-1)}}. \quad (3)$$

Подставив (3) в (2), имеем

$$\frac{\sigma_j}{E} + \varepsilon_c = \frac{\sigma_{0+1+\dots+j-1}}{E_{0+1+\dots+j-1}}. \quad (4)$$

Модуль всего пакета (включая прошитые слои и подложку) запишем как

$$\begin{aligned} E_{0+1+\dots+j-1} &= E \psi_{1+\dots+j-1} + E_0 \psi_0 = \\ &= E_{1+\dots+j-1} \frac{(j-1)\Delta}{(j-1)\Delta + d} + \frac{E_0 d}{(j-1)\Delta + d} = \\ &= \frac{1}{(j-1)\Delta + d} [E(j-1)\Delta + E_0 d]. \end{aligned} \quad (5)$$

Из уравнения (1) получим

$$\sigma_{0+1+\dots+j-1} = -\frac{\sigma_j \Delta}{[\Delta(j-1) + d]}. \quad (6)$$

Подставим (5), (6) в (4) и после преобразований получим

$$\sigma_j = -E\varepsilon_c \left(1 - \frac{\Delta E}{jE\Delta + dE_0} \right). \quad (7)$$

Для того чтобы найти напряжения в пакете, необходимо просуммировать σ_j в (7) от 1 до j . Для этого введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \lim(E \Delta) &= d\xi, \quad \lim(E_0 d + E\Delta j) = \xi, \\ \Delta j &= y. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_j \frac{E\Delta}{E_0 d + E\Delta j} = \int_y^{y_{fr}} \frac{d\xi}{\xi} = \ln \frac{E_0 d + E y_{fr}}{E_0 d + E y}. \quad (9)$$

Подстановка (9) в (7) с учетом (8) дает

$$\sigma(y, y_{fr}) = -E\varepsilon_c \left(1 - \ln \frac{E_0 d + E y_{fr}}{E_0 d + E y} \right), \quad (10)$$

где ε_c — усадка слоя в результате нашивки. Из (10) можно получить ситуацию, когда напряжения в подложке ($y = 0$) будут равны нулю независимо от усадки:

$$y_{fr} = 1,73 \frac{E_0}{E} d. \quad (11)$$

1.2. Определение напряженно-деформированного состояния слоистого материала с учетом взаимодействия его с подложкой. В предыдущей задаче взаимодействие нашиваемого материала с подложкой полагали абсолютным — перемещения на границе считались непрерывными, а касательные напряжения на границе подложка—материал отсутствовали.

Важнейшими параметрами при получении изделий методом автоматизированной нашивки ровинга является шаг прошивки ровинга, расстояние между соседними проходами и натяжение нити при прошивке. Здесь примем допущение, что совокупность стежков на некоторой площади (n , шт/см²) можно заменить средой, состоящей из малых не касающихся друг друга стерженьков [11—20], расположенных перпендикулярно укладываемому слою, которые способны передавать усилия от подложки к слою и от одного слоя к последующему. Напомним, что слой считаем изотропной сплошной средой. Анизотропную среду, находящуюся между подложкой и первым слоем материала, будем называть контактным слоем [11—20]. Такой подход является развитием метода

контактного слоя, разрабатываемого в приложении к адгезии и адгезионной механике.

Понятие о контактном (или пограничном) слое введено в работах [13—16]. Это понятие характеризует взаимодействие адгезива с субстратом в адгезионных соединениях и композитах. Известно, что при строгом решении задач о напряженно-деформированном состоянии адгезионных соединений в угловых точках появляются бесконечные касательные напряжения (сингулярность) вместо реальных нулевых. И тогда граничные условия не выполняются, задача Коши оказывается нерешённой. Для устранения этого противоречия в случае клеевых соединений в [21] или сварных соединений в [22] слои адгезива (клея) или слои сварки представляли в виде соединяющих стержней. Но тогда слои адгезива или сварки нельзя рассматривать как активный материал, например, они не могут создавать напряжений в соединении при изменении температуры и влиять на результаты работы. Представления о контактном слое основываются на понимании того, что адгезионные связи редки, например, по отношению плотности атомов на поверхностях адгезива или субстрата, т.е. далеко не каждый атом субстрата задействован в образовании адгезионных связей с адгезивом. Например, плотность атомов на гладкой поверхности металла около 10^{14} . И, наверное, хорошо, если бы при смазывании эпоксидным клеем плотность получающихся связей оказывалась всего на несколько порядков меньше. Иными словами, главное — эти связи редки, и потому их можно моделировать, например, редкими упругими короткими стерженьками, не касающимися друг друга и нормальными к поверхностям субстрата и адгезива. В такой анизотропной среде отсутствуют нормальные к стерженькам напряжения. Есть лишь касательные напряжения, параллельные соединяемым поверхностям, и нормальные напряжения. В результате задача о НДС таких соединений решается точно с удовлетворением исходным уравнениям и граничным условиям [11—13]. Без сингулярности, т.е. задача Коши оказывается решенной, и решение — единственным. В теории появляются три параметра контактного слоя: модуль сдвига G^* , толщина контактного слоя h^* и истинная прочность адгезионной связи τ_{ad} . Эта теория позволяет также получать простые аналитические решения для задач адгезионной механики в одномерной постановке. (Следует заметить, что в одномерной постановке в решении о напряженно-деформированном состоянии адгезионного соединения появляются лишь два параметра: τ_{ad} и отношение G^*/h^* .) И это обстоятельство оказалось важным потому, что в экспериментах по характеристике адгезионной связи можем определить лишь среднюю прочность связи как отношение разрушающей нагрузки к площади склейки. Получаемая величина оказывается зависящей от геометрических параметров образца и температуры испытаний. Стандартизация размеров образцов не избавила пользователей от сомнений. Метод контактного слоя позволяет не только точно удовлетворять уравнениям и граничным условиям задачи, но и вводить физически ясные критерии разрушения и определять из теории и

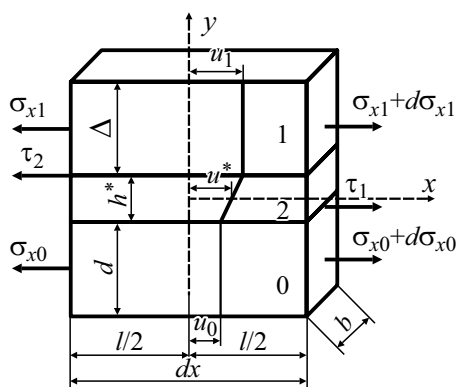


Рис. 2. Расчетная схема: 0 — подложка; 1 — слой 1 материала; 2 — контактный слой.

экспериментальных кривых стабильные параметры контактного слоя и истинную прочность адгезионной связи. Ситуация с пришиваемыми слоями похожа на адгезионную. По этой причине здесь и применяется метод контактного слоя из адгезии. Но, как известно, адгезия не реализуется без смачивания, поэтому одной из задач в ближайшем будущем станет развитие иного по сравнению с традиционным подхода к смачиванию. А пока вернемся к нашей проблеме. Контактный слой ввиду принятых допущений может передавать лишь касательные напряжения, образующиеся на границе взаимодействия слоев материала, и нормальные напряжения вдоль прошивающих нитей-стерженьков. Анизотропный контактный слой характеризуется толщиной h^* , модулем Юнга E^* и модулем сдвига G^* . Примем допущение, что в слое материала и в подложке возникают только нормальные напряжения σ_x .

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние в направлении оси x . Выделим элемент dx и обозначим все силы, действующие на него. Рассмотрим взаимодействие первого и пока единственного слоя прошивного материала с подложкой. Перемещения частиц слоёв вдоль направления x : u_0 — перемещение в подложке, u_1 — перемещение в слое 1.

Запишем уравнение равновесия для подложки 0 в соответствии с данными рис. 2:

$$-\sigma_{x0}db + \left(\sigma_{x0} + \frac{d\sigma_{x0}}{dx} dx \right) db + \tau_1 b dx = 0. \quad (12)$$

Уравнение для слоя 1 —

$$-\sigma_{x1}\Delta b + \left(\sigma_{x1} + \frac{d\sigma_{x1}}{dx} dx \right) \Delta b - \tau_2 b dx = 0, \quad (13)$$

для контактного слоя 2 —

$$-\tau(y)bdx + (\tau + d\tau)bdx = 0. \quad (14)$$

Из (14) следует, что

$$\tau(y) = \tau_1 = \tau_2 = \tau = \text{const}.$$

Тогда после преобразований (12), (13) получим

$$d \frac{d\sigma_{x0}}{dx} = -\tau, \quad \Delta \frac{d\sigma_{x1}}{dx} = \tau. \quad (15)$$

Приравнивая уравнения в (15), получаем

$$\frac{d\sigma_{x1}}{dx} = -\frac{d}{\Delta} \frac{d\sigma_{x0}}{dx}$$

или после интегрирования по dx окончательно имеем

$$\sigma_{x1} = -\frac{d}{\Delta} \sigma_{x0} + C. \quad (16)$$

В силу равновесия модели $C = 0$.

Перемещения в контактном слое в силу его малой толщины будем считать линейно зависящими от y :

$$u^* = ay + b. \quad (17)$$

Из граничных условий непрерывности перемещений имеем

$$u^*(y=0) = u_0, \quad u^*(y=h^*) = u_1. \quad (18)$$

Тогда перемещения в контактном слое запишем как

$$u^*(x, y) = \frac{u_1 - u_0}{h^*} y + u_0. \quad (19)$$

Полные деформации подложки 0 и слоя 1 —

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_{x0}}{E_0}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_{x1}}{E_1} + \varepsilon_c, \quad (20)$$

соотношения Коши между перемещениями и деформациями —

$$\varepsilon_0 = \frac{du_0}{dx}, \quad \varepsilon_1 = \frac{du_1}{dx}. \quad (21)$$

Для сдвиговых деформаций в контактном слое из (19) имеем

$$\gamma^* = \frac{\partial u^*}{\partial y} = \frac{u_1 - u_0}{h^*}. \quad (22)$$

Закон Гука для сдвиговых деформаций —

$$\gamma^* = \frac{\tau^*}{G^*}. \quad (23)$$

Из уравнений (22), (23), (20), (21) получаем

$$\tau^* = \frac{G^*}{h^*}(u_1 - u_0). \quad (24)$$

Дифференцирование (24) и подстановка (21), (20) дает

$$\frac{\partial \tau^*}{\partial x} = \frac{G^*}{h^*} \left(\frac{\sigma_{x1}}{E_1} + \varepsilon_c - \frac{\sigma_{x0}}{E_0} \right). \quad (25)$$

Подстановка (4) и (5) в (14) и применение (25) дает

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{x1}}{dx} &= -\frac{d}{\Delta} \frac{d\sigma_{x0}}{dx}, \\ \frac{\partial \tau^*}{\partial x} &= -\frac{G^*}{h^*} \left[\sigma_{x0} \left(\frac{d}{\Delta E_1} + \frac{1}{E_0} \right) - \varepsilon_c \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (25) и (26) получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 \sigma_{x0}}{dx^2} - \sigma_{x0} \frac{G^*}{dh^*} \left(\frac{d}{\Delta E_1} + \frac{1}{E_0} \right) + \frac{G^*}{dh^*} \varepsilon_c = 0.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{G^*}{dh^*} \left(\frac{d}{E_1 \Delta} + \frac{1}{E_0} \right), \\ \beta &= \frac{G^*}{dh^*} \varepsilon_c. \end{aligned}$$

Тогда определяющее уравнение окончательно запишем в виде

$$\frac{d^2 \sigma_{x0}}{dx^2} - \omega^2 \sigma_{x0} + \beta = 0. \quad (27)$$

Решение уравнения (27) ищем в виде

$$\sigma_{x0}(x) = A \cdot \exp(\omega x) + B \cdot \exp(-\omega x) + \frac{\beta}{\omega^2} \quad (28)$$

или с использованием гиперболических функций —

$$\sigma_{x0}(x) = A_1 \cdot \operatorname{sh}(\omega x) + B_1 \cdot \operatorname{ch}(\omega x) + \frac{\beta}{\omega^2}. \quad (29)$$

Так как в рассматриваемой модели отсутствуют внешние нагрузки, а напряжения в плоскости склейки обусловлены только усадками материала, то граничными условиями будет отсутствие напряжений на концах:

$$\sigma_0(-l/2) = \sigma_0(l/2) = 0. \quad (30)$$

Задача симметричная, поэтому начало координат располагаем в середине длины модели, равной l (см. рис. 2).

Из (29) и (30) получаем константы

$$A_1 = 0, B_1 = -\frac{\beta}{\omega^2 \operatorname{ch}\left(\frac{\omega l}{2}\right)}. \quad (31)$$

После подстановки (31) в (29) получаем решение для нормального напряжения в подложке

$$\sigma_{x0}(x) = \frac{\beta}{\omega^2} \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(\omega x)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\omega l}{2}\right)} \right). \quad (32)$$

Подставим (32) в (16) и запишем

$$\sigma_{x1} = \frac{d}{\Delta} \frac{\beta}{\omega^2} \left(\frac{\operatorname{ch}(\omega x)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\omega l}{2}\right)} - 1 \right). \quad (33)$$

Касательные напряжения в контактном слое с учетом (15) запишем как

$$\tau^* = \frac{d\beta}{\omega} \frac{\operatorname{sh}(\omega x)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\omega l}{2}\right)}, \quad (34)$$

где по-прежнему

$$\omega^2 = \frac{G^*}{h^*} \left(\frac{1}{E_1 \Delta} + \frac{1}{d E_0} \right),$$

$$\beta = \frac{G^*}{h^*} \frac{\varepsilon_c}{d},$$

G^* / h^* — жесткость контактного слоя; d, Δ — толщина подложки и нашиваемых слоев соответственно; l — длина слоя.

2. Эксперимент

Образцы преформ получали на автоматической вышивальной машине с ЧПУ JCW 0100-500 (ZSK Stickmaschinen GmbH, Германия) путем укладывания углеродного ровинга HTS45 12K (Toho Tenax®, Япония) на водорастворимую подложку по схеме $[0^\circ/90^\circ]$ и одновременной прошивки его арамидной

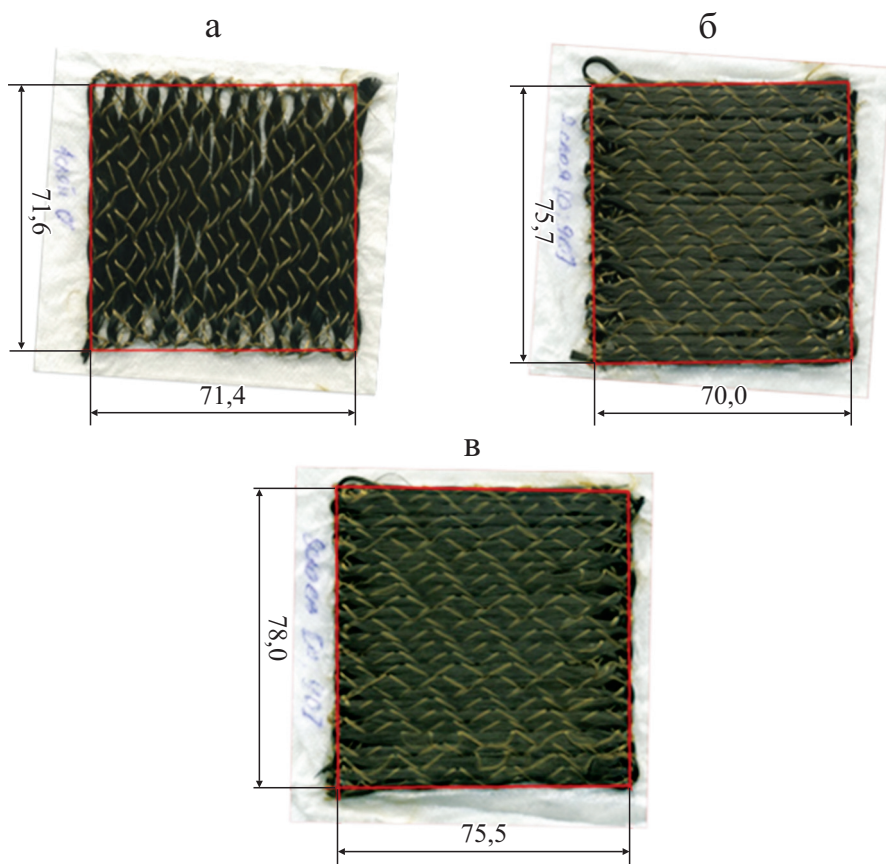


Рис. 3. Общий вид преформы в результате автоматизированной нашивки ровинга: а — один слой; б — два слоя; в — восемь слоев.

Результаты измерения усадки преформы в результате прошивки

Усадка, мм/мм	Количество слоев в преформе	
	два	восемь
По ширине слоя ε_w	-0,019	0,057
По длине слоя ε_l	0,057	0,089
По толщине слоя ε_{th}	-0,147	-0,840

нитью Русар-С (АО НПП “Термотекс”, Хотьково, Россия). Шаг прошивки 7 мм, расстояние между проходами — 47 условных единиц. Нашиваемые образцы преформ имели размер 80×80 мм. Каждая из нашитых преформ содержала один, два или восемь слоев (рис. 3). После нашивки измеряли длину, ширину и толщину преформы. Толщину нашивок определяли с использованием микрометра. Толщина образца, содержащего один слой, — 0,85 мм, два слоя — 1,45 мм, восемь слоев — 3,70 мм. Определение линейной усадки преформы в плоскости ε_c производили путем измерения габаритных размеров листа до и после нашивки дополнительных слоев с использованием фотографий высокого разрешения (см. рис. 3, таблицу).

Для определения модуля упругости E_0 из материала подложки на основе поливинилового полимера были вырезаны образцы в виде полосок размером 15×155 мм. Образцы растягивали в захватах испытательной машины “Instron 3365” при постоянной скорости деформации, регистрируемой с помощью экстензометра. По начальному участку диаграммы напряжение—деформация определяли модуль упругости. В результате экспериментов было установлено, что эффективный модуль упругости при растяжении подложки при схеме $[0^\circ/90^\circ]$ $E_{0;90}$ равен 30 МПа, при схеме $[45^\circ/-45^\circ]$ $E_{45;-45}$ — 53 МПа.

Для определения модуля упругости преформ, содержащих два или восемь слоев, был вырезан образец шириной 22 мм с рабочей длиной 30 мм, который подвергали шести нагружениям в упругой области деформирования, не доводя его до разрушения. По начальному участку кривой напряжения—деформации определяли эффективный модуль упругости преформы. Результаты расчета модулей упругости представлены в разделе 3 и на рис. 4. Толщины подложки и преформы измеряли с использованием микрометра.

3. Расчет и обсуждение результатов

С использованием выражения (33) и экспериментальных данных были произведены расчеты. Исходные данные для расчета следующие: модуль упругости подложки $E_{0;90} = 30$ МПа, $E_{45;-45} = 53$ МПа, модуль упругости образца, содержащего два слоя, — 852,7 МПа, содержащего восемь слоев — 341,4 МПа, толщина подложки $d = 0,25$ мм, координата высоты

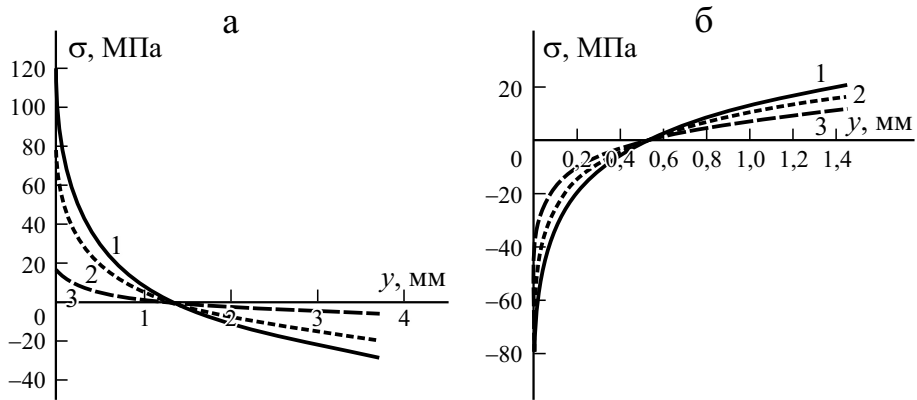


Рис. 4. Распределение остаточных нормальных напряжений σ по толщине преформы y , содержащей два слоя (а) и восемь (б) слоев. Для а — $E_1 = 600$ (1); $E_2 = 852,7$ (2); $E_3 = 1100$ МПа (3); для б — $E_1 = 500$ (1); $E_2 = 341,4$ (2); $E_3 = 100$ МПа (3).

полученного образца $y_{\text{н}} = 3,7$ мм, усадка слоя в результате нашивки $\varepsilon_c = 0,04\%$.

Из данных рис. 4—а следует, что нижние слои преформы, содержащей два слоя, оказываются сжатыми, верхние слои — растянутыми. Для преформы, содержащей восемь слоев, картина меняется (см. рис. 4—б). Нижние слои оказались растянутыми, верхние слои — сжатыми. Это следствие положительных усадок. Сжимающие напряжения, возникающие в толще материала, затрудняют пропитку преформы связующим. Зоны, в которых образуются растягивающие напряжения, наиболее склонны к появлению трещин и расслоений при растягивающих нагрузках. Таким образом, если напряжения в преформе наследуются готовым изделием, то эти зоны будут наиболее опасны при нагружении изделия растягивающими силами.

С использованием выражений (32), (33), (34) на рис. 5 построены графики напряжений в подложке σ_{x_0} , в толще материала σ_{x_1} и контактном слое τ_x . Исходные данные для расчета взяты из проведенных экспериментов: $E_1 = 852,7$ МПа, $E_0 = 30$ МПа, $d = 0,25$ мм, $\Delta = 1,45$ мм, $\varepsilon_c = -0,019$, $l = 100$ мм.

Как видно из данных рис. 5, возникающие в процессе уплотнения материала напряжения в материале 1 и подложке 0 оказываются сжимающими в результате уплотнения материала и распределены неоднородно по ширине заготовки.

Касательные напряжения τ , возникающие на границе подложки и материала, распределены неоднородно по длине взаимодействия. Анализ выражений показывает, что с увеличением интенсивности (частоты) прошивки будет расти отношение G^* / h^* , и значение касательных напряжений будет увеличиваться, а область изменения напряжений на краях

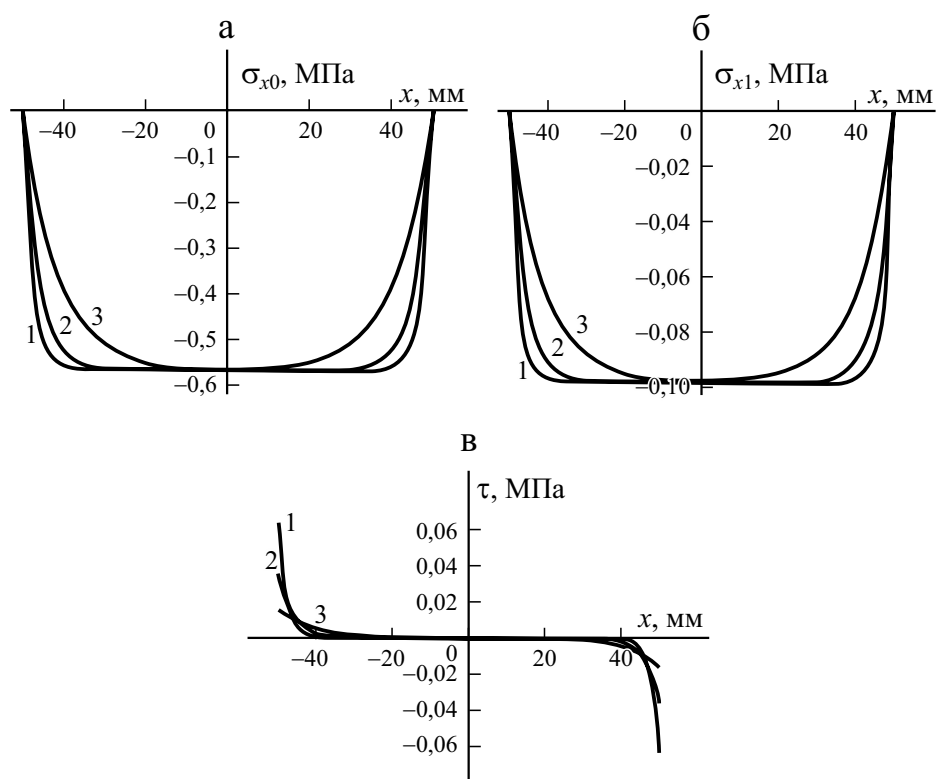


Рис. 5. Распределение нормальных напряжений σ_{x_0} в подложке по длине образца x (а) и в слое 1 σ_{x_1} (б), касательных напряжений τ_x в контактном слое в результате уплотнения материала (в). $G^* / h^* = 0,1$ (1); 0,5 (2); 1,5 МПа/мм (3).

взаимодействия резко сужаться. Таким образом, представленные модели позволяют подобрать такие параметры технологического процесса автоматизированной нашивки ровинга, которые бы позволили получить нужный уровень остаточных напряжений в преформе и наиболее высокие физико-механические свойства готового изделия.

Заключение

Проведены экспериментальные исследования моделей нашивных композитов. В теоретическом плане в первом приближении предложены две простейшие модели формирования напряженно-деформированного состояния в настилаемых нашивкой материалах. В первой модели применен подход из механики фронтально растущих тел [14]. Взаимодействие подложки и слоев полагали абсолютным. Получено условие нулевых напряжений в подложке в зависимости от положения фронта (11) и не зависящее от усадки. Показано, что при послойной нашивке ровингом в структуре материала появляются напряжения, которые распределены неоднородно по толщине (на рисунке — по высоте) преформы. В слоях, близких к подложке, появля-

ются сжимающие напряжения, а в слоях, наиболее отдаленных от подложки, — растягивающие. Этот факт есть следствие положительных усадок слоев. Сжимающие напряжения приводят к затруднению, а в некоторых случаях — к невозможности пропитки их связующим. Растягивающие напряжения снижают несущую способность материала при приложении растягивающей нагрузки.

Во второй модели использовано представление о контактном анизотропном слое [11—13], передающем взаимодействие от одного слоя к другому при изменении плотности, например, одного из них по отношению к другому. По результатам проведенных исследований напряженно-деформированного состояния нашивного материала были проведены расчеты существенно неоднородно распределенных касательных и нормальных напряжений (краевые эффекты), возникающих в его структуре при послойной нашивке. Показано, что значения и характер распределения напряжений зависят от свойств подложки и материала, толщины подложки и материала, а также уплотнения материала в результате нашивки слоя ровинга.

Все расчеты проведены с использованием полученных в работе экспериментальных значений параметров.

Установлено, что на границе взаимодействия слоев материала и слоя 1 с подложкой появляются касательные напряжения, зависящие от технологических параметров процесса нашивки: шага прошивки и расстояния между соседними проходами. Увеличение интенсивности прошивки приводит к увеличению значения G^* / h^* и касательных напряжений, и область их изменения по длине (концентрация) взаимодействия резко сужается.

Авторы предлагают простейшие модели формирования напряженно-деформированного состояния фронтально растущего слоистого прошивного композита. В действительности все прошиваемые слои пакета получают разными по свойствам. Разными будут и “контактные” слои. Например, если выращен пакет из $n + 1$ слоя, то густота прошивок “нижнего” слоя у подложки будет в n раз выше частоты прошивок последнего “верхнего” пришиваемого слоя, так же и у нижнего контактного слоя число стерженьков-связей в n раз плотнее, чем верхнего. Эти и все иные особенности формирования прошивного композита предстоит учесть в последующем.

Работа выполнена по государственному заданию МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Работа посвящена 70-летию Лаборатории армированных пластиков ФИЦ ХФ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mattheij P., Gliesche K., Feltin D. Tailored fiber placement — mechanical properties and applications // J. Reinf. Plast. Compos. — 1998. — Vol. 17, No. 9. — P. 774—86.
2. Mattheij P., Gliesche K., Feltin D. 3D reinforced stitched carbon/epoxy laminates made by tailored fibre placement // Composites: Part A. — 2000. — Vol. 31, No. 6. — P. 71—81.

3. *Crothers P., Dreschler K., Feltin D., Herzberg I., Kruckenberg T.* Tailored fibre placement to minimise stress concentrations // *Composites: Part A.* — 1997. — P. 619—625.

4. *Gliesche K., Hubner T., Orawetz H.* Application of the tailored fibre placement (TFP) process for a local reinforcement on an open-hole tension plate from carbon/epoxy laminates // *Compos. Sci. Technol.* — 2003. — Vol. 63, No. 1. — P. 81—88.

5. *Spickenheuer A., Schulz M., Gliesche K., Heinrich G.* Using tailored fibre placement technology for stress adapted design of composite structures // *Plastics, Rubber and Composites.* — 2008. — Vol. 37, Nos. 5/6. — P. 227—232.

6. *Uhlig K., Spickenheuer A., Bittrich L., Heinrich G.* Development of a highly stressed bladed rotor made of a CFRP using the tailored fiber placement technology // *Mech. Compos. Mater.* — 2013. — Vol. 49, No. 2. — P. 201—210.

7. *Uhlig K., Spickenheuer A., Gliesche K., Karb I.* Strength of CFRP open hole laminated made from NCF, TFP and braided preforms under cyclic tensile loading // *Plastics, Rubber and Composites.* — 2010. — Vol. 39, No. 6. — P. 247—255.

8. *Uhlig K., Tosch M., Bittrich L., Leipprand A., Dey S., Spickenheuer A., Heinrich G.* Meso-scaled finite element analysis of fiber reinforced plastics made by tailored fiber placement // *Compos. Struct.* — 2016. — Vol. 143. — P. 53—62.

9. *Uhlig K., Bittrich L., Spickenheuer A., Almeida Jr. J. H. S.* Waviness and fiber volume content analysis in continuous carbon fiber reinforced plastics made by tailored fiber placement // *Compos. Struct.* — 2019. — Vol. 222. — p. 110910

10. *Koricho E. G., Khomenko A., Fristedt, Mahmoodul H.* Innovative tailored fiber placement technique for enhanced damage resistance in notched composite laminate // *Compos. Struct.* — 2015. — Vol. 120. — P. 378—385.

11. *Турусов Р. А.* Адгезионная механика — М.: НИУ МГСУ, 2016. — 230 с.

12. *Turusov R. A.* Elastic and thermal behavior of a layered structure I. Experiment and theory // *Mech. Compos. Mater.* — 2014. — Vol. 50, No 6. — P. 1119—1130.

13. *Turusov R. A.* Elastic and thermal behavior of a layered structure. II. Experiment and theory // *Mech. Compos. Mater.* — 2015. — Vol. 51, No 1. — P. 123—131.

14. *Метлов В. В., Турусов Р. А.* О формировании напряжений при фронтальном отверждении композитов // *Механика композит. материалов.* — 1985. — № 6. — С. 1079—1085.

15. *Турусов Р. А., Вуба К. Т., Фрейдин А. С.* Исследование влияния температурно-влажностных факторов на прочностные и деформационные свойства клеевых соединений древесины со стальной арматурой // *Тр. ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко.* — 1972. — Вып. 24 — С. 86—124.

16. *Турусов Р. А., Сакварелидзе Ж. Д., Малинский Ю. М., Вуба К. Т.* Растяжение составных стержней с учетом изгиба как модели клеевых соединений // *Тр. ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко.* — 1975. — Вып. 53. — С. 72—80.

17. *Турусов Р. А., Вуба К. Т., Фрейдин А. С. и др.* Некоторые аспекты исследования пограничных слоев в системах полимер—твердое тело // *Термодинамические и структурные свойства граничных слоев полимеров.* — Киев: Наукова думка, 1976. — С. 88—94.

18. *Турусов Р. А., Вуба К. Т.* Роль неоднородного напряженного состояния в оценке прочности моделей адгезионных соединений // *Физика прочности композиционных материалов.* — Л.: ЛИЯФ, 1976. — С. 75—84.

19. *Турусов Р. А., Вуба К. Т.* Напряженное состояние и особенности оценки прочности адгезионных соединений при сдвиге // *Физика и химия обработки материалов.* — 1979. — № 5. С. 87—94.

20. Турусов Р. А., Вуба К. Т. Напряженное состояние и особенности оценки прочности адгезионных соединений при отрыве // Физика и химия обработки материалов. — 1980. — № 2. С. 108—115.

21. Рабинович А. Л. Введение в механику армированных полимеров. — М.: Наука, 1970. — 482 с.

22. Ржаницын А. Р. Теория составных стержней строительных конструкций. — М.: Гос. изд-во строит. лит-ры, 1948. — 260 с.

Поступила в редакцию 06.04.2021

Окончательный вариант поступил 16.11.2021

Received Apr. 6, 2021 (Nov. 16, 2021)

*Г. И. Львов**

*Национальный технический университет “Харьковский политехнический институт”,
Харьков, Украина*

ЧИСЛЕННАЯ ГОМОГЕНИЗАЦИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

*G. I. Lvov**

NUMERICAL HOMOGENIZATION OF THE THERMOPHYSICAL PROPERTIES OF FIBROUS COMPOSITES

Keywords: fibrous composites, thermal conductivity, thermal expansion, micromodeling

The paper presents a complex numerical technique that allows one to determine the tensors of thermal conductivity and thermal expansion for fibrous composites from a unified standpoint and using one software. The advantage of the technique developed is that it allows one to determine the thermal microstresses. Such stresses, self-balanced within representative volumes, arise even in a uniformly heated body whose displacements are not limited by external constraints. Consideration of the microstresses is important in a detailed analysis of the fracture mechanics of composite materials.

Ключевые слова: композиты волокнистые, теплопроводность, расширение температурное, микромоделирование

Представлена комплексная численная методика, позволяющая с единых позиций и на одном программном обеспечении определять компоненты тензоров теплопроводности и температурного расширения волокнистых композитов. Преимуществом разработанной методики является возможность определения температурных микронапряжений. Такие самоуравновешенные в пределах представительных объемов напряжения возникают даже в равномерно нагретом теле, перемещения которого не

*Автор, с которым следует вести переписку: lvovdpm@ukr.net
Corresponding author: lvovdpm@ukr.net

ограничиваются внешними связями. Учет микронапряжений важен при детальном анализе механики разрушения композитных материалов.

Введение

Композитные материалы наряду с высокими механическими характеристиками обладают и уникальными теплофизическими свойствами, в силу чего композиты находят всевозрастающее применение в самых передовых технологиях. Композитные структуры с низкой теплопроводностью используются в качестве изоляционных материалов в космических аппаратах. В системах охлаждения элементов микроэлектроники применяются композиты с заданными соотношениями коэффициентов теплопроводности в разных направлениях. Варьируя структуру армирования, можно изменять компоненты тензора температурного расширения вплоть до нулевых и отрицательных значений. Такие композиты применяются в прецизионных оптических системах, работающих в условиях высоких перепадов температур окружающей среды. Эти практические потребности вызывают значительный интерес к исследованиям теплофизических свойств композитных материалов. Большое значение в этом направлении имеют методы гомогенизации свойств теплопроводности и температурного расширения композитов. Так, в работе [1] предложена методика определения эффективных характеристик теплопроводности композитов с периодической структурой, с произвольным количеством фаз и любой формой включений. Процедура основана на использовании рядов Фурье для представления периодических изменяющихся полей температур и тепловых потоков. Подробно описаны микроструктурные особенности моделирования для трехфазных композитов с различными видами армирования. В качестве примеров рассмотрен композит, однонаправленно армированный двумя семействами волокон из разных материалов, а также трехфазная структура: матрица, круглое волокно и кольцевая переходная зона. Аналитические результаты разработанной методики сравнивали с численными результатами, полученными методом конечных элементов, а также с экспериментальными данными других авторов. Эти сравнения подтвердили эффективность методики для расчета макроскопических характеристик теплопроводности периодических композитов с множественными включениями.

В работе [2] предложена математическая модель прогнозирования эффективной теплопроводности композитов, упрочненных эллипсоидальными включениями. Трехфазная структура включает матрицу, включения и покрытия в форме коаксиальных эллипсоидов. На основе метода функций Грина предложена формулировка задачи, учитывающая несовершенство границы между включениями и окружающей матрицей. На основе решения интегрального уравнения получены аналитические выражения для определения эффективной теплопроводности и теплоемкости композита. Полученные результаты сравнивали с известными точными решениями для

отдельного цилиндрического и сферического включений. Способность модели хорошо описывать теплопроводность композитов с высокой объемной долей включений была проверена сравнением с численными результатами других авторов. Показано, что полученные результаты применимы и для высокой объемной доли включений. Отмечено также, что неидеальный интерфейс существенно влияет на эффективную проводимость композитов.

Упрощенная расчетная модель теплопроводности предложена в [3] для композитов, упрочненных частицами. Рассмотрены случаи с высокой объемной долей частиц, случайно распределенных в матрице. Реальная геометрическая структура заменяется множеством кубиков наполнителя и матрицы. Особенностью математической модели является учет взаимосвязи отдельных элементов наполнителя благодаря введению цепочек теплопередачи. Для математического задания таких цепочек вводятся специальные матрицы. Для реализации предложенной модели разработана программа в пакете MATLAB, где в качестве исходных данных задаются коэффициенты теплопроводности матрицы и наполнителя, а также структура путей теплопередач. В качестве примера проведены расчеты теплопроводности композита, в котором алюминиевый порошок является частицей наполнителя в базовой матрице эпоксидной смолы. Результаты прогнозирования этой модели достаточно хорошо согласуются с экспериментальными результатами в широком диапазоне температур при объемной доле наполнителя более 30 %.

Алюминий широко используется в различных отраслях современной промышленности. В некоторых конструкциях его применение сдерживается его низкой теплопроводностью. Перспективным направлением улучшения теплофизических характеристик алюминиевых композиций является упрочнение многослойными углеродными нанотрубками. В работе [4] предложена методика гомогенизации свойств теплопроводности композитов с алюминиевой матрицей, армированных углеродными нанотрубками. Созданы многомасштабные конечно-элементные модели, включающие нанотрубки, межфазные зоны и алюминиевую матрицу. Для численных исследований построены различные конфигурации упрочнения, включая случайно расположенные трубки, равномерно ориентированные, многоуровневые, связанные и объединенные в сеть. Углеродные нанотрубки моделируют как трансверсально-изотропные (в отношении теплопроводности) цилиндры, интерфейсную зону — в виде коаксиального полого цилиндра, идеально контактирующего с нанотрубкой и матрицей. Представительный объем включал в себя 100 нанотрубок, которые не контактируют друг с другом. Конечно-элементный анализ стационарной теплопроводности представительного объема выполнен в программном комплексе ABACUS. Обработка результатов этого анализа позволила установить влияние объемного содержания нанотрубок на коэффициенты теплопроводности для разных конфигураций упрочнения.

Углеродные нанотрубки обладают высокой теплопроводностью и поэтому используются в качестве наполнителей для полимерных композитов. В

работе [5] проведено многомасштабное моделирование процессов теплопередачи в композитах с эпоксидной матрицей, армированной углеродными нанотрубками. Для моделирования на наноуровне построены атомистические модели эпоксидного полимера и наполнителя, на которых выполнены исследования методами классической молекулярной динамики. На этом этапе основное внимание уделено оценке межфазной теплопроводности между полимером и наполнителями. На макроскопическом уровне проведена оценка эффективной теплопроводности композита путем анализа репрезентативных объемов. Углеродные трубки моделировали цилиндрами, хаотически распределенными в пределах кубического массива эпоксидной матрицы. Задачи стационарной теплопроводности решали методом конечных элементов в программном комплексе ABAQUS. Численное моделирование процессов теплопередачи в трех ортогональных направлениях показало, что коэффициенты теплопроводности неодинаковы разных направлениях. Учитывая стохастический характер ориентации нанотрубок, авторы ограничились вычислением среднего значения коэффициента теплопроводности. Исследование влияния объемной доли нанонаполнителей на эффективную теплопроводность показало, что для нанокомпозитов с более высокой объемной долей наполнителей влияние диаметра трубок на повышение теплопроводности становится более значительным.

Технология создания композитных пленок, содержащих наноалмазы, на основе восстановленного оксида графена описана в [6]. Введение наноалмазов обеспечивает чрезвычайно высокую теплопроводность и возможность целенаправленно изменять анизотропию свойств теплопроводности пленок. Теплопроводность пленок в плоскостном и поперечном направлениях измеряли экспериментально методом лазерной вспышки. Исследования показали, что гибридные композиции обладают высокой степенью анизотропии свойств теплопроводности. Для разных пленочных структур коэффициент теплопроводности в плоскости пленок находился в пределах 500—1900 Вт/(м·К), а коэффициент теплопроводности в поперечном направлении оказался значительно меньше — 0,7—1,3 Вт/(м·К). Отношение компонентов тензоров теплопроводности в продольном и поперечном направлениях для конкретных типов композиций находилось в пределах 500—5000 и несущественно зависело от температуры испытаний.

Для предсказания эффективных физических свойств композитных материалов используют современные технологии искусственного интеллекта. Технологии обработки больших данных в сочетании с методами искусственного интеллекта применены в [7] для решения задач гомогенизации свойств теплопроводности композитных материалов. На этапе подготовки данных для обучения нейронных сетей использовали двухуровневый подход к гомогенизации плетеных композитов. На микроуровне определяли эффективные характеристики прядей, а на макроуровне находили компоненты тензора теплопроводности плетеного композита. Задачи стационарной теплопроводности представительной ячейки решали вариационно-асимптотическим методом и методом конечных элементов. В качестве примеров геометриче-

ской структуры упрочнения рассмотрены ткани полотняного, саржевого и сатинового плетения. Наборы данных численного моделирования использованы для обучения моделей нейронных сетей прогнозированию эффективной теплопроводности этих трех типов тканых композитов. Модели нейронной сети имеют входные характеристики разных типов: непрерывные величины — объемная доля волокна, геометрические параметры пряжи и физические свойства компонентов; дискретные входные данные — типы плетения. После процессов обучения модели искусственных нейронных сетей продемонстрировали хорошее согласование с результатами численного моделирования теплопроводности, а также более высокую вычислительную эффективность.

В работе [8] для прогнозирования эффективной теплопроводности композитных и пористых материалов применяли методы машинного обучения. В качестве исходных данных для обучения использовали структуры, сгенерированные [9] для пористых материалов со случайным распределением включений. При задании свойств матрицы и включений их предполагали изотропными, а соотношение между коэффициентами теплопроводности компонентов изменяли в широких пределах. Эффективные коэффициенты теплопроводности сгенерированных структур вычисляли методом решеток Больцмана. В работе использовали три методики машинного обучения: сверточную нейронную сеть, регрессию опорных векторов и регрессию гауссовского процесса. На большом числе примеров продемонстрирована возможность быстрого прогнозирования эффективной теплопроводности стохастически армированных композитов.

Численная методика предсказания свойств температурного расширения тканых композитов описана в [10]. Основное внимание уделено приёмам выделения представительных ячеек. Наряду с минимально возможными периодически повторяющимися ячейками рассмотрены и ячейки, состоящие из нескольких минимальных. Условия периодичности перемещений сформулированы для трансляционной, отражательной и поворотной симметрии структуры композита. При определении эффективных коэффициентов температурного расширения пряжей их рассматривали как однонаправленно армированные композиты с гексагональной упаковкой волокон. Граничные условия для представительных ячеек выведены на основе предположения об однородном поле макродеформаций, что возможно при равномерном тепловом нагружении. Рассмотрено несколько вариантов плетеных композитов, армированных полотняной и сатиновой тканью. Термомеханический анализ представительных ячеек выполнен методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS. В качестве результатов термомеханического анализа приведены распределения перемещений. Информация о напряженном состоянии приведена только в виде эквивалентных напряжений фон Мизеса.

Особенности формирования условий периодичности для конечно-элементного анализа температурного расширения композитов рассмотрены в работе [11] на разных видах представительного объема. Для композитов,

армированных сферическими частицами, построены представительные объемы с регулярно распределенными сферическими частицами. Рассмотрены четыре группы структур в зависимости от расположения частиц внутри объема. Для композитов, армированных произвольно распределенными цилиндрическими волокнами, геометрические модели генерируются с помощью специального алгоритма. Этот алгоритм обеспечивает стохастическое распределение и ориентацию волокон, но исключает пересечение волокон. При моделировании тканых композитов пряжи имеют эллипсоидальное поперечное сечение, а полотняное плетение образуется синусоидальными волнами прядей. Система условий периодичности гарантирует непрерывность напряжений и деформаций на противоположных поверхностях представительного объема для композитов со сферическими частицами и тканых композитов. Для структур, армированных хаотично расположенными волокнами, предложенный алгоритм обеспечивает энергетический баланс и самоуравновешенность температурных макронапряжений. Результаты сравнения с экспериментальными данными и результатами других численных методов подтвердили возможность прогнозировать коэффициенты температурного расширения предложенным алгоритмом.

Влияние термического расширения на процесс усадки композита с полистирольной матрицей, армированной стекловолокнами, теоретически и экспериментально исследовано в [12]. Теоретическая оценка модулей упругости и коэффициентов температурного расширения выполнена с использованием моделей Мори—Танака для случая регулярной упаковки волокон, имеющих эллипсоидальное поперечное сечение. Для экспериментального исследования усадки литьем под давлением изготавливали однонаправленно армированные композитные образцы. Внутреннюю структуру образцов исследовали методом микрокомпьютерной томографии. Сопоставление теоретических предсказаний по моделям Мори—Танака с результатами экспериментов показало, что прогнозы для эффективных коэффициентов температурного расширения композитов менее точны, чем прогнозы эффективных модулей упругости. Установлено, что объемное содержание волокон и соотношение размеров поперечного сечения волокна существенно влияют как на модули упругости, так и на коэффициенты температурного расширения композитов.

Теоретическое проектирование структур композитных материалов позволяет создавать модели, обладающие уникальными свойствами. К таким необычным характеристикам относится отрицательный коэффициент температурного расширения и отрицательный коэффициент Пуассона. В работе [13] построены плоские и пространственные модели решетчатых структур, состоящих из стержневых элементов. Для описания деформированного состояния этих решеток при механическом и температурном нагружении выведены упрощенные зависимости. Различные комбинации материала решетчатого армирования и его геометрической структуры приводит к изменению коэффициентов температурного расширения в желаемом направлении. В дополнение к приближенному аналитическому

анализу выполнено и конечно-элементное моделирование в программном комплексе ABAQUS. Линейные задачи термоупругого деформирования решетчатых структур решали с использованием 8-узловых линейных шестигранных элементов. Численный анализ выполняли на примере решетчатой структуры, состоящей из алюминиевых и медных стержней. В результате многовариантных расчетов получены зависимости коэффициентов температурного расширения для разных направлений, что позволяет спроектировать систему с отрицательными коэффициентами.

Многоуровневое моделирование теплового расширения композитов с карбидокремниевой матрицей, армированной углеродными волокнами, выполнено в работе [14] с учетом пористости керамики. На микроуровне углеродную пряжу рассматривали как однонаправленно армированный композит с разными схемами упаковки волокон. Построены периодически повторяющиеся ячейки с квадратной и гексагональной упаковками, а также для случайного расположения волокон. Для моделирования пористости в керамической матрице созданы пять видов представительных объемов с цилиндрическими и сферическими полостями. Геометрические модели мезоуровня включали три семейства взаимно перпендикулярных прядей, матрицу и межфазные зоны. Геометрическое моделирование выполнено с применением системы SOLIDWORKS, а задачи термоупругости решали в конечно-элементном программном комплексе ABAQUS. В конечно-элементном анализе периодические граничные условия реализованы путем задания линейных многоточечных уравнений связи. В результате численных исследований установлено, что морфологические характеристики пустот слабо влияют на свойства матрицы, но увеличение объема включений существенно снижает коэффициенты температурного расширения.

Для создания материалов с низкими коэффициентами теплового расширения и малой диэлектрической проницаемостью перспективными являются полимерные композиты с керамическими наполнителями. В [15] предложена технология изготовления композита, состоящего из эпоксидной смолы, нитевидных кристаллов оксида цинка и пористой оксид алюминиевой керамики. Сетчатые пористые композиты с низким содержанием керамики были приготовлены с использованием реплик полимерной губки и методов вакуумной пропитки. Физические свойства нового материала исследовали экспериментально. Прочность при изгибе и модуль упругости определяли по результатам испытаний образцов при трехточечном изгибе с использованием универсальной испытательной установки (СМТ6104, Китай). Коэффициенты температурного расширения рассчитывали на основе обработки кривых дилатометрии, полученных с помощью дилатометра (DIL 402PC, Германия). Установлено, что сетчатая структура эффективно уменьшает тепловое сопротивление за счет образования множества каналов теплопроводности в матрице даже при низкой объемной доле наполнителей.

Приведенный краткий обзор показывает, что для гомогенизации композитов привлекаются различные аналитические и численные методы. Более универсальными представляются численные методы, реализуемые с применением современных программных комплексов.

1. Теплопроводность и термоупругость эквивалентного гомогенного анизотропного материала

Большое распространение получили композитные материалы, имеющие регулярную структуру. В таких композитах можно выделить периодически повторяющийся представительный объем, размеры которого значительно меньше характерных размеров изделий из композитных материалов. Внутренняя структура представительного объема является гетерогенной, а составляющие её компоненты обладают разными физическими свойствами. Концепция гомогенизации предусматривает замену внутренней структуры композита некоторым эквивалентным однородным анизотропным материалом. Для этого реальные (микроскопические) параметры состояния и свойства в пределах представительного объема заменяются средними по объему (макроскопическими) характеристиками

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{V} \iiint Q dv.$$

В задачах рассматриваемого класса в качестве параметров Q используют скалярные, векторные и тензорные характеристики термомеханического состояния представительного объема.

В линейном приближении, когда можно пренебречь изменением плотности (и теплоемкости) в результате теплового расширения, задача нестационарной теплопроводности однородного анизотропного тела может быть описана уравнением [16], записанным относительно средних параметров:

$$\langle C \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} = K_{ij} \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial x_i \partial x_j} + \langle F \rangle. \quad (1)$$

Здесь $\langle C \rangle$, $\langle T \rangle$, $\langle F \rangle$ — средние по представительному объему теплоемкость, температура и мощность внутреннего источника тепла; K_{ij} — компоненты тензора теплопроводности эквивалентного однородного материала. Компоненты вектора теплового потока в анизотропном материале определяем как [16]

$$\langle q_i \rangle = K_{ij} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j}. \quad (2)$$

Уравнения (1) должны быть дополнены начальными и граничными условиями, которые должны задаваться относительно средних значений температур или тепловых потоков.

Полная система уравнений термоупругости эквивалентного однородного анизотропного тела также должна быть записана относительно средних (макроскопических) характеристик напряженно-деформированного состояния:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \langle \sigma_{ij} \rangle + \langle X_i \rangle = 0,$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_j \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i \rangle \right), \quad (3)$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = a_{ijkl} \langle \sigma_{kl} \rangle + a_{ij} \langle T \rangle.$$

Здесь $\langle \sigma_{ij} \rangle$, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ — компоненты тензоров средних напряжений и деформаций; $\langle u_j \rangle$ — компоненты вектора средних перемещений; a_{ijkl} , a_{ij} — эффективные упругие постоянные и эффективные компоненты тензора температурного расширения композита.

Система уравнений (3) дополняется граничными условиями, задаваемыми относительно средних напряжений или перемещений в зависимости от условий закрепления на поверхности тела.

Для выполнения термомеханического анализа элементов конструкций из композитных материалов необходимо знать эффективные характеристики упругости, теплопроводности и температурного расширения композитов. Непосредственное определение этих параметров путем проведения физических экспериментов является весьма трудоемкой и не всегда осуществимой в полном объеме задачей. Альтернативная возможность заключается в теоретическом предсказании таких свойств на основе известных характеристик компонентов и структуры композита. В настоящей работе эта возможность реализована путем численного моделирования тепловых и деформационных процессов на микроуровне, т.е. в пределах представительного объема композита.

2. Численная процедура гомогенизации свойств теплопроводности композитов

Гомогенизация теплофизических свойств композитных материалов выполнена на трех типах углепластика. Рассмотрены два варианта однонаправленного армирования: с ортогональной и гексагональной упаковкой волокон, а также композит, армированный в двух перпендикулярных направлениях (рис. 1).

Для этих типов композита эквивалентный однородный материал является ортотропным (или трансверсально-изотропным). Если совместить координатные плоскости ортогональной декартовой системы координат с плоскостями симметрии композита, то тензор теплопроводности будет иметь диагональный вид. Тогда зависимость для вектора средних тепловых потоков удобно представить в матричной форме:

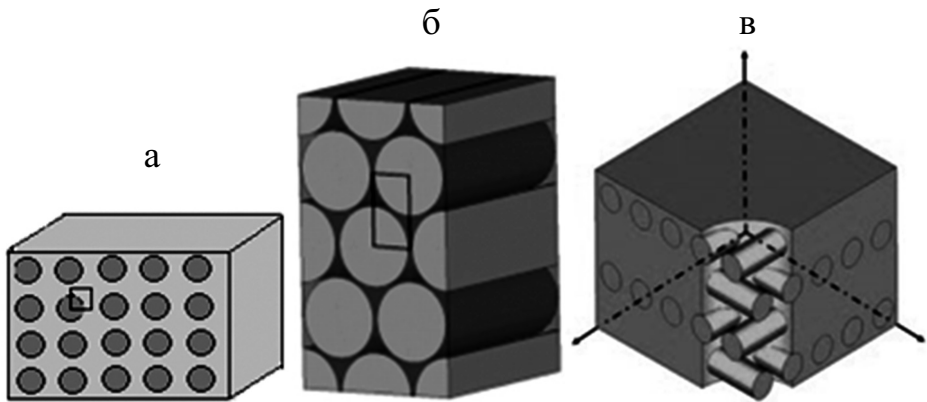


Рис. 1. Армирование однонаправленными (а, б) и взаимно перпендикулярными (в) волокнами.

$$\begin{bmatrix} \langle q_x \rangle \\ \langle q_y \rangle \\ \langle q_z \rangle \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \langle T \rangle \\ \frac{\partial}{\partial y} \langle T \rangle \\ \frac{\partial}{\partial z} \langle T \rangle \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Для определения компонентов тензора теплопроводности выполнена серия численных решений задачи стационарной теплопроводности для представительного объема композита. Матрицу и волокна рассматривали как изотропные. В областях, занятых ими, распределения температур удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

На границах между волокнами и матрицей задавали условия непрерывности температур и тепловых потоков

$$T_m = T_f, \quad K_m \frac{\partial T_m}{\partial n} = K_f \frac{\partial T_f}{\partial n},$$

где K_m , K_f — коэффициенты теплопроводности матрицы и волокон; n — направление нормали к границе между матрицей и волокном. Условия на границах представительного объема задавали таким образом, чтобы в каждом численном решении имитировался равномерный в среднем тепловой поток в неограниченном массиве композита по одному из направлений.

Для однонаправленно армированных композитов решали двухмерную задачу теплопроводности, а для ортогонально армированного композита

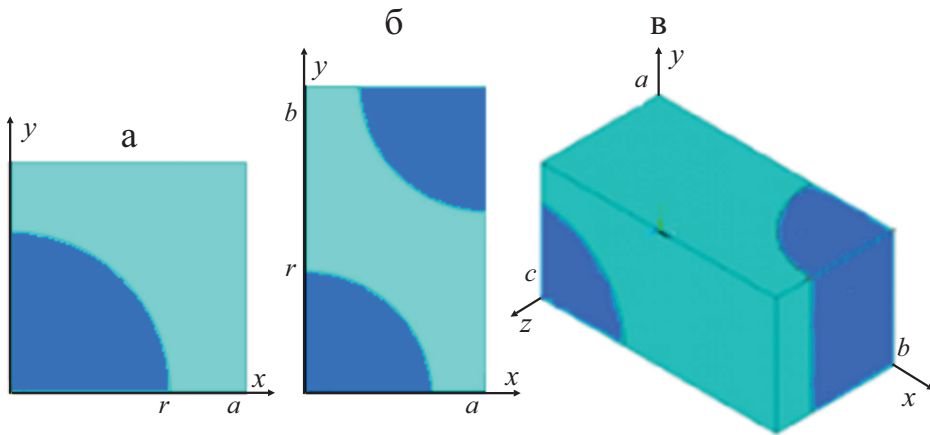


Рис. 2. Представительные ячейки для трех видов композита: квадратная (а), гексагональная упаковка волокон (б), ортогональное армирование (в).

та — трехмерную задачу. Области исследования для трех типов композита показаны на рис. 2.

Задачу стационарной теплопроводности решали методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS. Все рассмотренные модели композитов состоят из эпоксидной матрицы и углеродных карбонизированных волокон. Физические свойства матрицы и волокон, необходимые для решения задач теплопроводности и термоупругости, представлены в табл. 1.

2.1. Определение коэффициентов теплопроводности однонаправленно армированных композитов. *Квадратная упаковка волокон.* При квадратной упаковке волокон композит обладает одинаковыми свойствами теплопроводности в поперечном направлении $K_x = K_y$. Эти коэффициенты определяли по результатам численного моделирования равномерного (в среднем) теплового потока по направлению оси Oy . Такому макропроцессу в композите соответствуют следующие условия на границах представительной ячейки:

$$y = 0, T = 0; y = b, T = 100 \text{ } ^\circ\text{C}; x = 0, q_x = 0; x = a, q_x = 0.$$

Табл. 1

Физические свойства матрицы и волокон

Параметр	Волокно	Матрица
Модуль упругости E , ГПа	74,8	2,7
Коэффициент Пуассона ν	0,2	0,4
Коэффициент температурного расширения α , $1/^\circ\text{C}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-5}$
Коэффициент теплопроводности K , Вт/(м \cdot °C)	20	0,59

Эти условия задают средние значения компонентов градиента температуры в композите

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle = 100 \text{ } ^\circ\text{C/м}, \left\langle \frac{\partial T}{\partial x} \right\rangle = 0.$$

Для построения конечно-элементной модели использовали четырех-угольный конечный элемент PLANE77 с восемью узлами. Модель состояла из 16 122 элементов и 16 321 узла. Расчеты проводили для нескольких вариантов процентного содержания волокон композита данного типа. В этих вариантах стороны квадрата представительной ячейки оставались постоянными — $a = b = 1$, а относительный радиус r/a волокна изменялся.

Распределения температуры и теплового потока q_y при относительном радиусе волокна $r/a = 0,95$ показаны на рис. 3.

После решения задачи стационарной теплопроводности в постпроцессоре программного комплекса ANSYS вычисляли среднее значение теплового потока $\langle q_y \rangle$, а затем по соотношениям (4) находили компоненты тензора теплопроводности $K_y = K_x$. Для определения коэффициента теплопроводности в направлении армирования K_z можно воспользоваться правилом смесей

$$K_z = (K_f S_f + K_m S_m) / (ab), \quad (5)$$

где S_f , S_m — площадь поперечного сечения волокна и матрицы в представительной ячейке.

Гексагональная упаковка волокон. В отношении макроскопических свойств теплопроводности композиты такой структуры являются трансверсально-изотропными. Тензорный эллипсоид теплопроводности [16] является эллипсоидом вращения, ось симметрии которого совпадает с направлением армирования. В принятой системе координат тензор теплопроводности имеет диагональный вид с двумя независимыми компонен-

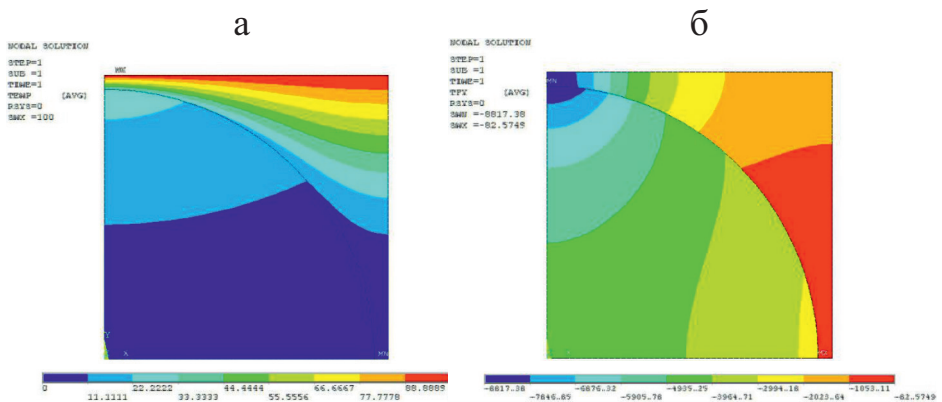


Рис. 3. Распределение температуры (а) и теплового потока (б) для квадратной упаковки.

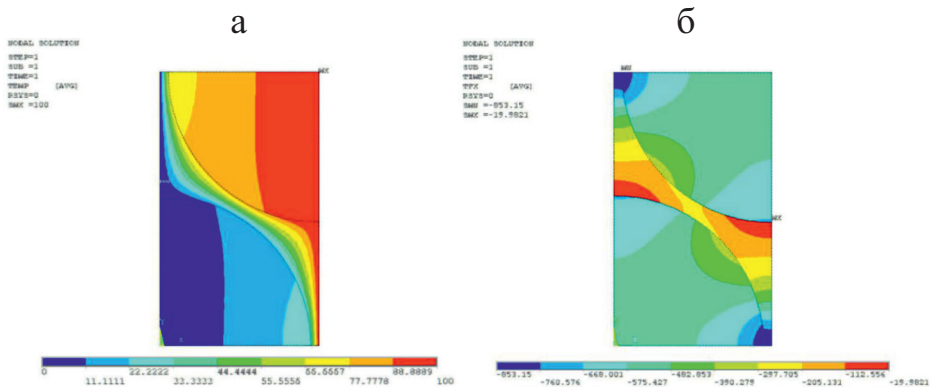


Рис. 4. Распределение температуры (а) и теплового потока (б) для гексагональной упаковки.

тами $K_x = K_y$, K_z . Для определения компонент $K_x = K_y$ выполняется численное решение двумерной задачи стационарной теплопроводности в пределах представительной ячейки, показанной на рис. 2—б. Равномерный в среднем тепловой поток в композите по направлению оси Ox моделируется заданием граничных условий

$$x = 0, T = 0; \quad x = a, T = 100 \text{ }^\circ\text{C}; \quad y = 0, q_y = 0; \quad x = b, q_y = 0.$$

Серию вычислений проводили, как и для квадратной упаковки волокон, методом конечных элементов при разных значениях относительного радиуса r/a волокон.

Распределения температуры и теплового потока q_x при относительном радиусе волокна $r/a = 0,95$ показаны на рис. 4. Среднее значение теплового потока $\langle q_x \rangle$ вычисляли в постпроцессоре программного комплекса ANSYS, а по соотношениям (4) находили компоненты тензора теплопроводности $K_x = K_y$. Последний компонент тензора теплопроводности рассчитывали по правилу смесей (5).

2.2. Определение коэффициентов теплопроводности ортогонально армированного композита. Численная гомогенизация свойств теплопроводности композита, армированного в двух ортогональных направлениях, требует решения пространственных задач стационарной теплопроводности для представительного объема, показанного на рис. 2—в. Размеры выделенного объема $b = 2$, $a = c = 1$. Для тепловых потоков направления вдоль осей Oz и Oy являются равноправными, а компоненты тензора теплопроводности K_z и K_y равны. Для моделирования равномерного (в среднем) теплового потока по направлению Ox на границах представительного объема заданы условия

$$x = 0, T = 0; \quad x = b, T = 100 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$y = 0, q_y = 0; \quad y = a, q_y = 0;$$

$$z = 0, q_z = 0; \quad z = c, q_z = 0.$$

Такие условия соответствуют средним значениям вектора градиента температуры в композите

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x} \right\rangle = 50 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{м}, \quad \left\langle \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle = 0.$$

Для построения конечно-элементной модели использовали тетраэдральный 10-узловой конечный элемент SOLID87. Модель состояла из 12 936 элементов с 19 300 узлами. Расчеты проводили для нескольких вариантов процентного содержания волокон при разных значениях относительного радиуса волокон r/a . Распределения температуры и теплового потока q_x при $r/a = 0,95$ показаны на рис. 5.

После подсчета в постпроцессоре среднего в представительном объеме значения теплового потока $\langle q_x \rangle$ из соотношений (4) определяли первый компонент K_x тензора теплопроводности.

Для моделирования равномерного в среднем теплового потока по направлению оси Oy выполняли численное решение задачи стационарной теплопроводности при условиях на границе представительного объема

$$x = 0, q_x = 0; \quad x = b, q_x = 0;$$

$$y = 0, T = 0; \quad y = a, T = 100 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$z = 0, q_z = 0; \quad z = c, q_z = 0.$$

Такие условия соответствуют следующим средним значениям вектора градиента температуры в композите:

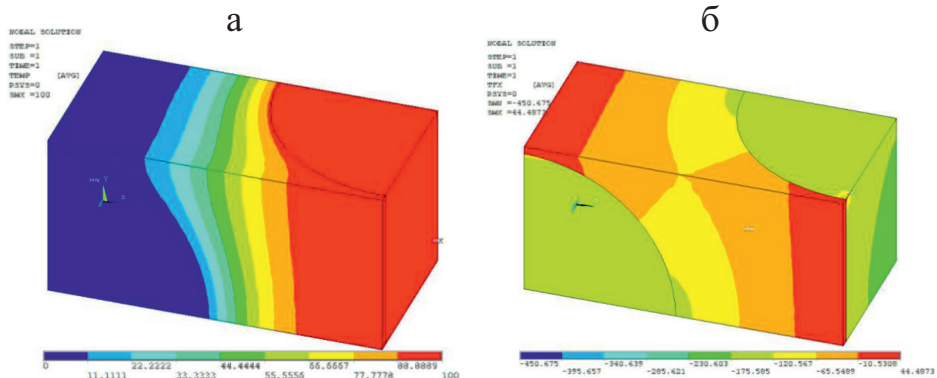


Рис. 5. Распределение температуры (а) и теплового потока q_x (б) для ортогонально армированного композита.

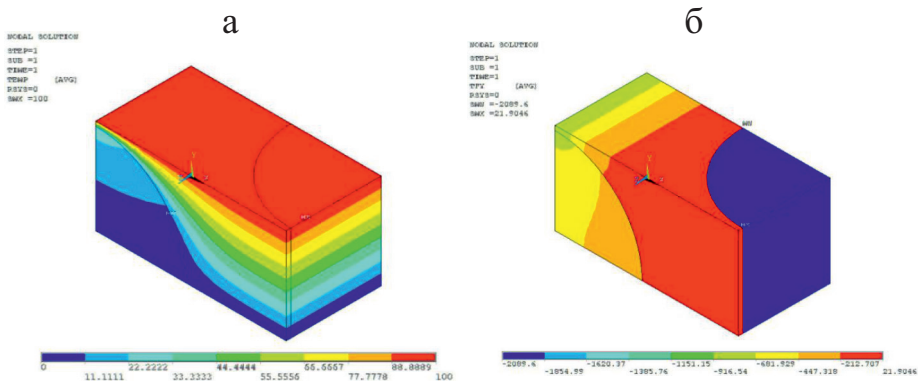


Рис. 6. Распределение температуры (а) и теплового потока q_y (б) для ортогонально армированного композита.

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle = 100 \text{ } ^\circ\text{C/м}, \quad \left\langle \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle = 0.$$

Результаты решения этой модельной задачи представлены на рис. 6, где показаны распределения температуры и теплового потока q_y .

На основе решения этой задачи определялись компоненты тензора теплопроводности $K_y = K_z$.

Результаты численной гомогенизации характеристик теплопроводности однонаправленно и ортогонально армированных композитов с разным объёмным содержанием волокон Ψ представлены в табл. 2.

2.3. Температурное расширение и тепловые микронапряжения в композитах. Одним из проявлений анизотропии свойств композитных материалов является неодинаковость температурного расширения в разных направлениях. В рамках концепции гомогенизации средние (макроскопические) температурные деформации определяются тензором второго ранга α_{ij} . Для ортотропных структур в системе координат, совпадающей

Табл. 2

Коэффициенты теплопроводности для трех видов композитов (Вт/(м·°C))

r/a	Квадратная упаковка			Гексагональная упаковка			Ортогональная упаковка		
	$K_x=K_y$	K_z	Ψ	$K_x=K_y$	K_z	Ψ	K_x	$K_y=K_z$	Ψ
0,6	1,02	6,078	0,283	1,115	6,927	0,326	1,012	3,553	0,283
0,7	1,268	8,06	0,385	1,441	9,215	0,444	1,248	4,672	0,385
0,8	1,689	10,347	0,503	2,024	11,856	0,58	1,632	6,036	0,503
0,9	2,591	12,938	0,636	3,344	14,848	0,735	2,374	7,803	0,636
0,95	3,684	14,348	0,709	5,004	16,477	0,818	3,141	9,072	0,709

с плоскостями симметрии материала, средние температурные деформации сдвига отсутствуют, а линейные относительные удлинения задаются диагональным тензором второго ранга

$$\begin{bmatrix} \langle \varepsilon_x^T \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \varepsilon_y^T \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \varepsilon_z^T \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_z \end{bmatrix} \times \langle T \rangle. \quad (6)$$

Для численного определения компонентов тензора температурного расширения композита разработана методика, позволяющая находить их на основе известных свойств матрицы и волокон. Предлагаемая методика заключается в численном решении специально сформулированных краевых задач термоупругости для представительных объемов композита. Преимущество подхода — возможность определения тепловых микронапряжений, возникающих в пределах представительного объема композита. Эти микронапряжения являются самоуравновешенными и появляются даже при отсутствии макронапряжений в композите. В частном случае, когда тело нагрето равномерно и не ограничено внешними связями, микронапряжения возникают из-за различия коэффициентов температурного расширения матрицы и волокон. Именно такое состояние необходимо смоделировать для определения компонентов тензора температурного расширения и тепловых микронапряжений. При таком моделировании во всем представительном объеме задается постоянная температура (принята равной 100 °С), а на границах объема задаются перемещения по специальной итерационной процедуре, обеспечивающей возможность расширения представительного объема без искажения его формы при выполнении условий самоуравновешенности микронапряжений. В рассмотренных далее примерах представительный объем имеет форму прямоугольного параллелепипеда до и после нагревания, а средние по объёму напряжения равны нулю.

Однонаправленный композит с квадратной упаковкой волокон. Решение задач термоупругости для представительной ячейки, показанной на рис. 2—а, выполняли с применением четырёхугольного конечного элемента PLANE 182 с четырьмя узлами. При анализе двухмерных задач использовали опцию — обобщенное плоское напряженное состояние при отсутствии осевого усилия, что эквивалентно требованию $\langle \sigma_z \rangle = 0$. Для данного типа композита направления x и y эквивалентны, поэтому для нахождения всех коэффициентов линейного расширения достаточно провести один численный эксперимент.

На границах ячейки $x = 0$ и $y = 0$ задавали условия симметрии, а на противоположных границах —

$$x = a, u_x = C, \tau_{xy} = 0; \quad y = b, u_y = C, \tau_{xy} = 0.$$

Значение константы C находили методом последовательных приближений до тех пор, пока среднее напряжение $\langle \sigma_x \rangle$ (как и $\langle \sigma_y \rangle$) не станет пренебрежимо малым. В качестве критерия достижения заданной точности использовали условие $\langle \sigma_x \rangle < \varepsilon \langle \sigma_x^0 \rangle$, где $\langle \sigma_x^0 \rangle$ — начальное приближение при $C = 0$. Физический смысл начального приближения соответствует нагреванию композита без возможности расширения. В расчетах параметр точности принимали равным $\varepsilon = 10^{-2}$.

По достижении сходимости итерационного процесса константа C позволяет определить среднюю температурную деформацию $\langle \varepsilon_x^T \rangle$, а с помощью соотношений (6) находят компоненты $\alpha_x = \alpha_y$. При анализе обобщенного плоского деформированного состояния среди результатов известна деформация $\langle \varepsilon_z^T \rangle$, что позволяет определить третий компонент α_z тензора температурного расширения.

Распределение тепловых микронапряжений в пределах представительной ячейки для композита с радиусом волокна $r/a=0,95$ показано на рис. 7.

Однонаправленный композит с гексагональной упаковкой волокон. Термоупругие свойства эквивалентного гомогенного материала для однонаправленно армированного композита удовлетворяют условиям трансверсальной изотропии. Плоскость изотропии совмещена с координатной плоскостью xOy , поэтому средние температурные деформации $\langle \varepsilon_x^T \rangle$ и $\langle \varepsilon_y^T \rangle$ равны между собой, как и два компонента тензора температурного расширения композита $\alpha_x = \alpha_y$. Для их определения выполняется решение задачи термоупругости для представительной ячейки, показанной на рис. 2—б. Для моделирования трансверсально-изотропного в среднем температурного расширения на границах ячейки задавали условия

$$x = a, u_x = C, \tau_{xy} = 0; \quad y = b, u_y = \sqrt{3}C, \tau_{xy} = 0,$$

а на линиях $x = 0$ и $y = 0$ — условия симметрии. Константа C должна быть задана таким образом, чтобы решение соответствовало процессу сво-

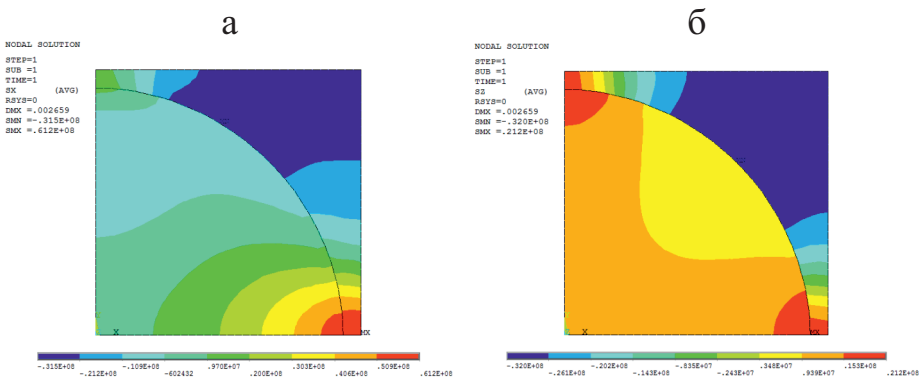


Рис. 7. Распределение координатных микронапряжений σ_x (а) и σ_z (б).

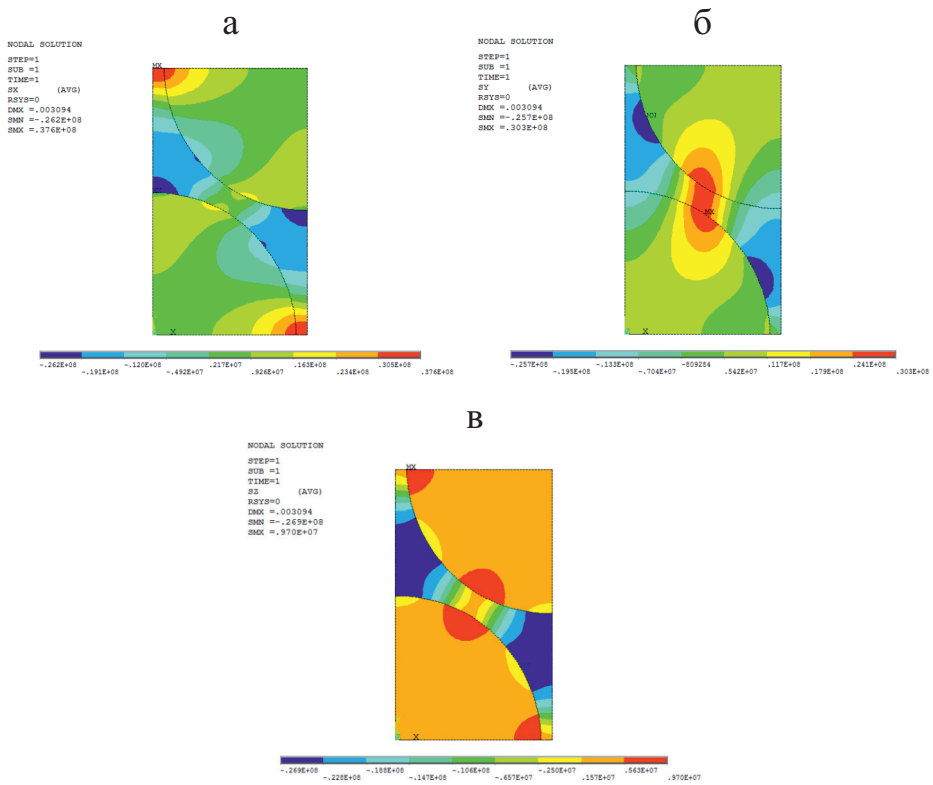


Рис 8. Распределение координатных микронапряжений σ_x (а), σ_y (б), σ_z (в).

бодного расширения композита при равномерном нагреве: $\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0$. Значение этой константы находили методом последовательных приближений аналогично изложенному для квадратной упаковки волокон. Третий компонент α_z тензора температурного расширения определялся деформацией в направлении армирования. Распределение тепловых микронапряжений в пределах представительной ячейки для композита с радиусом волокна $r/a = 0,95$ показано на рис. 8.

Несмотря на то что в отношении средних характеристик эквивалентный однородный материал является трансверсально-изотропным, величины и характер распределения микронапряжений σ_x и σ_y внутри представительной ячейки различаются. Это обстоятельство имеет существенное значение при анализе термпрочности композитных материалов. Подобная особенность наблюдается [17] и в отношении пластических свойств однонаправленно армированных композитов с гексагональной упаковкой волокон.

Ортогонально армированный композит. Для нахождения компонентов тензора температурных расширений ортогонально армированных композитов по изложенной процедуре требуется провести трёхмерный микромеханический анализ. Численные решения задач термоупругости выполняли для представительного объёма, показанного на рис. 2—в.

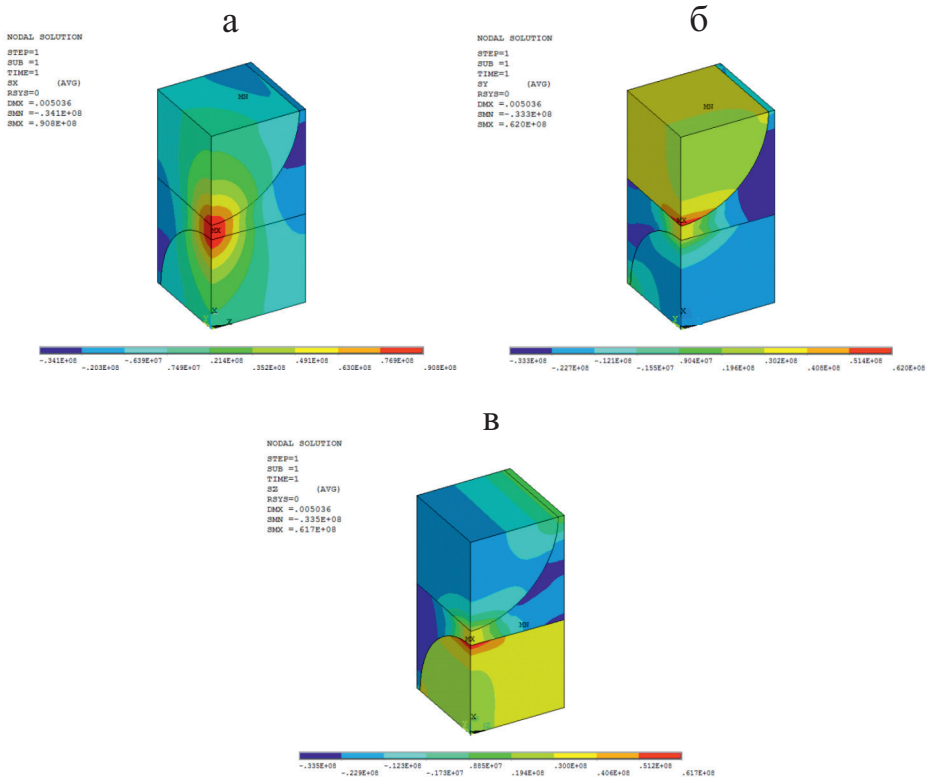


Рис. 9. Распределение координатных микронапряжений σ_x (а), σ_y (б), σ_z (в).

Конечно-элементную модель строили с использованием тетраэдрального 10-узлового элемента SOLID186. Для моделирования процесса нестеснённого расширения композита на границах представительного объема $x = 0, y = 0$ и $z = 0$ задавали условия симметрии относительно соответствующих плоскостей. На остальных границах задавали условия

$$x = b : u_x = C_1, \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = 0;$$

$$y = a : u_y = C_2, \tau_{yx} = 0, \tau_{yz} = 0;$$

$$z = c : u_z = C_2, \tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0.$$

В данном ортогонально армированном композите направления Oy и Oz равноправны, средние температурные деформации равны $\langle \varepsilon_z^T \rangle = \langle \varepsilon_y^T \rangle$, как и соответствующие компоненты тензора температурного расширения $\alpha_z = \alpha_y$. Две независимые константы C_1 и C_2 определяли методом последовательных приближений. Итерационный процесс продолжался до тех пор, пока условия самоуравновешенности температурных напряжений $\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = \langle \sigma_z \rangle = 0$ не будут выполнены с заданной точностью. По достижении сходимости итерационного процесса определяли средние

Коэффициенты температурного расширения ($10^{-5} 1/^\circ\text{C}$) трех видов
КОМПОЗИТОВ

r/a	Квадратная упаковка		Гексагональная упаковка		Ортогональная упаковка	
	$\alpha_x = \alpha_y$	α_z	$\alpha_x = \alpha_y$	α_z	α_x	$\alpha_y = \alpha_z$
0,6	4,66	0,918	4,68	9,36	12,15	1,722
0,8	3,3	0,685	3,027	6,054	8,37	1,27
0,9	2,42	0,621	2,075	4,15	5,89	1,085
0,95	1,88	0,598	1,547	3,09	4,69	0,965

температурные деформации $\langle \varepsilon_x^T \rangle = C_1 / b$, $\langle \varepsilon_y^T \rangle = C_2 / a$, а затем и компоненты тензора теплопроводности α_x и α_y .

При равномерном нагреве свободно расширяющегося композита в пределах представительного объёма возникают температурные микронапряжения, распределение которых показано на рис. 9 ($r/a = 0,95$).

По изложенным методикам для каждого типа армирования выполнена серия расчетов при разных значениях r/a . Компоненты тензора температурного расширения однонаправленно и ортогонально армированных композитов представлены в табл. 3.

Все приведенные в разделе 2.3 величины напряжений соответствуют повышению температуры композита на 100°C . В силу линейности задачи несложно оценить напряжения при иной тепловой нагрузке. Линейная постановка остается справедливой и в случае, когда физические свойства волокон и матрицы будут зависеть от температуры.

Заключение

Разработан единый подход к численной гомогенизации теплофизических свойств волокнистых композитов, необходимой для выполнения термомеханического анализа изделий из композитных материалов. В совокупности с работами [18, 19], посвященными гомогенизации упругих свойств, излагаемая методика позволяет с единых позиций и с применением одинаковых программных средств предсказывать все термомеханические характеристики композитов. Рассмотрены три типа композитов регулярной структуры, в которых можно выделить периодически повторяющийся элементарный объём.

Предсказание эффективных свойств теплопроводности и коэффициентов линейного расширения композита выполняется на основе заданной структуры армирования, а также известных физических характеристик матрицы и волокон. Для рассмотренных симметричных структур эквивалентные гомогенные материалы являются ортотропными или трансверсально-изотропными.

Для определения эффективных компонентов тензора теплопроводности композита выполнены численные решения задач стационарной теплопро-

водности в пределах периодически повторяющегося представительного объема. Граничные условия на поверхностях этого объема задавали таким образом, чтобы точно воспроизвести равномерный в среднем тепловой поток для неограниченного массива композита.

Эффективные значения компонентов тензора температурных расширений композита определяли на основе численного решения задач термоупругости для представительного объема. В качестве тепловой нагрузки использовали равномерное повышение температуры композита. Граничные условия моделировали такое состояние представительного объёма, которое реализуется при нестесненном расширении неограниченного массива композита. Для этого требовалось задавать перемещения на границах, обеспечивающие неизменность формы представительного объёма и самоуравновешенность температурных напряжений.

Достоинством предложенного подхода является возможность нахождения не только коэффициентов расширения, но и температурных микронапряжений, возникающих даже при равномерном нестесненном нагреве композита.

При анализе температурных напряжений в элементах конструкций из композитных материалов используют усредненные (эффективные) характеристики. При этом могут возникать и макроскопические напряжения, вызванные, например, неравномерностью поля температуры или механическими нагрузками. Суперпозиция микро- и микронапряжений может вызвать локальные повреждения, особенно при циклических нагрузках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lages E. N., Marques S. P. C.* Prediction of effective thermal conductivity of multiphase composites with periodic microstructures using an expanded micromechanical model // *Int. J. Thermal Sci.* — 2022. — Vol. 171, Jan. — Article 107226.
2. *Bonfoha N., Jeancolasa A., Dinzarta F., Sabara H., Mihalutab M.* Effective thermal conductivity of composite ellipsoid assemblages with weakly conducting interfaces // *Compos. Struct.* — 2018. — Vol. 202. — P. 603—614.
3. *Chatterjee A., Vermaa R., Umashankara H.P., Kasthuriengana S., Shivaprakashb N. C., Beheraa U.* Heat conduction model based on percolation theory for thermal conductivity of composites with high volume fraction of filler in base matrix // *Int. J. Thermal Sci.* — 2019. — Vol. 136. — P. 389—395.
4. *Zhou L., Yuan T. B., Yang X. S., Liu Z. Y., Wang Q. Z., Xiao B. L., Ma Z. Y.* Microscale prediction of effective thermal conductivity of CNT/Al composites by finite element method // *Int. J. Thermal Sci.* — 2022. — Vol. 171, Jan. — Article 107206.
5. *Vahedi A., Lahidjani M. H. S., Shakhesi S.* Multiscale modeling of thermal conductivity of carbon nanotube epoxy nanocomposites // *Accepted Manuscript. Phys. B: Phys. Condensed Matter.* — 2018. — Vol. 550. — P. 39—46.
6. *Yuan H.-C., Lee C.-Y., Tai N.-H.* Extremely high thermal conductivity of nanodiamond-polydopamine/thinlayer graphene composite films // *Compos. Sci. Technol.* — 2018. — Vol. 167. — P. 313—322.
7. *Liu X., Peng B., Yu W.* Multiscale modeling of the effective thermal conductivity of 2D woven composites by mechanics of structure genome and neural networks // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* — 2021. — Vol. 179. — Article 121673.

8. *Wei H., Zhao S., Rong Q., Bao H.* Predicting the effective thermal conductivities of composite materials and porous media by machine learning methods // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* — 2018. — Vol. 127. — P. 908–916.
9. *Wang M., Wang J., Pan N., Chen S.* Mesoscopic predictions of the effective thermal conductivity for microscale random porous media // *Phys. Rev. E. Stat. Nonlinear Soft Matter Phys.* — 2007. — Vol. 75. — Article 036702.
10. *Goua J.-J., Gong C.-L., Gou L.-X., Lib S., Taoc W.-Q.* The unit cell method in predictions of thermal expansion properties of textile reinforced composites // *Compos. Struct.* — 2018. — Vol. 195. — P. 99–117.
11. *Tian W., Chao X., Fu M.W., Qi L., Ju L.* New numerical algorithm for the periodic boundary condition for predicting the coefficients of thermal expansion of composites // *Mech. Mater.* — 2021. — Vol. 154. — Article 103737/
12. *Lee D, Song Y. S.,* Modeling the effects of elastic modulus and thermal expansion coefficient on the shrinkage of glass fiber reinforced composites // *Composites: Part B.* — 2018. — Vol. 146 — P. 98—105.
13. *Li J., Yang Q., Wei Y., Huang N., Tao R.* A synergistic design of composite metamaterial with drastically tailorable thermal expansion and Poisson's ratio // *Compos. Struct.* — 2021. — Vol. 275. — Article 114446
14. *Sun Z., Shan Z., Shao T., Li J., Wu X.* A multiscale modeling for predicting the thermal expansion behaviors of 3D C/SiC composites considering porosity and fiber volume fraction // *Ceramics Int.* — 2021. — Vol. 47, Iss. 6. — P. 7925—7936.
15. *Wua B., Chena R., Fua R., Agathopoulos S., Sua X., Liua H.* Low thermal expansion coefficient and high thermal conductivity epoxy/Al₂O₃/T-ZnOw composites with dual-scale interpenetrating network structure // *Composites: Part A.* — 2020. — Vol.137. — Article 105993.
16. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. — М.: Наука, 1987. — 246 с.
17. *Lvov G. I.* Using the concept of imposed constraints in the plasticity theory of composites // *Mech. Compos. Mater.* — 2021. — Vol. 57, No. 3. — P. 337—348.
18. *Lvov G. I., Kostromitskaya O. A.* Two-level computation of the elastic characteristics of woven composites // *Mech. Compos. Mater.* — 2018. — Vol. 54, No. 5. — P. 577—590.
19. *Daryazadeh S., Lvov G., Tajdari M.* A New numerical procedure for determination of effective elastic constants in unidirectional composite plates // *J. Solid Mech.* — 2016. — Vol. 8, No. 1. — P. 104—115.

Поступила в редакцию 28.02.2022
Received Feb. 28, 2022

М. Дж. Хошгофтар^{а}, М. Карими^а, С. Сейфури^б*

^аDepartment of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Arak University, Arak 38156-88349, Iran

^бDepartment of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Iran

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ИЗГИБА ПЛАСТИН ИЗ СЛОИСТОГО КОМПОЗИТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УТОЧНЕННОЙ ЗИГЗАГООБРАЗНОЙ ТЕОРИИ¹

M. J. Khoshgoftar^{}, M. Karimi, and S. Seifoori*

NONLINEAR BENDING ANALYSIS OF A LAMINATED COMPOSITE PLATE USING A REFINED ZIG-ZAG THEORY

Keywords: zig-zag theory, laminated composites, nonlinear analysis, shear-deformation theory

A modified zig-zag theory was used to investigate the bending behavior of composite plates and sandwich structures. The theory is based on the first-order shear-deformation theory on some piecewise linear functions for in-plane displacements. This theory does not depend on the shear correction factor and can be applied to various engineering problems associated with the structural dynamics. The nonlinear strain terms in the von Kármán compatibility equation were taken into account to calculate accurate results at large deformation. The governing equations and associated boundary conditions were derived using the principle of virtual work. The calculated numerical results are compared with those of other theories, and an excellent agreement between them was found. The figures and tables presented illustrate the superiority of the model considered in predicting the stress and displacement fields. The model proposed is applicable to nonlinear problems with large deflections.

Ключевые слова: теория зигзагообразная, композиты слоистые, анализ нелинейный, теория деформирования сдвигового

*Автор, с которым следует вести переписку: mj.khoshgoftar@gmail.com, m-khoshgoftar@araku.ac.ir
Corresponding author: mj.khoshgoftar@gmail.com, m-khoshgoftar@araku.ac.ir

¹Перевод с англ.

Для исследования изгибного поведения композитных пластин и сандвич-конструкций использована модифицированная зигзагообразная теория, основанная на теории сдвигового деформирования первого порядка для некоторых кусочно-линейных функций перемещений в плоскости. Эта теория не зависит от коэффициента коррекции на сдвиг и может быть применена к разным инженерным задачам, связанным с динамикой конструкций. Для получения точных результатов при больших деформациях в уравнении совместности фон Кармана учтены члены нелинейной деформации. Определяющие уравнения и связанные с ними граничные условия получены с помощью принципа виртуальной работы. Численные результаты сопоставлены с результатами других теорий и установлено их превосходное согласование. Результаты, представленные графически и таблично, иллюстрируют превосходство рассмотренной модели при предсказании полей напряжений и перемещений. Предложенная модель применима к нелинейным задачам с большими прогибами.

Введение

В последнее время значительно расширилось использование многослойных композитов и сандвич-материалов в разных отраслях промышленности. Некоторые преимущества этих материалов — высокая коррозионная стойкость и удельная жесткость и прочность.

Для моделирования их механического поведения разработаны разные теории. Модели, основанные на гипотезе Кирхгофа, теории сдвигового деформирования, послойные теории, моделирование методом конечных элементов (МКЭ), нелинейные и смешанные теории — некоторые их примеры. В [1] представили смешанную вариационную теорию, основанную на методе снижения размерности многослойной анизотропной пластины, и продемонстрировали возможности формулировки посредством поля перемещений. В [2] описали модифицированную смешанную вариационную формулировку уточненной нелинейной зигзагообразной теории для многослойной композитной пластины.

Существуют разные численные методы анализа конструкций, например, МКЭ, бессеточный и изогометрические методы. Последние разработаны путем объединения компьютерного и конечно-элементного анализов, что значительно снижает погрешность представления расчетной области [3]. В [4] предложили изогометрическую формулировку для линейного анализа статического изгиба многослойных композитных пластин. В [5] сформулировали конечно-элементную нелинейную зигзагообразную теорию слоистой анизотропной оболочки в предположении её поперечной нерастяжимости и обращении в нуль нормальных поперечных деформаций. Для решения определяющих уравнений толстого цилиндра конечной длины также применяли метод возмущений [6, 7].

В [8] представлен геометрически нелинейный анализ балок, пластин и оболочек в рамках теории сдвигового деформирования первого порядка (ТСДПП). В [9] описан динамический геометрически нелинейный анализ композитных и многослойных пластин, основанный на теории высокого порядка, учитывающей реалистичное изменение плоскостных и поперечных перемещений по толщине. Представлен нелинейный динамический анализ и учтена геометрическая нелинейность. В [10, 11] разработали нелинейную электромеханически связанную зигзагообразную теорию для гибридных пьезоэлектрических пластин с учетом геометрической нелинейности фон Кармана и определили потери устойчивости пластин из симметричных слоистых композитов.

Классические теории оболочек пренебрегают эффектами вращательной инерции и сдвиговой деформацией и переоценивают собственные частоты слоистых анизотропных и умеренно толстых пластин и оболочек. В них используют три параметра для учета деформации оболочек. В соответствии с геометрически нелинейными членами эти теории можно разделить на две группы: учитывающие только нелинейные члены типа фон Кармана (включая только нормальное перемещение) и учитывающие также нелинейные члены для двух перемещений в плоскости. Теории, учитывающие только нелинейные члены типа фон Кармана, точны только при малых перемещениях. Разработано несколько нелинейных теорий сдвигового деформирования высокого порядка для разных слоистых оболочек и пластин с учетом деформаций по толщине [12—14].

В [15] представлен нелинейный анализ изгиба свободно опертой пластины из симметричного слоистого композита, основанный на теории перемещений более высокого порядка. Для решения нелинейных определяющих уравнений использовали одномодальный подход Галеркина и метод Ньютона–Рафсона.

В [16] для анализа балок умеренной толщины из слоистых композитов представили зигзагообразную теорию первого порядка и связанную с ней конечно-элементную модель. Точность новой дискретно-слоистой конечно-элементной модели исследовали при статическом и вибрационном анализе тонких и умеренно толстых балок с расслоениями и повреждениями слоев. В [17] данную теорию модифицировали до зигзагообразной теории более высокого порядка. В [18] рассмотрели многослойную анизотропную композитную пластину с кусочно-кубическим полем перемещений и нелинейными соотношениями деформация–перемещение фон Кармана. В [19] представили нелинейную теорию третьего порядка многослойных анизотропных пологих оболочек с поврежденными поверхностями раздела, допускающую скачки перемещений в плоскости при наличии межслойного проскальзывания. В [20] для композитных и сэндвич-балок представили уточненную зигзагообразную теорию, основанную на балочной теории Тимошенко, и развили её для слоистых композитных и сэндвич-пластин [21]. В [22] описали нелинейную усовершенствованную зигзагообразную теорию, основанную на поле деформаций фон Кармана и ТСДПП. Для балок

с малым коэффициентом гибкости и толстыми лицевыми слоями, особенно в случае большого отношения жесткости лицевых слоев и сердцевины, эта теория является более точной, чем теория балок Тимошенко.

В литературе также можно найти размерно-зависимые теории [23, 24], нелокальные теории [25], модифицированные градиентные теории деформирования [26, 27] и решения теории упругости [28] для сэндвич-панелей из разных материалов, например, с мягкой сердцевиной [29, 30] и пьезоэлектрическими слоями [31, 32], а также нанопластинками типа графеновых [33].

В настоящей работе для статического анализа многослойных композитов использовали нелинейную модифицированную зигзагообразную теорию. Прикладную теорию сформулировали на основе ТСДПП и некоторых кусочно-линейных функций для перемещений в плоскости. В отличие от ТСДПП предложенная теория не зависит от коэффициента коррекции на сдвиг и применима к разным инженерным задачам, связанным с динамикой конструкций. Для получения точных результатов при больших деформациях в уравнении совместности фон Кармана учли члены нелинейной деформации. Одно из основных преимуществ, вытекающих из аналитической формы этой новой теории, — ее идеальная пригодность для конечно-элементного моделирования, где кинематические аппроксимации не должны выходить за пределы непрерывности C_0 . Более точные результаты при меньшем времени решения — основное преимущество настоящей теории.

1. Формулировка

Рассмотрим композитную пластину с N слоями. Область Ω пластины представлена на рис. 1, а ее аналитическое выражение имеет вид

$$\Omega = \{(x, y, z); -h \leq z \leq h\}. \tag{1}$$

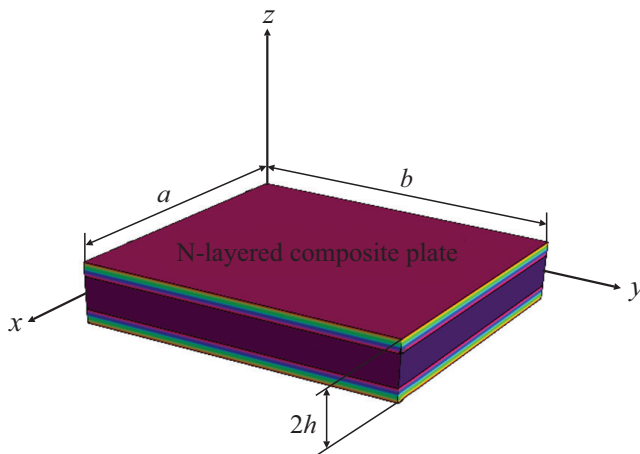


Рис. 1. Композитная пластина.

Поле перемещений пластины можно выразить с помощью модифицированной зигзагообразной теории [21], используя параметры ее срединной поверхности в виде

$$\begin{aligned} u^{(k)}(x, y, z) &\equiv u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) + \phi_x^{(k)}(z)\psi_x(x, y), \\ v^{(k)}(x, y, z) &\equiv v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) + \phi_y^{(k)}(z)\psi_y(x, y), \\ w^{(k)}(x, y, z) &\equiv w_0(x, y), \end{aligned} \quad (2)$$

где $u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}$ — перемещения произвольной точки в направлении осей x, y, z ; $u_0(x, y)$ и $v_0(x, y)$ — равномерные перемещения в плоскости в направлении осей x и y соответственно; $w_0(x, y)$ — перемещение из срединной плоскости в направлении оси z ; $\theta_x(x, y)$ и $\theta_y(x, y)$ — углы поворота поперечного сечения пластины в плоскостях xz и yz соответственно; $\phi_x^k(z)$ и $\phi_y^k(z)$ — зигзагообразные функции в k -м слое, кусочно-линейные по толщине композитной пластины. Функции $\psi_x(x, y)$ и $\psi_y(x, y)$ — пространственные амплитуды зигзагообразных перемещений, являющиеся неизвестными при анализе и вместе с остальными пятью кинематическими переменными. Теории сдвигового деформирования первого порядка (ТСДПП) соответствуют нулевые зигзагообразные функции, которые можно определить как [21]

$$\begin{aligned} \phi_x^{(k)} &\equiv \frac{1}{2}(1 - \xi^{(k)})u_{(k-1)} + \frac{1}{2}(1 + \xi^{(k)})u_{(k)}, \\ \phi_y^{(k)} &\equiv \frac{1}{2}(1 - \xi^{(k)})v_{(k-1)} + \frac{1}{2}(1 + \xi^{(k)})v_{(k)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\xi^{(k)}$ — локальная безразмерная система координат в k -м слое, определяемая как

$$\xi^{(k)} = \frac{z - z^{(k-1)}}{h^{(k)}} - 1, \quad -1 < \xi^{(k)} < 1. \quad (4)$$

Межслойные перемещения обозначены символом s_i ($s = u, v; i = k, k - 1$) и нулевым индексом для верхнего и нижнего слоев:

$$u_{(0)} = u_{(N)} = v_{(0)} = v_{(N)} = 0. \quad (5)$$

Другие поля межслойных перемещений получим, используя частичную непрерывность касательного напряжения в направлении толщины композитной пластины [20]. Деформации фон Кармана [18], учитывающие умеренно большие прогибы и малые деформации в k -м слое, связанные

с полем перемещений, определяемым модифицированными зигзагообразными функциями, можно выразить как

$$\varepsilon^{(k)} = A + zB + \phi^{(k)}D + \chi, \quad \gamma^{(k)} = R + F^{(k)}\psi, \quad (6)$$

где

$$\varepsilon^{(k)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(k)} \\ \varepsilon_{yy}^{(k)} \\ \gamma_{xy}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{x,y} \\ \psi_{y,x} \end{bmatrix},$$

$$\phi^{(k)} = \begin{bmatrix} \phi_x^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_y^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_x^k & \phi_y^k \end{bmatrix}, \quad \chi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}w_{0,x}^2 \\ \frac{1}{2}w_{0,y}^2 \\ w_{0,x}w_{0,y} \end{bmatrix}, \quad \gamma^{(k)} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^{(k)} \\ \gamma_{yz}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$R = \begin{bmatrix} w_{0,x} + \theta_x \\ w_{0,y} + \theta_y \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{bmatrix}, \quad F^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x^{(k)}(z)}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_y^{(k)}(z)}{\partial z} \end{bmatrix},$$

$(\odot)_{,\alpha} \equiv \frac{\partial(\odot)}{\partial \alpha} (\alpha = x, y)$ — частная производная относительно координаты срединной плоскости. В уравнении (6) χ — нелинейный член. Поскольку зигзагообразные функции ϕ являются линейными по координате z каждого слоя (т.е. $\frac{\partial \phi_x^{(k)}(z)}{\partial z} = cte$) и обращаются в нуль в верхнем ($z = h$) и нижнем ($z = -h$) лицевых слоях, запишем

$$\int_{-h}^h \left\{ \frac{\partial \phi_x^{(k)}(z)}{\partial z}, \frac{\partial \phi_y^{(k)}(z)}{\partial z} \right\} dz = \sum_{k=1}^N 2h^{(k)} \left\{ \frac{\partial \phi_x^{(k)}(z)}{\partial z}, \frac{\partial \phi_y^{(k)}(z)}{\partial z} \right\} = 0. \quad (8)$$

Проинтегрировав уравнение (6) по толщине пластины и используя уравнение (8), получим

$$R = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \gamma^{(k)} dz. \quad (9)$$

Уравнение (9) указывает на то, что сдвиговые деформации состоят из двух частей: одна представляет собой средний угол сдвига, совпадающий со

сдвиговой деформацией в ТСДПП, а другая включает межслойные эффекты, выраженные зигзагообразными членами. Согласно уравнениям состояния

$$\sigma^{(k)} = C^{(k)} \varepsilon^{(k)}, \quad \tau^{(k)} = Q^{(k)} \gamma^{(k)}, \quad (10)$$

где $\sigma^{(k)}$ и $\tau^{(k)}$ — напряжения; $C^{(k)}$ и $Q^{(k)}$ — компоненты матриц жесткости и приведенной жесткости:

$$\sigma^{(k)} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}^{(k)}, \quad \tau^{(k)} = \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}^{(k)}, \quad (11)$$

$$C^{(k)} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{pmatrix}^{(k)}, \quad Q^{(k)} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{pmatrix}^{(k)}.$$

В [21] определили такие зигзагообразные функции, чтобы частичная непрерывность поперечных касательных напряжений удовлетворяла следующим зигзагообразным функциям:

$$\begin{aligned} \phi_x^{(1)} &= (z+h) \left(\frac{G_1}{Q_{11}^{(1)}} - 1 \right), \\ \phi_y^{(1)} &= (z+h) \left(\frac{G_2}{Q_{22}^{(1)}} - 1 \right), \\ \phi_x^{(k)} &= (z+h) \left(\frac{G_1}{Q_{11}^{(k)}} - 1 \right) + \sum_{i=2}^k 2h^{(i-1)} \left(\frac{G_1}{Q_{11}^{(i-1)}} - \frac{G_1}{Q_{11}^{(k)}} \right) \quad (k=2,3,\dots,N), \\ \phi_y^{(k)} &= (z+h) \left(\frac{G_2}{Q_{22}^{(k)}} - 1 \right) + \sum_{i=2}^k 2h^{(i-1)} \left(\frac{G_2}{Q_{22}^{(i-1)}} - \frac{G_2}{Q_{22}^{(k)}} \right) \quad (k=2,3,\dots,N). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь G_1 и G_2 — средневзвешенные коэффициенты поперечного сдвига, вычисляемые путем наложения ограничивающих условий на зигзагообразные функции:

$$\begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \frac{h^{(k)}}{Q_{11}^{(k)}} \right)^{-1} \\ \left(\frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \frac{h^{(k)}}{Q_{22}^{(k)}} \right)^{-1} \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Из уравнений (12) и (13) следует, что зигзагообразные функции не зависят от деформированного состояния и определяются только межслойными свойствами.

2. Определяющие уравнения

Выведем определяющие уравнения для расчета напряжений композитных пластин. Согласно принципу виртуальной работы, если частица находится в равновесии, то полная виртуальная работа сил, действующих на частицу, равна нулю при любом виртуальном перемещении. Используя этот принцип, получим определяющие уравнения. Рассмотрим композитную пластину, на которую действует поперечная сила $q(x, y)$, т. е.

$$\int_{A-h}^h (\sigma^{(k)T} \delta \varepsilon^{(k)} + \tau^{(k)T} \delta \gamma^{(k)}) dz dA - \int_A q \delta w dA = 0, \quad (14)$$

где $A(z=0)$ — площадь срединной плоскости композитной пластины; δ — оператор вариации. Поперечная сила остается перпендикулярной срединной поверхности пластины, а локальное направление, нормальное к срединной поверхности, — направлению z . Подставив уравнения (6) и (10) в (14), получим, что

$$\begin{aligned} & \int_A \{ (N_x \delta u_{0,x} + M_x \delta \theta_{x,x} + M_x^\phi \delta \psi_{x,x} + w_{,x} \delta w_{,x} N_x) + \\ & + (N_y \delta v_{0,y} + M_y \delta \theta_{y,y} + M_y^\phi \delta \psi_{y,y} + w_{0,y} \delta w_{0,y} N_y) + \\ & + [N_{xy} (\delta u_{0,y} + \delta v_{0,x}) + M_{xy} (\delta \theta_{x,y} + \delta \theta_{y,x}) + M_{xy}^\phi \delta \psi_{x,y} + \\ & + M_{yx}^\phi \delta \psi_{y,x} + \delta w_{0,x} w_{0,y} N_{xy} + w_{0,x} \delta w_{0,y} N_{xy}] \}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$Q_x (\delta w_{0,x} + \delta \theta_x) + Q_x^\phi \delta \psi_x + Q_y (\delta w_{0,y} + \delta \theta_y) + Q_y^\phi \delta \psi_y - q \delta w \} dA = 0,$$

где N и M — результирующие мембранные и изгибные напряжения соответственно; Q — результирующие напряжения поперечного сдвига:

$$\begin{aligned} N_m^T & \equiv \{N_x, N_y, N_{xy}\} = \int_{-h}^h \{ \sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{yy}^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)} \} dz, \\ M_m^T & \equiv \{M_x, M_x^\phi, M_y, M_y^\phi, M_{xy}, M_{xy}^\phi, M_{yx}^\phi\} = \\ & = \int_{-h}^h \{ z \sigma_{xx}^{(k)}, \phi_x^{(k)} \sigma_{xx}^{(k)}, z \sigma_{yy}^{(k)}, \phi_y^{(k)} \sigma_{yy}^{(k)}, z \tau_{xy}^{(k)}, \phi_x^{(k)} \tau_{xy}^{(k)}, \phi_y^{(k)} \tau_{xy}^{(k)} \} dz, \end{aligned} \quad (16)$$

$$Q_s^T \equiv \{Q_y, Q_y^\phi, Q_x, Q_x^\phi\} = \int_{-h}^h \left\{ \tau_{yz}^{(k)}, \frac{\partial \phi_y^{(k)}(z)}{\partial z} \tau_{yz}^{(k)}, \tau_{xz}^{(k)}, \frac{\partial \phi_x^{(k)}(z)}{\partial z} \tau_{xz}^{(k)} \right\} dz. \quad (16)$$

Проинтегрировав уравнение (14) по частям, получим

$$\begin{aligned} & -\int_A N_{x,x} \delta u_0 dA - \int_A M_{x,x} \delta \theta_x dA - \int_A M_{x,x}^\phi \delta \psi_x dA + \int_A (N_x w_{0,x})_{,x} \delta w_0 dA - \\ & -\int_A N_{y,y} \delta v_0 dA - \int_A M_{y,y} \delta \theta_y dA - \int_A M_{y,y}^\phi \delta \psi_y dA - \int_A (N_y w_{0,y})_{,y} \delta w_0 dA - \\ & -\int_A N_{xy,y} \delta u_0 dA + \int_A N_{xy,x} \delta v_0 dA - \int_A M_{xy,y} \delta \theta_x dA - \int_A M_{xy,x} \delta \theta_y dA - \\ & -\int_A M_{xy,y}^\phi \delta \psi_x dA - \int_A M_{yx,x}^\phi \delta \psi_y dA - \int_A (N_{xy} w_{0,y})_{,x} \delta w_0 dA - \\ & -\int_A (N_{xy} w_{0,x})_{,y} \delta w_0 dA - \int_A Q_{x,x} \delta w_0 dA + \int_A Q_x \delta \theta_x dA + \int_A Q_x^\phi \delta \psi_x dA - \\ & -\int_A Q_{y,y} \delta w_0 dA + \int_A Q_y \delta \theta_y dA + \int_A Q_y^\phi \delta \psi_y dA - \int_A q \delta w_0 dA + B.C. \} dA = 0, \quad (17) \end{aligned}$$

где *B.C.* — члены, обусловленные граничным условием пластины. Упростив уравнение (17), получим определяющие уравнения (расширенная форма этих уравнений в терминах перемещений приведена в приложении А)

$$\begin{aligned} \delta u_0 : N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0, \\ \delta v_0 : N_{y,y} + N_{xy,x} &= 0, \\ \delta w_0 : Q_{x,x} + Q_{y,y} + q - N(w) &= 0, \\ \delta \theta_x : M_{x,x} + M_{xy,y} &= Q_x, \\ \delta \theta_y : M_{y,y} + M_{xy,x} &= Q_y, \\ \delta \psi_x : M_{x,x}^\phi + M_{xy,y}^\phi &= Q_x^\phi, \\ \delta \psi_y : M_{y,y}^\phi + M_{yx,x}^\phi &= Q_y^\phi, \end{aligned} \quad (18)$$

где $N(w)$ — нелинейный член, входящий в уравнение (18) для учета нелинейной деформации и определяемый как

$$N(w) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w_0}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right). \quad (19)$$

3. Процедура решения

Рассмотрим прямоугольную композитную пластину длиной a , шириной b и толщиной $2h$, состоящую из N слоев (рис. 2). Пластина свободно опирается:

$$\begin{cases} y = 0, b, 0 < x < a \rightarrow v_0 = w_0 = \theta_y = \psi_y = N_x = M_x = M_x^\phi = 0, \\ x = 0, a, 0 < y < b \rightarrow u_0 = w_0 = \theta_x = \psi_x = N_y = M_y = M_y^\phi = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Используя подход Галеркина, кинематические неизвестные, удовлетворяющие граничным условиям (20), запишем как

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\ \theta_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{xmn} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\ \psi_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{xmn} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\ v_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}, \\ \theta_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{ymn} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}, \\ \psi_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{ymn} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}, \\ w_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (21)$$

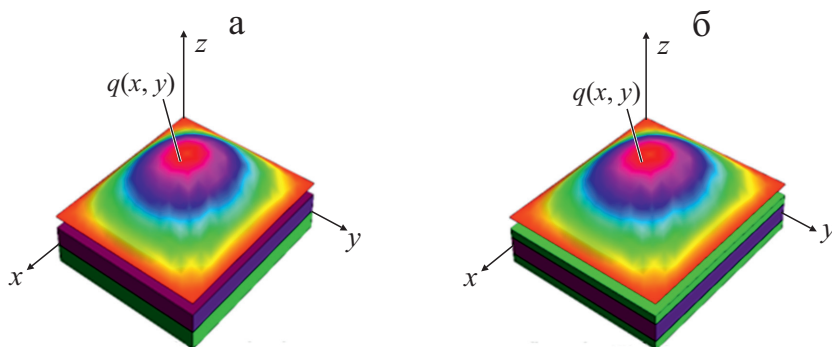


Рис. 2. Двух- (а) и трехслойная (б) композитные пластины.

где $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, \Theta_{xmn}, \Theta_{ymn}, \psi_{ymn}, \psi_{xmn}$ — неизвестные коэффициенты, вычисляемые посредством определяющих уравнений (18). Система дифференциальных уравнений (18) сводится к системе алгебраических уравнений, при решении которой находим неизвестный коэффициент уравнения (21). Распределение поперечных нагрузок $q(x, y)$ предполагаем синусоидальным:

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (22)$$

4. Результаты и обсуждение

Как показано в предыдущем разделе, исследование двух- и трехслойных композитных пластин выполняется с учетом их геометрической нелинейности. Механические свойства слоев приведены в табл. 1, а данные об укладке пластины — в табл. 2 и на рис. 2. Полученные численные результаты сравнивали с имеющимися в литературе, включая результаты уточненной зигзагообразной теории (УЗТ) [21], точное решение Пэйгано [34] и результаты ТСДПП. Достаточное количество членов ($n = m = 30$) определили путем анализа сходимости уравнений (21) с учетом максимального поперечного перемещения. Результаты ТСДПП получили с учетом влияния нелинейности, а результаты УЗТ и решения Пэйгано — без него. Поэтому результаты НУЗТ (нелинейной уточненной зигзагообразной теории) сравнили с результатами УЗТ и нелинейной ТСДПП. Для демонстрации возможности УЗТ результаты, полученные с ее помощью, также сравнили с решением Пэйгано. Основное отличие УЗТ от ЗТ (зигзагообразной теории Ди Скьювы) заключается в том, что в первой зигзагообразная функция обращается в нуль только на наружных поверхностях балки из слоистого композита, а не внутри слоев. Это важное отличие обеспечивает физически более реалистичное распределение зигзагообразной функции — она отлична от нуля по толщине пластины и, как

Табл. 1

Механические свойства материала слоев

Свойство	Ортотропный слой (эпоксидный углепластик)	Изотропный слой (полимер)
E_1	157,9 ГПа	0,1040 ГПа
$E_2 = E_3$	9,584 ГПа	0,1040 ГПа
ν_{23}	0,49	0,3
$\nu_{13} = \nu_{12}$	0,32	0,3
G_{23}	3,227 ГПа	0,04 ГПа
$G_{13} = G_{12}$	5,930 ГПа	0,04 ГПа

Структура композитных пластин

Пластина	Двухслойная	Сандвич
Структура	C-C	C-P-C
Ориентация волокон	0/90	0/0/0
Относительная толщина слоев	0,5-0,5	0,1-0,8-0,1

следствие, новая зигзагообразная функция обеспечивает вклад каждого слоя в общую деформацию. Безразмерные механические параметры определяем следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{u} &\equiv \frac{10^4 D_{11}}{q_0 a^4} u^{(k)}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \\ \bar{\sigma}_{xx} &\equiv \frac{(2h)^2}{q_0 a^2} \sigma_{xx}^{(k)}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \\ \bar{\tau}_{xz} &\equiv \frac{(2h)}{q_0 a} \tau_{xz}^{(k)}\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \\ \bar{w} &= \frac{100 D_{11}}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Проведено систематическое исследование с целью оценки надежности и точности представленной модели. На рис. 3 представлены безразмерные плоскостные перемещения двух- и трехслойных композитных пластин в

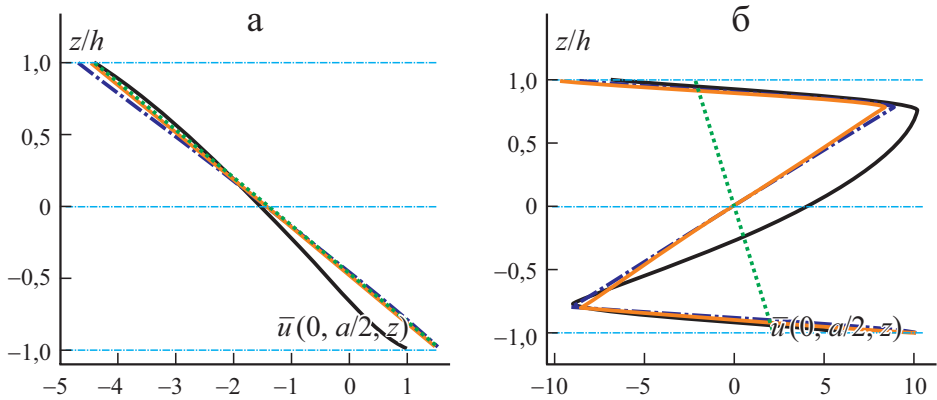


Рис. 3. Эпюры безразмерного перемещения $\bar{u}(0, a/2, z)$ по толщине z/h двух- (а) и трехслойных (б) пластин, рассчитанные согласно ТСДПП (.....), УЗТ (—), НУЗТ (— · —) и точной 3D теории упругости (—).

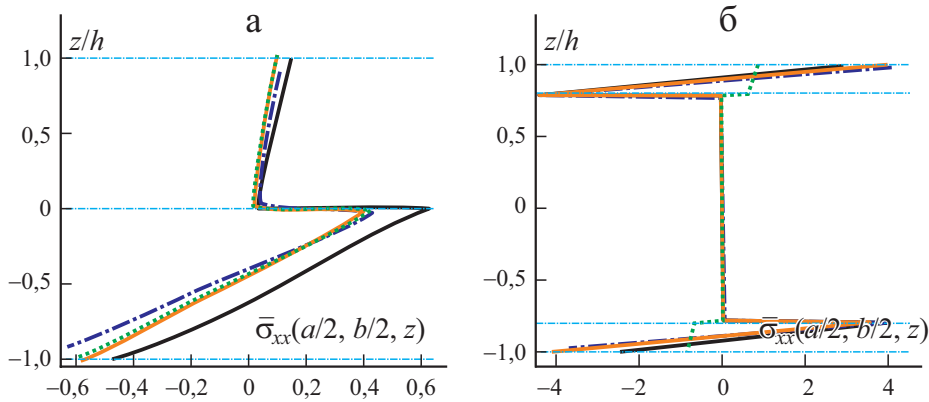


Рис. 4. Эпюры безразмерного нормального напряжения $\bar{\sigma}_x(a/2, b/2, z)$ по толщине z/h двух- (а) и трехслойных (б) пластин, рассчитанные по ТСДПП, УЗТ, НУЗТ и точной трехмерной теории упругости. Обозначения те же, что на рис. 3.

направлении x , рассчитанные по разным моделям. Модели НУЗТ и УЗТ близки друг к другу, особенно в линейных областях. Различие результатов возрастает с увеличением нагрузки в нелинейных задачах. Получаемые результаты могли бы приблизиться к точному решению, если в качестве зигзагообразной функции выбрать функции более высокого порядка. Данные рис. 3—б отчетливо демонстрирует превосходство предложенной модели НУЗТ над моделью ТСДПП. Видно, что ТСДПП оценивает все поле перемещений только с помощью одной непрерывной функции, а модель НУЗТ использует непрерывную функцию для каждого слоя. Это различие в прогнозировании функций перемещений обуславливает большую разницу численных результатов, особенно для композитных пластин с большим количеством слоев.

Данные рис. 4 иллюстрируют эпюры напряжения σ_x по координате z в центре двух- и трехслойных композитных пластин, рассчитанные по разным теориям. Видно, что предложенная модель обеспечивает лучшую точность, чем ТСДПП. Расчет согласно ТСДПП занижает плоскостное напряжение, особенно на наружных поверхностях, где имеют место наибольшие растягивающее и сжимающее напряжения, даже если использован коэффициент коррекции на сдвиг. В ТСДПП применяют линейное распределение поперечных касательных напряжений по толщине конструкции. В предложенной НУЗТ учтены кусочно-постоянные напряжения, уменьшающие погрешность в общем отклике сэндвич-конструкции. Более того, из данных рисунков следует, что учет геометрических нелинейностей предсказывает меньшие нормальные напряжения, особенно в лицевых слоях.

Эпюры поперечного сдвигового напряжения τ_{xz} по координате z в центре двух- и трехслойных композитных пластин, рассчитанные по раз-

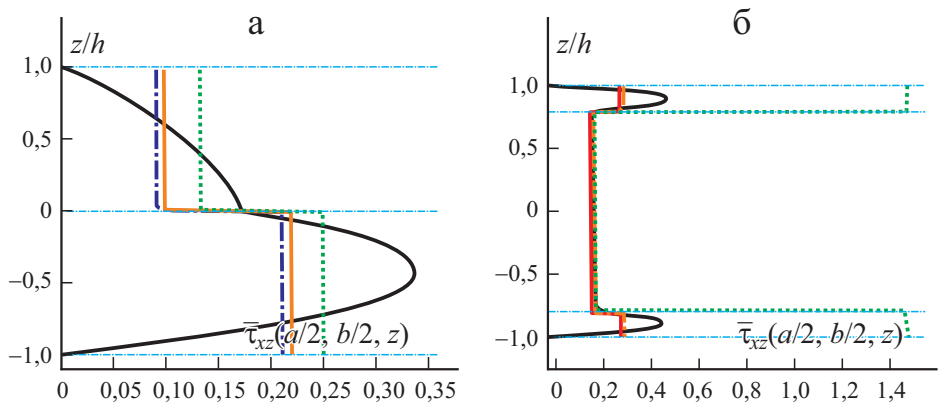


Рис. 5. Эпюры безразмерного сдвигового напряжения $\bar{\tau}_{xz}(a/2, b/2, z)$ по толщине z/h двух- (а) и трехслойных (б) пластин, рассчитанные по ТСДПП (.....); УЗТ (—); НУЗТ (— · —); точной трехмерной теории упругости (—).

ным теориям, приведены на рис. 5. Видно, что представленная модель предсказывает постоянную сдвиговую деформацию для каждого слоя и численные результаты лучше согласуются с данными точного решения. В предложенной модифицированной зигзагообразной теории в отличие от ТСДПП отсутствует непрерывность касательных напряжений, но учитывается послойная функция для каждого слоя, что обеспечивает результаты, более близкие к точному решению. Этот факт гораздо более заметен в лицевых слоях, поскольку ТСДПП предсказывает поперечное сдвиговое напряжение с ошибкой более 60%, в то время как модель НУЗТ дает лучшую оценку напряжений в сравнении с трехмерным решением теории упругости. Кроме того, видно, что неучет нелинейных деформаций приводит к большим сдвиговым деформациям. Распределение сдвиговых напряжений можно изменить, выбрав зигзагообразную функцию более высокого порядка.

Табл. 3

Безразмерные перемещения из плоскости в разных теориях сэндвич-пластин

$a/2h$	Точная	ТСДПП	ЗГ	УЗТ	НУЗТ
4	42,420	3,739	42,124	42,189	42,480
10	9,734	1,321	9,738	9,739	9,737
20	3,487	0,948	3,489	3,490	3,488
50	1,305	0,841	1,305	1,305	1,305
100	0,945	0,826	0,945	0,945	0,945
200	0,852	0,822	0,852	0,852	0,852

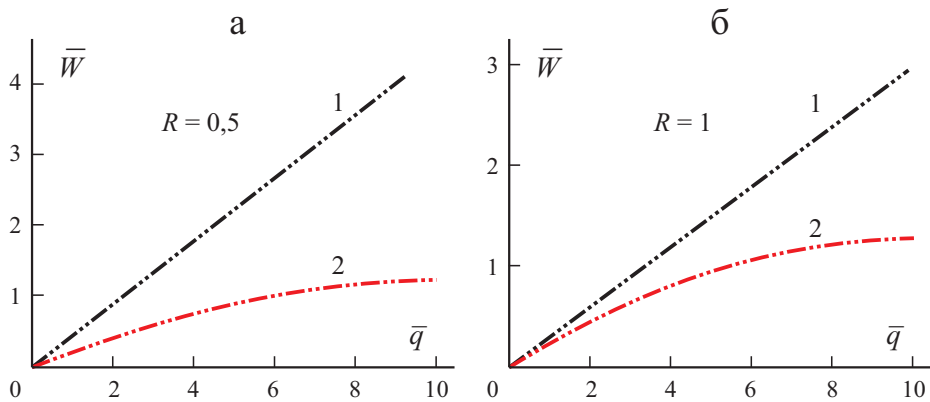


Рис. 6. Зависимость безразмерного прогиба \bar{w} от интенсивности нагрузки \bar{q} в центре прямоугольной ($R = 0,5$) (а) и квадратной ($R = 1$) (б) пластин, рассчитанные по УЗТ (1) и НУЗТ (2).

Значения безразмерных перемещений из плоскости в центре рассматриваемой сандвич-пластины, вычисленные по разным теориям, приведены в табл. 3. При увеличении отношения $a/2h$ все модели стремятся к одинаковой точности. Это связано с тем, что влияние сдвиговой деформации можно игнорировать для конструкций с малым отношением толщины пластины к длине пролета. Кроме того, видно, что нелинейные эффекты увеличили жесткость сандвич-пластины и, как следствие, значения прогиба, вычисленные с учетом нелинейности, меньше, чем при использовании других моделей.

На рис. 6 приведены зависимости безразмерного прогиба в центре прямоугольной и квадратной сандвич-пластин от интенсивности нагрузки. Видно, что учет геометрических нелинейностей более заметен при больших значениях интенсивности нагрузки, что обусловлено большей деформацией. Кроме того, наблюдали, что разница между результатами линейной и нелинейной теорий в случае прямоугольной пластины ($R = 0,5$) больше, чем квадратной ($R = 1$), т.е. учет геометрической нелинейности делает деформацию сандвич-пластины более чувствительной к отношению размеров.

Заключение

В настоящей работе выполнен статический анализ изгиба композитных пластин с использованием зигзагообразной теории. Для учета больших деформаций рассмотрены нелинейные деформации фон Кармана. Поле перемещений оценили с помощью теории сдвигового деформирования первого порядка. Для уточнения сдвиговых напряжений и межслойного поведения пластин использовали модифицированные линейные зигзагообразные функции, зависящие от свойств каждого слоя. В отличие от ТСДПП

предложенная НУЗТ не нуждается в коэффициенте коррекции на сдвиг. Определяющие и кинематические уравнения не зависят от количества слоев. Это упрощает постановку и сокращает время вычислений. Для демонстрации влияния геометрической нелинейности представлены численные результаты для свободно опертой пластины из слоистых композитов, сопоставленные с результатами ТСДПП и точного трехмерного решения теории упругости. Сравнение показало высокую точность предложенного подхода. ТСДПП оценивает все поле перемещений с использованием только одной непрерывной функции, тогда как в предложенной модели используется непрерывная функция для каждого слоя. При увеличении отношения толщины пластины к длине пролета все модели стремятся к одинаковой точности. Это обусловлено тем, что для конструкций с малым отношением толщины к пролету влияние сдвиговой деформации можно не учитывать. Выбрав зигзагообразную функцию большего порядка, можно получить более точные результаты. Предложенная модель обеспечивает высокоточные результаты при решении нелинейных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Auricchio F., Balduzzi G., Khoshgoftar M. J., Rahimi G., and Sacco E.* Enhanced modeling approach for multilayer anisotropic plates based on dimension reduction method and Hellinger–Reissner principle // *Compos. Struct.* — 2014. — Vol. 118. — P. 622—633.
2. *Fares M. and Elmarghany M. K.* A refined zig-zag nonlinear first-order shear deformation theory of composite laminated plate // *Compos. Struct.* — 2008. — Vol. 82. — P. 71—83.
3. *Gupta A. and Ghosh A.* Bending analysis of laminated and sandwich composite reissner-mindlin plates using nurbs-based isogeometric approach // *Procedia Eng.* — 2017. — Vol. 173. — P. 1334—1341.
4. *Pavan G. and Rao K. N.* Bending analysis of laminated composite plates using isogeometric collocation method // *Compos. Struct.* — 2017. — Vol. 176. — P. 715—728.
5. *Chaudhuri R. A.* A nonlinear zig-zag theory for finite element analysis of highly shear-deformable laminated anisotropic shells // *Compos. Struct.* — 2008. — Vol. 85. — P. 350—359.
6. *Khoshgoftar M. J., Mirzaali M., and Rahimi G.* Thermoelastic analysis of non-uniform pressurized functionally graded cylinder with variable thickness using first order shear deformation theory (FSDT) and perturbation method // *Chinese J. Mech. Eng.* — 2015. — Vol. 28. — P. 1149—1156.
7. *Khoshgoftar M. J., Rahimi G., and Arefi M.* Exact solution of functionally graded thick cylinder with finite length under longitudinally non-uniform pressure // *Mech. Res. Comm.* — 2013. — Vol. 51. — P. 61—66.
8. *Kreja I. and Schmidt R.* Large rotations in first-order shear deformation FE analysis of laminated shells // *Int. J. Nonlinear Mech.* — 2006. — Vol. 41. — P. 101—123.
9. *Ganapathi M., Patel B., and Makhecha D.* Nonlinear dynamic analysis of thick composite/sandwich laminates using an accurate higher-order theory // *Composites: Part B.* — 2004. — Vol. 35. — P. 345—355.
10. *Kapurja S. and Achary G.* Nonlinear zig-zag theory for electrothermomechanical buckling of piezoelectric composite and sandwich plates // *Acta Mech.* — 2006. — Vol. 184. — P. 61—76.

11. *Kapurja S. and Achary G.* Nonlinear coupled zig-zag theory for buckling of hybrid piezoelectric plates // *Compos. Struct.* — 2006. — Vol. 74. — P. 253—264.
12. *Amabili M.* A new nonlinear higher-order shear deformation theory with thickness variation for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells // *J. Sound Vibr.* — 2013. — Vol. 332. — P. 4620—4640.
13. *Amabili M.* A nonlinear higher-order thickness stretching and shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells // *Int. J. Nonlinear Mech.* — 2014. — Vol. 58. — P. 57—75.
14. *Amabili M.* Non-linearities in rotation and thickness deformation in a new third-order thickness deformation theory for static and dynamic analysis of isotropic and laminated doubly curved shells // *Int. J. Nonlinear Mech.* — 2015. — Vol. 69. — P. 109—128.
15. *Savithri S. and Varadan T.* Large deflection analysis of laminated composite plates // *Int. J. Nonlinear Mech.* — 1993. — Vol. 28. — P. 1—12.
16. *Averill R. C.* Static and dynamic response of moderately thick laminated beams with damage // *Compos. Eng.* — 1994. — Vol. 4. — P. 381—395.
17. *Averill R. and Yip Y. C.* Development of simple, robust finite elements based on refined theories for thick laminated beams // *Comput. Struct.* — 1996. — Vol. 59. — P. 529—546.
18. *Di Sciuva M.* Multilayered anisotropic plate models with continuous interlaminar stresses // *Compos. Struct.* — 1992. — Vol. 22. — P. 149—167.
19. *Di Sciuva M., Gherlone M., and Librescu L.* Implications of damaged interfaces and of other non-classical effects on the load carrying capacity of multilayered composite shallow shells // *Int. J. Nonlinear Mech.* — 2002. — Vol. 37. — P. 851—867.
20. *Tessler A., Di Sciuva M., and Gherlone M.* Refinement of Timoshenko beam theory for composite and sandwich beams using zig-zag kinematics. — NASA-TP-2007-215086, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C., 2007.
21. *Tessler A., Di Sciuva M., and Gherlone M.* Refined zig-zag theory for laminated composite and sandwich plates. — NASA/TP-2009-215561, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C., 2009.
22. *Ascione A. and Gherlone M.* Nonlinear static response analysis of sandwich beams using the refined zig-zag theory // *J. Sandwich Struct. Mater.* — 2020. — Vol. 22, No. 7. — P. 2250—2286.
23. *Shaban M. and Mazaheri H.* Size-dependent electro-static analysis of smart micro-sandwich panels with functionally graded core // *Acta Mech.* — 2021. — Vol. 232, No. 1. — P. 111—133.
24. *Arefi M., Mohammad-Rezaei Bidgoli E., and Rabczuk T.* Effect of various characteristics of graphene nanoplatelets on thermal buckling behavior of FGRC micro plate based on MCST // *Eur. J. Mech.-A/Solids.* — 2019. — Vol. 77. — P. 103802.
25. *Arefi M. and Amabili M.* A comprehensive electro-magneto-elastic buckling and bending analyses of three-layered doubly curved nanoshell, based on nonlocal three-dimensional theory // *Compos. Struct.* — 2021. — Vol. 257. — P. 113100.
26. *Arefi M., Mohammad-Rezaei Bidgoli E., and Rabczuk T.* Thermo-mechanical buckling behavior of FG GNP reinforced micro plate based on MSGT // *Thin-Walled Struct.* — 2019. — Vol. 142. — P. 444—459.
27. *Mohammad-Rezaei Bidgoli E., and Arefi M.* Free vibration analysis of micro plate reinforced with functionally graded graphene nanoplatelets based on modified strain-gradient formulation // *J. Sandwich Struct. Mater.* — 2021. — Vol. 23, No. 2. — P. 436—472.

28. *Alipour M. M., and Shaban M.* Natural frequency and bending analysis of heterogeneous polar orthotropic-faced sandwich panels in the existence of in-plane pre-stress // Archives Civil Mech. Eng. — 2020. — Vol. 20, No. 4. — P. 1—24.

29. *Shaban M., and Mazaheri H.* Closed-form elasticity solution for smart curved sandwich panels with soft core // Appl. Math. Modelling. — 2019. — Vol. 76. — P. 50—70.

30. *Arefi M. and Najafitabar F.* Buckling and free vibration analyses of a sandwich beam made of a soft core with FG-GNPs reinforced composite face-sheets using Ritz method // Thin-Walled Struct. — 2021. — Vol. 158. — P. 107200.

31. *Shaban M. and Alibeigloo A.* Global bending analysis of corrugated sandwich panels with integrated piezoelectric layers // J. Sandwich Struct. Mater. — 2020. — Vol. 22, No. 4. — P. 1055—1073.

32. *Arefi M.* Electro-mechanical vibration characteristics of piezoelectric nano shells // Thin-Walled Struct. — 2020. — Vol. 155. — P. 106912.

33. *Arefi M., Kiani Moghaddam S., Mohammad-Rezaei Bidgoli E., Kiani M., and Civalek O.* Analysis of graphene nanoplatelet reinforced cylindrical shell subjected to thermo-mechanical loads // Compos. Struct. — 2021. — Vol. 255. — P. 112924.

34. *Pagano N.* Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending // J. Compos. Mater. — 1969. — Vol. 3. — P. 398—411.

Поступила в редакцию 11.08.2021

Окончательный вариант поступил 01.03.2022

Received Aug. 11, 2021 (March 1, 2022)

Приложение А: Определяющие уравнения в перемещениях

Уравнения (18) можно разложить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & T_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + T_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + T_{16} \left(2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \\
 & + 2T_{16} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + T_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + T_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
 & + S_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + S_{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y \partial x} + S_{16} \left(2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right) + S_{26} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + S_{66} \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) + \\
 & + L_{11x} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + L_{12y} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial x} + 2L_{16x} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + L_{16y} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \\
 & + L_{26y} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + L_{66x} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + L_{66y} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} = 0, \tag{A-1}
 \end{aligned}$$

$$T_{22} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + T_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + T_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
 &+T_{26}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + T_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + \\
 &+T_{66}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y\partial x}\right) + S_{12}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x\partial y} + S_{22}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + S_{26}\left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x\partial y}\right) + S_{16}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + S_{66}\left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2}\right) + \\
 &+L_{12x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x\partial y} + L_{16x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + L_{22y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + L_{26x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + 2L_{26y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x\partial y} + L_{66x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y\partial x} + L_{66y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} = 0, \quad (\text{A-2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &F_{12}\left(2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y}\right) + F_{11}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right) + F_{22}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right) + \\
 &+E_{11x}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + E_{22y}\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + E_{12x}\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + E_{12y}\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + q - N(w) = 0, \quad (\text{A-3})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &S_{11}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + S_{12}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y\partial x}\right) + S_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) + \\
 &+S_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y\partial x}\right) + S_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + \\
 &+S_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + J_{11}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + J_{12}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y\partial x} + J_{16}\left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2}\right) + J_{26}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + J_{16}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x\partial y} + \\
 &+J_{66}\left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x\partial y}\right) + K_{16x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y\partial x} + K_{16y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + K_{11x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + K_{12y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y\partial x} + K_{16x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x\partial y} + K_{26y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \\
 &+K_{66x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + K_{66y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x\partial y} = F_{12}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y\right) + E_{12y}\psi_y + F_{11}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x\right) + E_{11x}\psi_x = 0, \quad (\text{A-4})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &S_{12}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right) + S_{22}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + S_{26}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) + \\
 &+S_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + S_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y\partial x}\right) + \\
 &+S_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + J_{12}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x\partial y} + J_{22}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + J_{26}\left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x\partial y}\right) + J_{16}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + J_{26}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y\partial x} + \\
 &+J_{66}\left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2}\right) + K_{26x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + K_{26y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x\partial y} + K_{12x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x\partial y} + K_{22y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + K_{16x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + K_{26y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y\partial x} +
 \end{aligned}$$

$$+K_{66x} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial x} + K_{66y} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} = F_{22} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \right) + E_{22y} \psi_y + F_{12} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \right) + E_{12x} \psi_x = 0, \quad (\text{A-5})$$

$$\begin{aligned} &L_{11x} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + K_{11x} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + H_{11xx} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + L_{12x} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + K_{12x} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y \partial x} + \\ &+ H_{12yx} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial x} + L_{16x} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + K_{16x} \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right) + H_{16xx} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial x} + \\ &+ H_{16yx} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + L_{16x} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + K_{16x} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + H_{16xx} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + L_{26x} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\ &+ K_{26x} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + H_{26xy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + L_{66x} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + K_{66x} \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) + \\ &+ H_{66xx} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + H_{66xy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} = E_{12x} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \right) + F_{12yx} \psi_y + E_{11x} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \right) + F_{11xx} \psi_x = 0, \quad (\text{A-6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &L_{12y} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + K_{12y} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + H_{12yx} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + L_{22y} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + K_{22y} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + \\ &+ H_{22yy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + L_{26y} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + K_{26y} \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) + L_{26x} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \\ &+ H_{26xy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + L_{16y} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + K_{16y} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + H_{16yx} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + L_{26y} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\ &+ K_{26y} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y \partial x} + H_{26yy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial x} + L_{66y} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + K_{66y} \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right) + \\ &+ H_{66xy} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial x} + H_{66yy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} = E_{22y} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \right) + F_{22yy} \psi_y + E_{12y} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \right) + F_{12yx} \psi_x = 0. \quad (\text{A-7}) \end{aligned}$$

Приложение В: Коэффициенты определяющих уравнений

Коэффициенты, используемые в Приложении А, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \int_{-h}^h C_{11}^{(k)} dz, T_{66} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} dz, T_{12} = \int_{-h}^h C_{12}^{(k)} dz, \\ T_{22} &= \int_{-h}^h C_{22}^{(k)} dz, T_{16} = \int_{-h}^h C_{16}^{(k)} dz, T_{26} = \int_{-h}^h C_{26}^{(k)} dz, \end{aligned} \quad (\text{B-1})$$

$$S_{11} = \int_{-h}^h C_{11}^{(k)} z dz, S_{66} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} z dz, S_{16} = \int_{-h}^h C_{16}^{(k)} z dz,$$

$$S_{12} = \int_{-h}^h C_{12}^{(k)} z dz, S_{22} = \int_{-h}^h C_{22}^{(k)} z dz, S_{26} = \int_{-h}^h C_{26}^{(k)} z dz, \quad (B-2)$$

$$J_{11} = \int_{-h}^h C_{11}^{(k)} z^2 dz, J_{66} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} z^2 dz, J_{12} = \int_{-h}^h C_{12}^{(k)} z^2 dz,$$

$$J_{22} = \int_{-h}^h C_{22}^{(k)} z^2 dz, J_{16} = \int_{-h}^h C_{16}^{(k)} z^2 dz, J_{26} = \int_{-h}^h C_{26}^{(k)} z^2 dz, \quad (B-3)$$

$$L_{11x} = \int_{-h}^h C_{11}^{(k)} \phi_x^{(k)} dz, L_{66x} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} \phi_x^{(k)} dz, L_{12x} = \int_{-h}^h C_{12}^{(k)} \phi_x^{(k)} dz,$$

$$L_{22x} = \int_{-h}^h C_{22}^{(k)} \phi_x^{(k)} dz, L_{26x} = \int_{-h}^h C_{26}^{(k)} \phi_x^{(k)} dz, L_{16x} = \int_{-h}^h C_{16}^{(k)} \phi_x^{(k)} dz,$$

$$L_{22y} = \int_{-h}^h C_{22}^{(k)} \phi_y^{(k)} dz, L_{66y} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} \phi_y^{(k)} dz, L_{26y} = \int_{-h}^h C_{26}^{(k)} \phi_y^{(k)} dz,$$

$$L_{16y} = \int_{-h}^h C_{16}^{(k)} \phi_y^{(k)} dz, L_{12y} = \int_{-h}^h C_{12}^{(k)} \phi_y^{(k)} dz, \quad (B-4)$$

$$H_{66xy} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} \phi_y^{(k)} \phi_x^{(k)} dz, H_{66yy} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} \phi_y^{(k)2} dz, H_{66xx} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} \phi_x^{(k)2} dz,$$

$$H_{26xy} = \int_{-h}^h C_{26}^{(k)} \phi_x^{(k)} \phi_y^{(k)} dz, H_{11xx} = \int_{-h}^h C_{11}^{(k)} \phi_x^{(k)2} dz, H_{22yy} = \int_{-h}^h C_{22}^{(k)} \phi_y^{(k)2} dz,$$

$$H_{12yx} = \int_{-h}^h C_{12}^{(k)} \phi_y^{(k)} \phi_x^{(k)} dz, H_{16xx} = \int_{-h}^h C_{16}^{(k)} \phi_x^{(k)2} dz, H_{26yy} = \int_{-h}^h C_{26}^{(k)} \phi_y^{(k)2} dz,$$

$$H_{16yx} = \int_{-h}^h C_{16}^{(k)} \phi_y^{(k)} \phi_x^{(k)} dz, \quad (B-5)$$

$$K_{11x} = \int_{-h}^h C_{11}^{(k)} \phi_x^{(k)} z dz, K_{66x} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} \phi_x^{(k)} z dz, K_{16y} = \int_{-h}^h C_{16}^{(k)} \phi_y^{(k)} z dz,$$

$$K_{66y} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} \phi_y^{(k)} z dz, K_{12x} = \int_{-h}^h C_{12}^{(k)} \phi_x^{(k)} z dz, K_{22y} = \int_{-h}^h C_{22}^{(k)} \phi_y^{(k)} z dz,$$

$$K_{22x} = \int_{-h}^h C_{22}^{(k)} \phi_x^{(k)} z dz, K_{12y} = \int_{-h}^h C_{12}^{(k)} \phi_y^{(k)} z dz, K_{26x} = \int_{-h}^h C_{26}^{(k)} \phi_x^{(k)} z dz,$$

$$K_{16x} = \int_{-h}^h C_{16}^{(k)} \phi_x^{(k)} z dz, K_{26y} = \int_{-h}^h C_{26}^{(k)} \phi_y^{(k)} z dz, \quad (B-6)$$

$$E_{22y} = \int_{-h}^h Q_{22}^{(k)} \frac{\partial \phi_y^{(k)}}{\partial z} dz, E_{12y} = \int_{-h}^h Q_{12}^{(k)} \frac{\partial \phi_y^{(k)}}{\partial z} dz,$$

$$E_{12x} = \int_{-h}^h Q_{12}^{(k)} \frac{\partial \phi_x^{(k)}}{\partial z} dz, E_{11x} = \int_{-h}^h Q_{11}^{(k)} \frac{\partial \phi_x^{(k)}}{\partial z} dz, \quad (B-7)$$

$$F_{12} = \int_{-h}^h Q_{12}^{(k)} dz, F_{11} = \int_{-h}^h Q_{11}^{(k)} dz, F_{22} = \int_{-h}^h Q_{22}^{(k)} dz, \quad (B-8)$$

$$P_{12,yx} = \int_{-h}^h Q_{12}^{(k)} \frac{\partial \phi_y^{(k)}}{\partial z} \frac{\partial \phi_x^{(k)}}{\partial z} dz, P_{11,xx} = \int_{-h}^h Q_{11}^{(k)} \left(\frac{\partial \phi_x^{(k)}}{\partial z} \right)^2 dz, P_{22,yy} = \int_{-h}^h Q_{22}^{(k)} \left(\frac{\partial \phi_y^{(k)}}{\partial z} \right)^2 dz \quad (B-9)$$

*Д. Д. Захаров**

Российский университет транспорта (РУТ—МИИТ), Москва, 127994 Россия

**ТОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТОТ СРЕЗА
ПРИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИН
ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

*D. D. Zakharov**

**EXACT EQUATIONS AND FINDING THE CUT-OFF FREQUENCIES
IN FREE VIBRATIONS OF FUNCTIONALLY GRADED PLATES**

Keywords: functionally graded materials, plates, free vibrations, cut-off frequencies

Frequency equations for free vibrations of plate, where its mass density and elastic moduli depend on the transverse coordinate in an explicit form. Plate faces are supposed stress-free or rigidly clamped or are subjected to combined boundary conditions. It is shown that the respective left-hand sides of final equations can be represented by power series for entire function as a particular case of Peano series and their respective mathematical estimates are presented. Finally, it is shown that the method suggested is effective and all integration stages can be easily realized by the present-day program packages of numerical and symbolic computations. The method is efficient for calculating cut-off frequencies and is verified on numerical examples and by comparing them with results of the Wentzel–Kramer–Brillouin (WKB) method allowing one to find the asymptotics of high vibrations

Ключевые слова: материалы функционально-градиентные, пластины, колебания свободные, частоты среза

Рассмотрены в явном виде уравнения для нахождения частот среза при свободных колебаниях пластин, чья плотность и упругие модули зависят от поперечной координаты. Проанализированы случаи свободных или жестко заземленных лицевых

*Автор, с которым следует вести переписку: dd_zakh@mail.ru
Corresponding author: dd_zakh@mail.ru

поверхностей пластины и комбинации подобных условий. Показано, что соответствующие левые части частотных уравнений есть целые функции и представимы степенными рядами как частный случай рядов Пеано, приведены необходимые математические оценки. Показано, что предложенный метод эффективен и все этапы интегрирования легко реализуются современными математическими пакетами программ численных и символьных вычислений. Итоговый новый метод расчета частот среза проверен на численных примерах и в сравнении с результатами метода Вентцеля—Крамера—Бриллюэна, позволяющего находить асимптотики высоких частот.

Введение

Интенсивное изучение поверхностных волн в функционально-градиентных средах в последние десятилетия постоянно стимулируется появлением новых материалов, вопросами контроля их качества и исследованиями повреждаемости и/или несущей способности различных изделий и элементов конструкций из таких композитных материалов. В контексте задач неразрушающего контроля ультразвуковыми методами обобщенные волны Лэмба [1] — поверхностные волны в упругом слое со свободными границами, жестко заземленными границами или комбинацией таких условий на поверхностях, — оказываются крайне удобным “инструментом”. Для моделирования таких волн в слое с изменяющимися по толщине упругими и инерционными свойствами используют различные математические техники: разложения по ортогональным полиномам Лежандра [2, 3], степенные ряды [4, 5], матрицы-пропэгаторы и формализмы Стро [6—8] или Коши [9], матричные ряды Пеано [8, 10] и т.д. Для получения дисперсионных кривых крайне важно знать “стартовые” частоты (частоты среза), начиная с которых появляются очередные распространяющиеся моды, а сам слой резонирует по толщине за счет процессов растяжения—сжатия или сдвига. Частоты среза можно найти, используя перечисленные методы, но возможно это сделать независимо, прямыми методами интегрирования и построением скалярных рядов Пеано [11]. Современные пакеты программ для численных и символьных вычислений (Mathcad, Mathematica, Maple и др.) позволяют это сделать быстро и эффективно. Цель работы — использование такой методики для получения “явного” вида частотных уравнений и их решений при различных однородных краевых условиях на лицевых поверхностях слоя, нахождение частот среза с любой заданной точностью и для анализа асимптотического поведения решения в области высоких частот и его численной проверки.

1. Уравнения колебаний функционально-градиентной пластины, собственные функции и частотные уравнения

1.1. Математическая постановка. Рассмотрим линейно-упругий изотропный слой, занимающий в декартовых координатах x_α ($\alpha = 1, 2, 3$) область $-\infty < x_{1,2} < +\infty$, $x_3 \in [0, H]$. Предположим зависимость материальных параметров слоя от поперечной координаты в виде заданной функции плотности $\rho(x_3)$ и параметров Ламе $\lambda(x_3)$, $\mu(x_3)$. Следуя классической постановке, также предположим, что упругие модули удовлетворяют условию положительной определенности матрицы жесткостей и непрерывно дифференцируемы по поперечной координате, а функция плотности $\rho(x_3)$ интегрируема по x_3 .

Зависимость процессов от времени примем в виде $\exp(-i\omega t)$ и в очевидных случаях этот множитель опускаем. Исследуемое поле перемещений \mathbf{u} связано с тензором напряжений $\underline{\underline{\sigma}}$ законом Гука ($\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера)

$$\sigma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) \quad (1)$$

и удовлетворяет уравнениям движения Ламе в тензорной форме

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

Краевые условия на лицевых поверхностях $x_3 = 0$ или $x_3 = H$ предполагаем в виде заданных перемещений или напряжений, не зависящих от продольной координаты. Тогда равенства (1) и (2) принимают вид ($x_1 \leftrightarrow x_2$, штрих означает дифференцирование по x_3)

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= (\lambda + 2\mu) u_3', \quad \sigma_{13} = \mu u_1', \\ \sigma_{33}' &= -\rho \omega^2 u_3, \quad \sigma_{13}' = -\rho \omega^2 u_1 \end{aligned} \quad (3)$$

с интегральными тождествами для собственных функций (перемещений), поляризованных в направлении x_3

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(x_3) &= \sigma_{33}|_{x_3=0} - \omega^2 \int_0^{x_3} \rho(\tilde{x}_3) u_3(\tilde{x}_3) d\tilde{x}_3, \\ u_3(x_3) &= u_3|_{x_3=0} + \sigma_{33}|_{x_3=0} \times \int_0^{x_3} \frac{d\tilde{x}_3}{\lambda(\tilde{x}_3) + 2\mu(\tilde{x}_3)} - \\ &- \omega^2 \int_0^{x_3} \frac{1}{\lambda(\tilde{x}_3) + 2\mu(\tilde{x}_3)} \left\{ \int_0^{\tilde{x}_3} \rho(\tilde{x}_3) u_3(\tilde{x}_3) d\tilde{x}_3 \right\} d\tilde{x}_3, \end{aligned} \quad (4)$$

или в направлении x_1 ($x_1 \leftrightarrow x_2$)

$$\sigma_{13}(x_3) = \sigma_{13}|_{x_3=0} - \omega^2 \int_0^{x_3} \rho(\tilde{x}_3) u_1(\tilde{x}_3) d\tilde{x}_3, \quad (5)$$

$$u_1(x_3) = u_1|_{x_3=0} + \sigma_{13}|_{x_3=0} \times \int_0^{x_3} \frac{d\tilde{x}_3}{\mu(\tilde{x}_3)} - \omega^2 \int_0^{x_3} \frac{1}{\mu(\tilde{x}_3)} \left\{ \int_0^{\tilde{x}_3} \rho(\tilde{x}_3) u_1(\tilde{x}_3) d\tilde{x}_3 \right\} d\tilde{x}_3.$$

Подставив значение $x_3 = H$ и соответствующие краевые условия на лицевых поверхностях в равенства (4) или (5), получаем уравнения для определения собственных частот слоя — условие обращения в нуль соответствующих коэффициентов.

1.2. Масштабирование и унификация. Введем в рассмотрение характерное значение масштаба упругого модуля E_0 и масштаба плотности ρ_0 с соответствующей характерной скоростью $c_0 = \sqrt{E_0/\rho_0}$. Далее полагаем, что все рассматриваемые величины и функции обезразмерены по следующим правилам:

$$z = \frac{x_3}{H}, \quad r = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad s = \frac{E_0}{\lambda + 2\mu} \quad (\text{или } s = \frac{E_0}{\mu}), \quad v = \frac{u_\alpha}{H}, \quad \tau = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{E_0}, \quad \Omega = \frac{\omega H}{c_0}. \quad (6)$$

Таким образом, используя соответствующую безразмерную функцию податливости $s(z) = \frac{E_0}{\lambda(z) + 2\mu(z)}$ или $s(z) = \frac{E_0}{\mu(z)}$, можно рассматривать унифицированное представление поля

$$\tau(z) = \tau_0 - \Omega^2 \int_0^z r(z_1) v(z_1) dz_1, \quad \tau(0) = \tau_0, \quad (7)$$

$$v(z) = v_0 + \tau_0 \int_0^z s(z_1) dz_1 - \Omega^2 \int_0^z s(z_1) \left\{ \int_0^{z_1} r(z_2) v(z_2) dz_2 \right\} dz_1, \quad v(0) = v_0,$$

где $v = \frac{u_3}{H}$, $\tau = \frac{\sigma_{33}}{E_0}$ или $v = \frac{u_1}{H}$, $\tau = \frac{\sigma_{13}}{E_0}$ соответственно. Здесь и далее v_0

и τ_0 — значения функций $v(z)$ и $\tau(z)$ при $z = 0$.

1.3. Представление основных функций, их свойства и математические оценки. Интегрируя равенства (7), получаем выражения для собственных функций

$$\tau(z) = v_0 F_1(z, \Omega) + \tau_0 F_2(z, \Omega), \quad v(z) = v_0 G_1(z, \Omega) + \tau_0 G_2(z, \Omega), \quad (8)$$

где

$$F_1(z, \Omega) = -\Omega \times \left\{ \Omega I_{r, sr}^{(0)} - \Omega^3 I_{r, sr}^{(1)} + \Omega^5 I_{r, sr}^{(2)} - \Omega^7 I_{r, sr}^{(3)} + \dots \right\}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 F_2(z, \Omega) &= 1 - \Omega^2 I_{rs}^{(1)} + \Omega^4 I_{rs}^{(2)} - \Omega^6 I_{rs}^{(3)} + \Omega^8 I_{rs}^{(4)} + \dots, \\
 G_1(z, \Omega) &= 1 - \Omega^2 I_{sr}^{(1)} + \Omega^4 I_{sr}^{(2)} - \Omega^6 I_{sr}^{(3)} + \Omega^8 I_{sr}^{(4)} + \dots, \\
 G_2(z, \Omega) &= I_{s,rs}^{(0)} - \Omega^2 I_{s,rs}^{(1)} + \Omega^4 I_{s,rs}^{(2)} - \Omega^6 I_{s,rs}^{(3)} + \Omega^8 I_{s,rs}^{(4)} - \dots,
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

а соответствующие компоненты рядов находим как

$$\begin{aligned}
 I_{r,sr}^{(0)}(z) &= \int_0^z r(z_1) dz_1, \quad I_{r,sr}^{(k)}(z) = \int_0^z r(z_1) I_{sr}^{(k)}(z_1) dz_1, \\
 I_{s,rs}^{(0)}(z) &= \int_0^z s(z_1) dz_1, \quad I_{s,rs}^{(k)}(z) = \int_0^z s(z_1) I_{rs}^{(k)}(z_1) dz_1, \\
 I_{sr}^{(1)}(z) &= \int_0^z s(z_1) \left\{ \int_0^{z_1} r(z_2) dz_2 \right\} dz_1, \\
 I_{sr}^{(k+1)}(z) &= \int_0^z s(z_1) \left\{ \int_0^{z_1} r(z_2) I_{sr}^{(k)}(z_2) dz_2 \right\} dz_1, \\
 I_{rs}^{(1)}(z) &= \int_0^z r(z_1) \left\{ \int_0^{z_1} s(z_2) dz_2 \right\} dz_1, \\
 I_{rs}^{(k+1)}(z) &= \int_0^z r(z_1) \left\{ \int_0^{z_1} s(z_2) I_{rs}^{(k)}(z_2) dz_2 \right\} dz_1.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Равенства (9), (10) задают ряды Пеано в наиболее простом, скалярном, их варианте, когда интегрируются отдельные функции, а не матрицы, и эти ряды обладают типичными свойствами [12, 13].

Очевидно, что безразмерная плотность и соответствующая податливость есть функции непрерывные и ограниченные:

$$0 < r(z) \leq r_*, \quad 0 < s(z) \leq s_*, \tag{11}$$

откуда для величин (10) сразу же следуют оценки вида

$$\begin{aligned}
 \left| I_{sr}^{(k)}(z) \right|, \left| I_{rs}^{(k)}(z) \right| &\leq \frac{(z\sqrt{r_*s_*})^{2n}}{(2n)!}, \quad \left| I_{s,rs}^{(k)}(z) \right| \leq \sqrt{\frac{s_*}{r_*}} \frac{(|z|\sqrt{r_*s_*})^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\
 \left| I_{r,sr}^{(k)}(z) \right| &\leq \sqrt{\frac{r_*}{s_*}} \frac{(|z|\sqrt{r_*s_*})^{2n+1}}{(2n+1)!}.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Это означает, что для рядов (9) остаточные суммы n -го порядка $F_{2n}(z)$, $G_{1n}(z)$ для рядов функций $F_2(z, \Omega)$, $G_1(z, \Omega)$ удовлетворяют неравенствам

$$|F_{2n}(z)|, |G_{1n}(z)| \leq \operatorname{ch}(\Omega z \sqrt{r_* s_*}) \frac{(\Omega z \sqrt{r_* s_*})^{2n+2}}{(2n+2)!}, \quad (13)$$

а остаточные суммы $F_{1n}(z)$, $G_{2n}(z)$ для рядов функций $F_1(z, \Omega)$, $G_2(z, \Omega)$ — неравенствам

$$|F_{1n}(z)| \leq \sqrt{\frac{r_*}{s_*}} \left| \Omega \times \operatorname{sh}(\Omega z \sqrt{r_* s_*}) \right| \frac{(|\Omega z| \sqrt{r_* s_*})^{2n+3}}{(2n+3)!}, \quad (14)$$

$$|G_{2n}(z)| \leq \sqrt{\frac{s_*}{r_*}} \left| \frac{\operatorname{sh}(\Omega z \sqrt{r_* s_*})}{\Omega} \right| \frac{(|\Omega z| \sqrt{r_* s_*})^{2n+3}}{(2n+3)!}. \quad (15)$$

Заметим, что оценки (13)—(15) приведены “с избытком”, поскольку ряды (9) — знакопередающиеся. Из неравенств (12)—(15) сразу же вытекает, что ряды (9) имеют бесконечный радиус сходимости ($-\infty < z < +\infty$) и при бесконечно гладких функциях плотностей и податливостей являются бесконечно дифференцируемыми. В этом случае $F_\alpha(z, \Omega)$ и $G_\alpha(z, \Omega)$ — целые функции, и для их производных также выполняются оценки, аналогичные (13)—(15).

2. Частотные уравнения для разных краевых условий и оценки точности

Предположим сначала, что лицевые поверхности пластины свободны от напряжений, т.е. $\tau_0 = 0$, $\tau(1) = \tau_1 = 0$ (но $\nu_0 \neq 0$). Отсюда получаем $\tau(z) = \nu_0 F_1(z, \Omega)$ и уравнение для нахождения частот среза в виде

$$F_1(1, \Omega) = 0. \quad (16)$$

Аналогично для случая жестко защемленных поверхностей имеем $\nu_0 = 0$, $\nu(1) = \nu_1 = 0$ (но $\tau_0 \neq 0$), откуда следует $\nu(z) = \tau_0 G_2(z, \Omega)$ и частотное уравнение

$$G_2(1, \Omega) = 0. \quad (17)$$

Если верхняя лицевая поверхность свободна, а нижняя поверхность жестко защемлена, то $\tau_1 = 0$, $\nu_0 = 0$ и $\tau(z) = \tau_0 F_2(z, \Omega)$ с частотным уравнением вида

$$F_2(1, \Omega) = 0. \quad (18)$$

Для противоположной комбинации условий имеем $\nu_1 = 0$, $\tau_0 = 0$ и $\nu(z) = \nu_0 G_1(z, \Omega)$, а частотное уравнение примет вид

$$G_1(1, \Omega) = 0. \quad (19)$$

Поскольку $0 \leq z \leq 1$ и оценки (13)—(15) содержат быстро убывающие правые части, то для любого частотного интервала $0 \leq \Omega \leq \Omega_*$ оценки позволяют найти нужное число членов в рядах (9) для вычисления функций $F_\alpha(z, \Omega)$ и $G_\alpha(z, \Omega)$ с заданной абсолютной погрешностью η . Процедура интегрирования для интегралов (10) также может быть численной и использовать для подынтегральных функций как степенные ряды, так и разложения по ортогональным полиномам (например, полиномам Чебышева) или тригонометрические ряды Фурье (возможное нарушение непрерывности периодического продолжения в отдельных точках не повлияет на значение интеграла). Все эти варианты легко реализуемы в готовом виде в большинстве математических пакетов-”решателей” (Maple, Mathematica и т.д.) и позволяют легко находить корни частотных уравнений (16)—(19) с той же погрешностью η , т.е. находить частоты среза пластины, попадающие в рассматриваемый диапазон $0 \leq \Omega \leq \Omega_*$.

3. Предельные случаи

В тривиальных случаях для материала с постоянными значениями плотности и податливости и в соответствующем масштабировании $r = s = 1$ получаем для левых частей частотных уравнений (16)—(19) равенства

$$F_1(1, \Omega) = -\Omega \times \left\{ \Omega - \frac{\Omega^3}{3!} + \frac{\Omega^5}{5!} - \dots \right\} = -\Omega \times \sin \Omega,$$

$$G_2(1, \Omega) = 1 - \frac{\Omega^2}{3!} + \frac{\Omega^4}{5!} - \dots = \frac{\sin \Omega}{\Omega}, \quad (20)$$

$$F_2(1, \Omega) = G_1(1, \Omega) = 1 - \frac{\Omega^2}{2!} + \frac{\Omega^4}{4!} - \dots = \cos \Omega.$$

Таким образом, уравнения (16)—(19) для частот среза и вид соответствующих собственных функций при этом совпадают с известными классическими случаями [1].

4. Процедура расчета частот среза, асимптотики частот и примеры численного анализа

Рассмотрим пример расчета частот среза. Выберем один из типичных вариантов построения функционально-градиентного материала из двух компонентов, плотность и упругие модули которого изменяются по законам смесей

$$\rho(x_3) = \rho_1 f_1(z) + \rho_2 f_2(z) \quad (\rho(x_3), \rho_1, \rho_2 \leftrightarrow \lambda(x_3), \lambda_1, \lambda_2; \mu(x_3), \mu_1, \mu_2), \quad (21)$$

где функция наращивания $f_1(z)$ задается, например, по степенному закону

$$f_1(z) = z^p, \quad f_2(z) = 1 - f_1(z), \quad p > 0. \quad (22)$$

В качестве базовых материалов примем по одной из разновидностей металла Ni ($\rho_1 = 8902 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_1 = 135,11 \text{ ГПа}$, $\mu_1 = 76 \text{ ГПа}$) и керамики Се

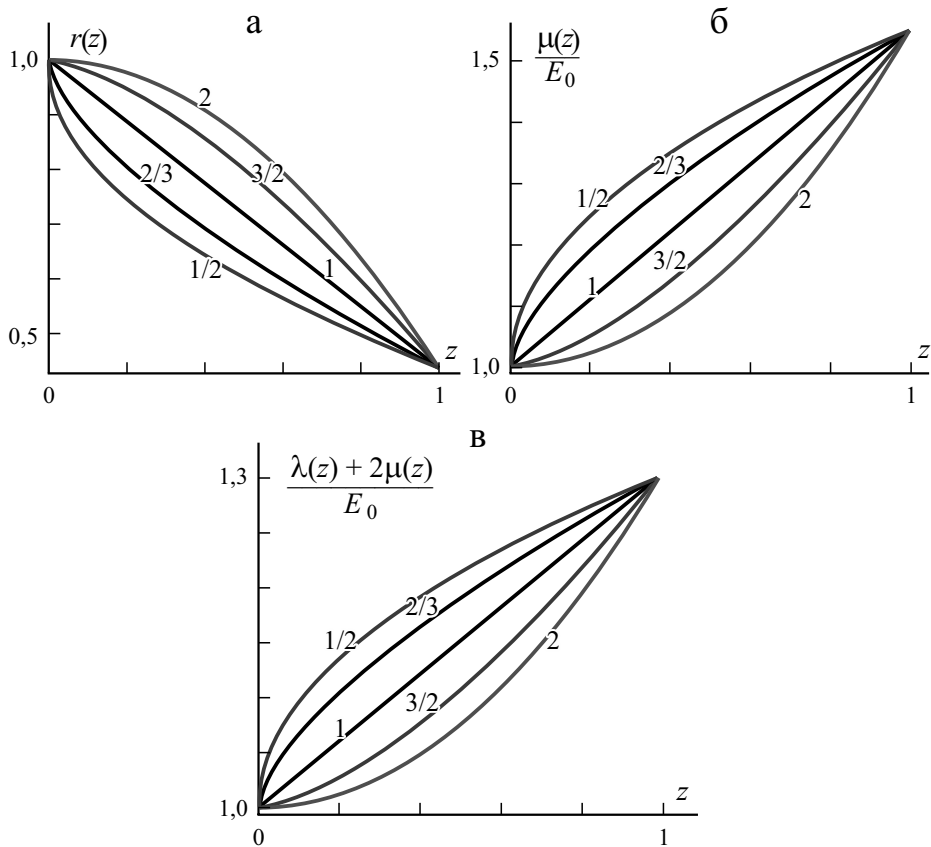


Рис. 1. Зависимость безразмерных плотностей (а) и жесткостей (б, в) от толщиной координаты при разных значениях p (цифры у кривых).

($\rho_2 = 3900$ кг/м³, $\lambda_2 = 138$ ГПа, $\mu_2 = 118$ ГПа). Для параметра p примем возможные значения $p = 1/2, 2/3, 1, 3/2, 2$.

4.1. Алгоритм расчета. Процедура расчета следует из результатов п. 1.3.

1) Задаем интервал частот. Для иллюстрации метода достаточно найти 10—12 первых резонансных частот.

2) Задавая погрешность η (далее полагаем $\eta = 10^{-10}$), находим значение номера n_0 , начиная с которого правые части в неравенствах (13)—(15) меньше η .

3) Находим интегралы вида $I_{sr}^{(k)}(z)$, $I_{r,sr}^{(k)}(z)$, $I_{rs}^{(k)}(z)$, $I_{s,rs}^{(k)}(z)$ в выражениях (10) для $k = 1, 2, \dots, n_0$ в разложениях (9). Для функций (22) удобно интегрировать степенные ряды для функций податливости.

4) Получаем правые части частотных уравнений (16)—(19) и находим численные значения частот среза.

4.2. Примеры численного анализа. Безразмерные плотности и жесткости в зависимости от координаты z для полученных функционально-градиентных материалов показаны на рис. 1, где приняты масштабные значения $\rho_0 = \rho_1$, $E_P = E_0 = \lambda_1 + 2\mu_1$, $E_S = E_0 = \mu_1$.

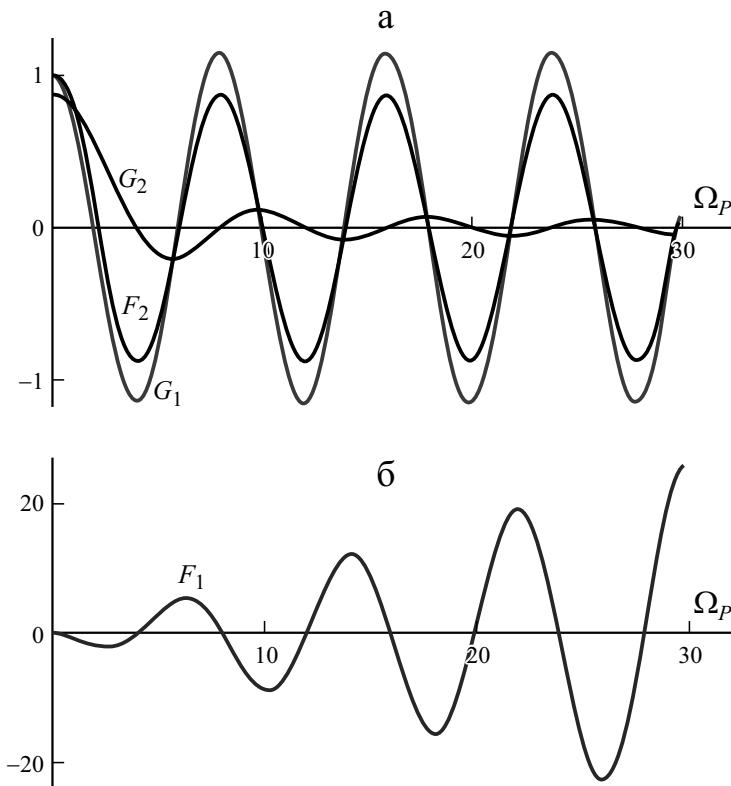


Рис. 2. Графики функций в правой части уравнений (17)—(19) (а) и уравнения (16) (б) для толщинных колебаний.

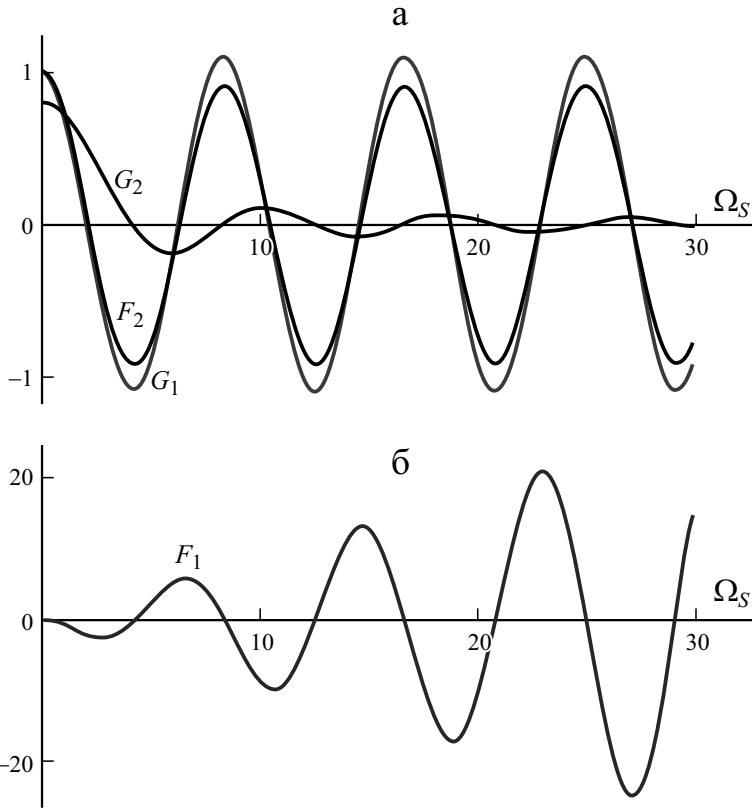


Рис. 3. Графики функций в правой части уравнений (17)—(19) (а) и уравнения (16) (б) для сдвиговых колебаний.

Поведение функций (16)—(19) для промежуточного значения параметра $p = 1$ в выражениях (22) для случая толщинных колебаний (4) проиллюстрировано на рис. 2. Значение безразмерного частотного параметра выбрано в виде $\Omega = \Omega_p = \omega H / c_p$, $c_0 = c_p = \sqrt{E_p / \rho_1}$. На рис. 3 аналогичные графики приведены для сдвиговых колебаний (5) в масштабе $\Omega = \Omega_S = \omega H / c_S$, $c_0 = c_S = \sqrt{E_S / \rho_1}$. Соответствующие безразмерные значения первых ненулевых корней уравнений (16)—(19) приведены в таблице, малозначащие цифры для краткости опущены.

Первые три безразмерные частоты среза

Тип уравнения	1		2		3	
	Ω_p	Ω_S	Ω_p	Ω_S	Ω_p	Ω_S
(16) FF	4,02654	4,21266	7,98231	8,35043	11,9493	12,4998
(17) CC	3,93171	4,10795	7,92623	8,28814	11,9101	12,4561
(18) CF	2,09202	2,14981	6,01532	6,27925	9,97317	10,4245
(19) FC	1,88551	2,00919	5,91772	6,20059	9,91066	10,2727

Несколько большее значение первого полупериода для функции $G_2(1, \Omega)$ на рис. 2— a и рис. 3— a объясняется отсутствием нуля у этой функции при $\Omega = 0$, что следует как из непосредственного разложения (9), так и из предельной формулы (20).

Как нетрудно видеть по этим результатам, поведение функций для уравнений одного типа мало отличается друг от друга качественно и масштаб однотипных значений частот среза одинаков. Аналогичное поведение наблюдается и при других значениях параметра $p = 1/2, 2/3, 1, 3/2, 2$.

4.3. Асимптотическое поведение частот среза. Сравним поведение расчетных значений с приближенными значениями частот, получаемых методом Вентцеля—Крамера—Бриллюэна [14, 15]. Для этого решение исходного дифференциального уравнения движения

$$\left(s^{-1} v' \right)' + r \Omega^2 v = 0 \tag{23}$$

ищем в виде

$$v = w(z) e^{i\Omega \xi(z)}, \quad \xi(z) = \int_0^z \sqrt{r(z_1) s(z_1)} dz_1. \tag{24}$$

Подстановка (24) в (23) приводит к равенству

$$\frac{1}{i\Omega} \left(s^{-1} w' \right)' + \left[w \left(s^{-1} \xi' \right)' + 2 \left(s^{-1} \xi' \right) w' \right] = 0, \tag{25}$$

и пренебрегая в уравнении (25) членами порядка $O(\Omega^{-1})$ при $\Omega \rightarrow \infty$, получаем

$$w = A \cdot \left(s^{-1} r \right)^{-1/4}, \quad A = \text{const}, \tag{26}$$

откуда в силу знаковой симметрии

$$v(z) = \left[s^{-1}(z) r(z) \right]^{-1/4} \left[A_1 e^{i\Omega \xi(z)} + A_2 e^{-i\Omega \xi(z)} \right], \quad A_{1,2} = \text{const}. \tag{27}$$

Подставив приближенное решение (27) в краевое условие свободных от напряжений лицевых поверхностей $v'(0) = v'(1) = 0$, получим асимптотически точный аналог частотного уравнения (16) при $\Omega \rightarrow \infty$:

$$\text{tg}(\Omega \xi(1)) = O(\Omega^{-1}) \approx 0, \quad \Omega \xi(1) \approx \pi n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{28}$$

Аналогично для случая жестко зашумленных поверхностей $v(0) = v(1) = 0$ получаем асимптотически точный аналог уравнения (17)

$$\sin(\Omega \xi(1)) = 0, \quad \Omega \xi(1) \approx \pi n \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{29}$$

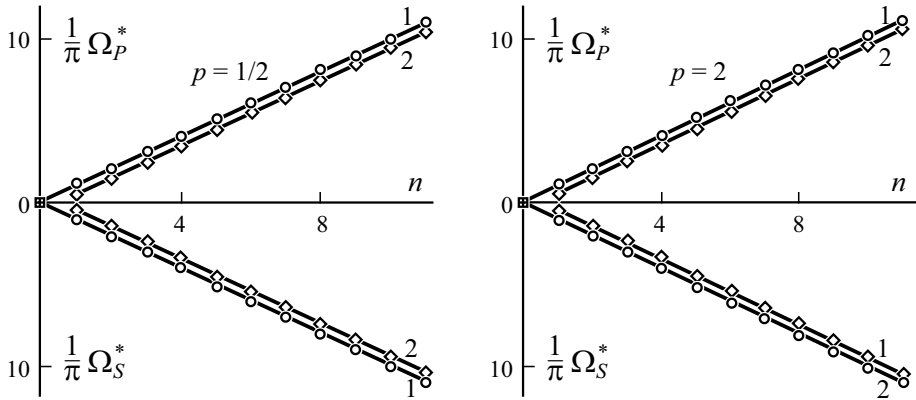


Рис. 4. Точные значения частот среза толщинных колебаний в масштабе Ω_P^* и изгибных колебаний в масштабе Ω_S^* и их асимптотики при разных краевых условиях. Пояснения в тексте.

Соответственно, если верхняя лицевая поверхность свободна, а нижняя поверхность жестко закреплена, то $v(0) = v'(1) = 0$ и для уравнения (18) получаем асимптотику

$$\text{ctg}(\Omega\xi(1)) = O(\Omega^{-1}) \approx 0, \quad \Omega\xi(1) \approx \pi/2 + \pi n \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (30)$$

Если же свободна нижняя лицевая поверхность, а жестко закреплена верхняя поверхность, то $v'(0) = v(1) = 0$ и асимптотика для уравнения (19) также примет вид (30).

Сопоставление корней частотных уравнений (16)—(19) с их асимптотиками (28)—(30) проведено на рис. 4 для толщинных и сдвиговых колебаний в масштабах частот

$$\Omega_P^* = \omega \int_0^H \sqrt{\frac{\rho(z)}{\lambda(z) + 2\mu(z)}} dz, \quad \Omega_S^* = \omega \int_0^H \sqrt{\frac{\rho(z)}{\mu(z)}} dz \quad (31)$$

для верхнего и нижнего графиков соответственно. Результаты даны для крайних значений параметров $p = 1/2$ и $p = 2$ в зависимости от номера n . Сплошные линии — асимптотики вида (28) и (29) (кривая 1) и (30) (кривая 2); квадрат — частота для случая обоих свободных поверхностей и для случая жестко закрепленной нижней поверхности и свободной верхней поверхности; кружок — частота для случая обоих жестко закрепленных поверхностей и для случая жестко закрепленной верхней поверхности и свободной нижней поверхности. Как легко видеть, в данных масштабах различие между точными и асимптотиче-

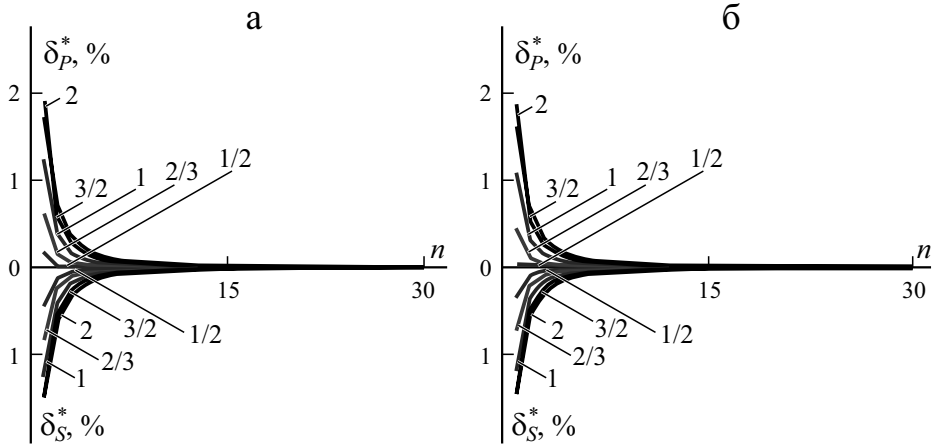


Рис. 5. Относительные погрешности δ_p^* и δ_s^* частот среза для случая свободных (а) и жестко заземленных (б) поверхностей при разных значениях p (цифры у кривых).

скими значениями невелико. Такое же качественное поведение частот среза наблюдается при $p = 2/3, 1, 3/2$ и разных краевых условиях на лицевых поверхностях.

Более детальная информация о точности асимптотик (28)—(30) приведена на графиках относительных погрешностей рис. 5, 6

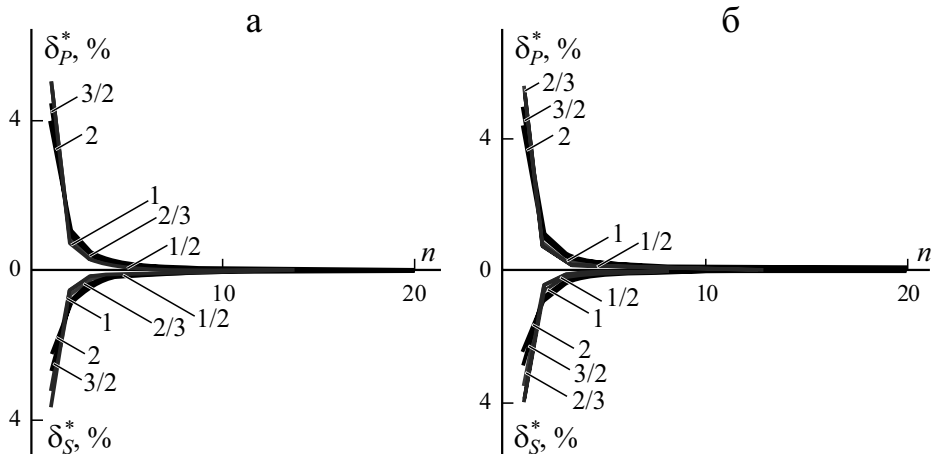


Рис. 6. То же для случая жестко заземленной нижней поверхности и свободной верхней поверхности (а) и обратного сочетания условий (б).

$$\delta_{P,S}^* = \left| 1 - \frac{\Omega_{P,S}^{as}}{\Omega_{P,S}^*} \right| \cdot 100\% \quad (32)$$

в зависимости от номера n , начиная с первой ненулевой частоты. Для большей наглядности графики даны в виде ломаных с узлами $(n, \delta_{P,S}^*(n))$.

Поведение асимптотик частот среза сходно для случая свободных и жестко заземленных поверхностей. Наибольшая погрешность (1,9 и 1,5%) имеет место для первой частоты при $p = 2$ и погрешность в доли процента при $p = 1/2$ с промежуточным расположением погрешности при $p = 1/2, 2/3, 1, 3/2, 2$. Далее погрешность быстро убывает до сотых и тысячных долей процента при $n > 3$ и $n > 8$ соответственно.

В случае, когда одна из поверхностей жестко заземлена, поведение погрешности несколько иное. Наименьшую погрешность первая частота имеет при $p = 2$, а наибольшую — при $p = 1/2$ (различие в несколько раз). Обе погрешности существенно выше, чем для свободных или жестко заземленных поверхностей (4—5%). При этом более быстрое убывание погрешностей с ростом номера n происходит при меньших значениях параметра p . В целом же соблюдается аналогичный диапазон от нескольких процентов при начальных номерах до тысячных долей процента и менее, когда номер частоты исчисляется десятками.

5. Обсуждение результатов и выводы

С помощью непосредственного применения скалярных рядов Пеано получены частотные уравнения для нахождения частот толщинных резонансов бесконечных пластин из функционально-градиентных материалов. Для каждой из рассмотренных комбинаций краевых условий на лицевых поверхностях пластины (свободные поверхности, жестко заземленные поверхности, комбинированные условия) частоты делятся на два семейства по механизму возбуждения — за счет деформаций растяжения—сжатия или деформаций сдвига. Алгоритм анализа применяется одинаково. Показано, что стандартные пакеты программ позволяют выполнять эффективное интегрирование для компонент рядов Пеано и реализовать точный расчет частот. Соответствующие ряды отвечают целым осциллирующим функциям и имеют достаточно простой вид, легко мажорируются и являются быстро сходящимися, т.е. по сути обладают всеми достоинствами явных формул для левой части уравнений частот.

Приближенные результаты, получаемые методом Вентцеля—Крамера—Бриллюэна [14], позволяют находить асимптотики для высоких частот. Асимптотики отвечают тем частотам, на которых по толщине пластины укладывается целое число полуволн с эффективными зна-

чениями медленностей (величин, обратных к скоростям), задаваемых интегралами от параметров среды:

$$\left(c_P^*\right)^{-1} = \frac{1}{H} \int_0^H \sqrt{\frac{\rho(z)}{\lambda(z) + 2\mu(z)}} dz, \quad \left(c_S^*\right)^{-1} = \frac{1}{H} \int_0^H \sqrt{\frac{\rho(z)}{\mu(z)}} dz. \quad (33)$$

Сравнение численных результатов с асимптотиками в каждом из частотных семейств для эффективных скоростей c_P^* и c_S^* (33) показывает хорошее согласование с 4—5-й частоты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Graff K. F.* Wave motion in elastic solids. — NY.: Dover publ., 1975. — 682 p.
2. *Lefebvre J. E., Zhang, V., Gazalet J., Gryba T. Sadaune, V.* Acoustic wave propagation in continuous functionally graded plates: An extension of the Legendre polynomial approach // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. — 2001. — Vol. 48. — P. 1332—1340.
3. *Yan Lyu, Jianbo Zhang, Guorong Song, Mingkun Liu, Bin Wu, Cunfu He.* The dispersion curves and wave structures of lamb waves in functionally graded plate: Theoretical and simulation analysis // AIP Conf. Proc. 2102. — 2019. — 050020.
4. *Cao X., Jin F., Jeon I., Lu T. J.* Propagation of Love waves in a functionally graded piezoelectric material (FGPM) layered composite system // Int. J. Solids Struct. — 2009. — Vol. 46. — P. 4123—4132.
5. *Cao X. S., Jin F., Jeon I.* Calculation of propagation properties of Lamb waves in a functionally graded material (FGM) plate by power series technique // NDT&E Int. — 2011. — Vol. 44. — P. 84—92.
6. *Vlasie V., Rousseau M.* Guided modes in a plane elastic layer with gradually continuous acoustic properties // NDT&E Int. — 2004. — Vol. 37. — P. 633—644.
7. *Kieczynski P., Szalewski M., Balcerzak A., Wieja K.* Propagation of ultrasonic Love waves in nonhomogeneous elastic functionally graded materials // Ultrasonics. — 2016. — Vol. 65. — P. 220—227.
8. *Shuvalov A. L., LeClezio E., Feuillard G.* The state-vector formalism and the Peano-series solution for modelling guided waves in functionally graded anisotropic piezoelectric plates // Int. J. Eng. Sci. — 2008 — Vol. 46. — P. 929—947.
9. *Kuznetsov S. V.* Closed form analytical solution for dispersion of Lamb waves in FG plates // Wave Motion. — 2019. — Vol. 84. — P. 1—7.
10. *Amor M. B., Ghozlen M. H. B.* Lamb waves propagation in functionally graded piezoelectric materials by Peano-series method // Ultrasonics. — 2015. — Vol. 55. — P. 10—14.
11. *Peano G.* Integration par series des equations differentielles lineaires // Math. Ann. — 1888. — Vol. 32. — P. 450—456.
12. *Гантмахер Ф. П.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 575 с.
13. *Улитин В. В.* Ряд Пеано и матрицанты при решении прикладных задач. — СПб.: Изд-во “Парк Ком”, 2012. — 164 с.

14. *Olver F. W. J. Asymptotics and Special Functions*, — N.Y.: Academic Press, 1974. — 584 p.

15. *Cao X, Jin F, Jeon I. Characterization of the variation of the material properties in a freestanding inhomogeneous thin film // Phys. Lett. A. — 2010. — Vol. 375. — P. 220—224.*

Поступила в редакцию 02.02.2022

Окончательный вариант поступил 20.06.2022

Received Feb. 2, 2022 (June 20, 2022)

Н. Мишра^а, К. Дас^{б}*

*^аSchool of Minerals, Metallurgical and Materials Engineering, Indian Institute of Technology
Bhubaneswar, Odisha-752050, India*

*^бDepartment of Metallurgy and Materials Engineering, Indian Institute of Engineering Science
and Technology Shibpur, Howrah 711103, West Bengal, India*

СРАВНИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИНКРЕМЕНТАЛЬНОЙ САМОСОГЛАСОВАННОЙ И ЭШЕЛБИ—МОРИ—ТАНАКА МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ СВОЙСТВ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ С ОРТОТРОПНОЙ МАТРИЦЕЙ¹

*N. Mishra and K. Das**

A COMPARATIVE STUDY OF INCREMENTAL SELF-CONSISTENT AND ESHELBY-MORI-TANAKA MODELS FOR ESTIMATING THE ELECTROELASTIC PROPERTIES OF PIEZOELECTRIC POLYMER COMPOSITES WITH AN ORTHOTROPIC MATRIX

Keywords: orthotropic polymer matrix, self-consistency, Eshelby-Mori-Tanaka model, kinematic uniform boundary conditions

The efficiency of two micromechanical models, the incremental self-consistent (ISC) model and a modified Eshelby-Mori-Tanaka (EMT) model is evaluated, in predicting the effective electroelastic properties of unidirectional piezoelectric polymer composites with an orthotropic polymeric matrix, especially at high volume fractions of reinforcement. The effective electroelastic properties of PZT-7A/PVDF composites were obtained using both the models and they were compared with those found using a representative volume element (RVE)-based finite-element (FE) model. Composites with two different types of connectivity and four different types of reinforcement geometry (spherical, ellipsoidal, circular cylindrical, and elliptic cylindrical) were considered. Our analysis showed that, in general, better results predicted the modified EMT model.

*Автор, с которым следует вести переписку: kaushik@metal.iiests.ac.in
Corresponding author: kaushik@metal.iiests.ac.in

¹Перевод с англ.

Ключевые слова: матрица полимерная ортотропная, самосогласованность, модель Эшелби—Мори—Танака, условия граничные однородные кинематические

Оценена эффективность двух микромеханических моделей — инкрементальной самосогласованной (ISC) и модифицированной Эшелби—Мори—Танака (EMT) — для предсказания эффективных электроупругих свойств однонаправленных пьезоэлектрических полимерных композитов с ортотропной полимерной матрицей, особенно при большом объемном содержании арматуры. Эффективные электроупругие свойства композитов на основе пьезокерамики PZT-7A и поливинилиденфторида (PVDF) определены с использованием обеих моделей и сопоставлены с рассчитанными с помощью конечно-элементной модели на основе представительных объемных элементов (ПОЭ). Рассмотрены композиты с двумя разными типами связности и четырьмя формами геометрии арматуры (сферической, эллипсоидальной, круглоцилиндрической и эллиптически-цилиндрической). Анализ показал, что в целом модифицированная модель EMT лучше предсказывает эффективные свойства композита.

Введение

Пьезоэлектрические полимерные композиты — отличный выбор в качестве функциональных материалов в гибкой микроэлектронике в силу хороших электромеханических характеристик, отличной гибкости и малой массы [1]. Присущая этим композитам способность преобразовывать механическую энергию в электрическую и наоборот делает их чрезвычайно популярными в качестве исполнительных механизмов и датчиков в микроустройствах [2, 3]. Некоторые примеры таких полимерных композитов — полидиметилсилоксан (PDMS)/титанат бария (BaTiO_3) [4], SU8/оксид цинка (ZnO) [5], PDMS/ниобат магния — титанат свинца (PMN—PT) [6], эпоксид/PMN—PT [7]. Использование микромеханических моделей для предсказания эффективных свойств композитов снижает стоимость и время физических экспериментов.

Некоторые исследователи разработали модели для определения электроупругих свойств пьезоэлектрических композитов. Например, в [8] распространили микромеханику Эшелби—Мори—Танака (EMT) [9, 10] на проблему пьезоэлектрических включений в области линейного пьезоэлектричества. На основе разработки, выполненной в [8], изучали эффективные электроупругие свойства разных пьезоэлектрических композитов [11—15]. В [16] использовали метод асимптотической гомогенизации для разработки аналитических выражений для расчета эффективных свойств бинарного пьезоэлектрического композита (с фазами, имеющими гексагональную симметрию), содержащего однонаправленные пьезоэлектрические цилиндрические волокна в непьезоэлектрической матрице. В [17]

использовали метод конечных элементов (МКЭ), основанный на периодических граничных условиях, и метод асимптотической гомогенизации для оценки и сравнения эффективных свойств бинарного пьезоэлектрического композита, состоящего из однонаправленных цилиндрических волокон из трансверсально-изотропной пьезокерамики, погруженных в изотропную пассивную матрицу. Исследования в этой области также недавно выполнили в [18—20]. Эффективные свойства анизотропных сложных композитов, например, композитов с ортотропной матрицей, также оценили в [21, 22].

Инкрементальный самосогласованный (ISC) метод основан на дифференциальной [23] и классической самосогласованной [24] схемах. Многие исследователи использовали метод ISC для оценки эффективных свойств композитов с изотропной или трансверсально-изотропной матрицей [24—26]. Установлено, что метод ISC лучше предсказывает эффективные свойства, чем классическая самосогласованная схема. При достаточно большом объемном содержании арматуры он обеспечивает результаты, аналогичные получаемым с помощью метода EMT [26]. Однако в доступной литературе почти отсутствует сравнение результатов, полученных с помощью разных микромеханических моделей для пьезоэлектрических композитов с ортотропной матрицей. Поэтому цель настоящей работы — оценить эффективность метода ISC для предсказания свойств ортотропных композитов. Эффективные электроупругие свойства, определенные с помощью моделей EMT и ISC и рассчитанные МКЭ, сравнили между собой, особенно при большом объемном содержании арматуры.

Для этой цели рассмотрели четыре типа представительных объемных элементов (ПОЭ) композитов с ортотропными матрицами, армированными круглыми цилиндрическими (композит 1—3) и эллиптическими цилиндрическими (композит 1—3) волокнами, эллипсоидальными (композит 0—3) и сферическими включениями (композит 0—3). В качестве примера для анализа выбрали композит с ортотропной поливинилиденфторидной (PVDF) матрицей и арматурой из цирконат-титаната (PZT-7A).

1. Свойства материала

В качестве материала использовали композит PZT-7A/PVDF с электроупругими свойствами, приведенными в таблице.

PVDF — ортотропный пьезоэлектрический полимер. В зависимости от условий обработки существует пять полиморфов PVDF: α , β , γ , δ , ϵ [27], из которых наиболее широко исследован полиморф β , обладающий важными свойствами: сегнето- и пьезоэлектрическими; легкостью и механической гибкостью [28]. Точно так же PZT, представляющий сегнетоэлектрическую керамику, широко используют в микроэлектромеханических системах (MEMS) в качестве датчиков и исполнительных механизмов благодаря высокому пьезоэлектрическому коэффициенту [29]. Однако в силу жесткости и хрупкости керамика подвержена случайному разрушению и ее нельзя использовать в гибкой электронике. Для устранения этого недостатка

Свойства составляющих материалов [31]

Свойство	PVDF	PZT 7A
C_{11} , ГПа	3,8	148,0
C_{12} , ГПа	1,9	76,2
C_{13} , ГПа	1,0	74,2
C_{22} , ГПа	3,2	148,0
C_{23} , ГПа	0,9	74,2
C_{33} , ГПа	1,2	131,0
C_{44} , ГПа	0,7	25,4
C_{55} , ГПа	0,9	25,4
C_{66} , ГПа	0,9	35,9
k_{11}/k_0	7,4	460,0
k_{22}/k_0	9,3	460,0
k_{33}/k_0	7,6	235,0
e_{15} , К/м ²	0	9,2
e_{24} , К/м ²	0	9,2
e_{31} , К/м ²	0,024	-2,1
e_{32} , К/м ²	0,001	-2,1
e_{33} , К/м ²	-0,027	9,5

керамику можно комбинировать с полимерами для образования пьезоэлектрических полимерных композитов. PZT в сочетании с PVDF образует полимерный композит PVDF/PZT, обладающий свойствами как PZT, так и PVDF. Благодаря своим диэлектрическим и пьезоэлектрическим свойствам, а также легкости композиты PVDF/PZT используют в качестве функциональных материалов в микроустройствах [30]. Поэтому в настоящей работе для исследования выбрали композитную систему PVDF/PZT-7A с включениями разной формы: бесконечно длинными круглыми цилиндрами, бесконечно длинными эллиптическими цилиндрами, эллипсоидами и сферами (рис. 1—*a*). Полимер PVDF имеет орторомбическую симметрию, а керамика PZT-7A — гексагональную (6 мм). Оба составляющих материала поляризовали в направлении оси 3.

Рассмотрели четыре композитные системы, состоящие из ортотропных матриц и трансверсально-изотропных армирующих элементов: (i) круглых цилиндров с соотношениями $\frac{a_1}{a_2} = 1$ и $\frac{a_3}{a_1} = \infty$ (бесконечно длинные в направлении 3), (ii) эллиптических цилиндров с соотношениями $\frac{a_1}{a_2} = 2$ и $\frac{a_3}{a_1} = \infty$ (бесконечно длинные в направлении 3), (iii) эллипсоидов с соотношениями $\frac{a_1}{a_2} = 1$ и $\frac{a_3}{a_1} = 2$, (iv) сфер с соотношениями $\frac{a_1}{a_2} = 1$ и $\frac{a_3}{a_1} = 1$.

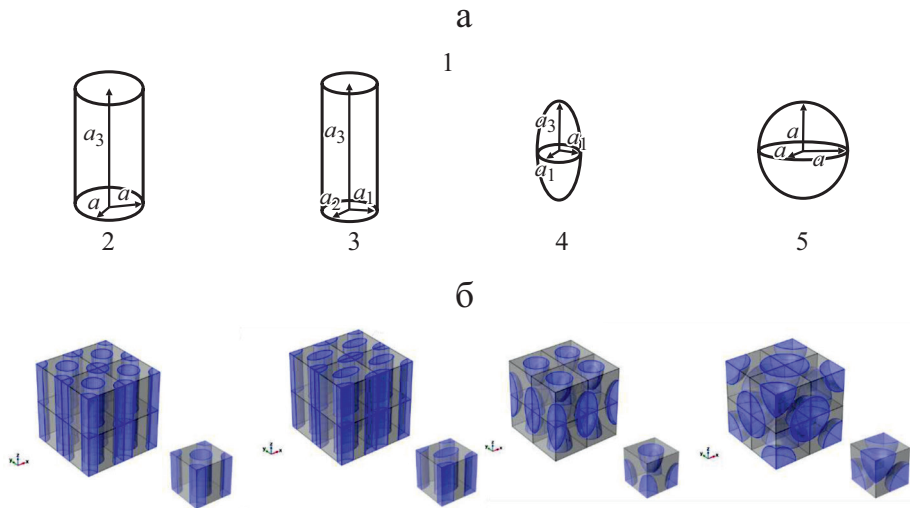


Рис. 1. Разные формы включений (1), использованные в моделях ISC и EMT (а), и восьмие части ПОЭ с конечно-элементными сетками (б): 2, 3 — круговой и эллиптический цилиндры; 4 — эллипсоид; 5 — сфера.

Здесь, a_1 , a_2 и a_3 — полудлины главных осей арматуры, как показано на рис. 1—а.

2. Теория

Уравнения состояния линейного пьезоэлектрического материала запишем как

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}^E \varepsilon_{mn} - e_{nij} E_n, \quad D_i = e_{imn} \varepsilon_{mn} + k_{in}^\varepsilon E_n, \quad (1)$$

где σ_{ij} и D_i — компоненты тензора напряжений второго ранга и вектора электрических смещений соответственно; C_{ijmn}^E , k_{in}^ε , e_{nij} — компоненты тензора жесткости четвертого ранга, измеренного при постоянной напряженности электрического поля E , компоненты тензора диэлектрической проницаемости второго ранга, измеренного при постоянной деформации ε , и компоненты тензора коэффициентов пьезоэлектрической связи третьего ранга (также известные как пьезоэлектрические коэффициенты), ε_{mn} и E_i — компоненты тензора деформаций второго ранга и вектор напряженности электрического поля соответственно.

Кроме того, решение уравнения (1) требует выполнения уравнений упругого равновесия и закона электростатики Гаусса. Уравнения упругого равновесия в отсутствие массовых сил можно записать как $\sigma_{ij,j} = 0$, а уравнения для закона Гаусса в отсутствие свободного заряда — как $D_{i,i} = 0$. В уравнениях равновесия запятая в нижних индексах означает частное дифференцирование по следующей за ней координате. Компоненты тензора деформаций ε_{mn} связаны с компонентами вектора перемещений u_m

как $\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2}(u_{m,n} + u_{n,m})$. Компоненты вектора напряженности электрического поля E_n связаны с электрическим потенциалом ϕ как $E_n = -\phi_{,n}$.

Уравнения состояния можно переписать в обозначениях Барнетта и Лоте [32] с помощью преобразования

$$\begin{aligned} (11) &\rightarrow 1, (22) \rightarrow 2, (33) \rightarrow 3, \\ (23), (32) &\rightarrow 4, (13), (31) \rightarrow 5, (12), (21) \rightarrow 6, \\ (14), (41) &\rightarrow 7, (24), (42) \rightarrow 8, \text{ и } (34), (43) \rightarrow 9. \end{aligned}$$

Величины Z_{Mn} , Σ_{iJ} и F_{iJMn} теперь определим как деформации—напряженность электрического поля, напряжения—электрические смещения и пьезоэлектрические или электроупругие модули соответственно:

$$Z_{Mn} = \begin{cases} \varepsilon_{mn} & \text{при } M(=m) = 1, 2, 3, \\ -E_n & M = 4, \end{cases} \quad (2)$$

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij} & \text{при } J(=j) = 1, 2, 3, \\ D_i & J = 4, \end{cases} \quad (3)$$

$$F_{iJMn} = \begin{cases} C_{ijmn}^E & J, M = 1, 2, 3, \\ e_{nij} & \text{при } J = 1, 2, 3; M = 4, \\ e_{imn} & J = 4; M = 1, 2, 3, \\ -k_{in}^\varepsilon & J = M = 4. \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом, F_{1122} преобразуется в $F_{12} = C_{12}^E$, а F_{3443} — в $F_{99} = -k_{33}^\varepsilon$. Уравнение состояния также можно записать в матричной форме как $[\Sigma]_{9 \times 1} = [F]_{9 \times 9} [Z]_{9 \times 1}$ или в развернутом виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ C_{12}^E & C_{22}^E & C_{23}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{32} \\ C_{13}^E & C_{23}^E & C_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^E & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & -k_{11}^\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 & 0 & -k_{22}^\varepsilon & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{33}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \\ -E_1 \\ -E_2 \\ -E_3 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Определение матрицы электроупругих модулей F имеет важное значение для описания характеристик пьезоэлектрического материала. В настоящей работе для определения эффективных электроупругих свойств би-нарного однонаправленного композита использовали метод ISC. Матрицу электроупругих модулей арматуры и матрицы обозначили как F_r и F_m соответственно. Композит подвергали действию однородного упругого перемещения и однородного электрического потенциала. Микромеханические модели, используемые для определения матрицы эффективных электроупругих модулей F^{eff} , описаны в последующих разделах.

2.1. Подход Эшелби—Мори—Танака основан на методе среднего напряжения Мори—Танака и является модификацией эквивалентной задачи Эшелби о включениях с учетом неразбавленных концентраций включений. В [8] данный метод распространили на задачу о пьезоэлектрических включениях, а в [11] предложили матрицу эффективного электроупругого модуля в виде

$$F_{EMT}^{eff} = F_m + \nu_r (F_r - F_m) T_{EMT}^{piezo}, \quad (6)$$

где ν_r — объемное содержание арматуры; T_{EMT}^{piezo} — тензор концентрации для пьезоэлектрического материала:

$$T_{EMT}^{piezo} = \{\mathbb{I} + S^{piezo} F_m^{-1} (F_r - F_m)\}^{-1} [\nu_m \mathbb{I} + \{\mathbb{I} + S^{piezo} F_m^{-1} (F_r - F_m)\}^{-1}]^{-1}. \quad (7)$$

Здесь \mathbb{I} — единичная матрица; S^{piezo} — пьезоэлектрический тензор Эшелби. Верхний индекс m в последующих уравнениях относится к фазе матрицы. Верхние индексы E и ε , появившиеся в уравнении (1), далее не используем. Отметим, что далее величины C_{ij}^m и k_{ij}^m будут означать $(C_{ij}^m)^E$ и $(k_{ij}^m)^\varepsilon$ соответственно. Следовательно, постоянные жесткости C_{ij}^m относятся к жесткости матрицы, измеренной при постоянном электрическом поле, а диэлектрические постоянные матрицы k_{ij}^m — к измеренным при постоянной деформации.

Компонентами пьезоэлектрического тензора Эшелби S^{piezo} для ортотропной матрицы с круглыми и эллиптическими цилиндрическими волокнами (композитная система 1—3) вычисляем по формулам

$$\begin{aligned} S_{1111} &= \frac{1}{4\pi} (C_{11}^m I_{1111} + C_{21}^m I_{2112}), \quad S_{1122} = \frac{1}{4\pi} (C_{12}^m I_{1111} + C_{22}^m I_{2112}), \\ S_{1133} &= \frac{1}{4\pi} (C_{13}^m I_{1111} + C_{23}^m I_{2112}), \quad S_{1143} = \frac{1}{4\pi} (e_{31}^m I_{1111} + e_{32}^m I_{2112}), \\ S_{2211} &= \frac{1}{4\pi} (C_{11}^m I_{1221} + C_{21}^m I_{2222}), \quad S_{2222} = \frac{1}{4\pi} (C_{12}^m I_{1221} + C_{22}^m I_{2222}), \\ S_{2233} &= \frac{1}{4\pi} (C_{13}^m I_{1221} + C_{23}^m I_{2222}), \quad S_{2243} = \frac{1}{4\pi} (e_{31}^m I_{1221} + e_{32}^m I_{2222}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 S_{2323} &= \frac{1}{8\pi} \left(C_{44}^m I_{2233} + e_{24}^m I_{2234} \right), \quad S_{2342} = \frac{1}{8\pi} \left(e_{24}^m I_{2233} - k_{22}^m I_{2234} \right), \\
 S_{1313} &= \frac{1}{8\pi} \left(C_{44}^m I_{1133} + e_{24}^m I_{1134} \right), \quad S_{1341} = \frac{1}{8\pi} \left(e_{15}^m I_{1133} - k_{11}^m I_{1134} \right), \\
 S_{1212} &= \frac{1}{8\pi} \left[C_{66}^m (I_{1122} + I_{1212} + I_{2121} + I_{2211}) \right], \\
 S_{4223} &= \frac{1}{4\pi} \left(C_{44}^m I_{2243} + e_{24}^m I_{2244} \right), \\
 S_{4242} &= \frac{1}{4\pi} \left(e_{24}^m I_{2243} - k_{22}^m I_{2244} \right).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Компонентами тензора S^{piezo} для ортотропной матрицы с эллипсоидальными или сферическими включениями (компози́тная система 0—3) вычисляем как

$$\begin{aligned}
 S_{1111} &= \frac{1}{4\pi} \left(C_{11}^m I_{1111} + C_{21}^m I_{2112} + C_{13}^m I_{3113} + e_{31}^m I_{3114} \right), \\
 S_{1122} &= \frac{1}{4\pi} \left(C_{12}^m I_{1111} + C_{22}^m I_{2112} + C_{32}^m I_{3113} + e_{32}^m I_{3114} \right), \\
 S_{1133} &= \frac{1}{4\pi} \left(C_{13}^m I_{1111} + C_{23}^m I_{2112} + C_{33}^m I_{3113} + e_{33}^m I_{3114} \right), \\
 S_{1143} &= \frac{1}{4\pi} \left(e_{31}^m I_{1111} + e_{32}^m I_{2112} + e_{33}^m I_{3113} - k_{33}^m I_{3114} \right), \\
 S_{2211} &= \frac{1}{4\pi} \left(C_{11}^m I_{1221} + C_{21}^m I_{2222} + C_{31}^m I_{3223} + e_{31}^m I_{3224} \right), \\
 S_{2222} &= \frac{1}{4\pi} \left(C_{12}^m I_{1221} + C_{22}^m I_{2222} + C_{32}^m I_{3223} + e_{32}^m I_{3224} \right), \\
 S_{2233} &= \frac{1}{4\pi} \left(C_{13}^m I_{1221} + C_{23}^m I_{2222} + C_{33}^m I_{3223} + e_{33}^m I_{3224} \right), \\
 S_{2243} &= \frac{1}{4\pi} \left(e_{31}^m I_{1221} + e_{32}^m I_{2222} + e_{33}^m I_{3223} - k_{33}^m I_{3224} \right), \\
 S_{3311} &= \frac{1}{4\pi} \left(C_{11}^m I_{1331} + C_{21}^m I_{2332} + C_{31}^m I_{3333} + e_{31}^m I_{3334} \right), \\
 S_{3322} &= \frac{1}{4\pi} \left(C_{12}^m I_{1331} + C_{22}^m I_{2332} + C_{32}^m I_{3333} + e_{32}^m I_{3334} \right), \\
 S_{3333} &= \frac{1}{4\pi} \left(C_{13}^m I_{1331} + C_{23}^m I_{2332} + C_{33}^m I_{3333} + e_{33}^m I_{3334} \right),
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 S_{3323} &= \frac{1}{4\pi} \left[C_{44}^m (I_{2333} + I_{2332}) + e_{24}^m I_{2332} \right], \\
 S_{3343} &= \frac{1}{4\pi} \left(e_{31}^m I_{1331} + e_{32}^m I_{2332} + e_{31}^m I_{3333} - k_{33}^m I_{3334} \right), \\
 S_{2323} &= \frac{1}{8\pi} \left[C_{44}^m (I_{2233} + I_{2323} + I_{3232} + I_{2322}) + e_{24}^m (I_{2234} + I_{2324}) \right], \\
 S_{2342} &= \frac{1}{8\pi} \left[e_{24}^m (I_{2233} + I_{2323} + I_{3232} + I_{2322}) - k_{22}^m (I_{2234} + I_{2324}) \right], \\
 S_{1313} &= \frac{1}{8\pi} \left[C_{55}^m (I_{1133} + I_{1313} + I_{3131} + I_{3311}) + e_{15}^m (I_{1134} + I_{1314}) \right], \\
 S_{1341} &= \frac{1}{8\pi} \left[e_{15}^m (I_{1133} + I_{1313} + I_{3131} + I_{3311}) - k_{11}^m (I_{1134} + I_{1314}) \right], \\
 S_{1212} &= \frac{1}{8\pi} \left[C_{66}^m (I_{1122} + I_{1212} + I_{2121} + I_{2211}) \right], \\
 S_{4113} &= \frac{1}{4\pi} \left[C_{55}^m (I_{1143} + I_{3141}) + e_{15}^m I_{1144} \right], \\
 S_{4141} &= \frac{1}{4\pi} \left[e_{15}^m (I_{1143} + I_{3141}) - k_{11}^m I_{1144} \right], \\
 S_{4223} &= \frac{1}{4\pi} \left[C_{44}^m (I_{2243} + I_{3242}) + e_{24}^m I_{2244} \right], \\
 S_{4242} &= \frac{1}{4\pi} \left[e_{24}^m (I_{2243} + I_{3242}) - k_{22}^m I_{2244} \right], \\
 S_{4311} &= \frac{1}{4\pi} \left(C_{11}^m I_{1341} + C_{21}^m I_{2342} + C_{31}^m I_{3343} + e_{31}^m I_{3344} \right), \\
 S_{4322} &= \frac{1}{4\pi} \left(C_{12}^m I_{1341} + C_{22}^m I_{2342} + C_{32}^m I_{3343} + e_{32}^m I_{3344} \right), \\
 S_{4333} &= \frac{1}{4\pi} \left(C_{13}^m I_{1341} + C_{23}^m I_{2342} + C_{33}^m I_{3343} + e_{33}^m I_{3344} \right), \\
 S_{4343} &= \frac{1}{4\pi} \left(e_{31}^m I_{1341} + e_{32}^m I_{2342} + e_{33}^m I_{3343} - k_{33}^m I_{3344} \right).
 \end{aligned} \tag{9}$$

В уравнениях (8) и (9) I_{inMJ} — компоненты функции Грина. Для композита 1—3 ненулевые компоненты I_{inMJ} равны

$$I_{11MJ} = \int_{|y|=1} y_1^2 K_{MJ}^{-1}(y_1, \alpha y_2, 0) dA, \tag{10}$$

$$I_{22MJ} = \int_{|y|=1} \alpha^2 y_2^2 K_{MJ}^{-1}(y_1, \alpha y_2, 0) dA, \tag{10}$$

$$I_{22MJ} = \int_{|y|=1} \alpha^2 y_2^2 K_{MJ}^{-1}(y_1, \alpha y_2, 0) dA.$$

С учетом $\alpha = 1$ и $\alpha = 0,5$ получены значения функций Грина для композитов с круглыми и эллиптическими цилиндрическими волокнами соответственно. Аналогично для композитов 0—3 ненулевые компоненты I_{inMJ} имеют вид

$$\begin{aligned} I_{11MJ} &= \int_{|y|=1} y_1^2 K_{MJ}^{-1}(y_1, \alpha y_2, \beta y_3) dA, \\ I_{22MJ} &= \int_{|y|=1} \alpha^2 y_2^2 K_{MJ}^{-1}(y_1, \alpha y_2, \beta y_3) dA, \\ I_{33MJ} &= \int_{|y|=1} \beta^2 y_3^2 K_{MJ}^{-1}(y_1, \alpha y_2, \beta y_3) dA, \\ I_{1212} &= \int_{|y|=1} \alpha y_1 y_2 K_{12}^{-1}(y_1, \alpha y_2, \beta y_3) dA, \\ I_{1313} &= \int_{|y|=1} \beta y_1 y_3 K_{13}^{-1}(y_1, \alpha y_2, \beta y_3) dA, \\ I_{1314} &= \int_{|y|=1} \beta y_1 y_3 K_{14}^{-1}(y_1, \alpha y_2, \beta y_3) dA, \\ I_{2323} &= \int_{|y|=1} \alpha \beta y_2 y_3 K_{23}^{-1}(y_1, \alpha y_2, \beta y_3) dA, \\ I_{2324} &= \int_{|y|=1} \alpha \beta y_2 y_3 K_{24}^{-1}(y_1, \alpha y_2, \beta y_3) dA. \end{aligned} \tag{11}$$

С учетом $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ для сфер и $\alpha = 1$ и $\beta = 0,5$ для эллипсоидов получили значения функций Грина композитов, армированных сферическими и эллипсоидальными включениями соответственно.

Матрица K_{MJ} имеет вид

$$K_{MJ} = \begin{bmatrix} C_{11}^m x_1^2 + C_{66}^m x_2^2 + C_{55}^m x_3^2 & (C_{12}^m + C_{66}^m) x_1 x_2 & (C_{13}^m + C_{55}^m) x_1 x_3 & (e_{31}^m + e_{15}^m) x_1 x_3 \\ (C_{12}^m + C_{66}^m) x_1 x_2 & C_{66}^m x_1^2 + C_{22}^m x_2^2 + C_{44}^m x_3^2 & (C_{23}^m + C_{44}^m) x_2 x_3 & (e_{32}^m + e_{24}^m) x_2 x_3 \\ (C_{55}^m + C_{31}^m) x_1 x_3 & (C_{44}^m + C_{32}^m) x_2 x_3 & C_{55}^m x_1^2 + C_{44}^m x_2^2 + C_{33}^m x_3^2 & e_{15}^m x_1^2 + e_{24}^m x_2^2 + e_{33}^m x_3^2 \\ (e_{31}^m + e_{15}^m) x_1 x_3 & (e_{32}^m + e_{24}^m) x_2 x_3 & e_{15}^m x_1^2 + e_{24}^m x_2^2 + e_{33}^m x_3^2 & -k_{11}^m x_1^2 - k_{22}^m x_2^2 - k_{33}^m x_3^2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Полную производную I_{inMJ} можно найти в работе [22].

2.2. Инкрементальный самосогласованный метод (ISC). В данном методе арматуру вводят в матрицу поэтапно: после каждого шага полу-

ченный композит на следующем шаге выполняет роль матрицы. Количество арматуры, вводимой на каждом шаге, зависит от количества шагов и конечного объемного содержания арматуры. Таким образом, объемное содержание арматуры возрастает постепенно.

Рассмотрим двухфазный композит объемом V^C , включающим объемы арматуры V^r и матрицы V^m :

$$V^r + V^m = V^C. \quad (13)$$

Пусть N — общее количество шагов, необходимых для расчета эффективных свойств композита, а v_r — объемное содержание арматуры. На конкретном шаге i объемное содержание арматуры равно

$$v_r^i = \frac{v_r}{N} i = \Delta v_r i. \quad (14)$$

После $i - 1$ шага общий объем композита V_{i-1}^C согласно уравнению (13) равен

$$V_{i-1}^C = \Delta v_r (i - 1) V^r + (1 - (i - 1) \Delta v_r) V^m. \quad (15)$$

Объем композита V_{i-1}^C теперь становится объемом матрицы на следующем шаге i . Для сохранения общего объема системы в нее необходимо ввести неизвестное объемное содержание арматуры Δv_i такое, что

$$\Delta v_i V^r + (1 - \Delta v_i) V_{i-1}^C = i \Delta v_r V^r + (1 - i \Delta v_r) V^m. \quad (16)$$

Подставив (14) в уравнение (16), получим

$$\Delta v_i = \frac{\Delta v_r}{1 - (i - 1) \Delta v_r}. \quad (17)$$

Приведенное выражение представляет собой объемную долю арматуры (приращение), которую необходимо добавлять к материалу матрицы на каждом шаге. Из приведенного обсуждения ясно, что эффективные свойства композита зависят от общего количества шагов N . На основании исследования сходимости выбрали значение $N = 100$.

Эффективная электроупругая матрица композита имеет вид

$$F_{SC}^{eff} = F_m + v_r (F_r - F_m) T_{SC}^{piezo}, \quad (18)$$

где T_{SC}^{piezo} — тензор концентрации пьезоэлектрического материала:

$$T_{SC}^{piezo} = [\mathbb{I} + S_{eff}^{piezo} F_0^{-1} (F_r - F_0)]^{-1}, \quad (19)$$

F_0 — матрица электроупругих модулей эффективной среды (зависящая от N); S_{eff}^{piezo} — пьезоэлектрический тензор Эшелби. Необходимо отме-

тить, что S_{eff}^{piezo} — функция эффективной среды и также зависит от F_0 . Блок-схема алгоритма ISC приведена на рис. 2.

2.3. Конечно-элементная модель, используемая в настоящей работе, основана на однородных перемещениях и потенциальных граничных условиях. Рассмотрели четыре кубических ПОЭ с длиной сторон $l = 120$ нм, с четырьмя типами однонаправленных включений (упорядоченных в направлении оси z). Центр тяжести ПОЭ совпадает с началом координат. В силу наличия зеркальной/отражательной симметрии вдоль трех орто-

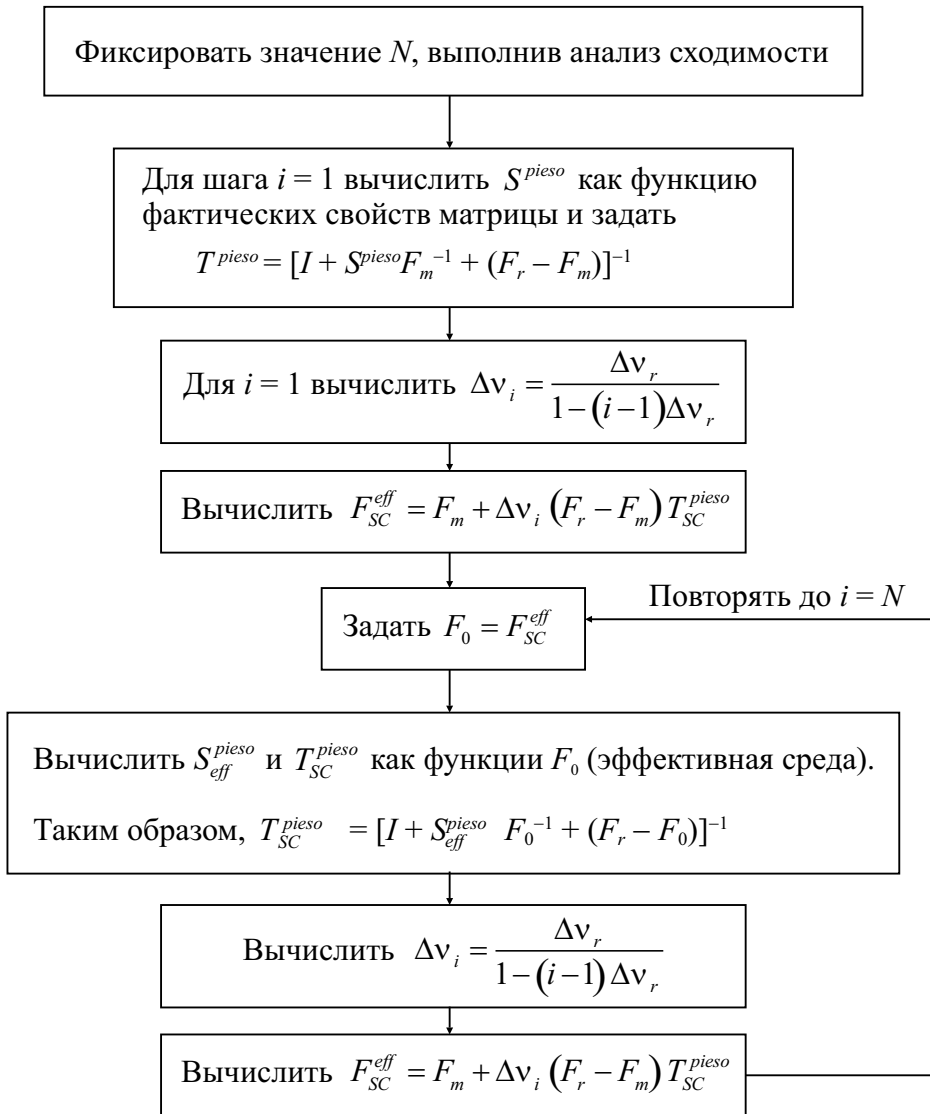


Рис. 2. Блок-схема алгоритма инкрементального самосогласованного метода.

гональных плоскостей, проходящих через начало координат ПОЭ, для анализа МКЭ использовали только одну восьмую часть их объема, как показано на рис. 1—б. 10-Узловые квадратичные тетраэдрические конечные элементы с 40 степенями свободы использовали для создания конечно-элементных сеток ПОЭ, показанных на рис. 1—б. Степени свободы в узловой точке конечного элемента включают три заданных перемещения u , v , w в направлениях x , y , z соответственно и один потенциал ϕ . Конечно-элементный анализ выполнили с помощью программного обеспечения COMSOL Multiphysics. Поверхность с внешней нормалью вдоль оси $+x$ обозначили как грань $+x$, а поверхность с внешней нормалью вдоль оси $-x$ — как грань $-x$. Грани $+y$, $-y$, $+z$ определили аналогичным образом. Для определения компонент эффективной жесткости C_{ij}^{eff} перемещения на внешних поверхностях использовали для создания ненулевого значения известной компоненты деформации. Другие компоненты деформации и все компоненты электрического поля принимали равными нулю. Например, для оценки компонент C_{11}^{eff} и C_{12}^{eff} небольшое положительное перемещение u приложили в направлении оси x по нормали к грани $+x$. Остальные компоненты перемещения считали равными нулю. Электрический потенциал ϕ также принимали равным нулю на всех шести гранях. Затем вычислили усредненные по объему напряжения $\bar{\sigma}_{11}$ и $\bar{\sigma}_{22}$ и усредненную по объему приложенную деформацию $\bar{\varepsilon}_{11}$, а затем значения компонент эффективной жесткости вычислили как $C_{11}^{eff} = \frac{\bar{\sigma}_{11}}{\bar{\varepsilon}_{11}}$ и $C_{12}^{eff} = \frac{\bar{\sigma}_{22}}{\bar{\varepsilon}_{11}}$. Для оценки компонент матрицы коэффициентов пьезоэлектрического напряжения e_{ij}^{eff} и относительной диэлектрической проницаемости матрицы k_{ij}^{eff} / k_0 использовали известную составляющую напряженности электрического поля, гарантируя, что все компоненты приложенной деформации равны нулю. Например, для вычисления компонент e_{33}^{eff} и k_{33}^{eff} / k_0 приняли $u = 0$ на гранях $+x$ и $-x$; $v = 0$ на гранях $+y$ и $-y$; $w = 0$ на гранях $+z$ и $-z$. Граничное условие нулевого электрического потенциала применили на грани $-z$, а к положительной грани $+z$ приложили небольшой электрический потенциал. Затем рассчитали усредненную по объему компоненту напряжения $\bar{\sigma}_{33}$, усредненную по объему компоненту электрического смещения \bar{D}_3 и усредненную по объему компоненту напряженности \bar{E}_3 приложенного электрического поля. Затем вычислили эффективные характеристики $e_{33}^{eff} = \frac{\bar{\sigma}_{33}}{-\bar{E}_3}$ и $k_{33}^{eff} / k_0 = \frac{\bar{D}_3}{\bar{E}_3}$. Выполнили анализ сходимости решения МКЭ и определили, что оптимальный размер конечно-элементной сетки 4,8. Подробности конечно-элементной процедуры и граничных условий можно найти в работе [33].

3. Результаты и обсуждение

Эффективные электроупругие свойства четырех типов композитов PZT-7A/PVDF, определенные с помощью моделей EMT, ISC и МКЭ, представлены как функции объемного содержания арматуры V_r (PZT-7A). Это позволило сравнить результаты микромеханических моделей EMT, ISC с рассчитанными МКЭ. Сравнение значений осевых модулей Юнга всех четырех ПОЭ представлено в разделе 3.1, а коэффициентов пьезоэлектрической деформации и относительных диэлектрических постоянных ПОЭ — в разделах 3.2 и 3.3 соответственно.

3.1. Осевой модуль Юнга и модуль сдвига в плоскости. Эффективный осевой модуль Юнга $Y_3^{eff} = \frac{1}{S_{33}^{eff}}$ (в направлении z или 3) и модуль сдвига в плоскости $G_{12}^{eff} = \frac{1}{S_{33}^{eff}}$ композитных систем 1—3 и 0—3 приведены на рис. 3—*a* и 3—*б* соответственно, где S_{33}^{eff} и S_{66}^{eff} — компоненты эффективной матрицы податливости, получаемой путем обращения матрицы эффективной жесткости.

Данные рис. 3—*a* иллюстрируют влияние объемного содержания V_r PZT-7A на величины Y_3^{eff} и G_{12}^{eff} композита 1—3 с круглыми и эллиптическими цилиндрическими включениями. Значения модуля Юнга, предсказанные моделями ISC и EMT, очень близки к рассчитанным МКЭ во всем диапазоне объемного содержания PZT-7A. Для модуля сдвига наблюдали аналогичную тенденцию до объемного содержания PZT-7A $\sim 0,4$. При большем объемном содержании модель ISC сильно переоценила значение G_{12}^{eff} , тогда как результаты модели EMT были близки к расчету МКЭ.

Влияние объемного содержания PZT-7A на модули Y_3^{eff} и G_{12}^{eff} композита 0—3 с эллипсоидальными и сферическими включениями отражают данные рис. 3—*б*. В обоих случаях до объемного содержания PZT-7A $\sim 0,25$ модели ISC и EMT предсказывали аналогичные значения осевого модуля Юнга. При большем объемном содержании модель ISC превышала значения, рассчитанные с помощью МКЭ, тогда как результаты по модели EMT были намного ближе к конечно-элементным. Для модуля сдвига G_{12}^{eff} результаты EMT были ближе к конечно-элементным, чем результаты ISC.

3.2. Постоянные пьезоэлектрической деформации d_{33}^{eff} и d_{31}^{eff} композитных систем 1—3 и 0—3 иллюстрируют данные рис. 4. Компоненты матрицы коэффициентов пьезоэлектрической деформации вычислили с помощью матрицы эффективных коэффициентов пьезоэлектрических напряжений $[e]_{3 \times 6}^{eff}$ и эффективной матрицы податливости $[S]_{6 \times 6}^{eff}$, используя уравнение $[d]_{3 \times 6}^{eff} = [e]_{3 \times 6}^{eff} [S]_{6 \times 6}^{eff}$. Для композитов 1—3 с круглыми и эллиптическими цилиндрическими волокнами модель ISC предсказала значения d_{33}^{eff} , очень близкие к рассчитанным МКЭ во всем диапазоне

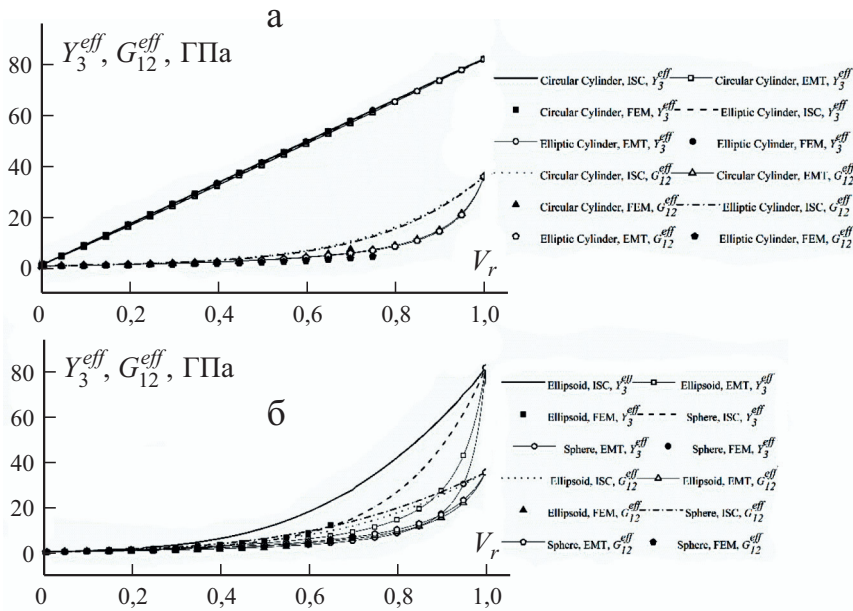


Рис. 3. Зависимость эффективного модуля Юнга Y_3^{eff} и модуля сдвига G_{12}^{eff} композитных систем 1—3 (а) и 0—3 (б) из PZT-7A/PVDF от объемного содержания PZT-7A V_r .

объемного содержания PZT-7A (рис. 4—а). Модель EMT предсказала несколько большие значения d_{33}^{eff} в том же диапазоне объемного содержания PZT-7A. Результаты, предсказанные моделями ISC и EMT для пьезоэлектрической постоянной деформации d_{31}^{eff} , близки к рассчитанным МКЭ.

Для композитов с эллипсоидальными включениями (см. рис. 4—б) пьезоэлектрические деформации, предсказанные моделями EMT и ISC, очень близки к рассчитанным МКЭ, вплоть до объемного содержания PZT-7A $\sim 0,10$. При большем объемном содержании модель ISC завышала значения, а модель EMT занижала их. При этом значения, предсказанные моделью EMT, ближе к конечно-элементным. Для композитов со сферическими включениями наблюдали аналогичную тенденцию.

3.3. Диэлектрические свойства. На рис. 5 приведены зависимости эффективных диэлектрических постоянных k_{33}^{eff} / k_0 и k_{22}^{eff} / k_0 композитных системы 1—3 с круглыми и эллиптическими цилиндрическими волокнами и системы 0—3 с эллипсоидальными и сферическими включениями от объемного содержания PZT-7A. Значения k_{33}^{eff} / k_0 для композитов 1—3, предсказанные моделями EMT и ISC, близки к рассчитанным МКЭ во всем диапазоне объемного содержания PZT-7A. В случае k_{22}^{eff} / k_0 результаты EMT лучше совпадают с конечно-элементными.

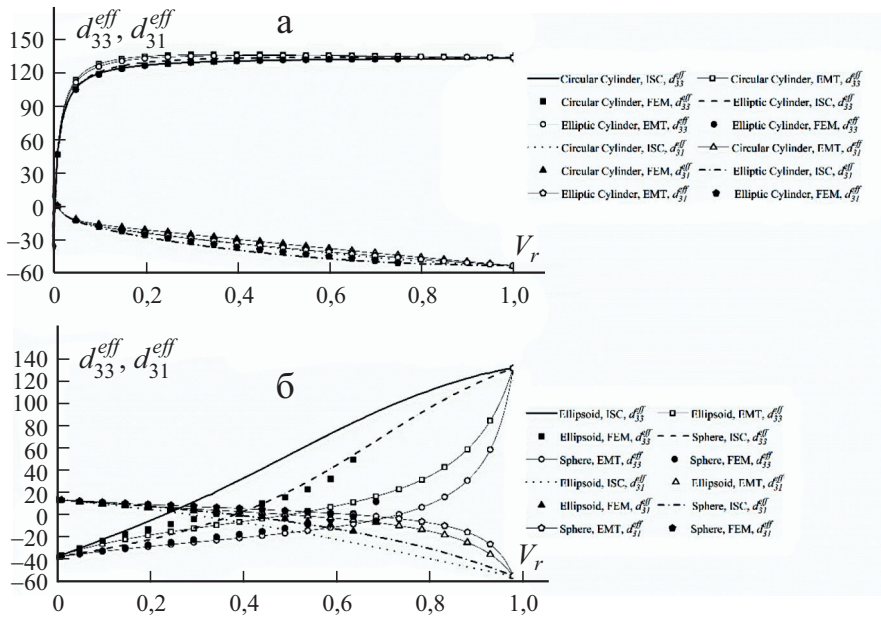


Рис. 4. Зависимость пьезоэлектрических постоянных d_{33}^{eff} и d_{31}^{eff} композитных систем 1—3 (а) и 0—3 (б) из PZT-7A/PVDF от объемного содержания PZT-7A V_r .

В случае композитной системы 0—3 с эллипсоидальными включениями (см. рис. 5—б) значения k_{33}^{eff} / k_0 , предсказанные обеими моделями вплоть до объемного содержания PZT-7A 0,25, близки к рассчитанным МКЭ. При большем объемном содержании модель ISC завышает, а модель ЕМТ занижает значения k_{33}^{eff} / k_0 . Аналогичную тенденцию наблюдали для композитов со сферическими включениями. Результаты, предсказанные моделью ISC, близки к результатам МКЭ вплоть до объемного содержания $\sim 0,25$. При большем содержании PZT-7A модель ISC завышает значения k_{33}^{eff} / k_0 . Значения, предсказанные моделью ЕМТ, очень близки к результатам МКЭ вплоть до объемного содержания $\sim 0,6$. Аналогичную тенденцию также наблюдали при расчете k_{22}^{eff} / k_0 .

Влияние формы включений и их объемного содержания на эффективный модуль Юнга и коэффициент добротности (коэффициент пьезоэлектрического заряда), определенный как $d_h^{eff} = d_{31}^{eff} + d_{32}^{eff} + d_{33}^{eff}$, предсказанное с помощью модели ISC для композитных систем 1—3 и 0—3, иллюстрируют данные рис. 6. Видно (см. рис. 6—а), что круглые или эллиптические цилиндрические волокна обеспечили одинаковые эффективные упругие и диэлектрические свойства композита в продольном направлении. В обоих случаях эффективный осевой модуль Юнга композитов 1—3 был линейной функцией объемного содержания волокон. Данные рис. 6—б свидетельствуют о том, что коэффициент добротности зависит не только от длины

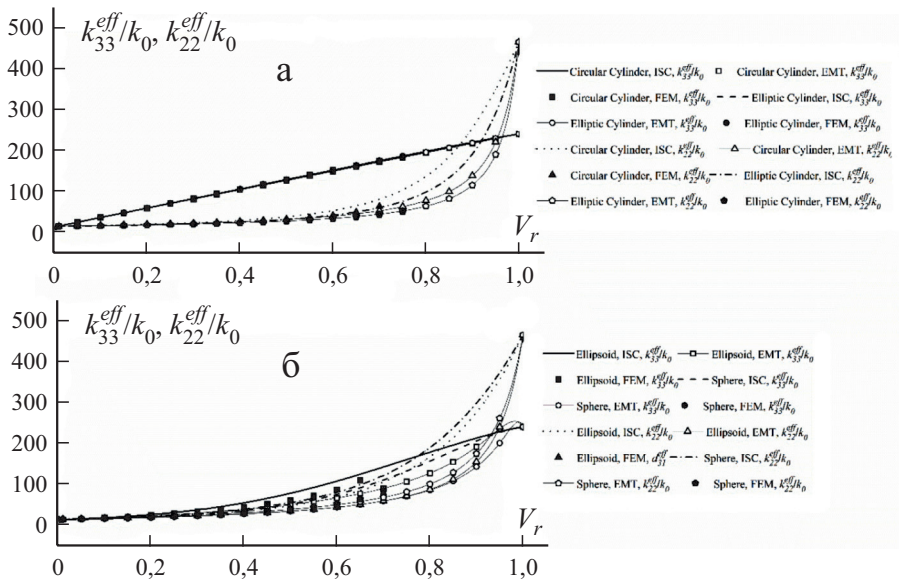


Рис. 5. Зависимость диэлектрических постоянных k_{33}^{eff} / k_0 и k_{22}^{eff} / k_0 композитных систем 1—3 (а) и 0—3 (б) из PZT-7A/PVDF от объемного содержания PZT-7A V_r .

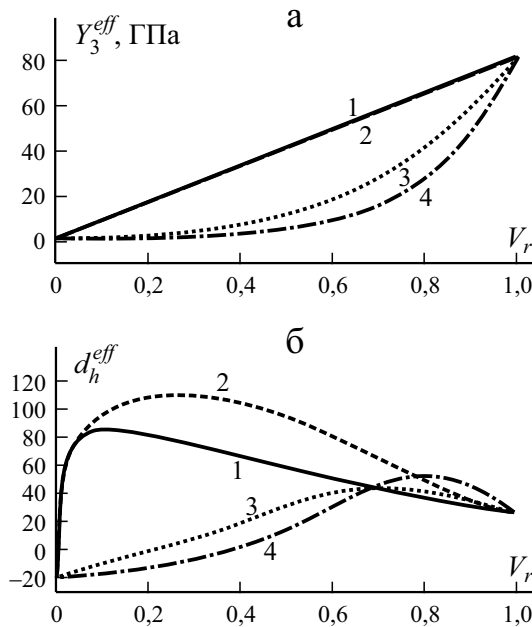


Рис. 6. Зависимость эффективного модуля Юнга Y_3^{eff} (а) и коэффициента добротности d_h^{eff} (б) композитных систем с круговыми (1); эллиптическими (2); эллипсоидальными (3); сферическими (4) включениями от объемного содержания PZT-7A V_r , рассчитанная по модели ISC.

включений в направлении поляризации, но и от их формы (поперечного сечения).

Некоторые исследователи использовали метод ISC для определения эффективных свойств композитов с изотропной либо трансверсально-изотропной матрицей и наблюдали результаты, аналогичные приведенным в настоящей работе для композитов с ортотропными матрицами. Например, в [33] для композита $\text{CoFe}_2\text{O}_4/\text{BaTiO}_3$ (трансверсально-изотропный/трансверсально-изотропный) со сферическими включениями с помощью моделей ISC и EMT определили эффективные свойства e_{33}^{eff} , e_{31}^{eff} , k_{33}^{eff} , а с эллипсоидальными включениями — характеристику e_{33}^{eff} . При этом наблюдали, что в случае композита со сферическими включениями модели ISC и EMT предсказывают одинаковые значения коэффициента пьезоэлектрического напряжения e_{33}^{eff} при объемном содержании включений от 0,35 и больше. Модель ISC завышала результаты. Для коэффициента пьезоэлектрического напряжения e_{31}^{eff} модели ISC и EMT предсказали одинаковые результаты при объемном содержании от 0,3 и выше. Модель ISC занижала результаты. Для диэлектрического модуля k_{33}^{eff} / k_0 модели ISC и EMT предсказали одинаковые результаты при объемном содержании от 0,3 и выше. Модель ISC завышала результаты по сравнению с моделью EMT. Результаты, полученные в настоящей работе для композитов со сферическими и эллипсоидальными включениями, следовали тенденции, наблюдаемой в [33].

Аналогичное исследование выполнили в [34], где эффективные свойства композитов эпоксид/PZT4 (изотропный/трансверсально-изотропный) определили с использованием модели EMT. Установили, что для композитов со сферическими включениями модели EMT и ISC предсказывают близкие значения e_{15}^{eff} и k_{33}^{eff} / k_0 вплоть до объемного содержания PZT-7A ~ 0,3. В случае композитов с круглыми цилиндрическими волокнами модели ISC и EMT предсказали аналогичные значения компоненты жесткости C_{11}^{eff} вплоть до объемного содержания PZT-7A ~ 0,35 [34]. В настоящей работе аналогичные результаты получили вплоть до объемного содержания PZT-7A ~ 0,45, а также при вычислении характеристик e_{31}^{eff} и k_{33}^{eff} / k_0 .

В [25] с помощью модели ISC определили эффективные свойства композитов эпоксид/ BaTiO_3 (изотропный/трансверсально-изотропный) с разным отношением сторон включений от 1 до 1000 и сравнили с результатами, полученными с помощью модели EMT. В отношении коэффициента добротности d_h^{eff} результаты, полученные в настоящей работе, следовали тенденции, наблюдаемой в [25].

Из приведенного обсуждения следует, что эффективные свойства композитов с изотропными или трансверсально-изотропными матрицами, предсказанные с помощью моделей ISC и EMT, близки при малом объемном содержании армирующих включений вплоть до ~ 0,2—0,3. При большем содержании включений модель ISC обычно предсказывала большие значения эффективных свойств, чем модель EMT. В случае композитов с

ортотропной матрицей, как в настоящей работе, этот диапазон объемного содержания шире — вплоть до 0,4, особенно в случае предсказания эффективных диэлектрических и пьезоэлектрических свойств. Наконец, можно сделать вывод о том, что почти для всех рассмотренных типов композитов эффективные свойства, предсказанные с помощью модели ЕМТ, ближе к рассчитанным МКЭ. Модель ISC в большинстве случаев завышала результаты. Основное различие модифицированной модели ЕМТ и модели ISC заключается в разных методах обработки исходной среды, в которой приложенные деформационное и электрическое поля передаются на арматуру. Модифицированная модель ЕМТ рассматривает матрицу в качестве исходной среды, а модель ISC — композит с содержанием арматуры, немного меньшим, чем в рассматриваемом композите. Математически разное обращение с исходной средой в этих моделях приводит к разным выражениям для тензора концентрации. В модифицированной модели ЕМТ тензор концентрации рассчитывается за один шаг, в то время как в модели ISC вычисляется при каждом приращении объемного содержания в ходе итерационного процесса, что обуславливает различие предсказываемых эффективных свойств. Однако нельзя окончательно утверждать, что модель ЕМТ лучше предсказывает эффективные электроупругие свойства пьезоэлектрических полимерных композитов, чем более сложная и требующая большего вычислительного ресурса модель ISC. Нужно отметить, что для большинства эффективных свойств модель ЕМТ обеспечила предсказание более близкое к результатам МКЭ, чем модель ISC, особенно при большом объемном содержании включений.

Заключение

Инкрементальный самосогласованный метод Эшелби—Мори—Танака и метод конечных элементов использовали для оценки эффективных электроупругих свойств четырех однонаправленных композитных систем с ортотропной полимерной матрицей и четырьмя типами включений — бесконечно длинными круглыми и эллиптическими цилиндрами, эллипсоидами и сферами. В качестве примера для анализа рассматривали композитную систему PZT-7A/PVDF. Результаты, полученные с помощью аналитических моделей, сравнили с полученными с помощью конечно-элементной модели, основанной на кинематических однородных граничных условиях. Значения продольных эффективных характеристик Y_3^{eff} , d_{33}^{eff} и k_{33}^{eff} для композитных систем 1—3, предсказанные с помощью моделей ISC и ЕМТ, очень близки к рассчитанным с помощью МКЭ во всем рассмотренном диапазоне объемного содержания арматуры. В случае некоторых поперечных свойств, таких как G_{12}^{eff} , d_{31}^{eff} и k_{22}^{eff} , модель ЕМТ продемонстрировала лучшее предсказание для обеих композитных систем, чем модель ISC. Для композитной системы 0—3 с большим объемным содержанием арматуры модель ЕМТ предсказала лучшие свойства в однонаправленном и попереч-

ном направлениях, чем модель ISC. Сравнение результатов настоящей работы с данными других исследователей, в том числе для композитов с изотропной или трансверсально-изотропной матрицей, выявило аналогичные тенденции. Установлено, что в случае композитов с ортотропной матрицей модель ЕМТ даже при большом объемном содержании включений обеспечивает лучшие результаты, чем модель ISC.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ramadan K. S., Sameoto D., and Evoy S.* A review of piezoelectric polymers as functional materials for electromechanical transducers // *Smart Mater. Struct.* — 2014. — Vol. 23, No. 3. — P. 033001.
2. *El Kacimi A., Pauliac-Vaujour E., and Eymery J.* Flexible capacitive piezoelectric sensor with vertically aligned ultralong GaN wires // *ACS Appl. Mater. Interfaces.* — 2018. — Vol. 10, No. 5. — P. 4794—4800.
3. *Nafari A., Bowland C. C., and Sodano H. A.* Ultra-long vertically aligned lead titanate nanowire arrays for energy harvesting in extreme environments // *Nano Energy.* — 2017. — Vol. 31. — P. 168—173.
4. *Nafari A. and H. Sodano A.* Electromechanical modeling and experimental verification of a direct write nanocomposite // *Smart Mater. Struct.* — 2019. — Vol. 2, No. 4. — P. 045014.
5. *Krishna B., Chaturvedi A., Mishra N., and Das K.* Nanomechanical characterization of SU8/ZnO nanocomposite films for applications in energy-harvesting microsystems // *J. Micromech. Microeng.* — 2018. — Vol. 28, No. 11. — P. 115013.
6. *Xu S., Yeh Y., Poirier G., McAlpine M. C., Register R. A., and Yao N.* Flexible piezoelectric PMN-PT nanowire-based nanocomposite and device // *Nano Lett.* — 2013. — Vol. 13, No. 6. — P. 2393—2398.
7. *Levassort F., Hladky-Hennion A. C., Khanh H. L., Tran-Huu-Hue P., Lethiecq M., and Thi M. P.* 0-3 and 1-3 piezocomposites based on single crystal PMN-PT for transducer applications // *Adv. Appl. Ceram.* — 2010. — Vol. 109, No. 3. — P. 162—168.
8. *Deeg W. F. J.* The Analysis of Dislocation, Crack, and Inclusion Problems in Piezoelectric Solids. — Stanford Univ., 1980.
9. *Eshelby J. D. and Peierls R. E.* The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems // *Proc. R. Soc. London, Ser. Math. Phys. Sci.* — 1957. — Vol. 241, No. 1226. — P. 376—396.
10. *Mori T. and Tanaka K.* Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // *Acta Metall.* — 1973. — Vol. 21, No. 5. — P. 571—574.
11. *Dunn M. L. and Taya M.* Micromechanics predictions of the effective electroelastic moduli of piezoelectric composites // *Int. J. Solids Struct.* — 1993. — Vol. 30, No. 2. — P. 161—175.
12. *Huang J. H. and Yu J. S.* Electroelastic Eshelby tensors for an ellipsoidal piezoelectric inclusion // *Compos. Eng.* — 1994. — Vol. 4, No. 11. — P. 1169—1182.
13. *Michelitsch T. and Levin V. M.* Inclusions and inhomogeneities in electroelastic media with hexagonal symmetry // *Eur. Phys. J. B - Condens. Matter Complex Syst.* — 2000. — Vol. 14, No. 3. — P. 527—533.
14. *Mikata Y.* Determination of piezoelectric Eshelby tensor in transversely isotropic piezoelectric solids // *Int. J. Eng. Sci.* — 2000. — Vol. 38, No. 6. — P. 605—641.

15. *Mikata Y.* Explicit determination of piezoelectric Eshelby tensors for a spheroidal inclusion // *Int. J. Solids Struct.* — 2001. — Vol. 38, Nos. 40-41. — P. 7045—7063.
16. *Guinovart-Diaz R., Bravo-Castillero J., Rodriguez-Ramos R., Sabina F. J., and Martinez-Rosado R.* Overall properties of piezocomposite materials 1-3 // *Mater. Lett.* — 2001. — Vol. 48, No. 2. — P. 93—98.
17. *Berger H. et al.* Unit cell models of piezoelectric fiber composites for numerical and analytical calculation of effective properties // *Smart Mater. Struct.* — 2006. — Vol. 15, No. 2. — P. 4.
18. *Aimmanee S. and Asanuma H.* Micromechanics-based predictions of effective properties of a 1-3 piezocomposite reinforced with hollow piezoelectric fibers // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2020. — Vol. 27, No. 22. — P. 1873—1887.
19. *Tize Mha P., Maréchal P., Ntack G. E., and Charif d'Ouazzane S.* Homogenized electromechanical coefficients and effective parameters of 1-3 piezocomposites for ultrasound imaging transducers // *Phys. Lett. A.* — 2021. — Vol. 408. — P. 127492.
20. *Khan K. A., Hajeri F. A., and Khan M. A.* Micromechanical modeling approach with simplified boundary conditions to compute electromechanical properties of architected piezoelectric composites // *Smart Mater. Struct.* — 2021. — Vol. 30, No. 3. — P. 035013.
21. *Huang J. H.* An ellipsoidal inclusion or crack in orthotropic piezoelectric media // *J. Appl. Phys.* — 1995. — Vol. 78, No. 11. — P. 6491—6503.
22. *Mishra N. and Das K.* A Mori-Tanaka based micromechanical model for predicting the effective electroelastic properties of orthotropic piezoelectric composites with spherical inclusions // *SN Appl. Sci.* — 2020. — Vol. 2, No. 7. — P. 1206.
23. *Bruggeman D. A. G.* Calculation of various physical constants of heterogeneous substances. I. Dielectric constants and conductivities of mixed bodies made of isotropic substances. // *Ann. Phys.* — 1935. — Vol. 416, No. 7. — P. 636—664).
24. *Broohm A., Zattarin P., and Lipinski P.* Prediction of mechanical behaviour of inhomogeneous and anisotropic materials using an incremental scheme // *Arc. Mech.* — 2000. — Vol. 52, No. 6. — P. 949—967.
25. *Fakri N. and Azrar L.* Thermal and electroelastic behavior of piezocomposites and inhomogeneous piezoelectric materials with voids // *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* — 2010. — Vol. 21, No. 2. — P. 161—174.
26. *Vieville P., Bonnet A. S., and Lipiński P.* Modelling effective properties of composite materials using the inclusion concept. General considerations // *Arc. Mech.* — 2006. — Vol. 58, No. 3. — P. 207—239.
27. *Prest W. M. and Luca D. J.* The formation of the γ phase from the α and β polymorphs of polyvinylidene fluoride // *J. Appl. Phys.* — 1978. — Vol. 49, No. 10. — P. 5042—5047.
28. *Ruan L., Yao X., Chang Y., Zhou L., Qin G., and Zhang X.* Properties and Applications of the β Phase Poly(vinylidene fluoride) // *Polymers.* — 2018. — Vol. 10, No. 3. — P. 228.
29. *Izyumskaya N., Alivov Y.-I., Cho S.-J., Morkoç H., Lee H., and Kang Y.-S.* Processing, structure, properties, and applications of PZT thin films // *Crit. Rev. Solid State Mater. Sci.* — 2007. — Vol. 32, Nos. 3—4. — P. 111—202.
30. *Jain A., Kumar S. J., Kumar M. R., Ganesh A. S., and Srikanth S.* PVDF-PZT composite films for transducer applications // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2014. — Vol. 21, No. 3. — P. 181—186.
31. *Odegard G. M.* Constitutive modeling of piezoelectric polymer composites // *Acta Mater.* — 2004. — Vol. 52, No. 18. — P. 5315—5330.
32. *Barnett D. M. and Lothe J.* Dislocations and line charges in anisotropic piezoelectric insulators // *Phys. Status Solidi B.* — 1975. — Vol. 67, No. 1. — P. 105—111.

33. *Bakkali and Abderrahmane*. Modélisation micromécanique des matériaux composites multifonctionnels. — Université Abdelmalek Essadi, 2013.

34. *Elouafi J., Azrar L., and Aljinaidi A. A.* Closed-form expressions for the effective moduli of heterogeneous piezoelectric materials // *Int. J. Solids Struct.* — 2015. — Vol. 52. — P. 19—32.

Поступила в редакцию 14.04.2021

Окончательный вариант поступил 20.09.2021

Received Apr. 14, 2021 (Sept. 20, 2021)

А. А. Адамов^{а}, И. Э. Келлер^а, С. Г. Острер^б, Д. В. Селетков^в*

^аИнститут механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

^бООО “АльфаТех”, Пермь, Россия

^вООО “Пермский завод фторопластовых изделий”, Россия

**ОЦЕНКА РАБОТОСПОСОБНОСТИ АНТИФРИКЦИОННЫХ
ПТФЭ-КОМПОЗИТОВ ПРИ ДАВЛЕНИИ СВЫШЕ 60 МПа
I. СРАВНЕНИЕ ТВЕРДОСТИ И ДЕФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ
В УСЛОВИЯХ СВОБОДНОГО И СТЕСНЕННОГО СЖАТИЯ**

A. A. Adamov, I. E. Keller, S. G. Ostrer, and D. V. Seletkov*

**EVALUATION OF THE PERFORMANCE OF ANTIFRICTION PTFE
COMPOSITES AT A PRESSURE OVER 60 MPa**

**I. COMPARISON OF THEIR HARDNESS AND DEFORMATION PROPERTIES
UNDER FREE AND CONSTRAINED COMPRESSION**

Keywords: antifriction polymer materials, polytetrafluoroethylene composites, experiment, mechanical characteristics, free compression, constrained compression

The mechanical characteristics of a number of antifriction polymer materials at room temperature are studied to analyze their operability in the bearings of support parts with a ball segment. In the published literature, no data were found corresponding to the specifics of the operation of the antifriction layer in such structures. It consists in high contact pressures (at least 60 MPa) and the reciprocating nature of friction according to the plane-on-plane scheme with polished stainless steel as a counterbody, which motivated this systematic study. According to the unified technology of dry mixing, pressing and free sintering, six tablet samples were prepared for each of the 19 types of compositions of fluoroplastic powders and various fillers with a dispersion from units to tens of micrometers (coke, bronze, carbon fiber, colloidal and thermally expanded graphite, molybdenum disulphide and their combinations). For all materials, by the author's

*Автор, с которым следует вести переписку: adamov@icmm.ru
Corresponding author: adamov@icmm.ru

method, the Brinell hardness, the proportions of strains with different rheology in the total deformation, Young's modulus, and stresses in free compression corresponding to strains of 1, 5 and 10%, stiffness in constrained compression, corresponding to stresses of 50, 100, and 150 MPa, and their dependence on the presence of a hole (empty or filled with grease) were determined. All tests were performed according to a multistage program with loading and unloading cycles, relaxation, and rest periods. The best mechanical characteristics showed composites with 50 wt% dendritic or coarse-grained bronze and an addition of 5% colloidal graphite, which manifested itself as a dry lubricant and effectively increased the stiffness. The data obtained, together with tribological characteristics (will be published in the second part), can serve as the basis for the selection of antifriction materials (their composition and manufacturing technologies) for bridge support units.

Ключевые слова: материалы полимерные антифрикционные, композиты на основе политетрафторэтилена, эксперимент, характеристики механические, свободное сжатие, стесненное сжатие

Исследованы механические характеристики некоторых антифрикционных полимерных материалов при комнатной температуре для анализа их работоспособности в подшипниках опорных частей с шаровым сегментом. В опубликованной литературе не выявлено данных, отвечающих специфике работы антифрикционного слоя в подобных конструкциях — высоким контактным давлениям (не менее 60 МПа) и возвратно-поступательному характеру трения по схеме плоскость по плоскости с полированной нержавеющей сталью в качестве контртела, что мотивировало проведение данного систематического исследования. По единой технологии сухого смешивания, прессования и свободного спекания подготовлено по шесть образцов-таблеток для каждого из 19 видов композитов на основе порошков политетрафторэтилена и различных наполнителей с дисперсностью от единиц до десятков микрометров — кокса, бронзы, углеволокна, коллоидного и терморасширенного графитов, дисульфида молибдена и их сочетаний. Для всех материалов определены твердость по Бринеллю, доля деформаций с разной реологией в полной деформации, модуль Юнга и напряжение при свободном сжатии, соответствующие деформации 1, 5 и 10%, жесткость при стесненном сжатии, соответствующая напряжению 50, 100 и 150 МПа, и их зависимость от наличия лунки — пустой или заполненной смазкой. Все испытания выполняли по многоступенчатой программе с циклами нагружения, разгрузки и периодами релаксации и отдыха. Лучшие механические характеристики показали композиты с 50% по массе дендритной или крупнозернистой бронзы с добавлением 5%

коллоидного графита, который проявляет себя как сухая смазка и эффективно увеличивает жесткость. Полученные данные совместно с трибологическими характеристиками (планируется опубликовать во второй части) могут служить основой выбора антифрикционных материалов (их рецептур и технологий изготовления) для шарниров мостовых опор.

1. Необходимость проведения исследования

Конструкция опорной части с шаровым сегментом, применяемая при строительстве мостов, содержит сферический и плоский тонкие слои (отношение толщины к диаметру менее 0,05) антифрикционного полимерного материала, работающие при высоких контактных давлениях и снижающие силы трения от возвратно-поступательных угловых и линейных смещений шарового сегмента [1, 2]. На материал антифрикционных слоев накладываются высокие требования на весь срок гарантированной эксплуатации изделия (50 лет) в диапазоне температур от -60 до 50 °С. Жесткость и предел текучести в условиях стесненного сжатия, преобладающего в данном слое, должны быть достаточны, чтобы материал выдерживал как расчетные значения сжимающей нагрузки не менее 60 МПа, так и ее пиковые значения до 150 МПа при нормированном размахе деформаций. Деформация, связанная с твердофазным течением материала в процессе эксплуатации изделия, не должна приводить к заплыванию лунок для смазки на контактной поверхности слоя и краевой экструзии слоя. Определяющими для выбора материала являются ограничения на коэффициент трения и износостойкость при возвратно-поступательном скольжении по полированной стальной поверхности при расчетных значениях контактного давления. Данные требования закладываются при расчетах мостовых опор и определяют их работоспособность.

Для выбора антифрикционных полимерных материалов (АПМ), пригодных для применения в опорных частях с шаровым сегментом в соответствии с требуемыми механическими и трибологическими характеристиками, существуют требования ОАО «РЖД» [3], проект стандарта Росавтодора, программы испытаний для скользящих материалов, подвергающихся высоким нагрузкам [4, 5], разработанные Немецким институтом строительной техники, и научная литература [6—8]. В основном эти руководства посвящены методикам аттестации трибологических характеристик АПМ, которые имеют заметную чувствительность к температурам и нормальным давлениям в указанном диапазоне. Механические характеристики композитных материалов (КМ) (особенно на основе политетрафторэтилена) относительно более стабильны в зависимости от температуры, поэтому указанные методики ограничиваются набором стандартных испытаний. Методики [4, 5] не содержат пороговых значений характеристик. Опыт аттестации АПМ для изделий ООО «АльфаТех»

Табл. 1

Требования к механическим и трибологическим характеристикам АПМ

Номер	Характеристика АПМ	Предельное значение
1	Твердость по Бринеллю HB_5 ($F = 132$ Н, диаметр шарика 5 мм) при температуре $23 \pm 3^\circ\text{C}$ по ГОСТ 4670-2015	≥ 40 МПа
2	Модуль Юнга E в условиях свободного сжатия при скорости деформации 5%/мин и температуре $23 \pm 3^\circ\text{C}$ по ГОСТ 4651-2014	≥ 800 МПа
3	Напряжение при деформации 5% в условиях свободного сжатия при скорости деформации 50%/мин и температуре $23 \pm 3^\circ\text{C}$ по ГОСТ 4651-2014	≥ 18 МПа
4	Напряжение при деформации 10% в условиях свободного сжатия при скорости деформации 50%/мин и температуре $23 \pm 3^\circ\text{C}$ по ГОСТ 4651-2014	≥ 23 МПа
5	Размах деформаций на третьем цикле циклического стесненного сжатия до 160 МПа при скорости деформации 2%/мин и температуре $23 \pm 3^\circ\text{C}$	$\leq 5\%$
6	Касательный модуль h к диаграмме нагружения при 100 МПа на третьем цикле циклического стесненного сжатия до 160 МПа при скорости деформации 2%/мин и температуре $23 \pm 3^\circ\text{C}$	$\geq 4,2$ ГПа
7	Коэффициент трения скольжения со смазкой ЦИАТИМ-221F по полированной нержавеющей стали с шероховатостью $Ra = 0,16$ при напряжении сжатия от 30 до 60 МПа при температуре $23 \pm 3^\circ\text{C}$	$\leq 0,03$
8	Коэффициент трения покоя (страгивания) со смазкой ЦИАТИМ-221F по полированной нержавеющей стали с шероховатостью $Ra = 0,16$ в диапазоне температур $\pm 50^\circ\text{C}$ при напряжении сжатия от 30 до 60 МПа	$\leq 0,08$
9	Коэффициент износа при возвратно-поступательном смещении по схеме плоскость—плоскость при контакте по полированной нержавеющей стали с шероховатостью $Ra = 0,16$ со смазкой ЦИАТИМ-221F в диапазоне температур $\pm 50^\circ\text{C}$ при напряжениях сжатия от 30 до 60 МПа	$\leq 0,026$ мм/км

позволил выработать более специализированные требования (табл. 1) для испытаний механических свойств материала, предполагающие использование стандартных и оригинальных методов (оснастки, программ и средств обработки результатов) [9—11].

В качестве антифрикционных полимерных материалов в подобных изделиях широко применяются КМ на основе политетрафторэтилена (ПТФЭ), обладающего высокой стабильностью свойств и исключительно низким коэффициентом трения скольжения и покоя в интересующем диапазоне температур. Введение в основу разных наполнителей помогает без значительного увеличения коэффициентов трения существенно повысить износостойкость, жесткость и предел текучести, а также понизить ползучесть композитного материала [12—14], что требуется условиями эксплуатации.

Дизайну наполненных фторкомпозитов и систематическому сравнению их механических и трибологических характеристик посвящена обширная

литература [12—34]. Например, в [15] выполнен сравнительный анализ 31 композита на основе ПТФЭ. В каждой из работ по единой методике изготавливали образцы разных композитных материалов, которые подвергались испытаниям. Технология изготовления образцов заключалась в смешивании порошков ПТФЭ и наполнителей в высокоскоростной мешалке, прессовании образцов-таблеток при давлении 30—50 МПа и их спекании в свободном состоянии при температуре 360—380°C с последующим охлаждением в печи. Эта технология относительно проста и используется при массовом производстве. У заготовок контролировали плотность, степень кристалличности и однородность распределения наполнителей.

В зависимости от назначения антифрикционного материала реализовывались разные программы испытаний. Как правило, определяли модуль Юнга, твердость, предел текучести и прочности в испытаниях на растяжение и свободное сжатие и характеристики ползучести с применением разных методик и средств. Можно отметить исследования свойств ползучести и релаксации материала вдавливанием цилиндрического [25] или сферического [26] инденторов, а также циклической ползучести (рэтчетинга) при испытаниях на одноосное растяжение с помощью динамического механического анализатора [23] или на циклическое свободное сжатие [34]. Ни в одной из этих работ программа испытаний не обеспечивает данными для идентификации трехмерной модели вязкоупругопластичности. Только в одной из цитированных работ напряжение сжатия достигало 100 МПа [25]. Необходимые данные о механических характеристиках применяемых в конструкциях мостовых опор полимерных антифрикционных материалов Fluorogold (Seismic Energy Products, США) на основе ПТФЭ, а также MSM (Maurer Sohne, Германия) и Robo®Slide (Mageba, Швейцария) на основе сверхвысокомолекулярного полиэтилена [1] не опубликованы.

В контексте поставленной задачи интересуют трибологические характеристики (коэффициенты трения и износостойкость) антифрикционного материала при трении о полированную сталь по схеме плоскость по плоскости для указанных диапазонов температур и контактных давлений. В опубликованных работах по определению трибологических характеристик наполненных фторкомпозитов условия испытаний и смысл этих характеристик значительно различаются. В использованных устройствах реализуются схемы с относительным вращением (диск—палец [12, 16, 19, 27], вал—колодка [19], вал—штулка [28-32], вал—плоскость [12] или шар—кольцо [12]) или возвратно-поступательным смещением (плоскость—плоскость [7, 15, 20—22], шарик—плоскость [26]), однако ни одно из них не было рассчитано для давления 60 МПа и выше. Рекомендации применения некоторых АПМ для узлов трения с высокими давлениями [24] также сделаны на основании данных испытаний с контактным давлением до 10 МПа. Пороговые значения нормируемых характеристик в рамках методик испытаний материалов для слоев скольжения мостовых опор [4—8] не опубликованы, что усложняет выбор АПМ производителями мостовых опор.

Таким образом, имеющихся экспериментальных данных недостаточно для выбора подходящего под требования (см. табл. 1) материала и необходимо выполнение специального систематического исследования для значительно более высоких давлений и возвратно-поступательного характера трения. Следует отметить, что основная часть тонкого слоя АПМ находится в состоянии стесненного сжатия, за исключением областей вблизи краев и лунок, где реализуется состояние, промежуточное между стесненным и свободным сжатием. Это обуславливает особую важность изучения механических характеристик материала в этих состояниях. Программа механических испытаний должна обеспечивать возможность идентификации пространственной модели вязкоупругопластичности, необходимой для расчетов поведения антифрикционных слоев в опорной части с шаровым сегментом. При этом поиск подходящих составов целесообразно начинать из производимых промышленностью композиций и смесей с традиционными наполнителями для повышения жесткости и износостойкости (бронза, кокс, углеволокно) и сухими смазками (графит, дисульфид молибдена), производя образцы по описанной технологии “порошковой металлургии”. Далее приведены результаты сравнительного исследования механических свойств (пп. 1—5 табл. 1) по оригинальной методике 19 наполненных КМ, допускающих массовое производство и имеющих приемлемую себестоимость. Трибологические характеристики выбранных перспективных КМ будут в дальнейшем исследованы по методике [10] на установке [11] наряду с более представительными испытаниями их механических свойств.

2. Технология изготовления образцов

Цилиндрические образцы-таблетки КМ изготавливали по технологии, включающей а) дозирование порошков ПТФЭ и наполнителей, их перемешивание в лопастной мешалке, б) прессование приготовленной массы

Табл. 2

Программа прессования образцов

Программа блока нагружения с разгрузкой и выдержками		Номер блока	Порядок нагружения
Этап	Скорость траверсы		
1	0,05 мм/с до максимального напряжения σ_M	1	Блок нагружения с $\sigma_M = 5$ МПа
2	0 мм/с 30 с	2	Блок нагружения с $\sigma_M = 10$ МПа
3	-0,05 мм/с до 0,04 МПа	3	Блок нагружения с $\sigma_M = 20$ МПа
4	0 мм/с 30 с	4	Блок нагружения с $\sigma_M = 30$ МПа
		5	Блок нагружения с $\sigma_M = 40$ МПа
		6	Блок нагружения с $\sigma_M = 40$ МПа
		7	Блок нагружения с $\sigma_M = 40$ МПа

Программа спекания образцов

Этап	$T, ^\circ\text{C}$	Продолжительность, мин
1	20—340	180
2	340—370	40
3	370—370	120
4	370—300	120
5	300—20	С сушильным шкафом

смеси в пресс-форме по программе табл. 2 с последующей выдержкой в свободном состоянии не менее часа, в) свободное спекание в печи по программе табл. 3. Прессование осуществлялось на универсальной испытательной машине Zwick Z100/SN5A, в качестве пресс-формы использован стальной полый толстостенный цилиндр с двумя стальными поршнями-пуансонами с полированными контактными поверхностями. Программа прессования с циклическими нагрузками и разгрузками обеспечивала минимальную пористость материала и однородное распределение плотности материала по образцу. Спекание осуществлялось в сушильном шкафу ШСП-0,5-450 на одном уровне. Программа спекания (табл. 3) обеспечивала плотность образцов ПТФЭ $2,18 \text{ г/см}^3$, соответствующую степени кристалличности 60%, оптимальной для применения в качестве антифрикционного материала [13]. Образцы-таблетки, имевшие после прессования диаметр 20,06 мм и высоту ~ 8 мм, после спекания сокращались в диаметре на 1,3—3,2% и увеличивались по толщине на 1,6—8,0% в зависимости от состава композита и дисперсности наполнителей. Небольшая вогнутость/выпуклость торцевых плоскостей после спекания образцов (вследствие технологической памяти материала о процессе одноосного прессования с трением по боковой поверхности) устранялась шлифованием на водостойкой наждачной бумаге Р240. Были выполнены измерения размеров каждого из полученных образцов, необходимые для последующих испытаний на свободное и стесненное сжатие.

Согласно описанной технологии было изготовлено по шесть образцов-таблеток для 19 видов КМ, массовый состав которых приведен в табл. 4. В качестве основы для материала сравнения КМ1 взят ПТФЭ марки ПН-40, позволяющий получить образец с минимальной пористостью. Материалы КМ2—КМ4 с коксом, углеволокном и коллоидным графитом С-1 изготовлены из смесей производства ООО “Пермский завод фторопластовых изделий”. Составы КМ5—КМ7 — с коллоидным графитом С-1, КМ8 — с измельченным и просеянным пухом терморасширенного графита, КМ9 — с измельченными отходами производства графитового листового материала — экспериментальные. В материалах КМ10—КМ19 в качестве наполнителя, отвечающего за жесткость и износостойкость,

Состав изготовленных образцов наполненных фторкомпозитов

Код	Наполнение, мас. ч.	Марка [11]
Основа — ПТФЭ марки ПН-40		
КМ1*	-	Ф4
Композиты ПТФЭ с коксом, углеволокном, коллоидным и терморасширенным графитами		
КМ2**	20% кокса	Ф4К20
КМ3***	15% кокса, 5% углеволокна	Ф4К15УВ5
КМ4 ^{4*}	15% кокса, 5% коллоидного графита	Ф4К15Г5
КМ5 ^{4*}	20% коллоидного графита	Ф4Г20
КМ6 ^{4*}	15% коллоидного графита	Ф4Г15
КМ7 ^{4*}	25% коллоидного графита	Ф4Г25
КМ8 ^{5*}	20% терморасширенного графита	Ф4ТРГ20
КМ9 ^{5*}	20% отходов терморасширенного графита	Ф4ТРГ20
Композиты ПТФЭ с бронзой, коллоидным графитом и дисульфидом молибдена		
КМ10	40% дендритной бронзы ^{6*} , 2% дисульфида молибдена ^{7*}	Ф4Бр40М2
КМ11	30% дендритной бронзы, 2% дисульфида молибдена	Ф4Бр30М2
КМ12	50% дендритной бронзы, 2% дисульфида молибдена	Ф4Бр50М2
КМ13	40% дендритной бронзы, 5% коллоидного графита	Ф4Бр40Г5
КМ14	30% дендритной бронзы, 5% коллоидного графита	Ф4Бр30Г5
КМ15	50% дендритной бронзы, 5% коллоидного графита	Ф4Бр50Г5
КМ16	40% бронзы ^{8*} 0—160 мкм, 5% коллоидного графита сульфида молибдена	Ф4Бр40Г5
КМ17	40% бронзы 0—160 мкм, 2% дисульфида молибдена	Ф4Бр40М2
КМ18	40% бронзы 20—40 мкм, 2% дисульфида молибдена	Ф4Бр40М2
КМ19	40% бронзы 40—80 мкм, 2% дисульфида молибдена	Ф4Бр40М2

*ГалоПолимер, Россия, ТУ 2213-021-13693708-2005 (средний размер частиц 21—45 мкм).

**TIMREX® PC 40-OC, IMERYS Graphite & Carbon, Швейцария (размер 50% частиц менее 14 мкм, 90% — менее 42 мкм).

***Углеволокно измельченное, диаметр 7 мкм, средняя длина 100 мкм.

^{4*}Завальевский графит, Россия, ТУ 113-08-48-63-90 (размер частиц менее 63 мкм).

^{5*}Силур, Россия (размер частиц менее 63 мкм).

^{6*}Rogal Bronze GS 0/40-03, Carl Schlenk, Германия (дендритная, размер частиц менее 40 мкм).

^{7*}BSM10/J, Trigon Chemie, Германия (размер 50% частиц менее 10 мкм).

^{8*}Полема, Россия, ПРВ-Бр05Ц5С5, ТУ 14-22-51-91 (размер частиц 20—40, 40—80 и 0—160 мкм).

использована бронза разного фракционного состава, а в качестве сухих смазок — дисульфид молибдена и коллоидный графит С-1.

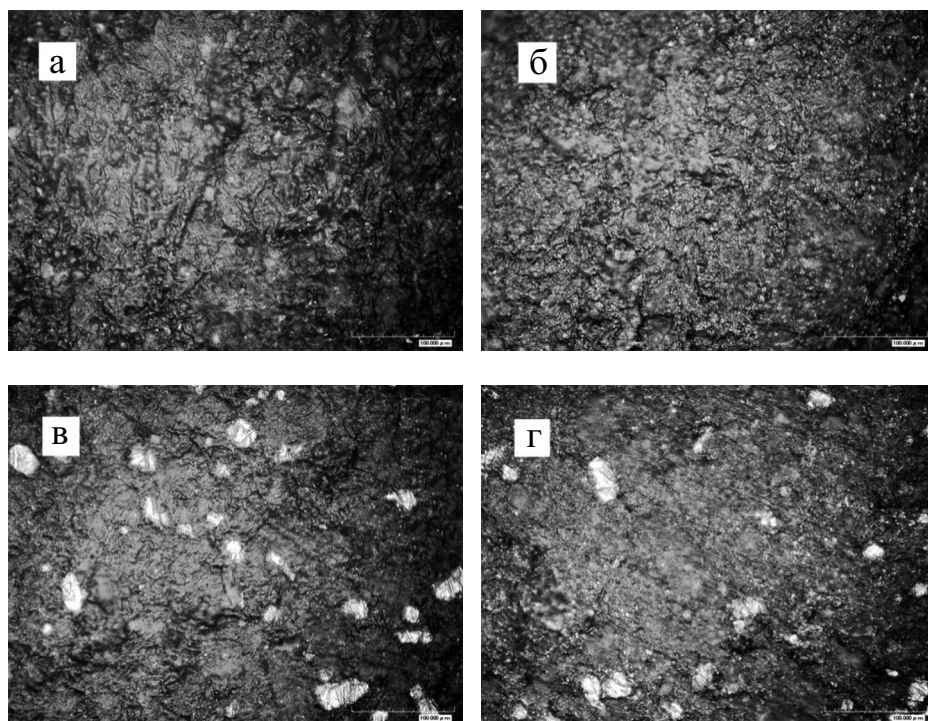


Рис. 1. Микрофотографии поверхности образцов KM2 (а), KM7 (б), KM12 (в), KM15 (г) с увеличением 700×.

Контроль однородности распределения наполнителей по образцу осуществляли в ходе исследования его торцевых плоскостей с помощью цифрового оптического микроскопа Nipox KH-7700 с 700-кратным объективом. На рис. 1 представлены фото поверхности образцов композитов KM2, KM7, KM12 и KM15.

3. Испытание на вдавливание стального шарика

Надежная первичная характеристика жесткости наполненных фторком-
позитов может быть определена по вдавливанию стального шарика диамет-
ром 5 мм согласно ГОСТ 4670-2015 [35]. Испытание реализовано на базе
универсальной испытательной машины Zwick Z100/SN5A с датчиком силы
1 кН и длинноходовым датчиком продольной деформации Multisens (рис. 2).
Задавали программу нагружения до максимальной силы с разгрузкой и
выдержкой (табл. 5) согласно данному стандарту. Твердость по Бринеллю
(МПа) рассчитывали по формуле

$$HB_5 = F_{\max} / S,$$

где $F_{\max} = 132$ Н — сила; S — площадь контакта (мм^2), определяемая
по максимальной глубине внедрения согласно [35]. Для каждого из ма-



Рис. 2. Приспособление для вдавливания шарика в сборе с образцом КМ1, датчиком силы и установленными щупами экстензометра.

териалов выполняли 10 независимых испытаний — по пять на плоских торцах двух образцов-таблеток, с соблюдением требования ГОСТ для малых образцов по расстоянию между отпечатками и краем образца не менее 5 мм.

Результаты испытаний в виде диаграмм нагружения (рис. 3) в для материала КМ1 дают представление не только о твердости (жесткости) материала, но и о природе его деформации. Изменения глубины внедрения шарика d во время выдержки при максимальной и минимальной нагрузках характеризуют меру деформации ползучести материала, аналогичная величина в течение разгрузки — меру упругой деформации, а остаточная глубина вдавливания — меру вязкопластической деформации. При известных оговорках, связанных с неоднородностью напряженно-деформированного состояния индентируемого образца, количественное сравнение материалов можно выполнить по приращениям глубины внедрения шарика во время разгрузки $\delta_e = d_2 - d_3$ и восстановления при минимальной нагрузке $\delta_{ve} = d_3 - d_4$, а также остаточной глубине отпечатка $\delta_p = d_4$ (d_k ($k = 1, 2, 3, 4$) — глубина вдавливания, соответствующая окончанию этапа k программы испытаний согласно данным табл. 5, $\delta_p + \delta_{ve} + \delta_e = d_2$ — максимальная глубина внедрения).

Табл. 5

Программа испытания на вдавливание шарика

Этап	Скорость траверсы, мм/с	Условие задания
1	0,0833	До силы $F_{\max} = 132$ Н
2	0	Выдержка 30 с
3	-0,0833	До силы 9,8 Н
4	0	Выдержка 30 с

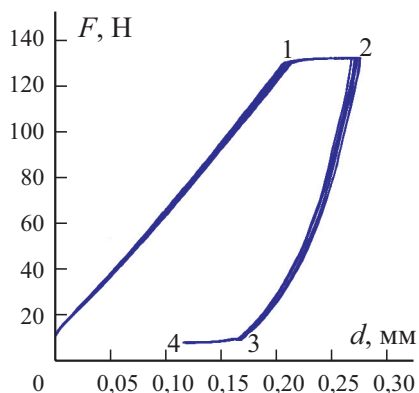


Рис. 3. Диаграммы нагрузка—глубина вдавливания $F-d$ шарика для образцов КМ1 с характерными точками 1—4 окончания соответствующих этапов испытания согласно данным табл. 5.

Результаты сравнения твердости по Бринеллю исследуемых КМ (рис. 4) показывают, что добавление измельченного терморасширенного графита или его отходов (композиты КМ9, КМ9) практически не увеличивает твердость материала по сравнению с ПТФЭ. Коллоидный графит как наполнитель, увеличивающий твердость (КМ5-7), проявляет себя не хуже кокса или бронзы. Составы с 40% бронзы показывают сходные характеристики независимо от размеров, дисперсного состава и морфологии поверхности частиц. Лучшими оказываются материалы КМ15 и КМ12 с 50% мелкодисперсной дендритной бронзы и 5% коллоидного графита или 2% дисульфида молибдена соответственно, а также КМ3 с углеродом.

Твердость, обратно пропорциональная (в первом приближении) глубине вдавливания шарика, позволяет сравнить материалы по величинам полной деформации. Данные рис. 5 иллюстрируют составляющие с разной реологией в этой деформации. Максимальной остаточной дефор-

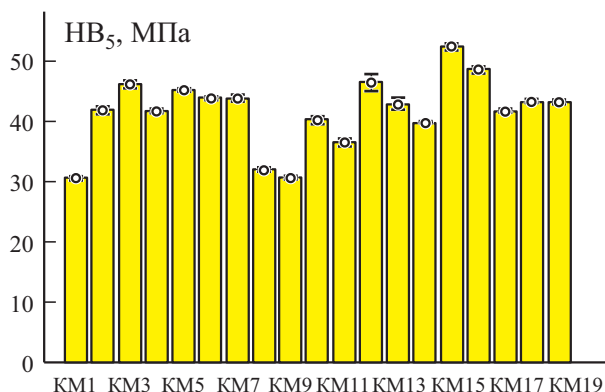


Рис. 4. Значения твердости по Бринеллю HB_5 материалов с доверительными интервалами с вероятностью 0,95.

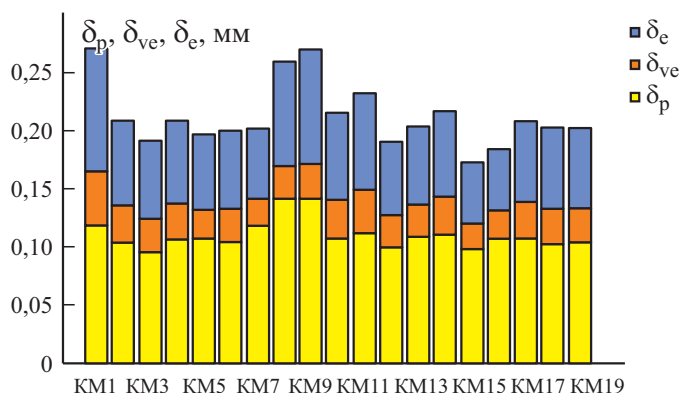


Рис. 5. Глубина внедрения шарика и ее составляющие с разной реологией.

мацией (выше, чем ПТФЭ) обладают композиты с терморасширенным графитом, минимальной — композиты KM3 с углеволокном, KM12 и KM15 с 50% мелкодисперсной дендритной бронзы с 2% дисульфида молибдена либо 5% коллоидного графита соответственно, а также KM16 с 40% крупнозернистой бронзы и 5% коллоидного графита. По совокупности максимальных и остаточных деформаций от перечисленных не отстают композиты KM5-7 с 15—25% коллоидного графита в качестве единственного наполнителя.

4. Испытание на свободное сжатие

Одно из двух базовых испытаний на свободное сжатие выполняли на универсальной испытательной машине Zwick Z100/SN5A с датчиком силы 100 кН, датчиком продольной деформации Multisens в условиях минимального трения по торцам для реализации одноосного напряженного

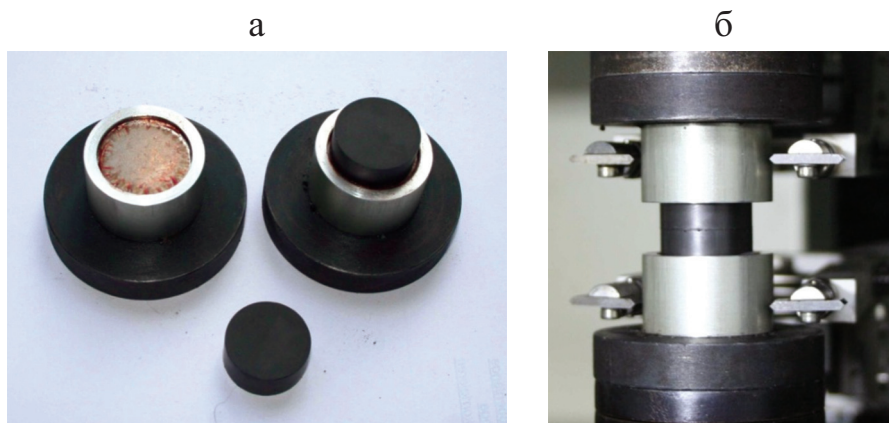


Рис. 6. Детали приспособления, образцы и приспособление в сборе с образцами и установленными щупами экстензометра.

Программа испытания на свободное сжатие

Этап	Скорость траверсы, мм/с	Условие задания
1	0,05	До деформации 10%
2	0	Выдержка 1000 с
3	-0,05	До напряжения 0,1 МПа
4	0	Выдержка 300 с

состояния в составном коротком цилиндрическом образце. Специально изготовленное приспособление (рис. 6) имеет две стальные цилиндрические самоцентрирующиеся опоры со шлифованными контактными плоскостями и дюралевые профилированные втулки с ограничивающим буртиком, предотвращающим “выстреливание” сжатого образца, но позволяющим торцевым зонам образца свободно расширяться в поперечном направлении до достижения 10% осевой деформации сжатия. Процедура установки образца: контактные поверхности опор смазывают низковязкой консистентной смазкой, на них укладывают две смазанные пленки ПТФЭ толщиной 50 мкм, затем устанавливают половинку составного образца, собирают вторую опору, устанавливаемую одновременно с образцом-половинкой на другую часть образца в нижней опоре.

Программу нагружения до максимальной деформации сжатия 10% с разгрузкой и выдержками (табл. 6) выполняли индивидуально для каждого составного образца с измеренной высотой заданием смещения опор по экстензометру. При организации испытания принимали во внимание рекомендации стандарта [36]. По данным эксперимента (рис. 7) определяли: а) модуль Юнга E при заданной скорости деформации по координатам двух точек на линейном участке кривой деформирования в диапазоне напряжений (2—6) МПа, б) напряжение при деформации 1, 5 и 10%, характеризующей нелинейность диаграммы деформирования. По этим же

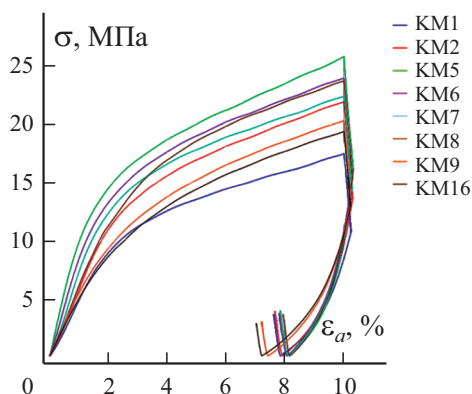


Рис. 7. Диаграммы деформирования образцов при свободном сжатии.

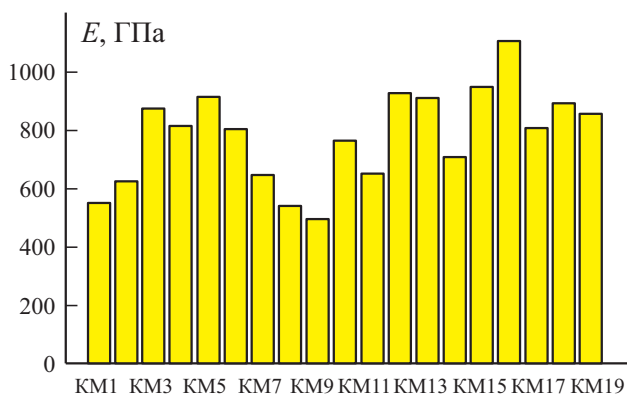


Рис. 8. Модуль Юнга образцов, испытание на свободное сжатие.

данным могут быть определены релаксация напряжения во время выдержки при максимальной деформации (этап 2 программы испытаний), возврат деформации на участке разгрузки (этап 3) и восстановление напряжений в течение этапа 4, позволяющие сравнить реологию материалов и идентифицировать подходящие модели.

На рис. 8 и 9 приведены данные при свободном сжатии: модуль Юнга E (при заданной скорости деформации) и напряжения $\sigma_1, \sigma_5, \sigma_{10}$ при деформациях 1, 5 и 10%, характеризующие нелинейность кривой деформирования. Эти характеристики растут с массовой долей содержания наполнителей, минимальные значения имеют ПТФЭ и композиты с терморасширенным графитом. Наибольшие значения (по совокупности характеристик) имеют материалы KM3 с углеродом, а также KM15 с 50% мелкозернистой дендритной бронзы и KM16 с 40% крупнозернистой бронзы в качестве основного наполнителя. Как и по твердости, составы KM5-7 с 15—25% коллоидного графита в качестве единственного наполнителя демонстрируют характеристики выше средних, а составы с 40%

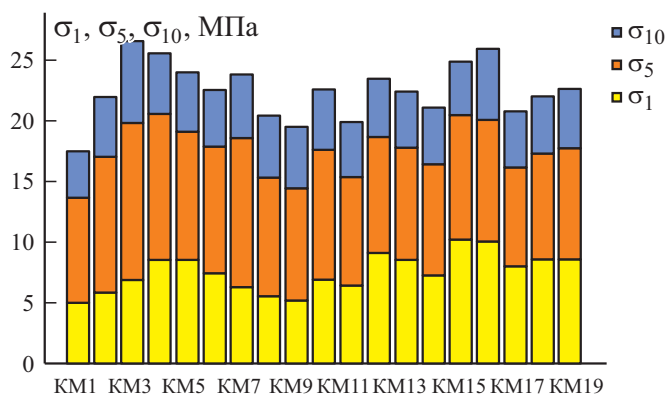


Рис. 9. Напряжение при деформации образцов 1, 5 и 10%, испытание на свободное сжатие.

бронзы КМ10,13, 16—19 показали сходные характеристики независимо от размеров, дисперсного состава и морфологии поверхности частиц.

5. Испытание на стесненное сжатие

Второе базовое испытание — на стесненное сжатие — также выполняли на универсальной испытательной машине Zwick Z100/SN5A с датчиком силы 100 кН и датчиком продольной деформации Multisens с помощью самодельного приспособления (рис. 10). Программа нагружения до максимального напряжения 160 МПа с разгрузкой и выдержками (табл. 7) задавала три цикла, в течение которых стабилизируется диаграмма. Методика испытаний и обработки данных подробно изложена в [9].

Прессование образцов-таблеток из порошковых композиций выполняли с помощью этого же приспособления, но без смазки контактных поверхностей. Поскольку диаметр таблеток после спекания уменьшался, для устранения зазора в испытательной ячейке и начального участка нагружения с переходным видом напряженно-деформированного состояния от свободного к стесненному сжатию составные образцы из двух таблеток предварительно подпрессовывались. Испытывали как “свежие” образцы, так и образцы после испытаний на свободное сжатие после двух суток выдержки. Предварительное нагружение свежих образцов выполняли давлением 30 МПа с 10-минутной выдержкой, последующей разгрузкой и 5-минутной выдержкой, затем задавали начальную нагрузку 10 МПа с её удержанием до окончания заметной релаксации. При испытаниях образцов после их свободного сжатия (в случае малого остаточного увеличения диаметра до 20,06 мм) подпрессовывание выполняли давлением 10 МПа с его удержанием до окончания заметной релаксации. Для каждого образца из условия постоянства объёма проводили пересчет суммарной высоты

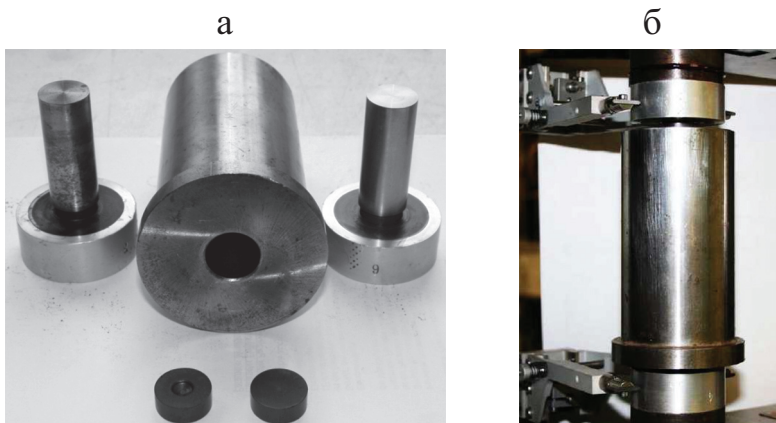


Рис. 10. Детали приспособления, образцы и приспособление в сборке с образцами и установленными щупами экстензомера.

Программа испытания на стесненное сжатие

Программа блока нагружения с разгрузкой и выдержками			Номер блока	Порядок нагружения
Этап	Скорость траверсы, мм/с	Условие задания		
1	0.0833	До напряжения 160 МПа	1	Блок нагружения
2	0	Выдержка 300 с	2	Блок нагружения
3	-0.0833	До напряжения 0.3 МПа	3	Блок нагружения
4	0	Выдержка 300 с		

обеих таблеток, необходимой для расчета осевой деформации по показаниям экстензометра.

Кроме испытаний сплошных образцов-таблеток реализованы испытания таблеток с односторонней лункой в форме сферического сегмента с радиусом 5 мм, диаметром основания 8 мм и глубиной 2 мм, пустой или заполненной смазкой ЦИАТИМ-221Ф. Эти испытания, максимально приближенные к условиям эксплуатации опор [1], необходимы для исключения материалов, не способных к удержанию формы лунок со смазкой при расчетных и пиковых значениях контактных давлений. Каждую характеристику определяли по испытанию одного составного образца из двух таблеток (с лунками, обращенными к сжимающим пуансонам).

Диаграммы деформирования восьми видов композитов по представленной программе испытания приведены на рис. 11. Горизонтальный сдвиг петель гистерезиса, характеризующий остаточную объемную деформацию, зависит как от самого материала, так и от предварительного подпрессовывания образцов. Правильно выбранный допуск на толщину антифрикционного слоя в зависимости от выбранного материала способен обеспечить его расчетную толщину в изделии в условиях эксплуатации. Поэтому

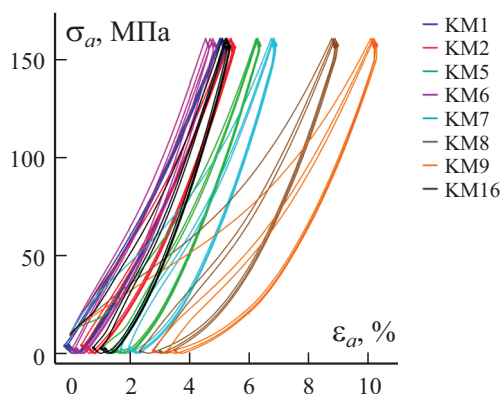


Рис. 11. Диаграммы осевого деформирования образцов при стесненном сжатии.

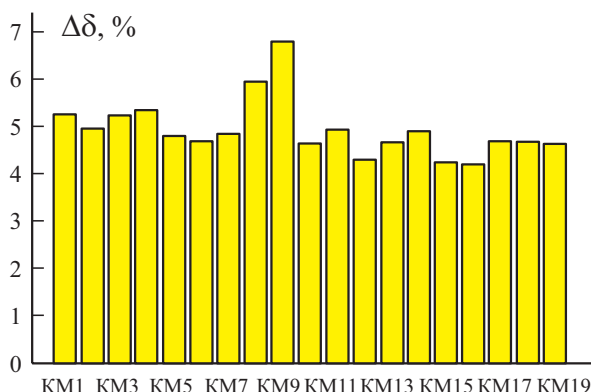


Рис. 12. Размах деформаций образцов на третьем цикле испытания на стесненное сжатие.

эта характеристика остаточной пористости материала не включена в требования (см. табл. 1). Однако размах деформации $\Delta\epsilon$ в установившемся цикле стесненного сжатия до 160 МПа (рис. 12) для проектировщиков является важной характеристикой материала, определяющей границы изменения расстояния между жесткими частями опоры в процессе эксплуатации. Требованиям 6 (см. табл. 1) не удовлетворяют ПТФЭ (KM1), композиты с терморасширенным графитом KM8, KM9 и KM3, KM4 с 15% кокса или углеволокна, а наилучшие показатели обнаруживают KM12 и KM15 с 50% дендритной бронзы и KM16 с 40% крупнозернистой бронзы и 5% коллоидного графита.

На рис. 13 приведены модули жесткости h_{50}, h_{100}, h_{150} при напряжении 50, 100 и 150 МПа в условиях стесненного сжатия. Величина h_{σ} монотонно возрастает с ростом напряжения σ . Значения данных характеристик также увеличиваются с массовой долей содержания наполнителей. Минимальные значения демонстрируют композиты с терморасширенным гра-

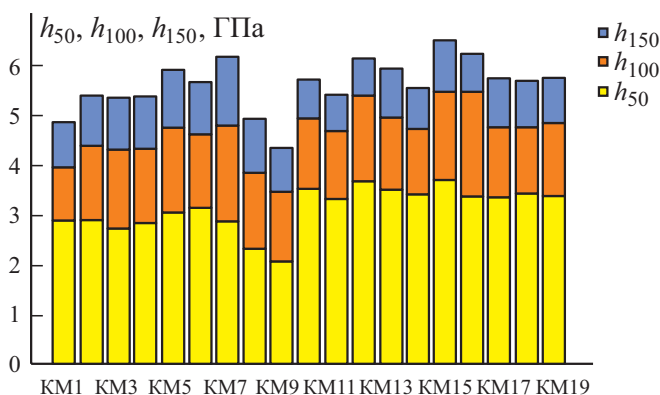


Рис. 13. Модуль жесткости сплошных образцов при стесненном сжатии.

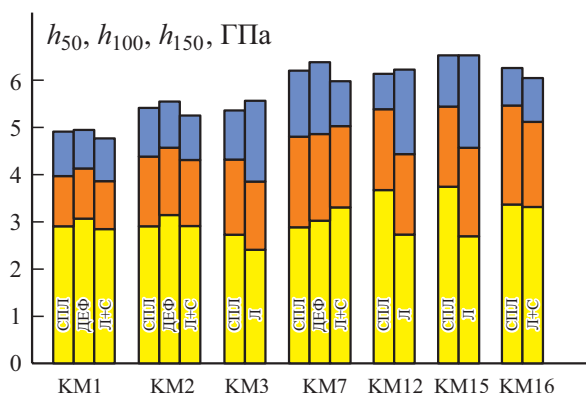


Рис. 14. Сравнение модулей жесткости образцов (сплошных и с лункой, пустой и со смазкой) при стесненном сжатии.

фитом KM8, KM9. Наивысшие значения (по совокупности характеристик) имеют материалы KM15, KM16 с 50% мелкозернистой дендритной или 40% крупнозернистой бронзы в качестве основного наполнителя и 5% коллоидного графита, а также KM7 с 25% коллоидного графита в качестве единственного наполнителя.

На рис. 14 проведено сравнение жесткостей исходного и предварительно деформированного сплошного материала, а также образцов с пустой и заполненной смазкой лунками для наполненных КМ. Все предварительно деформированные материалы оказались жестче исходных. Образцы с пустыми лунками достигают жесткости сплошного материала по мере исчезновения лунки при пиковых нагрузках (последняя при разгрузке восстанавливается, но не в полной мере). Жесткость образцов с лунками, заполненными смазкой, при напряжении до 50 и 100 МПа практически та же, что и жесткость сплошного материала, при 150 МПа — несколько ниже ее.

Заключение

Выполненное исследование, методика которого включает стандартные и предлагаемые испытания, обеспечивает исчерпывающими данными о механических характеристиках (твердости, модуле Юнга и напряжении до 10% деформации при свободном сжатии, жесткости и размахе деформации образцов с лунками и без них при стесненном сжатии в диапазоне до 150 МПа) наполненных композитов на основе ПТФЭ. Наряду с трибологическими характеристиками они необходимы при выборе антифрикционного полимерного материала для тонких плоских и сферических слоев шаровых опор. Показано, что наименее трудоемкое из выполненных и статистически значимое испытание по определению твердости по Бринеллю даёт возможность выполнять экспресс-сравнение АПМ для

исключения не удовлетворяющих требованиям по механическим характеристикам. Испытания на свободное и стесненное сжатие дают сопоставимую картину с данными по твердости. С точки зрения механических характеристик признаны несостоятельными композиты с измельченным терморасширенным графитом. Лучшими характеристиками обладают композиты, наполненные 50% мелкозернистой дендритной или 40% крупнозернистой бронзы в качестве основного наполнителя и 5% коллоидного графита. Выше средних оказались характеристики композитов с 20—25% коллоидного графита в качестве единственного наполнителя. Добавление 5% коллоидного графита в составы с 40 и 50% дендритной или крупнозернистой бронзы заметнее увеличивают все механические характеристики, чем добавление в них 2% дисульфида молибдена. Композит с 20% коллоидного графита также имеет все механические характеристики лучше композита, наполненного 20% кокса. Составы с 40% бронзы показали сходные характеристики независимо от размеров, дисперсного состава и морфологии поверхности частиц.

Требованиям по механическим характеристикам для применения в качестве материала антифрикционного слоя в опорных частях с шаровым сегментом (см. табл. 1) удовлетворяют: согласно п.1 — массово производимые композиты КМ2—КМ4, материалы с коллоидным графитом КМ5—КМ7 и бронзой КМ12, КМ13, КМ15—КМ19, согласно п.2 — КМ3—КМ5, КМ12, КМ13, КМ15—КМ19, согласно п.3, 4 — КМ3, КМ5, КМ7, КМ12, КМ15, КМ16, согласно п.5 — все материалы, кроме КМ1, КМ8 и КМ9, согласно п.6 — все материалы, кроме КМ1, КМ3, КМ4, КМ8 и КМ9. Лучшую совокупность механических характеристик обнаруживают композиты КМ5, КМ7, КМ12, КМ15, КМ16.

Представленная методика изучения механических свойств может быть использована при исследованиях более широкого класса КМ, наполненных порошками твердых пластиков или наноразмерных частиц для сравнения и оценки применимости в узлах с высоким контактным давлением и возвратно-поступательным характером относительного скольжения и сдвига. На основе данных, полученных из базовых экспериментов на свободное и стесненное сжатие, возможен выбор подходящей нелинейной модели упруговязкопластичности сжимаемых изотропных полимеров (например, из числа приведенных в [37]). Идентификация выбранной модели для композитов, показавших наилучшие механические и трибологические характеристики, должна опираться на более представительную программу испытаний по изложенной методике.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Пермского края в рамках научного проекта № 20-48-596012.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Azizinamini A., Power E. H., Myers G. F., Celik Ozyildirim H.* Bridges for Service Life Beyond 100 Years: Innovative Systems, Subsystems and Components. — Washington: The National Academies Press, 2014. — 248 p.
2. Пат. RU 146859 U1. Опорная часть моста / *Буканов В. В., Ипанов А. С., Хатунов С. А., Адамов А. А., Остреп С. Г.* — Заявлено 24.04.2014 // 2014. — Бюл. № 29.
3. Технические требования на опорные части с шаровым сегментом и антифрикционным покрытием / Введены распоряжением ОАО «РЖД» № 2755р от 12.12.2013 г. — 33 с. URL: <http://scbist.com/scb/uploaded/docs/2013/dekabr-2013/5040-rasporjazhenie-oao-rzhd-ot-12-12-2013-n-2755r.htm> (дата обращения: 06.12.2021)
4. EAD 050009-00-0301 Spherical and cylindrical bearing with special sliding material made of UHMWPE (Ultra high molecular weight polyethylene) / EOTA. 2018. — 28 p. URL: https://www.eota.eu/download?file=/2014/14-05-0004/ead%20for%20jeu/ead%20050004-00-0301_jeu2018.pdf (дата обращения: 06.12.2021)
5. EAD 050009-00-0301 Spherical and cylindrical bearing with special sliding material made of fluoropolymer / EOTA. 2017. — 30 p. URL: https://www.eota.eu/download?file=/2015/15-05-0009/ead%20for%20jeu/ead%20050009-00-0301_jeu2017.pdf (дата обращения: 06.12.2021)
6. *Campbell T. I., Kong W. L., Manning D. G.* Laboratory investigation of the coefficient of friction in the polytetrafluoroethylene slide surface of a bridge bearing // Transportation Research Record, 1275. — 1987. — P. 45—52.
7. *Stanton J. F., Roeder C. W., Campbell T. I.* Appendix C: Friction and wear of PTFE sliding surfaces / In NCHRP Report 432: High-Load Multi-Rotational Bridge Bearings. — TRB, National Research Council, Washington, D.C. — 1999. — 413 p.
8. *Bocklenberg L., Winkler K., Mark P., Rybarz S.* Low friction sliding planes of greased PTFE for high contact pressures // Open J. Civil Eng. — 2016. — Vol. 6. — P. 105—116.
9. *Адамов А. А.* Экспериментальное обеспечение и идентификация модели изотропного тела с упругой объёмной сжимаемостью дисперсно-наполненных композитов на основе фторопласта и сверхвысокомолекулярного полиэтилена // Конструкции из композиц. материалов. — 2013. — № 2. — С. 28—37.
10. *Адамов А. А.* Экспериментальное изучение механического поведения и трения полимерных антифрикционных материалов при давлениях до 60 МПа // Сб. докл. XI Всерос. съезда по фундаментальным проблемам теорет. и прикл. механики, Казань, 20-24 августа 2015 г. — С. 79—81.
11. Пат. RU 2692130 С2. Испытательная установка реверсивного трения / *Ипанов А. С., Адамов А. А., Светлаков А. В., Василенко В. Д., Патраков И. М., Непенин И. В.* — Заявлено 24.10.2017 // 2019. — Бюл. № 18.
12. *Истомин Н. П., Семенов А. П.* Антифрикционные свойства композитных материалов на основе фторполимеров. — М.: Наука, 1981. — 146 с.
13. *Пугачев А. К., Росляков О. А.* Переработка фторопластов в изделия. — Л.: Химия, 1987. — 168 с.
14. *Остреп С. Г.* Фторполимеры в химической промышленности. — Пермь, 2019. — 400 с.
15. *Bhushan B., Wilcoc D. F.* Wear behavior of polymer compositions in dry reciprocating sliding // Wear. — 1982. — Vol. 75. — P. 41—70.
16. *Bahadur S., Tabor D.* The wear of filled polytetrafluoroethylene // Wear. — 1984. — Vol. 98. — P. 1—13.
17. *Plitmanis J., Cirule K. I., Kregers A. F., Terauds A. E., Tolks A. M.* Optimization of the composition and tribological properties of high-density polyethylene-calcite-silicon

nitride composites by the method of experiment planning // *Mech. Compos. Mater.* — 1996. — Vol. 32, No.5. — P. 483—486.

18. Композитные материалы на основе политетрафторэтилена. Структурная модификация / [Ю. К. Машков и др.]. — М.: Машиностроение, 2005. — 240 с.

19. Дисперсно-наполненные полимерные композиты технического и медицинского назначения / Б. А. Люкшин [и др.]; отв. ред. А. В. Герасимов. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017. — 311 с.

20. *Schmitz T. L., Action J. E., Burris D. L., Ziegert J. C., Sawyer W. G.* Wear-rate uncertainty analysis // *Transactions of the ASME. Journal of Tribology.* — 2004. — Vol. 126. — P. 802—808.

21. *Burriss D. L., Sawyer W. G.* A low friction and ultra low wear rate PEEK/PTFE composite // *Wear.* — 2006. — Vol. 261. — P. 410—418.

22. *Sawyer W. G., Freudenberg K. D., Bhimaraj P., Schadler L. S.* A study on the friction and wear behavior of PTFE filled with alumina nanoparticles // *Wear.* — 2003. — Vol. 254. — P. 573—580.

23. *Xu W., Gao H., Gao L.-L., Chen X., Wang Y.* Tensile ratcheting behaviors of bronze powder filled polytetrafluoroethylene // *Front. Chem. Sci. Eng.* — 2013. — Vol. 7. — P. 103—109.

24. *Kolhe S., Deshpande A., Wangikar K.* Wear behavior of polytetrafluoroethylene composites: A review // *Kolhe M., Labhasetwar P., Suryawanshi H.* (eds) *Smart Technologies for Energy, Environment and Sustainable Development. Lecture Notes on Multidisciplinary Industrial Engineering.* — Springer, Singapore. — 2019. — P. 571—584.

25. *Stan F., Fetecau C.* Study of stress relaxation in polytetrafluoroethylene composites by cylindrical macroindentation // *Composites.* — 2013. — Vol. B47. — P. 298—307.

26. *Cheng H., Cheng X.* Mechanical and tribological behavior of polytetrafluoroethylene composites reinforced by carbon nanotubes and poly-P-oxybenzoate // *High Performance Polym.* — 2013. — Vol. 25. — P. 611—621.

27. *Tóth L. F., De Baets P., Szabó G.* Thermal, viscoelastic, mechanical and wear behaviour of nanoparticle filled polytetrafluoroethylene: A comparison // *Polymers.* — 2020. — Vol. 12, No. 9. — 1940.

28. *Okhlopko A. A., Shits E. Y.* Structure and properties of Teflon composites with natural diamond powders // *Mech. Compos. Mater.* — 2004. — Vol. 40, No. 2. — P. 145—150.

29. Охлопкова А. А., Петрова П. Н., Попов С. Н., Слепцова С. А. Полимерные композитные материалы триботехнического назначения на основе политетрафторэтилена // *Рос. хим. журн.* — 2008. — Т. 52, № 3. — С. 147—152.

30. Охлопкова А. А., Слепцова С. А., Парникова А. Г., Ульянова Т. М., Калмычкова О. Ю. Триботехнические и физико-механические свойства нанокompозитов на основе ПТФЭ и оксида алюминия // *Трение и износ.* — 2008. — Т. 29, № 6. — С. 635—639.

31. *Vasilev A. P., Struchkova T. S., Nikiforov L. A., Okhlopko A. A., Cho J. H., Grakovich P. N., Shim E. L.* Mechanical and tribological properties of polytetrafluoroethylene composites with carbon fiber and layered silicate fillers // *Molecules.* — 2019. — Vol. 24, No. 2.

32. *Shelestova V. A., Serafimovich V. V., Grakovich P. N.* The effect of the size of carbon fibers on the physico-mechanical properties of fulvic composites // *Mech. Compos. Mater.* — 2002. — Vol. 38, No.2. — P. 125—130.

33. Кротолин О. В., Машков Ю. К., Кургузова О. А. Создание полимерного антифрикционного нанокompозита на основе политетрафторэтилена с повышенной износостойкостью // *Омский науч. вестн.* — 2013. — № 2 (120). — С. 86—90.

34. Конова Е. М., Острер С. Г., Хатинов С. А. Влияние природы наполнителя на физико-механические свойства радиационных модификаций композитов на основе политетрафторэтилена // Пласт. массы. — 2011. — № 5. — С. 40—43.

35. ГОСТ 4670-2015 (ISO 2039-1:2001). Пластмассы. Определение твердости. Метод вдавливания шарика. — М.: Стандартиформ, 2016. — 10 с.

36. ГОСТ 4651-2014 (ISO 604:2002). Пластмассы. Метод испытания на сжатие. — М.: Стандартиформ, 2014. — 19 с.

37. Гольдман А. Я. Объемная деформация пластмасс. — Л.: Машиностроение, 1984. — 232 с.

Поступила в редакцию 04.08.2021

Окончательный вариант поступил 22.11.2021

Received Aug. 4, 2021 (Nov. 22, 2021)

*Н. А. Абатурова**, *В. А. Ломовской*, *Т. Б. Галушко*, *Н. Ю. Ломовская*

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки, Институт физической химии и электрохимии им. А. Н. Фрумкина РАН 119071, Москва, Россия

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В НАНОКОМПОЗИТНОЙ СИСТЕМЕ ПОЛИВИНИЛОВЫЙ СПИРТ—ЙОД—ЙОДИД КАЛИЯ

*N. A. Abaturova**, *V. A. Lomovskoy*, *T. B. Galushko*, and *N. Yu. Lomovskaya*

RELAXATION PROCESSES IN THE NANOCOMPOSITE POLYVINYL ALCOHOL-IODINE-POTASSIUM IODIDE SYSTEM

Keywords: polyvinyl alcohol, relaxation spectrometry, vitrification, supramolecular structure, nanocomposites.

The dissipative α -relaxation process in PVA films and in the supramolecular composite structure formed during the formation of ordered regions in the PVA-I₂-KI system is studied by a comparative analysis of the internal friction spectra. It is shown that the structural changes in the samples of polyvinyl alcohol that occur with introduction of iodine increases the relaxation microuniformity of the entire system in the temperature range of the α -relaxation process.

Ключевые слова: спирт поливиниловый, спектрометрия релаксационная, стеклование, структура супрамолекулярная, наноккомпозит

Путем сравнительного анализа спектров внутреннего трения исследован диссипативный α -процесс релаксации в пленках поливинилового спирта (ПВС) и в супрамолекулярной композитной структуре, образующейся при формировании упорядоченных областей в системе ПВС—I₂—KI. Показано, что структурные изменения в образцах поливинилового спирта, происходящие при введении йода, вызывают увеличение релаксационной микронеоднородности всей системы в области температур α -процесса релаксации.

*Автор, с которым следует вести переписку: lomovskoy@phyche.ac.ru
Corresponding author: lomovskoy@phyche.ac.ru

Введение

Исследования в области супрамолекулярной химии вызывают значительный интерес и в последнее время интенсивно развиваются. Соединения включения – класс веществ, занимающий промежуточное положение между твердыми растворами внедрения и химическими соединениями. Эти соединения интересны как с практической, так и с теоретической точки зрения [1]. В частности, известно такое соединение включения, которое формируется в водных растворах поливинилового спирта (ПВС) с йодом в составе комплекса $\text{ПВС—I}_2\text{—KI}$. Соединения включения в системе ПВС—йод формируются при внедрении молекул одного индивидуального химического вещества в имеющиеся свободные или образующиеся полости. Такие структуры можно называть нанокompозитами. В [2–4] был сделан вывод о нековалентном характере взаимодействия входящих в состав структуры компонентов.

Как показали исследования методом мало- и широкоугольного рассеяния рентгеновских лучей и компьютерного моделирования для кристаллической структуры комплекса ПВС—йод , полийодные цепочки йода формируются внутри каналов, образуемых закручивающимися в спираль макромолекулами ПВС. Наблюдается несколько стадий образования структуры. Сначала образуется неупорядоченная структура упаковки ионов ПВС—йод (форма I), а затем она развивается в форму II с более или менее регулярно упакованными слоями ПВС—йод , достигая наконец структуры формы III с равномерно расположенными слоями ПВС—йод . Установлено, что процесс формирования кристаллической структуры ПВС—йод происходит по мере обезвоживания студнеобразной системы ПВС—йод . Упорядоченные области образуются при удалении молекул воды, внедренных между полимерными цепями и препятствующих структурообразованию [5–8]. В [9] обнаружено, что на одну молекулу I_2 приходится 24 мономерных звена ПВС, и это составляет два витка спирали. Йод, включенный в макромолекулу полимера, обнаруживает высокий антимикробный эффект. Подобные системы могут представлять интерес как антисептические лекарственные препараты широкого спектра направленного воздействия на живой организм человека и животных [10].

Цель исследования — изучить влияние внедрения молекул йода в ПВС и остаточной воды в системе на образование упорядоченных областей при формировании супрамолекулярной нанокompозитной структуры и на диссипативный процесс, связанный с температурным размягчением сегментов макромолекул.

Объекты и методы исследования

Исследовали ПВС марки Mowiol Kurrary Specialities Europe со степенью гидролиза 88% и молекулярной массой $68 \cdot 10^3$ Да. Раствор полимера готовили из предварительно набухшей в дистиллированной воде навески

с последующим нагреванием в течение нескольких часов до 90 °С при тщательном перемешивании. Пленки готовили путем полива 8% раствора на стеклянную подложку с последующим высушиванием при комнатной температуре до постоянного веса с конечным содержанием воды ~ 4—5%. Из пленок толщиной 0,4 мм вырезали полоски размером 65×5 мм и пропитывали спиртовым раствором йода в присутствии йодида калия в течение 2 ч. Получали студнеобразные образцы, которые подвергались последующему досушиванию с термошкафу при 40 °С в течение часа. Содержание влаги в них ~ 4—7%. Механические свойства подготовленных таким образом образцов исследовали на горизонтальном крутильном маятнике в режиме свободно затухающих колебаний в диапазоне от –150 до 120 °С с шагом нагрева 1 °С, как подробно описано в работе [11]. Таким образом были получены спектры внутреннего трения $\lambda = f(T)$ и температурные зависимости частоты колебательного процесса $\nu = f(T)$. Принцип работы прибора изложен в [12].

Результаты и их обсуждение

В ходе сравнительного анализа спектров внутреннего трения исследовали диссипативный α -процесс релаксации в пленках ПВС и в супрамолекулярной структуре, образующейся при формировании упорядоченных областей в системе ПВС—I₂—KI. Для каждого образца было проведено по три цикла измерений логарифмического декремента затухания $\lambda = f(T)$ и температурной зависимости частоты колебательного процесса $\nu = f(T)$, возбужденного в твердом материале, в диапазоне температур –150—120 °С. После каждого цикла измерения определяли потерю влаги в образце, после чего его снова подвергали нагреванию в приборе. На рис. 1 приведены спектры внутреннего трения и температурно-частотные зависимости образцов ПВС и композитной супрамолекулярной системы ПВС—I₂—KI. Очевидно, что α -процесс релаксации, проявляемый на спектрах внутреннего трения в виде интенсивного диссипативного процесса, а на температурно-частотных зависимостях — в виде дефекта модуля [13, 14], претерпевает существенные изменения при модификации пленок ПВС введением йода в присутствии йодида калия. Эти явления обусловлены изменениями физико-химических свойств материала и отчетливо проявляются в увеличении ширины $\Delta\tau$ непрерывного спектра времен релаксации (таблица).

Изначально содержание остаточной воды в пленках до первого цикла измерения составляло приблизительно 4—7%. При повторных измерениях спектров внутреннего трения в ходе нагревания до 120 °С содержание воды в образцах уменьшалось до 4 и 0,5% по массе, температура $T_{\alpha_{\max}}$ смещалась в сторону повышения. Кроме того, ширина α -пика значительно увеличивалась в образцах ПВС—I₂—KI при каждом последующем цикле (см. рис. 1—в). Подобное расширение пика диссипативных потерь свидетельствует о расширении непрерывного спектра времени релакса-

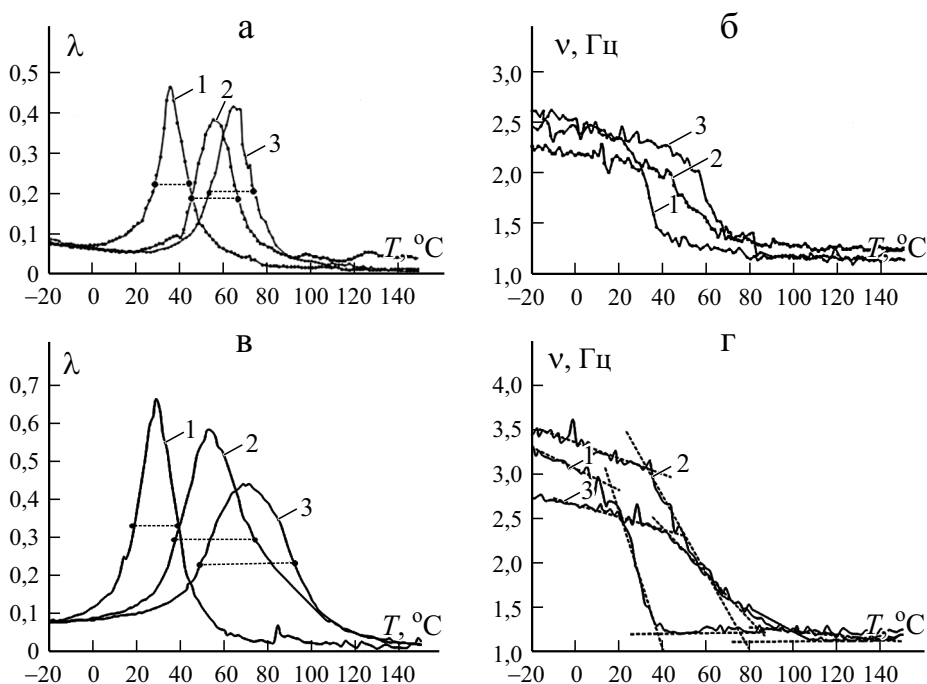


Рис. 1. Спектры внутреннего трения $\lambda = f(T)$ (а, в) и температурно-частотные зависимости $\nu = f(T)$ (б, г) образцов ПВС (а, б) и ПВС—I₂—KI (в, г) в процессе трех циклов измерения (последовательно кривые 1, 2, 3). Точками и штриховыми линиями отмечена полувысота λ ; пересечение штриховых линий на рис. б, г обозначает точки ν_0 и ν_{end} для процессов α -релаксации.

ции, увеличении $\Delta\tau$ при определении этой величины на уровне $\lambda_{\text{max}}/2$ и соответственно релаксационной микронеоднородности в структурной подвижности элементов данного процесса при их стремлении к возврату в положение механического и термодинамического равновесия. Такая неоднородность обусловлена структурированием макромолекул ПВС в присутствии введенного йода при удалении влаги из пленок ПВС в процессе повторного нагревания в ходе эксперимента до 120 °С. По данным рентгеновской спектроскопии, компьютерного моделирования известно, что ПВС образует кристаллические комплексы с ионами йода, в которых линейные ионы I₃⁻ превращаются в столбчатые массивы и связываются с соседними цепями ПВС плоскозигзагообразной конформации посредством переноса заряда между ОН-группами и ионами I₃⁻. Эти процессы происходят именно при удалении воды, молекулы которой, внедряясь между полимерными цепями, препятствуют их упорядочению. В пленке, состоящей из чистого ПВС, эффект существенного расширения области проявления α -пика релаксации не наблюдали (см. рис.1—а и таблицу).

Физико-химические и физико-механические характеристики образцов
ПВС и ПВС—I₂—КІ

Цикл нагрева	Содержание воды в образце, % по массе	$T_{\alpha_{\max}}$, °С	λ_{\max}	$\tau_{\alpha_{\max}}$, с	ΔT при $\lambda = \lambda_{\max}/2$	ν_0	ν_{end}	ΔG	U_{ω} кДж/моль	$\Delta\tau$, с
ПВС										
1	4,5	36	0,46	0,101	15	2,3	1,2	0,73	60,88	0,15
2	4	55	0,44	0,102	21	2,4	1,25	0,73	64,81	0,20
3	0,5	65	0,42	0,105	21	2,3	1,2	0,73	66,69	0,19
ПВС—I ₂ —КІ										
1	7	29	0,66	0,07	19	3,0	1,2	0,84	58,6	0,12
2	4	53	0,59	0,07	38		1,2	0,86	63,2	0,23
3	0,5	70	0,44	0,09	44		1,2	0,79	67,2	0,43

Наиболее широкий спектр времен релаксации характерен для системы ПВС—йод в третьем цикле измерения.

Математическая постановка

Расчет физико-химических характеристик наблюдаемого процесса в рамках феноменологического модельного представления о возникновении локальных диссипативных явлений на спектрах внутреннего трения проведен исходя из модели стандартного линейного тела [15]. Данная модель позволяет описать пик потерь, налагаемый на фон спектра $\lambda = f(T)$, с использованием дифференциального уравнения [16]

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{G_1}{\eta}\sigma = \left[(G_1 + G_2)i\omega + \frac{G_1G_2}{\eta} \right] \gamma_0 e^{i\omega t}, \quad (1)$$

где σ — напряжения, возникающие в системе; G_1 и G_2 — модуль сдвига подсистемы, вызывающей появление пика потерь на спектре $\lambda = f(T)$, и агрегатной формообразующей подсистемы, вызывающей повышение фона диссипативных потерь на спектре $\lambda = f(T)$ соответственно; η — вязкость полимерной подсистемы, вызывающей появление пика потерь; ω — круговая частота колебательного процесса в системе.

Решение дифференциального уравнения для затухающего колебательного процесса приводит к соотношению вида

$$\lambda_i = 2\lambda_{\max} \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad (2)$$

где λ_i и λ_{\max} — текущее и максимальное значения логарифмического

коэффициента затухающего колебательного процесса; $\tau = \frac{\eta}{G_1}$ — время релаксации подсистемы, вызывающей появление пика диссипативных потерь на спектре $\lambda = f(T)$.

Из соотношения (2) следует, что текущее по температуре значение λ_i достигает своего максимума в пике потерь при таком значении температуры, при котором выполняется условие

$$\lambda_i = \lambda_{\max} \text{ при } \omega\tau = 1, \quad (3)$$

где время релаксации есть функция температуры, т.е.

$$\tau_i = \tau_0 \exp \frac{U}{RT_i}, \quad (4)$$

U — энергия активации диссипативного процесса; $\tau_0 \sim 5 \cdot 10^{-12}$ с – теоретическое значение предэкспоненциального коэффициента, характеризующего колебательный процесс релаксирующей частицы на дне потенциальной ямы.

Учитывая связь частоты ω с частотой затухающего колебательного процесса ν в виде $\omega = 2\pi\nu$, из соотношения (3) можно определить время релаксации τ_{\max} в пике локальных диссипативных потерь по соотношению

$$2\pi\nu\tau_{\max} = 1 \rightarrow \tau_{\max} = \frac{1}{2\pi\nu(T=T_{\max})}. \quad (5)$$

Рассчитанные по соотношению (5) дискретные значения времени α -релаксации для изучаемых систем (см. таблицу) показывают некоторое увеличение $\tau_{\alpha_{\max}}$ с проведением трех циклов измерений.

Энергию активации данного процесса возможно определить из аррениусовской зависимости времени релаксации τ от температуры (соотношение 4) с учетом (5) в виде

$$U_{\alpha} = RT_{\max} \ln \frac{\tau_{\alpha_{\max}}}{\tau_0}. \quad (6)$$

Величина энергии активации U_{α} увеличивается для системы ПВС—йод в зависимости от циклов термообработки, коррелируя по изменению с изменениями величины $T_{\alpha_{\max}}$ и τ_{\max} (см. таблицу) и изменением массы остаточной воды в структуре системы.

Таким образом, теоретический анализ пиков локальных диссипативных потерь, обнаруженных на спектрах внутреннего трения, позволяет рассмотреть влияние введения в ПВС молекул йода и рассчитать физико-химические характеристики полученных супрамолекулярных композитных структур.

Кроме того, может быть дана качественная оценка степени релаксационной микро неоднородности α -процесса релаксации в системе ПВС—йод в зависимости как от наличия в структуре молекул йода, так и от трехкратного повторения эксперимента.

Физико-механические характеристики системы ПВС—йод определяем из экспериментальных температурных зависимостей частоты свободно затухающего колебательного процесса, возбужденного в системе ПВС—йод (см. рис. 1—2). Именно эти характеристики позволяют выявить упругую и неупругую реакцию системы на внешнее воздействие, выводящее ее структурно-кинетические элементы системы из состояния механического и термодинамического равновесия. Кроме того, трехкратное нагревание системы в процессе эксперимента позволяет определять изменение температурных интервалов и соотношения упругого и вязкоупругого состояния системы.

В динамическом режиме внешнего воздействия связь между частотой колебательного процесса, возбуждаемого в системе, геометрическими характеристиками образца и модулем сдвига материала образца определяем как [12]

$$v = \frac{1}{4} \left[G \frac{I_a}{l(I_s + 2I)} \right]^{1/2}, \quad (7)$$

где G — модуль сдвига материала; I_a — полярный момент инерции поперечного сечения образца; I_s — полярный момент инерции образца; I — полярный момент инерции колебательной системы устройства; l — длина образца.

В первом приближении температурными изменениями геометрических характеристик образца можно пренебречь ввиду малости их изменений относительно первоначальных значений. В этом случае соотношение (7) можно записать как

$$G \approx k_1 v^2, \quad (8)$$

где $k_1 = \frac{I_a}{16l(I_s + 2I)}$ — постоянный коэффициент.

Температурная зависимость модуля сдвига $G(T)$ должна быть линейной (для образца в кристаллическом состоянии) и повышение температуры на 100 °С соответствует снижению модуля G на 2—4% [17]. В этом случае и частота v является функцией температуры, т.е. $v = f(T) = v(T)$ и будет изменяться пропорционально температурному изменению модуля $G(T)$, т.е.

$$G(T)k_2 \equiv v^2(T)k_1, \quad (9)$$

где k_1 и k_2 — постоянные коэффициенты.

В безразмерной относительной форме соотношение (9) может быть представлено в виде

$$\frac{k_2 G_i(T_i)}{k_2 G_0(T_0)} = \frac{k_1 v_i^2(T_i)}{k_1 v_0^2(T_0)} \Rightarrow \Delta G(T) \approx \Delta v^2(T), \quad (10)$$

где $G_i(T_i)$ и $v_i^2(T_i)$ — текущее по температуре T_i значение модуля сдвига G_i и квадрата частоты v_i^2 ; $G_0(T_0)$ и $v_0^2(T_0)$ — начальные значения при выбранной температуре T_0 .

Таким образом, температурное изменение частоты ν колебательного процесса, возбужденного в образце, позволяет определить и температурное изменение модуля сдвига G материала, из которого изготовлен образец.

Однако экспериментальные данные (см. рис. 1) показывают, что в определенных температурных интервалах, где на спектре $\lambda = f(T)$ (см. рис. 1—а, в) наблюдаются пики диссипативных потерь, частота ν (см. рис. 1—б, г) на температурной зависимости $\nu = f(T)$, а следовательно, и значения модуля G отклоняются от пропорциональной температурной зависимости. Это отклонение, или дефект модуля, определяем как

$$\Delta G(T) = \frac{G_0(T_0) - G_i(T_i)}{G_0(T_0)} = \frac{v_0^2(T_0) - v_i^2(T_i)}{v_0^2(T_0)}. \quad (11)$$

Рассчитанные величины $\Delta G(T)$ для системы ПВС— I_2 (см. таблицу) показывают повышенные значения по сравнению со значениями чистого ПВС при одновременном расширении температурного интервала ΔT на половине высоты пика потерь $\lambda = \lambda_{\max} / 2$ (рис. 2). Повышение значений ΔT также качественно указывает на увеличение релаксационной микро-

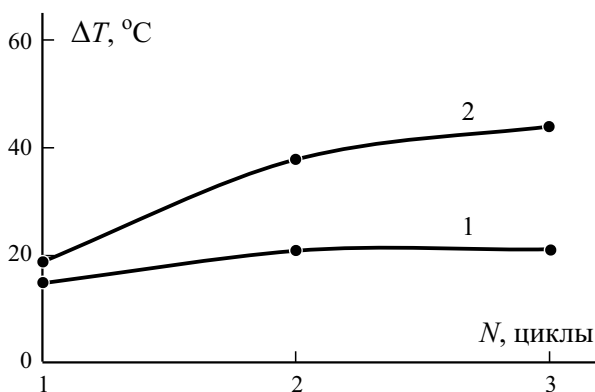


Рис. 2. Температурная область проявления α-пика релаксации ΔT на высоте $\lambda / 2$ в процессе трех циклов измерения для образцов ПВС (1) и для композитной структуры ПВС— I_2 —КІ (2).

неоднородности диссипативного α -процесса при увеличении циклов термообработки.

Для количественного описания увеличения релаксационной микронеоднородности процесса необходимо рассчитать изменение непрерывного спектра времен релаксации $H(\tau)$, исходя из полученных физико-химических и физико-механических характеристик процесса в данной системе. Расчет величины $H(\tau)$ возможно провести несколькими методами:

1 — расчет температурной зависимости времени релаксации по аррениусовскому соотношению (4) и определение величины абсолютного времени релаксации $\Delta\tau$, соответствующего интервалу температур ΔT для пика потерь на спектре $\lambda = f(T)$;

2 — определение вида функции, описывающей температурное изменение дефекта модуля и используемой в качестве ядра релаксации в уравнении наследственной вязкоупругости Больцмана—Вольтерра;

3 — теоретический расчет приведенных зависимостей для разных значений ширины непрерывного спектра времен релаксации $H(\tau)$ и сопоставление этих кривых с экспериментальными данными.

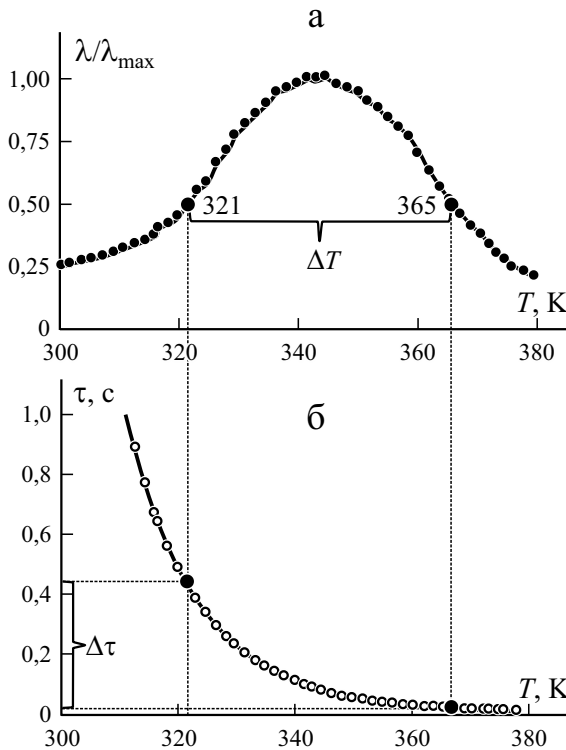


Рис. 3. Приведенный спектр внутреннего трения (а) и спектр времен релаксации (б) на полувысоте α -пика при третьем цикле измерения образца композитной системы ПВС— I_2 —KI.

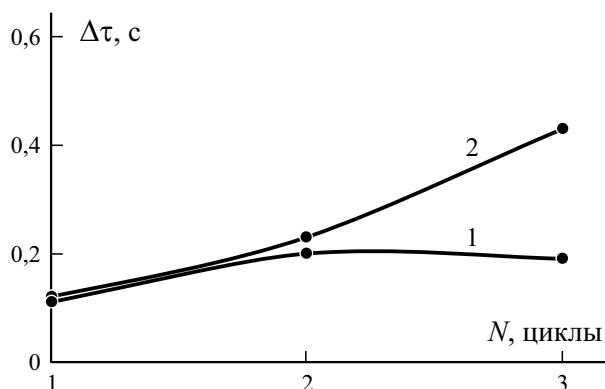


Рис. 4. Изменение времени релаксации $\Delta\tau$ для ПВХ (1) и для системы ПВХ— I_2 —KI (2) в процессе трех циклов измерения.

Во втором и третьем случаях требуется определение аналитического вида функции релаксации, удовлетворяющей требованиям её применения в динамическом режиме в широком частотном диапазоне внешних воздействий, выводящих структурные элементы исследуемой системы из равновесного состояния.

В данной работе рассмотрен первый случай. Рассчитано $\Delta\tau = f(\Delta T)$ для системы чистый ПВХ и ПВХ—йод с разным количеством циклов термообработки (см. таблицу). На рис. 3 приведен пример определения релаксационной микронеоднородности α -процесса релаксации по спектрам внутреннего трения (а) и температурной зависимости времени релаксации (б) для третьего цикла нагрева образца ПВХ—йод на полувысоте α -пика $\lambda/2$. Результаты расчетов можно видеть в таблице и на рис. 4. Обнаружено значительное расширение области времен релаксации $\Delta\tau$ для системы, содержащей йод, тогда как для пленки из чистого ПВХ увеличение $\Delta\tau$ не наблюдали.

Заключение

Полученные экспериментальные результаты и математические расчеты количественно показывают расширение $\Delta\tau$ спектра времени релаксации с каждым циклом термообработки, т.е. циклическое температурное воздействие на систему ПВХ—йод приводит к структурным изменениям в этой системе. Структурные изменения вызывают увеличение релаксационной микронеоднородности всей системы в области температур α -процесса релаксации.

Работа выполнена в рамках государственного задания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лен Ж.-М. Супрамолекулярная химия. Концепции и перспективы. — Новосибирск.: Наука, 1998. — 334 с.
2. Гойхман А. Ш., Соломко В. П. Высокомолекулярные соединения. — Киев: Наукова думка, 1982. — 192 с.
3. Година Д. А., Файерман Г. П. Спектры поглощения водных растворов йодополивинилбората // Журн. общ. химии. — 1967. — Т. 37, № 4. — С. 945—950.
4. Божко Н. Н., Столяров В. П., Волков В. В., Назаров В. Г. Мононити на основе поливинилового спирта, допированные йодом // Перспектив. материалы. — 2013. — № 3. — С. 35—40.
5. Tashiro K., Kusaka K., Yamamoto H. et al. Introduction of disorder in the crystal structures of atactic poly(vinyl alcohol) and its iodine complex to solve a dilemma between X-ray and neutron diffraction data analyses // *Macromolecules*. — 2020. — Vol. 53, No. 15. — P. 6656—6671.
6. Tashiro K., Kitai H., Saharin M. S., Shimazu A., and Itou T. Quantitative crystal structure analysis of poly(vinyl alcohol)–iodine complexes on the basis of 2D X-ray diffraction, Raman spectra, and computer simulation techniques // *Macromolecules*. — 2015. — Vol. 48, — P. 2138—2148.
7. Zhang R., Zhang Q., Ji Y. et al. Stretch-induced complexation reaction between poly(vinyl alcohol) and iodine: an in situ synchrotron radiation small- and wide-angle X-ray scattering study // *Soft Matter*. — 2018. — Vol. 13, No. 14 — P. 2535—2546.
8. Божко Н. Н., Столяров В. П., Баблюк Е. Б., Назаров В. Г., Волков В. В., Амаронтов С. В., Дембо К. А. Исследование структурообразования в системах поливинилового спирта—йодид калия—йод методом малоуглового рентгеновского рассеяния // *Высокомолекуляр. соединения. Сер. А*. — 2011. — Т. 53, № 9. — С.1537—1541.
9. Zwick M. M. Poly(vinylalcohol)-iodine complex // *J. Appl. Polym. Sci.* — 1966. — Vol. 9, No. 7. — P. 2393—2424.
10. Kida D., Gladysz O., Szulc M., Zborowski Ja., Junka A., Janeczek M., Lipińska A., Skalec A., and Karolewicz B. Development and evaluation of a polyvinylalcohol-cellulose derivative-based film with povidone-iodine predicted for wound treatment // *Polymers*. — 2020. — Vol. 12. — P.1271—1271.
11. Lomovskoy V. A., Abaturova N. A., Lomovskaya N. Y., Khlebnikova O. A., Galushko T. B. Areas of local inelasticity and relaxation phenomena in poly(vinyl formal) // *Polym. Sci. Ser. A*. — 2018.— Vol. 60, No. 3. — P. 284—289.
12. Lomovskoy V. A., Abaturova N. A., Lomovskaya N. Yu., Galushko T. B. effect of the ratio of components in a polyvinyl alcohol-chitosan composite on the temperature range of its inelasticity // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 56, No. 1 — P. 27—38.
13. Ломовской В. А. Устройство для исследования локальных диссипативных процессов в твердых материалах различной химической природы // *Науч. приборостроение*. — 2019. — Т. 29, №1. — С. 33—46.
14. Lomovskoy V. A., Nekrasova N. V., Lomovskaya N. Yu., Khlebnikova O. A., Abaturova N. A., Galushko T. B., Gorbunov M. A. Microwave irradiation on the microinhomogeneity of α -relaxation processes in polyvinyl alcohol // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 56, No. 5. — С. 685—694.
15. Тавадзе Ф. М., Постникова В. Н., Гордиенко Л. К. Механизм внутреннего трения в твердых телах. — М.: Наука, 1976. — 256 с.

16. *Гольдберг И. И.* Механическое поведение полимерных материалов (математическое описание). — М.: Химия, 1970. — 192 с.

17. Физическая энциклопедия. Т. 3. — М.: Науч. изд-во “Большая Российская энциклопедия”, 1992. — С. 176—177.

Поступила в редакцию 02.06.2021

Окончательный вариант поступил 25.10.2021

Received June 2, 2021 (Oct. 25, 2021)

*М. Б. Аликин, К. Д. Алексеева, Д. А. Панфилов, И. М. Дворко, Н. А. Лавров**

Санкт-Петербургский государственный технологический институт (Технический университет), Россия

СВОЙСТВА ЭПОКСИДНЫХ КОМПОЗИЦИЙ, ОТВЕРЖДЕННЫХ ПРОДУКТАМИ АМИНОЛИЗА ВТОРИЧНЫХ ПОЛИЭТИЛЕНТЕРЕФТАЛАТА И ПОЛИКАРБОНАТА

*M. B. Alikin, K. D. Alekseeva, D. A. Panfilov, I. M. Dvorko, N. A. Lavrov**

THE PROPERTIES OF EPOXY COMPOSITIONS CURED BY AMINOLYTIC SPLITTING PRODUCTS OF A SECONDARY POLYETHYLENE TEREPHTHALATE AND POLYCARBONATE

Keywords: curing, modification, epoxy, structural composites, rheology

Epoxy compositions cured by products of the reaction of aminolysis splitting from secondary polyethylene terephthalate and polycarbonate (household waste) with polyethylene polyamine (PEPA) were studied. The oligomers developed were used as crosslinking agents of an ED-20 epoxyDiane resin for studying its physicochemical properties. The change in viscosity during the curing of thermosetting resin was analyzed, and some its kinetic parameters were found. The thermophysical and mechanical properties of the cured materials were determined, and the optimal content of the hardener in the composition was established. The population of data pointed to the expediency of using PET and PC household waste to produce oligomers by the aminolysis splitting reaction. The use of them as hardeners can increase the physical and mechanical properties of structural materials. The materials developed have demonstrated improvements in the elasticity parameters, the ultimate strength in static bending and compression, the Brinell hardness, and the shear stress.

*Автор, с которым следует вести переписку: Lna@lti-gti.ru
Corresponding author: Lna@lti-gti.ru

Ключевые слова: отверждение, модификация, эпоксид, композит конструкционный, реология

Исследовали эпоксидные композиции, отвержденные олигомерами, полученными реакцией аминолита из вторичных полиэтилентерефталата (ПЭТ) и поликарбоната (ПК) (бытовые отходы) с полиэтиленполиамином (ПЭПА). Для изучения физико-химических свойств разработанные олигомеры использовали в качестве сшивающих агентов эпоксидно-диановой смолы марки ЭД-20. Проведен анализ изменения вязкости в процессе отверждения терморезактивной смолы, определены некоторые кинетические параметры, теплофизические и механические свойства отвержденных материалов, оптимальное содержание отвердителя в композиции. Совокупность данных указывает на целесообразность использования бытовых отходов ПЭТ и ПК для получения олигомеров реакцией аминолита, их применение в качестве отвердителей позволяет повысить физико-механические свойства конструкционных материалов. Разработанные материалы демонстрируют улучшение свойств по следующим параметрам: упругости, пределу прочности при статическом изгибе и сжатии, твердости по Бринеллю и сдвиговому напряжению.

Введение

Полиэтилентерефталат (ПЭТ) и поликарбонат (ПК) — полимеры, с каждым годом набирающие популярность в областях непосредственного применения, что влечет за собой увеличение объемов их производства, а значит, и количество отходов.

Состояние с переработкой или утилизацией полимеров в мире неоднозначно. Так, в некоторых странах ЕС (Австрии, Германии, Голландии, Швеции) и Швейцарии до 40% полимерных отходов перерабатываются в качестве вторичного сырья, а 60% используются как дополнительные источники энергии [1]. Однако не все страны располагают необходимыми современными технологиями переработки и утилизации вторичного сырья. В нашей стране задачи высокоэффективной переработки отходов как вторичного сырья решены в недостаточной степени. И если в отношении вторичного ПЭТ достаточно давно известны различные способы переработки и возвращения в цикл производства, то в случае ПК таких методов либо нет, либо они находятся в статусе “перспективных”, не имеющих широкого применения [2—4].

Особенности строения и простота химической переработки этих полимеров позволяют получать ценные продукты [5, 6], которым можно найти применение во многих областях промышленности, строительства и т.д. [7—9]. В настоящей работе изучали реакцию аминолита ПЭТ и ПК с промышленным алифатическим амином — полиэтиленполиамином

(ПЭПА) с целью получения олигомеров. Подтверждено, что встраивание фрагментов ПЭТ и ПК в структуру полимера приводит к увеличению меж-узлового пространства макромолекул и росту их гибкости, что положительно сказывается на эксплуатационных характеристиках отвержденных эпоксидных смол. Использовали эпоксидно-диановую смолу марки ЭД-20 ввиду ее доступности, хороших свойств, приемлемой вязкости и широкой применимости [10].

Для достижения цели и решения задач исследования был осуществлен процесс переэтерификации бытовых отходов ПЭТ и ПК с алифатическим амином (продукты реакции могут быть применены как отвердители эпоксидных смол [11]), изучены физико-механические и технологические свойства материалов, проведено сравнение свойств модифицированных материалов с материалами на основе промышленного отвердителя, подобраны оптимальные соотношения смола—отвердитель.

Применение продуктов аминолита вторичных ПЭТ и ПК в качестве отвердителей эпоксидных смол может стать интересным направлением их переработки, позволяющим не только обратить внимание на не использование этих полезных ресурсов при их захоронении на полигонах твёрдых бытовых отходов, но и улучшить физико-механические и технологические свойства получаемых конструкционных материалов.

Экспериментальная часть

Материалы и реактивы. Основа композиций — эпоксидно-диановая смола марки ЭД-20 (Chimex Ltd, Россия), представляющая собой жидкий реакционноспособный олигомерный продукт на основе диглицидилового эфира дифенилолпропана. Это вязкая прозрачная жидкость без видимых механических включений: молекулярная масса 390–430, эпоксидный эквивалент 196–216 г/экв, динамическая вязкость 13–20 Па·с, плотность при комнатной температуре 1166 кг/м³. В качестве промышленного отвердителя использовали ПЭПА (далее ПА, Chimex Ltd, Россия) — жидкость от светло-желтого до темно-бурого цвета без механических включений: молекулярная масса 230–250, аминное число 1250 (мг КОН)/(г вещества), динамическая вязкость 0,25 Па·с, плотность при комнатной температуре 1017 кг/м³. Олигомер-отвердитель ПА-Т получен посредством реакции аминолита ПЭТ алифатическим амином, а ПА-ПК — аминолитом ПК. Эти продукты представляют собой вязкие жидкости от темно-коричневого до темно-зеленого цвета с резким аминным запахом, содержат реакционноспособные аминогруппы, способные реагировать с эпоксидными группами смолы с образованием пространственно сшитого полимера плотностью 1150–1180 кг/м³.

Методики испытаний. *Содержание отвердителей в композициях* от минимального к максимально допустимому выбирали исходя из стехиометрического соотношения смолы и отвердителя, определяемого

эпоксидным эквивалентом смолы и аминным эквивалентом отвердителя [10]. Расчеты производили по следующим формулам:

— для эквивалентной массы EW_e , г/экв (equivalent weight) эпоксидной смолы —

$$EW_e = \frac{43 \cdot 100}{M_{eg}}, \quad (1)$$

где 43 — молекулярная масса эпокси-группы; M_{eg} — массовая доля эпоксидных групп, %;

— для эквивалентной массы амина EW_a , г/экв, —

$$EW_a = \frac{MM}{H}, \quad (2)$$

где MM — молекулярная масса амина; H — количество активных атомов водорода;

— для необходимого количества отвердителя K_{amin} —

$$K_{amin} = \frac{EW_a \cdot 100}{EW_e}, \quad (3)$$

где K_{amin} — количество амина на 100 мас.ч. эпоксидной смолы, мас.ч.

Для расчета эквивалентной массы отвердителя EW_h воспользуемся формулой для определения EW_{mixt} смеси его составляющих:

$$EW_h = \frac{M}{\left(\frac{M_A}{EW_A} + \frac{M_B}{EW_B} + \frac{M_C}{EW_C} + \frac{M_D}{EW_D} + \frac{M_E}{EW_E} \right)} \quad (4)$$

где M — общая масса отвердителей, г; M_A , M_B , M_C , M_D , M_E — доли А, В, С, D и Е в отвердителе соответственно, мас.ч.

По формуле (4), путем поочередного приравнивания всех компонентов, кроме одного, нулю, был рассчитан диапазон содержания отвердителя в композиции: для ПА — от 10 до 16 мас.ч., для ПА-Г — от 12 до 15 мас.ч., для ПА-ПК — от 13 до 16 мас.ч.

Инфракрасная спектроскопия с преобразованием Фурье. Было установлено строение синтезируемых олигомеров методом ИК Фурье-спектроскопии на ИК Фурье-спектрометре Shimadzu IRTAcser-100 в спектральном диапазоне 4000—500 см^{-1} при комнатной температуре в соответствии с ASTM E1252-98 (2013)e1 и ASTM E334-01 (2013).

Динамическую вязкость измеряли в соответствии с ISO 6721-10:2015 на реометре Anton Paar PHYSICA MCR 302 с измерительной ячейкой типа плоскость—плоскость при постоянной скорости сдвига 1 с^{-1} при 50 и 75 °С. Полученные данные использовали для расчета энергии активации отверждения (E_a , кДж/моль), определяемой по тангенсу угла наклона

линеаризованных зависимостей $\ln(\tau_{\text{gel}}) — f(1/T)$. Для таких зависимостей можно представить функции вида $y = kx + b$, их описывающие, где k — угловой коэффициент прямой, численно равный тангенсу угла между осью абсцисс и этой прямой (в данном случае величиной E_a/R). Тогда при умножении коэффициента k в каждой из зависимостей на универсальную газовую постоянную R можно закономерно определить энергию активации.

Определение аминного числа AV (amine value) основано на титровании спиртового раствора отвердителя водным раствором соляной кислоты. Навеску амина массой $(0,6000 \pm 0,05)$ г помещают в коническую колбу и растворяют в 20 см^3 изопропилового спирта. Добавляют пять—шесть капель индикатора бромкрезолового зеленого и титруют до перехода окраски в желтый цвет.

AV (мг·KOH/г) определяют по формуле

$$AV = \frac{V \cdot K \cdot 28,05}{m}, \quad (5)$$

где V — объем соляной кислоты концентрации $0,5 \text{ моль/дм}^3$, израсходованной на титрование; $28,05$ — количество KOH, соответствующее 1 см^3 соляной кислоты концентрации точно $0,5 \text{ моль/дм}^3$; K — поправочный коэффициент к раствору соляной кислоты концентрации $0,5 \text{ моль/дм}^3$; m — масса отвердителя, г.

Экстрактивный гравиметрический анализ. Гель-золь анализ осуществляли посредством экстракции ацетоном неотвержденных продуктов в аппарате Сокслета в температурном диапазоне $65—75 \text{ }^\circ\text{C}$ в течение 8 ч; определено содержание гель-фракции (G , %).

Механические испытания. Твердость (H_B , МПа), упругость (E , %) и пластичность (P , %) материалов определяли методом Бринелля в соответствии с ISO 2039–1:2001 на твердомере Бринелля при одинаковой нагрузке 50 кгс. Деформационно-прочностные свойства полимерных материалов при статическом изгибе σ_b , МПа, растягивающем усилии τ_{sh} , МПа, и сжатии σ_c , МПа, определяли на универсальной испытательной машине Shimadzu AG-X Plus при скорости нагружения 10 мм/мин по ISO 178:2019, ASTM D5868-01(2014) и ISO 604:2002 соответственно.

Термомеханический анализ (ТМА) осуществляли на модифицированном консисометре Хепплера при нагрузке $111,8 \text{ Н}$ и скорости нагревания 2 град/мин в соответствии с ISO 604:2002 (Part 2). По термомеханическим свойствам полимеров и их температуре стеклования (T_g , $^\circ\text{C}$) определены молекулярная масса кинетического сегмента цепи (M_n , кг/кмоль) и плотность структурной сетки (N_n , кмоль/ м^3), рассчитан модуль высокоэластичности (rubber elasticity) (E_r , МПа) [12]:

$$M_n = \gamma \frac{3\rho RT}{E_r}, \quad (6)$$

$$E_{\Gamma} = \frac{F \varepsilon_0}{S \Delta \varepsilon}, \quad (7)$$

$$N_n = \frac{\rho}{M_n}, \quad (8)$$

где S — площадь сечения образца, см^2 ; ε_0 — начальная высота образца, мм; ρ — плотность образца, $\text{г}/\text{см}^3$; F — нагрузка на образец, кгс; $\Delta \varepsilon$ — высокоэластическая деформация, мм; T — начальная температура высокоэластического состояния, К; R — газовая постоянная, равная $84,8 \text{ (кгс}\cdot\text{см)} / (\text{моль}\cdot\text{К)}$; $\gamma = 1$.

Результаты и обсуждение

Предполагали, что при совмещении ПЭПА с ПЭТ и ПК идет реакция аминолита, в результате которой происходит встраивание фрагментов деструктурированных полимеров в цепи полиаминного отвердителя. Характеристические пики, отвечающие за колебания групп в полученных соединениях охарактеризованы методом ИК-спектроскопии.

На рис. 1 представлены зависимости интенсивности пропущенного через образцы инфракрасного излучения I от частоты ν . Из данных рис. 1—*a* можно сделать вывод о том, что реакции аминолита протекают по сложноэфирной группе, а на спектре продукта реакции (ПА-Т) наблюдаются характеристические пики карбонильной группы, связанной с первичным амином (1646 см^{-1}), и амидной группы (1554 см^{-1}). Сохранились пики первичной аминогруппы ($3363\text{—}3280 \text{ см}^{-1}$), что объясняет реакционную способность полученного олигомера по отношению к эпоксидным группам.

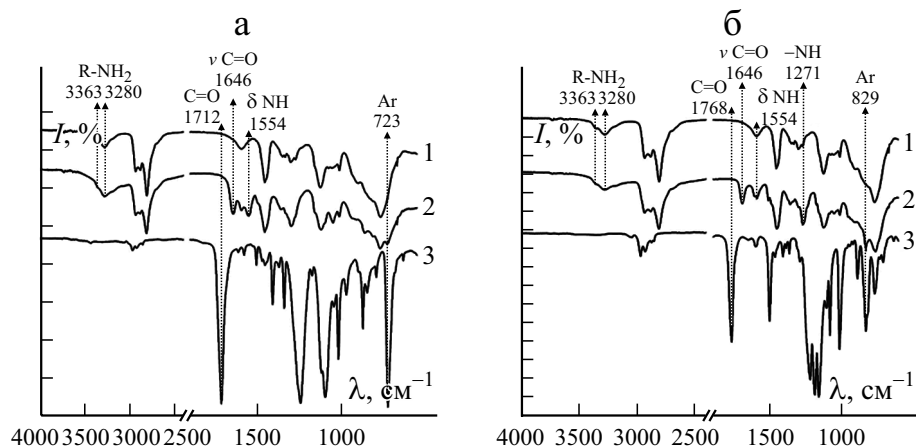


Рис. 1. ИК-спектры для ПА (1); ПА-Т (2); ПЭТ (3) (а) и ПА (1), ПА-ПК (2); ПК (3) (б).

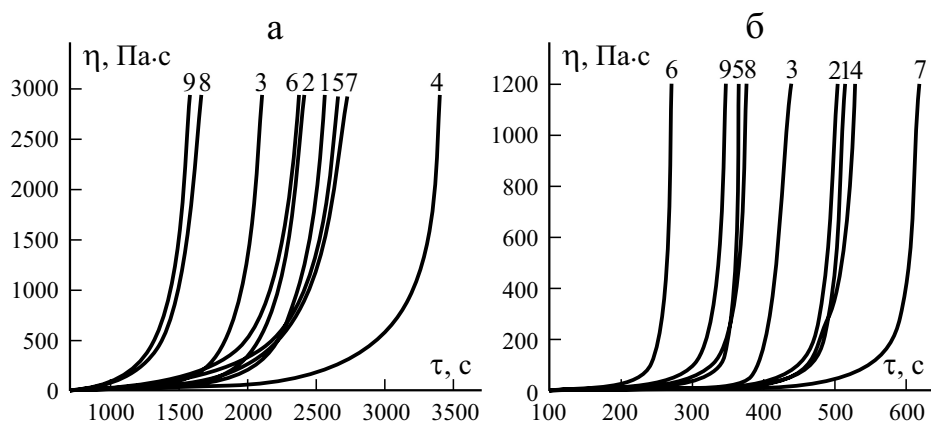


Рис. 2. Зависимость вязкости η от времени отверждения τ при 50 (а) и 75 °С (б) для композиций с содержанием отвердителя (мас.ч.) ПА 10 (1); ПА 12 (2); ПА 16 (3); ПА-Т 10 (4); ПА-Т 14 (5); ПА-Т 16 (6); ПА-ПК 10 (7); ПА-ПК 15 (8); ПА-ПК 16 (9).

Как видно из данных рис. 1—б, полоса испускания при 1768 см^{-1} в спектре ПК, соответствующая валентным колебаниям группы $\text{C}=\text{O}$ в $\text{Ar}-\text{O}-\text{C}(\text{O})-\text{O}-\text{Ar}$ карбонатах, полностью отсутствует в спектре ПА-ПК, что указывает на разрушение сложноэфирных связей в ПК. Также можно заметить полосу испускания при 1271 см^{-1} в спектре ПА-ПК, соответствующую колебаниям в первичном ароматическом амине, и полосу амидной группы (1554 см^{-1}). Появление амидной группы указывает на протекание реакции переэтерификации, представляющей собой аминолитическое расщепление цепей вторичного ПЭТ и ПК в результате нуклеофильной атаки преимущественно первичных аминогрупп на сложноэфирную связь, что приводит к образованию олигомеров и низкомолекулярных соединений.

Важной характеристикой амидных соединений является их аминное число AV . Увеличение доли вторичных ПЭТ и ПК по отношению к ПЭПА ведёт к постепенному убыванию AV с 1220 до 980 мг $\text{KOH}/\text{г}$ для ПА-Т и с 1220 до 870 мг $\text{KOH}/\text{г}$ для ПА-ПК. Причиной этого является процесс переэтерификации.

Энергию активации определяли, измеряя динамическую вязкость при помощи реометра. Измерения проводили для композиции с минимальным (10 мас.ч. отвердителя на 100 мас.ч. смолы), оптимальным (12 мас.ч. для ПА, 14 мас.ч. для ПА-Т и 15 мас.ч. для ПА-ПК) и максимальным (16 мас.ч. отвердителя) соотношением при 50 и 75 °С. По результатам измерений для каждой композиции были построены зависимости вязкости η от времени гелеобразования τ (рис. 2), $\ln(\tau_{\text{gel}}) - f(1/T)$ (рис. 3) и обратной вязкости от времени гелеобразования (рис. 4).

Изучение динамической вязкости композиций при 50 и 75 °С позволило построить зависимости, демонстрирующие, в какой момент времени

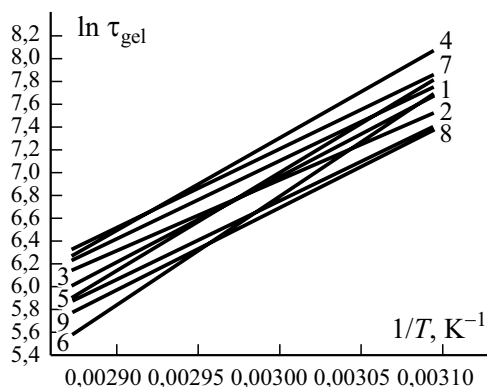


Рис. 3. Линеаризованная зависимость $\ln(\tau_{gel})$ от величины $1/T$ эпоксидных композиций с содержанием отвердителя (мас.ч.) ПА 10 (1); ПА 12 (2); ПА 16 (3); ПА-Т 10 (4); ПА-Т 14 (5); ПА-Т 16 (6); ПА-ПК 10 (7); ПА-ПК 15 (8); ПА-ПК 16 (9).

достигается максимальная вязкость, т.е. наступает момент гелеобразования той или иной композиции.

Данные об энергии активации отверждения и предела прочности для всех образцов приведены в табл. 1.

Полученные усредненные термомеханические кривые (ТМК) для оптимальных точек содержания отвердителей в композиции представлены на рис. 5.

Стоит упомянуть, что ТМК изучаемых образцов не совсем соответствуют ТМК, присущим типичным сетчатым полимерам; полученные кривые имеют четко выраженное “плато” высокоэластического состояния,

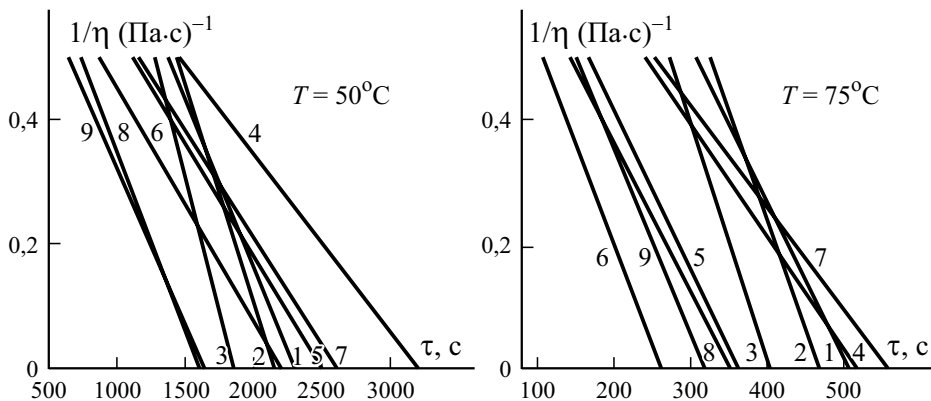


Рис. 4. Зависимость обратной вязкости $1/\eta$ от времени гелеобразования τ для эпоксидных композиций с содержанием отвердителя (мас.ч.) ПА 10 (1); ПА 12 (2); ПА 16 (3); ПА-Т 10 (4); ПА-Т 14 (5); ПА-Т 16 (6); ПА-ПК 10 (7); ПА-ПК 15 (8) и ПА-ПК 16 (9).

Табл. 1

Физико-механические и эксплуатационные свойства полученных материалов на основе ПА, ПА-Т и ПА-ПК

Отвердитель	Содержание, мас.ч.	H_B , МПа	E , %	σ_b	τ_{sh}	σ_{com}
				МПа		
ПА	10	135±6,8	86,7±0,7	54,7±2,4	3,7±0,4	106±5,3
	12	138±5,8	80,8±0,4	70,7±2,2	4,7±0,3	113±4,7
	14	143±7,9	83,7±0,8	68,3±1,2	3,6±0,3	109±6,0
	16	125±8,4	87,2±0,5	65,2±2,1	2,8±0,1	107±7,2
ПА-Т	12	145±4,6	94,9±0,2	76,4±0,6	3,3±0,2	92±2,9
	13	137±6,0	93,7±0,4	75,1±1,2	4,7±0,4	94±4,1
	14	138±5,4	96,2±0,4	73,8±1,7	5,1±0,3	97±3,8
ПА-ПК	15	134±9,4	96,0±0,3	69,8±0,9	3,4±0,2	93±6,5
	13	166±9,1	95,2±0,5	70,4±1,5	3,1±0,2	90±5,0
	14	174±7,7	93,7±0,8	72,7±1,2	4,3±0,4	95±4,2
	15	159±5,7	88,5±0,4	76,8±2,4	5,0±0,5	104±3,7
	16	144±4,2	96,6±0,4	62,9±0,7	3,3±0,5	102±3,0

которое характерно для аморфных термопластов, а не для реактопластов. Данный факт объясняется тем, что получаемый полимер обладает редкосшитой структурой, что позволяет частично сохранить подвижность межузловых сегментов цепи.

При помощи полученных данных и построенных ТМК можно рассчитать молекулярную массу подвижного сегмента цепи, модуль высокоэластичности и плотность сшивки по формулам (5)—(7).

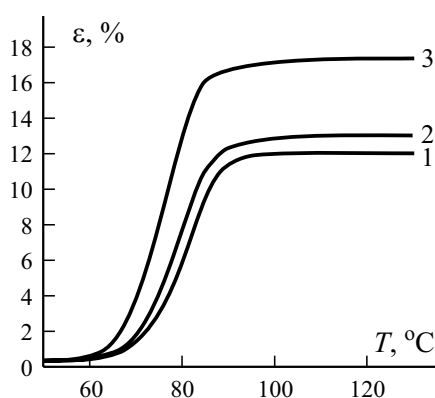


Рис. 5. Зависимость деформации образца ε от температуры T . ТМК оптимальных точек эпоксикомпозиций с содержанием ПА 12 (1); ПА-Т 14 (2); ПА-ПК 15 мас.ч. (3).

Табл. 2

Теплофизические и физико-химические свойства полученных материалов на основе ПА, ПА-Т и ПА-ПК

Отвердитель	Содержание, мас. ч.	E_a , кДж/моль	T_g , °C	G , %	$N_c \cdot 10^3$, кмоль/м ³	M_n , кг/кмоль
ПА	10	51,4±0,1	74-79	82,9±0,2	1,27±0,16	940±83
	12	55,9±0,1	76-82	93,9±0,2	1,26±0,09	950±48
	14	59,1±0,1	84-90	93,0±0,2	1,40±0,11	856±43
	16	62,0±0,1	92-96	89,9±0,2	1,61±0,26	744±80
ПА-Т	12	67,8±0,2	74-78	88,2±0,2	0,98±0,06	1229±53
	13	70,2±0,1	80-83	87,1±0,2	1,22±0,11	1010±64
	14	71,9±0,2	82-84	86,9±0,2	1,14±0,05	1059±32
	15	78,6±0,1	85-87	88,7±0,2	1,22±0,09	989±51
ПА-ПК	13	56,8±0,2	67-72	88,7±0,2	0,76±0,03	1590±44
	14	57,2±0,3	74-78	89,1±0,2	0,78±0,08	1553±112
	15	59,1±0,2	79-81	88,9±0,2	0,85±0,15	1425±62
	16	60,3±0,1	82-84	89,0±0,2	0,97±0,23	1248±95

Данные о температурах стеклования и результаты расчётов для всех исследуемых образцов приведены в табл. 2.

Введение в состав композиции фрагментов деструктурированных ПЭТ и ПК в целом положительно отразилось на значениях максимальных изгибающих и сдвиговых напряжений, а также закономерно снизило предел прочности при сжатии, что объясняется ростом гибкости макромолекул полимера при использовании ПА-Т и ПА-ПК, из которой следует увеличение упругости материала.

Вывод

Синтезированы новые отвердители — олигомеры на основе продуктов деструкции вторичных ПЭТ и ПК, изучены их химические и физические свойства, а также материалов на их основе, и оптимизировано содержание ПА, ПА-Т и ПА-ПК в составе эпоксидных композиций.

Полученные данные о молекулярной массе кинетического сегмента цепи, плотности шивки, температуре стеклования отвержденных образцов и результаты ИК-спектроскопии доказывают встраивание фрагментов деструктурированных ПЭТ и ПК в структуру полимера.

Значения гель-фракции в композициях независимо от применяемого отвердителя согласуются с расчетными значениями энергии активации, из чего следует, что введение фрагментов деструктурированных ПЭТ и ПК

в структуру композиции не оказывает негативного влияния на качество процесса отверждения.

С учетом данных табл. 1, 2 можно сделать вывод о том, что оптимальное соотношение отвердитель—смола будут 12 мас.ч. ПА, 14 мас.ч. ПА-Т, 15 мас.ч. ПА-ПК на 100 мас.ч. эпоксидной смолы. Материалы с таким соотношением в случае ПА-Т и ПА-ПК по сравнению с ПА демонстрируют улучшение свойств по таким параметрам, как упругость, предел прочности при статическом изгибе, твердость по Бринеллю и сдвиговое напряжение.

Таким образом, можно утверждать, что использование вторичных ПЭТ и ПК в качестве модификаторов отвердителей целесообразно, поскольку является перспективным способом переработки бытовых отходов, характеризующимся простотой синтеза, а также дешевизной и доступностью исходных компонентов и позволяющим повысить физико-механические свойства конструкционных материалов на основе эпоксидных смол.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20–33–90147 и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (госзадание 0785.00.X6019).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jiun Y. L.* Effects of recycling cycle on used thermoplastic polymer and thermoplastic elastomer polymer // *J. Polym. Compos.* — 2016. — Vol. 24, No. 9. — P. 735–740.
2. *Westhues S.* Molecular catalyst systems as key enablers for tailored polyesters and polycarbonate recycling concepts // *J. Sci. Adv.* — 2018. — Vol. 4, No. 8. — P. eaat9669.
3. *Kim J. G.* Chemical recycling of poly(bisphenol A carbonate) // *J. R. Soc. Chem.* — 2020. — No. 11. — P. 4830-4849.
4. *Bhogle C. S.* Ultrasound assisted methanolysis of polycarbonate at room temperature // *J. Ultrason. Sonochem.* — 2019. — No. 58. — P. 104667.
5. *Thiounn T.* Advances and approaches for chemical recycling of plastic waste // *J. Polym. Sustainability.* — 2020. — Vol. 58, No. 10. — P. 1347-1364
6. *Grigore M. E.* Methods of Recycling, Properties and Applications of Recycled Thermoplastic Polymers // *J. MDPI Recycling.* — 2017. — Vol. 2, No. 24. — P. 1-11.
7. *Meawad A.* Novel bifunctional dispersing agents from waste PET packaging materials and interaction with cement // *J. Waste Management.* — 2019. — Vol. 85. — P. 563-573.
8. *Şimşek B.* Analysis of the effects of dioctyl terephthalate obtained from polyethylene terephthalate wastes on concrete mortar: A response surface methodology based desirability function approach application // *J. Cleaner Production.* — 2018. — Vol. 170. — P. 437-445.
9. *Palme A.* Development of an efficient route for combined recycling of PET and cotton from mixed fabrics // *Text Cloth Sustain.* — 2017. — Vol. 3, No. 4. — P. 1-9.
10. *Мошинский Л.* Эпоксидные смолы и отвердители. — Тель-Авив.: Аркадия пресс Лтд, 1995. — 370 с.

11. *Панфилов Д. А.* Применение отходов полиэтилентерефталата для получения пенофенопластов конструкционного назначения // Все материалы. Энциклопед. справочник с Приложением “Комментарии к стандартам, ТУ, сертификатам”. — 2016. — № 10. — С. 34–37.

12. *Крыжановский В. К.* Технические свойства полимерных материалов. — СПб.: Профессия, 2005. — 248 с.

Поступила в редакцию 13.10.2021

Окончательный вариант поступил 17.02.2022

Received Oct. 13, 2021 (Feb. 17, 2022)

*Г. Ю. Юрков^{а,б}, Н. П. Пророкова^{в,г}, А. В. Козинкин^д, С. Ю. Вавилова^е,
В. И. Солодилов^{а*}, А. В. Максимова^д, В. Г. Власенко^д, В. Е. Кириллов^а,
В. М. Бузник^б*

^аФГБУН ФИЦ химической физики им. Н. Н. Семенова Российской академии наук, Москва,
119991 Россия

^бФГБОУ ВО “Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)”, Москва, 105005 Россия

^вФГБУН Институт химии растворов им. Г. А. Крестова Российской академии наук,
Иваново, 153045 Россия

^гФГБОУ ВО “Ивановский государственный политехнический университет”, Иваново,
153000 Россия

^дНаучно-исследовательский институт физики ФГАОУ ВО “Южный федеральный
университет”, Ростов-на-Дону, 344090 Россия

ПОЛИПРОПИЛЕНОВЫЕ НИТИ, МОДИФИЦИРОВАННЫЕ МАРГАНЕЦСОДЕРЖАЩИМИ НАНОЧАСТИЦАМИ

G. Y. Yurkov, N. P. Prorokova, A. V. Kozinkin, S. Y. Vavilova, V. I. Solodilov,
A. V. Maksimov, V. G. Vlasenko, V. E. Kirillov, V. M. Buznik*

POLYPROPYLENE FILAMENTS MODIFIED WITH MANGANESE-CONTAINING NANOPARTICLES

Keywords: polypropylene filament, manganese-containing nanoparticles, EXAFS, XFA, physical properties, biocidalty

The influence of small amounts of low-density polyethylene, high-density polyethylene, and encapsulated manganese oxide nanoparticles on the mechanical properties and structure of polypropylene monofilaments is determined. It is shown that the introduction of small amounts of low-density polyethylene into polypropylene increases the degree of crystallinity of the polymer mixture and decreases the size of crystallites. It is demonstrated that the strength and uniformity of the structure of monofilaments formed from a mixture of polyolefins do not deteriorate. A technology is developed for creating complex filaments based on polypropylene with a composite material based on low-density polyethylene and manganese-containing nanoparticles

*Автор, с которым следует вести переписку: vital-yo@yandex.ru
Corresponding author: vital-yo@yandex.ru

introduced into it as a filler. Comprehensive studies on the structure and properties on manganese-containing nanoparticles localized in the volume of a low-density polyethylene were carried out. It was established that polypropylene filaments filled with manganese-containing nanocomposites based on the low-density polyethylene have a higher tensile strength, lower surface electrical resistance, and the ability to suppress the vital activity of gram-positive pathogenic bacteria and microscopic fungi.

Ключевые слова: нить полипропиленовая, наночастицы марганецсодержащие, EXAFS, РФА, свойства физические, биоцидность

Определено влияние малого количества полиэтилена низкой плотности (ПЭНП), полиэтилена высокой плотности и инкапсулированных наночастиц оксида марганца на механические свойства и структуру полипропиленовых моноволокон. Показано, что введение в полипропилен малого количества ПЭНП способствует повышению степени кристалличности полимерной смеси и уменьшению размера кристаллитов. Продемонстрировано, что прочность и равномерность структуры моноволокон, сформированных из смеси полиолефинов, не ухудшаются. Разработана технология создания комплексных нитей на основе полипропилена с введенным в него композитным материалом на основе ПЭНП и марганецсодержащих наночастиц. Проведены комплексные исследования структуры и свойств марганецсодержащих наночастиц, локализованных в объеме ПЭНП. Установлено, что полипропиленовые нити, наполненные марганецсодержащими нанокомпозитами на основе ПЭНП, обладают улучшенными характеристиками: возрастает прочность при растяжении, снижается поверхностное электрическое сопротивление, появляется способность подавлять жизнедеятельность грамположительных патогенных бактерий и микроскопических грибов.

Введение

Полипропиленовые волокна востребованы при производстве высокопрочных упаковочных материалов, геотекстиля, одноразовой медицинской одежды и белья, покрытий для транспортных средств, в детских и медицинских учреждениях, а также в других областях экономики, что позволит исключить распространение патогенных микроорганизмов и грибов.

К изделиям на основе полипропилена предъявляется все больший комплекс требований [1]. Один из способов улучшения свойств материалов из полипропилена — их модифицирование, которое наиболее эффективно для улучшения эксплуатационных характеристик (прочности, упругости,

износостойкости) [2, 3] и придания новых свойств (электропроводности, способности подавлять жизнедеятельность патогенных микроорганизмов и др.).

Текстильная химическая нить представляет собой продукт неограниченной длины и малого поперечного сечения [4]. Она образуется элементарными нитями (моноволокнами), которые производятся продавливанием расплава полимера через фильеру [5]. Нить обладает чрезвычайно высокой анизотропией и характеризуется высокой степенью ориентации и плотностью упаковки субмолекулярных образований — фибрилл. В связи со спецификой формования моноволокон, их малым диаметром и высокой плотностью структуры даже высокодисперсные функциональные наполнители, импрегнированные в моноволокно, могут вызвать ухудшение физико-механических характеристик нити. Поэтому для получения композитных нитей целесообразно применять наноразмерные наполнители [6]. Серьезным препятствием для этого является присущая наночастицам склонность к агрегации. Образование агрегатов может отрицательно сказываться на свойствах нитей, а также вызывать засорение фильеры, что приведет к возрастанию обрывности нитей.

Один из перспективных путей модифицирования термопластичных волокон — иммобилизация в них модифицирующих веществ, в частности, некоторых металлов и их оксидов, посредством введения их в расплав волокнообразующего полимера при интенсивном перемешивании для равномерного распределения в нем наполнителя [7, 8]. Этот метод актуален и для получения модифицированных композитных химических нитей из расплава [9, 10] с улучшенными характеристиками и специальными свойствами. Так, например, добавление стабилизированных металлсодержащих наночастиц в расплав полипропилена позволяет увеличить относительную разрывную нагрузку получаемых нитей без ухудшения показателя относительного удлинения при растяжении, а также без потери трибологических свойств. Кроме того, модификация полипропиленовых нитей небольшим количеством металлсодержащих наночастиц приводит к значительному снижению электрического поверхностного сопротивления [10]. Добавление наноразмерных добавок оксидов металлов (таких как Ti, Al, Zn, Mg) способно повысить защиту волокон и текстиля от воздействия ультрафиолетового излучения, а также огнестойкость и антисептические свойства. Таким образом, можно получать самоочищающийся износостойкий текстиль [9]. Однако этот метод пока не получил широкого распространения, что связано с особенностями структуры химических нитей.

В связи со спецификой процессов формования комплексных синтетических нитей и особенностями их структуры количество используемого наполнителя, как правило, ограничивается $\approx 7,5\%$ по массе. Для улучшения характеристик моноволокон при введении указанного количества модификатора целесообразно использовать его в виде наноразмерных

частиц в стабилизированной форме, так как его агрегация приводит к значительному ухудшению механических характеристик нитей [11].

Для модификации полимерных волокон предложено использовать композитные материалы, представляющие собой металлсодержащие наночастицы, стабилизированные в объеме полимерной матрицы [12]. Как показано в [13, 14], такие нанокompозиты не образуют агрегатов при иммобилизации в нити.

Полимерам, модифицированным наноразмерными частицами, посвящено значительное количество работ [15—20]. К сожалению, в них не рассмотрено влияние полимерных и композитных модификаторов на структуру и свойства волокнообразующих полимеров и композитных нитей из них.

В настоящей работе получены и изучены свойства полипропиленовых моноволокон/нитей (ПН), модифицированных марганецсодержащими (Mn-содержащими) нанокompозитами на основе полиэтилена низкой (ПЭНП) и высокой (ПЭВП) плотности, анализу причин разного воздействия на свойства ПН добавок малых количеств ПЭНП и ПЭВП; изучению структуры Mn-содержащих наночастиц и их биоцидных свойств.

1. Экспериментальная часть

1.1. Материалы. В качестве базового полимера для создания моноволокон использовали изотактический полипропилен (ПП) марки Бален 01250 (ТУ 2211-015-00203521-99) (“Уфаоргсинтез”, Россия). В качестве модификатора ПП — ПЭНП марки 10803-020 (ГОСТ 16337-77) (“Уфаоргсинтез”, Россия) и ПЭВП марки CAS 9002-88-4 (Aldrich®, USA).

1.2. Методика синтеза. Mn-содержащие композиты синтезированы по методике [21]. Модифицированные полимерные смеси получали с использованием экструдера. В исходный порошок ПП вводили ПЭНП или ПЭВП от 5 до 15% по массе. Смесь полиолефинов интенсивно перемешивали для обеспечения равномерного распределения полиэтилена в ПП. Затем вводили модифицирующую добавку на основе системы полиэтилен—наночастицы марганца (ПП от 0,5 до 3,0% по массе в пересчете на наночастицы марганца). На основе полученных составов осуществляли вытяжку моноволокон.

Изготовление полипропиленовых моноволокон проводили на установке, имитирующей производственный процесс получения полипропиленовых моноволокон из расплава, состоящий из двух лабораторных стандов: для формования (СФПВ-1) и для ориентационного вытягивания (ОСВ-1) синтетических волокон. Формовочный стенд СФПВ-1 оснащен автоматизированным пультом управления процессом формования, экструдером, в котором происходит плавление полимера, фильерой с 24 отверстиями ($\varnothing=0,4$ мм) для образования из расплава струй, формовочными дисками, приёмным устройством для намотки готовых нитей на бобину. В ходе

эксперимента температура в зоне преднагрева $T_1 = 120$ °С, в зоне плавления $T_2 = 220$ °С, в зоне стабилизации расплава $T_3 = 220$ °С, в зоне нагрева формовочной головки $T_4 = 220$ °С. Работу осуществляли при скорости подачи расплава 20 г/мин. Скорость приемного устройства 100 м/мин.

После формования моноволокна подвергали ориентационному вытягиванию и термостабилизации на стенде ОСВ-1 при температуре в зонах вытягивания от 118 до 123 °С при скоростях 12—16 м/мин.

После вытяжки моноволокон, путем их сложения получены комплексные текстильные нити диаметром 30—40 мкм, состоящие из 24 элементарных моноволокон плотностью 0,91 г/см³. В результате получали комплексные нити на основе смесей ПП и ПЭНП; ПП и ПЭВП; композиций с наночастицами марганца.

1.3. Методы исследований. Субмолекулярную структуру волокон исследовали методом дифференциальной сканирующей калориметрии на приборе DSC 204 F1 (“NETZSCH”, Германия). Скорость нагрева образцов 2 °С/мин при температуре от 25 до 180 °С.

Фазовый состав изучали на дифрактометре “Дрон-4” (CuK α -излучение, $\lambda = 1,54056$ Å, графитовый монохроматор, ускоряющее напряжение 6 кВ). Для этого комплексные нити параллельно укладывали в специальную ячейку, закрепленную на гониометрической приставке, позволяющей осуществлять их регулируемый поворот. Экваториальное и меридиональное рассеяние исследовали при вертикальном и горизонтальном расположении нитей соответственно. Интенсивность рассеяния образцами рассчитывали с учетом фона и дифференциальной фильтрации излучения, а нормализацию, необходимую для приведения результатов к единой шкале, осуществляли по интенсивности рассеяния внешним стандартом и оптической плотности образцов.

Размеры металлсодержащих частиц определяли с помощью просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ) на микроскопе JEOL JEM-1011. Образцы подвергали ультразвуковой обработке в изопропиловом спирте, образовавшуюся суспензию наносили на медную сетку, покрытую поливинилформалем и углеродом.

Локальную атомную структуру марганца в синтезированных композитных материалах изучали методом EXAFS-спектроскопии. EXAFS-спектры Mn *K*-края поглощения образцов получены в режиме нахождение на EXAFS-спектрометре Сибирского синхротронного центра (Новосибирск). Рентгеновское излучение генерировалось накопительным кольцом, работающим при энергии электронного пучка 2ГэВ и токе 80 мА, и разлагалось в спектр двухкристальным монохроматором Si(111). Интенсивность падающего и прошедшего через образец рентгеновского излучения регистрировали ионизационными камерами, наполненными аргоном. Обработку EXAFS-спектров выполняли по стандартной методике с использованием программного комплекса UWXAFS.

Оценку равномерности распределения металлсодержащих частиц в полипропиленовых нитях осуществляли с помощью сканирующей электронной микроскопии (СЭМ) на установке JEOL JSM 6380LA, совмещенной с рентгеноспектральным анализатором JED-2300.

Прочность при растяжении модифицированных нитей определяли на разрывной машине 2099P-5 (“АСМА-прибор”, Россия) при скорости растяжения нити 250 мм/мин и рабочей длине образца 100 мм.

Динамическое электрическое сопротивление нитей R определяли с помощью прибора ИЭСН-1, в котором нити механически наматывались на измерительные электроды, а величину R измеряли тераомметром Е6-13А. Удельное поверхностное электрическое сопротивление рассчитывали по формуле

$$\rho_s = \frac{kR}{\gamma^2 \sqrt{T\gamma}},$$

где k — константа, для прибора ИЭСН-1 $k = 903,5 \text{ г}^3/\text{мм}^8$; T — линейная плотность нитей; γ — плотность нитей; R — среднее значение электрического сопротивления.

Влияние модифицированных моноволокон и нитей на их основе на жизнедеятельность патогенных микроорганизмов оценивали на тестовых культурах *Staphylococcus aureus* (золотистый стафилококк) и *Escherichia coli* штамм М-17 (кишечная палочка) — соответственно грамположительной и грамотрицательной бактериальных культурах, *Candida albicans* (кандида альбиканс) — дрожжеподобных микроскопических грибах. Для этого использовали метод, представляющий собой упрощенный вариант счетного микробиологического теста по ASTM E 2149 [22]. Тест основан на подсчете количества колоний микробов, образующихся при 24-часовом контакте измельченного модифицированного материала с физиологическим раствором, в который введено определенное количество колоний микробов в виде суспензии, по изменению мутности раствора. Снижение микробного обсеменения тест-объектов оценивали в процентах по отношению к аналогичному показателю контрольного тест-объекта (немодифицированного волокна). Снижение концентрации микроорганизмов до уровня менее 90% считали недостаточным, от 90 до 99% — хорошим, свыше 99% — отличным антимикробным эффектом.

2. Результаты и обсуждение

2.1. Состав и структура Mn-содержащих композитных модификаторов. Размеры синтезированных Mn-содержащих частиц в композитных материалах определены при помощи ПЭМ. Характерное изображение Mn-содержащих частиц, локализованных в полиэтилене, представлено на рис. 1. Согласно результатам ПЭМ размер Mn-содержащих частиц

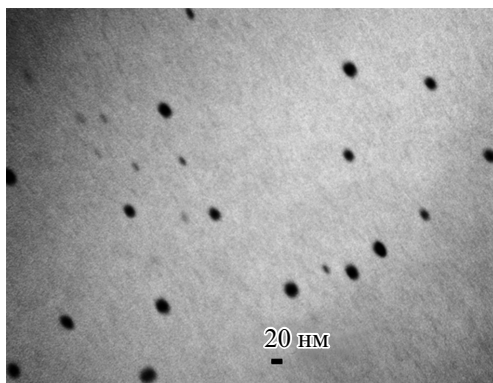


Рис. 1. Характерная микрофотография Mn-содержащего композитного материала.

(темные точки на сером фоне, серый фон — полиэтилен) в исследуемых композитных материалах $20,0 \pm 0,9$ нм.

Состав синтезированных частиц определен при помощи рентгеновского фазового анализа (РФА). Полученные дифрактограммы в малоугловой области содержат в основном интенсивные линии, отвечающие ПЭНП, эти максимумы с представленной характерной дифрактограммой удалены (рис. 2), что позволило увеличить интенсивность рефлексов металлсодержащего компонента и идентифицировать металлсодержащую фазу как оксид марганца (II) (MnO).

Изучение ближайшего атомного окружения атомов Mn в синтезированных композитных материалах было осуществлено EXAFS-спектроскопией. Поскольку энергетические положения (E_M) Mn K-краев образцов исходного комплекса $Mn_{12}O_{12}(OAc)_{16}(H_2O)_4$ и нанокompозита $[Mn_{12}O_{12}] + ПЭВП$ практически совпадают и близки к E_M Mn K-края MnO, то можно сделать вывод о том, что степень окисления ионов марганца в наночастицах близка к степени окисления в $Mn_{12}O_{12}(OAc)_{16}(H_2O)_4$ и MnO.

На рис. 3 приведены модули Фурье-преобразования (МФП) расчетных и экспериментальных EXAFS-функций комплекса $Mn_{12}O_{12}(OAc)_{16}(H_2O)_4$ и наноматериала $[Mn_{12}O_{12}] + ПЭВП$. Основным максимумом МФП комплекса

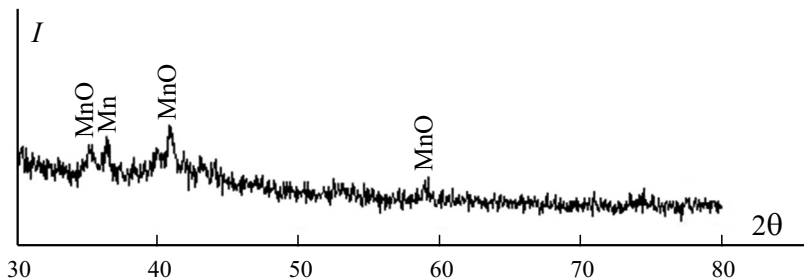


Рис. 2. Характерная дифрактограмма Mn-содержащего композитного материала.

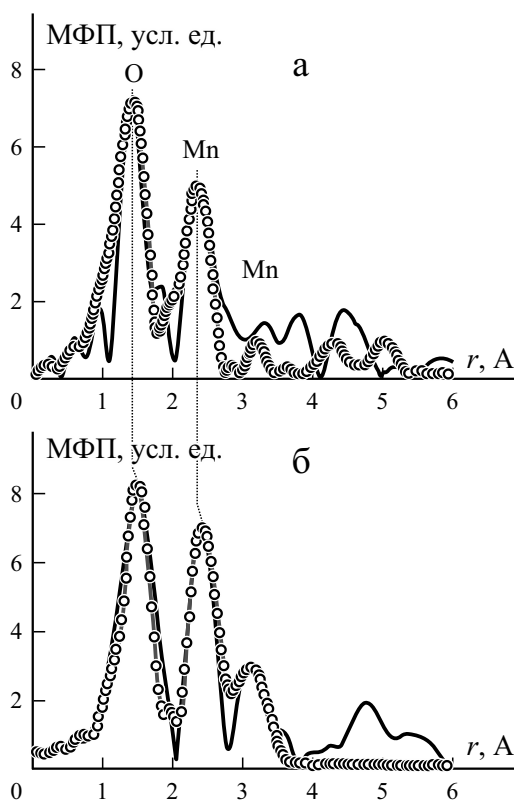


Рис. 3. Модули Фурье-преобразования EXAFS Mn K -краев поглощения композита $[\text{Mn}_{12}\text{O}_{12}] + \text{ПЭВП}$ (а) и комплекса $\text{Mn}_{12}\text{O}_{12}(\text{OAc})_{16}(\text{H}_2\text{O})_4$ (б): линии — эксперимент; точки — теория.

при $r = 1,50 \text{ \AA}$ соответствует проявлению первой координационной сферы, состоящей из шести атомов кислорода со связями разной длины от $1,87$ до $1,90 \text{ \AA}$. Таким образом, среднее значение радиуса R первой координационной сферы равно $\sim 1,89 \text{ \AA}$. Как видно из данных рис. 3, МФП для комплекса и наноматериала близки друг к другу и содержат два основных пика примерно одинаковой амплитуды для первой координационной сферы при $r \approx 1,50$ и $r \approx 1,44 \text{ \AA}$ и для второй координационной сферы при $r \approx 2,43$ и $r \approx 2,34 \text{ \AA}$ соответственно для комплекса и композита $[\text{Mn}_{12}\text{O}_{12}] + \text{ПЭВП}$.

Следует отметить, что второй и третий максимумы МФП соответствуют проявлению второй и третьей координационных сфер, соответствующих Mn—Mn-связям.

В табл. 1 приведены структурные характеристики, полученные из многофазной подгонки EXAFS Mn K -края комплекса $\text{Mn}_{12}\text{O}_{12}(\text{OAc})_{16}(\text{H}_2\text{O})_4$ и нанокompозита $[\text{Mn}_{12}\text{O}_{12}] + \text{ПЭВП}$.

Таким образом, в исследованном образце содержатся наночастицы, состоящие из фрагментов со структурой, близкой к структуре исходно-

Табл. 1

Структурные характеристики *K*-края комплекса $Mn_{12}O_{12}(OAc)_{16}(H_2O)_4$ и синтезированного композита $[Mn_{12}O_{12}] + PE$

Соединение	$R, \text{Å} \pm 0,0$	N	$\sigma^2, \text{Å}$	КС	$Q, \%$
Комплекс $Mn_{12}O_{12}$	$1,89 \pm 0,01$	6	0,010	O	3,0
	(1,825—1,978)	(6)			
	$2,84 \pm 0,02$	4	0,005	Mn	
	(2,631; 2,757;	(4)			
	2,919; 3,063)	2	0,007	Mn	
	$3,43 \pm 0,02$	(2)			
	(3,448; 3,453)				
$[Mn_{12}O_{12}] + PE$	$1,86 \pm 0,01$	5,2	0,003	O/C	2,0
	$2,75 \pm 0,02$	2,8	0,007	Mn	
	$3,52 \pm 0,02$	0,6	0,009	Mn	

Примечание: R — межатомное расстояние; N — координационное число; σ^2 — фактор Дебая—Валлера; Q — функция невязки; в скобках приведены значения R и N , полученные из рентгеновской дифракции для комплекса.

го комплекса $Mn_{12}O_{12}$. Для первой КС в композитном наноматериале $[Mn_{12}O_{12}] + ПЭВП$ установлено небольшое уменьшение ее радиуса до $1,86 \text{ Å}$ и значения координационного числа (КЧ) до 5,2, что согласуется с образованием наночастиц, а также указывает на тот факт, что при взаимодействии комплекса марганца с полиэтиленовой матрицей доля внешних ионов марганца может терять кислород и взаимодействовать напрямую с полимером.

2.2. Физико-механические свойства комплексных полипропиленовых нитей. Фрагменты температурных зависимостей удельной теплоемкости неориентированных ПН без наполнителя и с наполнителем в виде

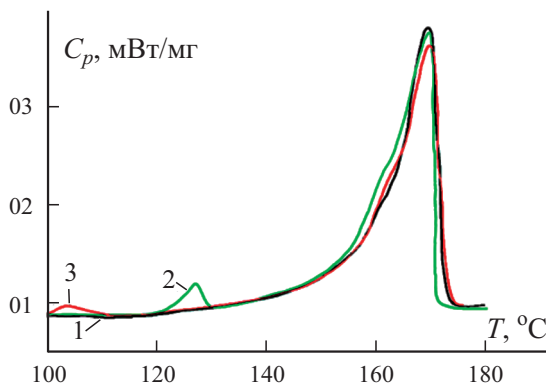


Рис. 4. Фрагменты зависимостей удельной теплоёмкости от температуры неориентированных ПН (метод ДСК): 1 — без наполнителя; 2 и 3 — с наполнителем 7,5% по массе Mn-содержащего нанокompозита на основе ПЭНП и ПЭВП соответственно.

Мп-содержащих наночастиц в ПЭНП и ПЭВП в области, близкой к температуре плавления композита, полученные методом ДСК, представлены на рис. 4. На экспериментальной зависимости кроме интенсивного пика в области $\sim 169^\circ\text{C}$, относящегося к плавлению ПП, в присутствии ПЭНП и ПЭВП появляются небольшие пики в областях ~ 105 и $\sim 128^\circ\text{C}$ соответственно. Эти пики характеризуют плавление полиэтилена и свидетельствуют о том, что полиэтилен локализуется в ПП в виде отдельной фазы.

Сопоставление значений температуры кристаллизации компонентов смесей показало, что в процессе получения нити прежде всего образуются кристаллиты ПП ($T_{\text{melt}} = 169^\circ\text{C}$), при этом ПЭНП ($T_{\text{melt}} = 105^\circ\text{C}$) и ПЭВП ($T_{\text{melt}} = 128^\circ\text{C}$) распределяются в межкристаллитных пространствах ПП. На стадии формирования волокон происходит ориентация относительно оси волокон кристаллитных образований и молекулярных цепей, входящих в состав аморфных областей ПП. На стадии ориентационной вытяжки наблюдается двукратное уменьшение угла разориентации молекулярных цепей в аморфных участках полимера. Одновременно происходит практически полное превращение ламелярных складчатых кристаллитов в фибриллярные кристаллитные образования из вытянутых цепей. При этом фильерное, а затем сильное ориентационное вытягивание частично кристаллизованных полиэтиленов обеспечивает полную ориентацию его молекулярных цепей вдоль оси моноволокна. В результате формируется высокоориентированная структура, состоящая из фибрилл ПП с вкраплением небольших количеств фибрилл полиэтилена.

Для установления структурных особенностей композиций, которые являются причиной различного влияния ПЭНП и ПЭВП на прочностные характеристики ПН, использовали РФА. На рис. 5—*а, б* приведены кривые экваториального и меридионального рассеяния для ПН без наполнителя, экваториального (*в*) и меридионального (*г*) рассеяния для ПН с 7,5% по массе наполнителя ПЭНП; дифрактограмма исходного ПЭНП (*д*).

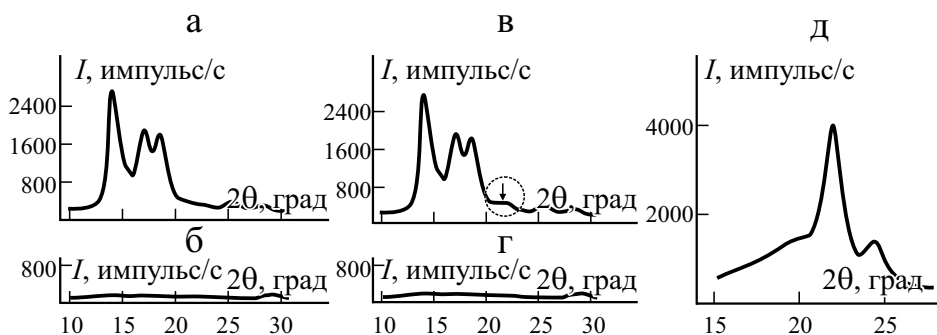


Рис. 5. Кривые экваториального (*а*) и меридионального (*б*) рассеяния для ПН без наполнителя; экваториального (*в*) и меридионального (*г*) рассеяния для ПН с 7,5% по массе наполнителя ПЭНП; дифрактограмма исходного ПЭНП (*д*).

на рис. 5—*в*, *г* — для ПН с 7,5% по массе наполнителя ПЭНП, на рис. 5—*д* представлена дифрактограмма исходного ПЭНП.

Из сопоставления дифрактограмм следует, что на кривой экваториального рассеяния для ПН с наполнителем ПЭНП (см. рис. 5—*в*) появляется характерный для ПЭНП рефлекс в области $2\theta = 21,5^\circ$. Это является дополнительным подтверждением ранее отмеченной несовместимости компонентов системы ПП—ПЭНП на уровне кристаллических областей. Необходимо отметить, что на кривой меридионального рассеяния (см. рис. 5—*г*) данный рефлекс отсутствует, что свидетельствует об ориентации фибрилл ПЭНП в процессе формирования и твердофазного вытягивания нитей вдоль оси ПН.

На основании полученных дифрактограмм рассчитана степень кристалличности ПП после модифицирования ПП нитей ПЭНП и ПЭВП, результаты приведены в табл. 2. Анализ результатов методом Дебая—Шеррера показал, что присутствие ПЭНП в системе способствует дополнительной кристаллизации ПП при одновременном уменьшении средних поперечных размеров кристаллитов ПП.

Установленный эффект связан с более низкой температурой плавления ПЭНП, чем ПП. ПЭНП в создаваемой композиции выполняет роль пластификатора, обеспечивающего более полную релаксацию напряжений, возникающих в ПН при переходе ламелярных складчатых кристаллитов к фибриллярным кристаллитным образованиям из вытянутых цепей на стадии термического вытягивания. В максимальной степени эффект кристаллизации ПП проявляется при низком содержании ПЭНП в нитях (0,5—7,5% по массе). Дальнейшее повышение концентрации ПЭНП уменьшает возможность кристаллизации ПП, по-видимому, вследствие возникновения стерических препятствий, затрудняющих образование кристаллитов ПП. Как уже было отмечено, одновременно с возрастанием

Табл. 2

Структурные параметры ПН

Содержание полиэтилена, % по массе	Степень кристалличности	Размер кристаллитов, нм
0	0,590	7,84
	Наполнитель ПЭНП	
0,5	0,682	6,89
7,5	0,745	6,70
15,0	0,623	7,49
	Наполнитель ПЭВП	
1,0	0,647	7,83
k_{var}^* %	1,5	2,0

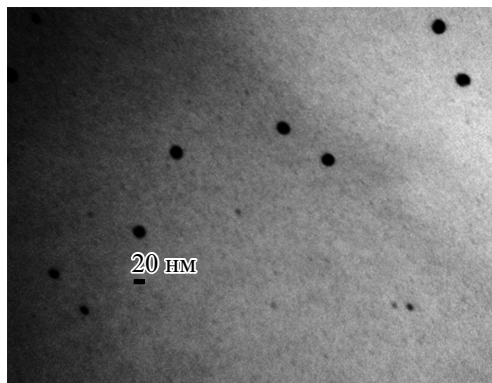


Рис. 6. Изображение ПЭМ полипропиленовой нити, модифицированной Mn-содержащими наночастицами, стабилизированными полиэтиленом.

степени кристалличности происходит уменьшение размеров кристаллитных образований ПП. Указанные изменения субмолекулярной структуры нити обеспечивают повышение равномерности её свойств и улучшение физико-механических характеристик.

Из экспериментальных данных следует, что при концентрации 1% по массе ПЭВП способствует кристаллизации и формированию более мелких кристаллитов ПП в нитях (см. табл. 2). Таким образом, обнаруженное уменьшение прочности ПП нитей, сформованных в результате введения ПЭВП, не связано с их степенью кристалличности.

При рассмотрении композитного материала в качестве наполнителя для волокон необходимо учитывать, что высокие качественные характеристики создаваемой нити могут обеспечить только равномерное распределение в ней наноразмерного модификатора. Характер распределения Mn-содержащих частиц в полипропиленовой нити и их размеры оценивали при помощи ПЭМ (рис. 6). Согласно результатам ПЭМ Mn-содержащие частицы распределяются в нити относительно равномерно и сохраняют размеры, близкие к исходным размерам частиц в композитном материале (модификаторе) $20,0 \pm 0,9$ нм. Агрегации частиц не наблюдается.

Результаты исследования влияния Mn-содержащего композитного материала на механические свойства волокон ПП представлены на рис. 7. Из данных рисунка следует, что введение в ПН Mn-содержащего нанокompозита на основе ПЭНП приводит к заметному увеличению значения удельной разрывной нагрузки нити, а на основе ПЭВП — к уменьшению прочности нитей. Полученные результаты подтверждают, что свойства комплексных волокон ПП определяются не только введенными в них наночастицами, но зависят также от вида полиэтиленовой матрицы.

Эксплуатационные характеристики нити в значительной степени определяются свойствами её поверхности, которые в свою очередь зависят от

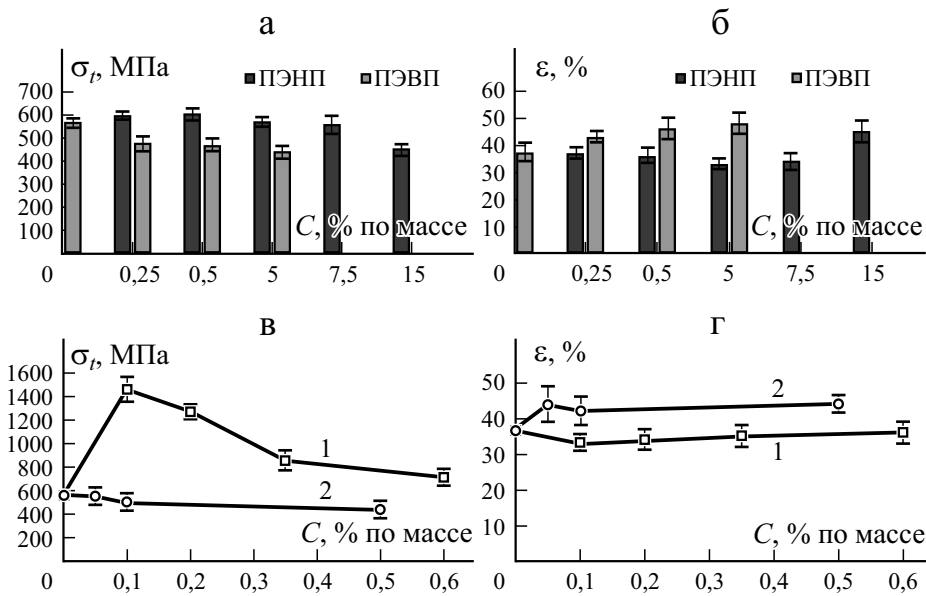


Рис. 7. Влияние содержания полиэтилена C (а, б) в смеси и концентрации Mn-содержащих частиц C (в, г) на прочность при растяжении σ_t (а, в) и относительное разрывное удлинение ϵ (б, г). 1 — Mn + ПЭНП; 2 — Mn + ПЭВП.

характера поверхностного распределения модификатора. Распределение модификатора по волокну оценивали по результатам сканирующей электронной микроскопии (СЭМ), совмещенной с рентгеноспектральным анализом. На рис. 8 представлены ЭДС данные о расположении Mn-содер-

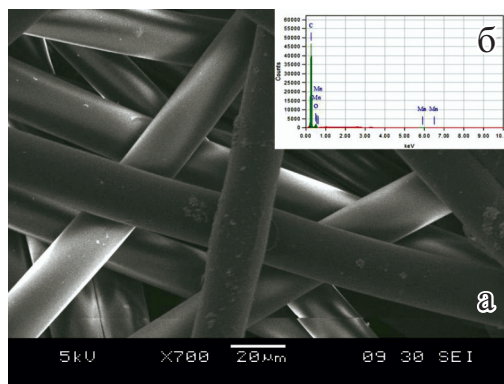


Рис. 8. СЭМ изображение (а) и ЭДС (б) анализ поверхности полипропиленовой нити, модифицированной Mn-содержащими частицами, стабилизированными полиэтиленом.

жащих частиц в модифицированной нити. Согласно результатам анализа наноразмерные частицы распределены по всей нити.

Распределение Mn-содержащих наночастиц в ПН определяется распределением в ней полиэтилена, поскольку наночастицы в композитном материале прочно связаны с их матрицей [23, 24]. Как было показано в [14], внедрение металлсодержащих наноразмерных наполнителей в стабилизированной форме в полипропилен на стадии формования из расплава дает равномерное распределение наночастиц в волокнах, в том числе на их поверхности.

Об изменении прочности нити с такой структурой свидетельствуют экспериментальные данные, приведенные на рис. 7.

Анализ полученных результатов показал, что введение в ПП небольшого (до 7,5% по массе) количества ПЭНП не вызывает снижения прочности модифицированной нити. При добавках ПЭНП 0,25—0,5% по массе наблюдается незначительное увеличение разрывной нагрузки нити. Относительное разрывное удлинение нитей изменяется при этом незначительно. В то же время введение в ПП малого количества ПЭВП, в отличие от введения ПЭНП, приводит к увеличению разрывного удлинения и снижению разрывной нагрузки нитей (см. рис. 7—а, б).

Данные рис. 7—в, г иллюстрируют влияние концентрации Mn-содержащих наночастиц на разрывные полуцикловые характеристики.

Анализ реализованных процессов получения модифицированных полипропиленовых нитей показал, что использование наночастиц, стабилизированных ПЭНП, обеспечивает бесперебойное протекание процессов формования и ориентационного вытягивания. Рост прочности моноволокон можно объяснить ориентационной вытяжкой фазы ПЭНП в районе частиц ПЭНП + Mn. При вытяжке прочность полимеров возрастает. За счёт ориентированной вдоль оси моноволокна ПП микрофазы ПЭНП возрастает прочность. Об этом косвенно свидетельствуют данные рис. 7—з, на котором видно, что после ориентационной вытяжки предельное удлинение моноволокна остается практически неизменным.

Эксперименты с Mn-содержащими композициями на основе ПЭВП показали, что при их применении наблюдается значительное возрастание обрывности нити на стадии ориентационного вытягивания, что делает создание таких нитей нетехнологичным. По внешнему виду нити, наполненные Mn-содержащими нанокompозитами на основе ПЭНП (рис. 9), не отличаются от ненаполненных ПП нитей, что свидетельствует о равномерном распределении наполнителя в структуре ПН. Основное их отличие заключается в способности “стекания” электрического заряда с волокна, что можно наблюдать на микрофотографиях.

В нитях, сформованных с добавками нанокompозитов на основе ПЭВП, наблюдаются включения (рис. 10—а), форма которых изменяется в процессе ориентационного вытягивания (рис. 10—б), что не наблюдается

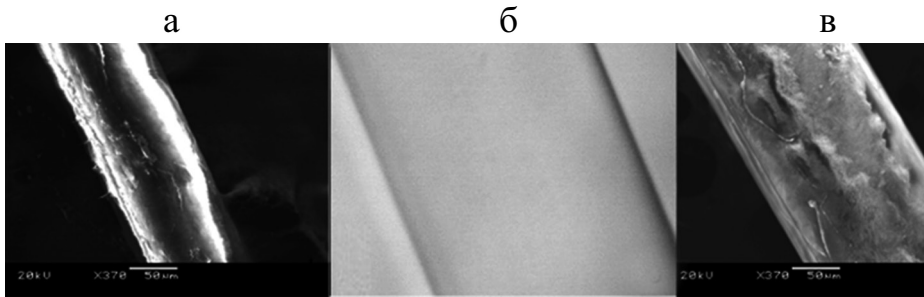


Рис. 9. Внешний вид ПП моноволокна без наполнителя (а) и наполненного Mn-содержащим наноккомпозитом на основе ПЭНП: б — оптическая микроскопия (400×); в — СЭМ (370×).

для нитей с ПЭНП (см. рис. 9—б). Эти включения представляют собой так называемые гель-частицы. Этот термин используется для описания визуально регистрируемых дефектов в пленках и волокнах [25]. Как известно, образование гель-частиц во многих случаях лимитирует кратность и скорость вытяжки полимерного полуфабриката и ухудшает физико-механические свойства получаемого продукта [26]. Наблюдаемые гель-частицы сравнительно крупные (1—2 мкм) и представляют собой, по-видимому, остатки не полностью расплавленной матрицы композитных порошков на основе ПЭВП. Включение в ПП нить гель-частиц ПЭВП, отличающихся от ПП большей плотностью и кристалличностью, приводит к значительному повышению неравномерности структуры моноволокон. Это отрицательно сказывается на протекании процесса ориентационного вытягивания модифицированной ПН. При добавлении в ПП ПЭНП такие

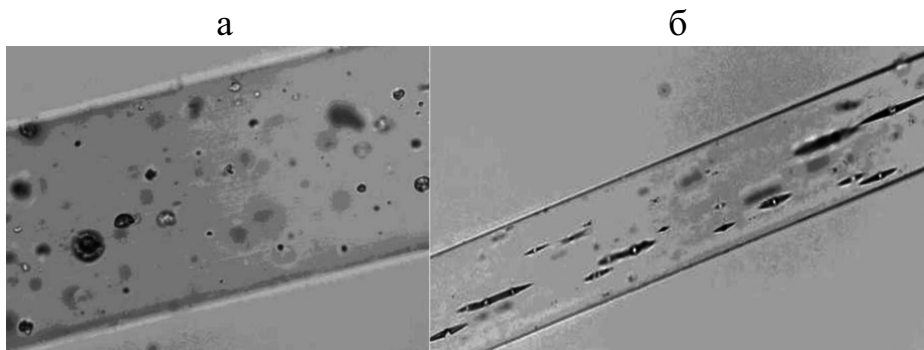


Рис. 10. Внешний вид ПП моноволокна, наполненного 0,5% по массе Mn-содержащим наноккомпозитом на основе ПЭВП: а — невытянутая нить, б — после ориентационного вытягивания. Оптическая микроскопия (400×).

Табл. 3

Влияние наполнения Мп-содержащим композитом на основе ПЭНП
на поверхностное электрическое сопротивление ПН

Концентрация Мп-содержащих наночастиц, % по массе	Поверхностное электрическое сопротивление, Ом
Без наполнителя	$1,5 \cdot 10^{15}$
0,35	$3,6 \cdot 10^9$
Промышленный антистатический препарат	$1,0 \cdot 10^{11}$

гель-частицы не образуются. Таким образом, наибольший практический интерес представляют ПН, наполненные Мп-содержащими нанокompозитами на основе ПЭНП.

Важным показателем, определяющим область применения композитных нитей, является их поверхностное электрическое сопротивление. В табл. 3 представлены данные, иллюстрирующие изменение этого параметра ПН после наполнения Мп-содержащим композитом на основе ПЭНП.

Результаты исследований показали, что поверхностное электрическое сопротивление наполненных нитей уменьшилось значительно (в 10^6 раз), тогда как промышленные антистатические препараты снизили этот параметр всего в 10^4 раза. Микроскопические исследования созданных нитей показали, что Мп-содержащие частицы отделены друг от друга и не образуют сплошной проводящий кластер, следовательно, наблюдаемый эффект определяется способностью наночастиц переносить носители заряда посредством туннелирования.

Практический интерес представляет способность полипропиленовых нитей, модифицированных Мп-содержащими наночастицами, подавлять деятельность патогенных микроорганизмов. Известно, что Мп-содержащие наночастицы обладают антимикробной активностью [27, 28], но вопрос, сохраняется ли их способность подавлять активность патогенных

Табл. 4

Влияние концентрации Мп-содержащих наночастиц на ингибирование
жизнедеятельности микроорганизмов композитными ПН

Концентрация Мп-содержащих наночастиц, % по массе	Ингибирование жизнедеятельности микроорганизмов, баллы/%		
	<i>Escherichia coli</i>	<i>Staphylococcus aureus</i>	<i>Candida albicans</i>
0	2/39	2/46	2/41
0,35	2/51	5/96	4/91
0,5	2/49	5/96	4/92
0,6	2/51	5/97	4/94

микроорганизмов после того, как они введены в полимерную матрицу, оставался открытым. В табл. 4 представлены данные, иллюстрирующие способность ПН, наполненных Mn-содержащими композитами на основе ПЭНП, подавлять жизнедеятельность болезнетворных микроорганизмов. Результаты ингибирования жизнедеятельности микроорганизмов свидетельствуют о том, что наполненные Mn-содержащими наночастицами ПН селективно воздействуют на разные патогены. Созданные комплексные ПН недостаточно активно подавляют жизнедеятельность грамотрицательной бактерии — кишечной палочки (*Esch. Coli*), но обладают высоким антимикробным эффектом по отношению к грамположительной тест-бактерии, являющейся высокопатогенной и устойчивой к действию стандартных биоцидных препаратов — золотистому стафилококку (*S. Aureus*), а также типичному патогенному микроскопическому грибку кандиды альбиканс (*C. albicans*).

Заключение

Использование при получении нитей из расплава ПП малого количества Mn-содержащих нанокompозитов на основе ПЭНП обеспечивает придание нитям повышенной прочности. Присутствие малого количества ПЭНП (до 7,5 %) в расплаве ПП положительно сказывается на кристаллизации последнего — степень кристалличности ПП несколько возрастает при одновременном уменьшении размеров кристаллитов. В результате этого добавки ПЭНП не приводят к ухудшению физико-механических характеристик нити. Установлено, что структура ПП нитей, наполненных нанокompозитами на основе ПЭНП, характеризуется высокой равномерностью.

Использование нанокompозитов с матрицей ПЭВП приводит к снижению разрывной нагрузки нити, хотя ПЭВП не оказывает отрицательного влияния на протекание процесса кристаллизации ПП. Падение прочности нити связано с тем, что введение в структуру ПП нити даже незначительных количеств ПЭВП приводит к образованию в расплаве полипропилена гель-частиц, которые представляют собой непроплавленные остатки сравнительно крупных частиц ПЭВП. Их включение в структуру ПП нити обуславливает значительное повышение неравномерности структуры и повышение обрывности в процессе ориентационного вытягивания.

Полипропиленовые нити, наполненные Mn-содержащими нанокompозитами на основе ПЭНП, приобретают комплекс улучшенных и новых свойств. Значительно (до 2,5 раз) возрастает их прочность при разрыве. Существенное уменьшается поверхностное электрическое сопротивление таких нитей (в 106 раз).

Созданные комплексные нити обладают антимикробным действием относительно грамположительных бактерий и патогенных микроскопических грибов.

Разработанные полипропиленовые композитные нити, обладающие описанными функциональными свойствами, востребованы при производстве высокопрочных упаковочных материалов, геотекстиля, одноразовой медицинской одежды и белья, покрытий для транспортных средств, в детских и медицинских учреждениях, а также в других областях экономики, что позволит исключить распространение патогенных микроорганизмов и грибов.

Синтез материалов проведен в рамках Госзадания ФИЦ ХФ РАН; изучение свойств материалов — на базе МГТУ им. Н. Э. Баумана при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 0705-2020-0032; исследование структуры соединений — при финансовой поддержке Южного федерального университета (Внутренний грант ЮФУ на выполнение научного исследования проект № ВнГр-07/2020-01-ИФ).

Работа посвящена 70-летию Лаборатории армированных пластиков ФИЦ ХФ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yang X., Liang N., Liu X. R. and Zhong Z.* An improved constitutive statistical damage model of a multisize polypropylene-fiber-reinforced concrete under compression // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 55, No. 3. — P. 385—392.
2. *Chervakov D. O., Bashtanyk P. I. and Burmistr M. V.* Modified polypropylene with improved physical-mechanical properties // *Mech. Compos. Mater.* — 2015. — Vol. 51, No. 1. — P. 93—98.
3. *Bulut M.* Low-velocity impact tests on basalt fiber/polypropylene core honeycomb sandwich composites // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 56, No. 1. — P. 121—130.
4. ISO 6938:2012(en), Textiles — Natural fibres — Generic names and definitions <https://www.iso.org/obp/ui/#iso:std:iso:6938:ed-2:v1:en> (2012)
5. Chemical Fibers. <https://encyclopedia2.thefreedictionary.com/Chemical+Fibers> (2022)
6. *Shebanov S. M.* Extreme values of the strength of single filaments and threads of a paraaramide fiber after its treatment by a water suspension of carbon nanoparticles // *Mech. Compos. Mater.* — 2021. — Vol. 57, No. 2. — P. 269—272.
7. *Xanthos M.* Functional Fillers for Plastics. — John Wiley & Sons, 2010. — 538 p.
8. *Wyppych G.* Handbook of Fillers: Chem. — N. Y. Tec., — 2000.
9. *Geller V. E.* Prospects for preparing nanocomposite textile yarn (review) // *Fibre Chem.* — 2013. — Vol. 2, No. 45. — P. 65—70.

10. Prorokova N. P. and Buznik V. M. New methods of modification of synthetic fibrous materials // Russ. J. Gen. Chem. — 2017. — Vol. 87, No. 6. — P. 1371—1377.
11. Козлов Г. В., Султонов Н. Ж., Шоранова Л. О., Мукитаев А. К. Агрегация частиц нанонаполнителя в нанокompозитах полиэтилен низкой плотности/карбонат кальция // Нанотехнологии: разработка, применение-XXI век. — 2011. — Т. 3, № 1. — С. 17—22.
12. Gubin S. P., Spichkin Y. I., Yurkov G. Y. and Tishin A. M. Nanomaterial for high-density magnetic data storage // Russ. J. Inorg. Chem. — 2002. — Vol. 47, No. SUPPL.
13. Prorokova N. P., Vavilova S. Y., Biryukova M. I., Yurkov G. Y. and Buznik V. M. Polypropylene threads modified by iron-containing nanoparticles stabilized in polyethylene // Fibre Chem. — 2016. — Vol. 47, No. 5. — P. 384—389.
14. Prorokova N. P., Vavilova S. Y., Kuznetsov O. Y. and Buznik V. M. Antimicrobial properties of polypropylene yarn modified by metal nanoparticles stabilized by polyethylene // Nanotechnologies Russ. — 2015. — Vol. 10, No. 9. — P. 732—740.
15. Coleman J. N., Khan U. and Gun'ko Y. K. Mechanical reinforcement of polymers using carbon nanotubes // Adv. Mater. — 2006. — Vol. 18, No. 6. — P. 689—706.
16. Ma J., Bilotti E., Peijs T. and Darr J. A. Preparation of polypropylene/sepiolite nanocomposites using supercritical CO₂ assisted mixing // Eur. Polym. J. — 2007. — Vol. 43, No. 12. — P. 4931—4939.
17. Cui L., Hunter D. L., Yoon P. J. and Paul D. R. Effect of organoclay purity and degradation on nanocomposite performance. Part 2: Morphology and properties of nanocomposites // Polymer. — 2008. — Vol. 49, No. 17. — P. 3762—3769.
18. Rybalko V. P., D'yachenko P. B., Nikityuk A. I., Pisarenko E. I. and Kireev V. V. The effect of nanofillers on the physicomechanical properties of organosilicon plastic foams // Int. Polymer. Sci. Technol. — 2013. — Vol. 40, No. 10. — P. 55—59.
19. Kakhramanov N. T., Azizov A. G., Osipchik V. S., Mamedli U. M. and Arzumanova N. B. Nanostructured composites and polymer materials science // Int. Polymer. Sci. Technol. — 2017. — Vol. 44, No. 2. — P. 37—48.
20. Plavan V. P., Rezanova V. G., Budash Y. O., Ishchenko O. V. and Rezanova N. M. Influence of aluminum oxide nanoparticles on formation of the structure and mechanical properties of microfibrillar composites // Mech. Compos. Mater. — 2020. — Vol. 56, No. 3. — P. 319—328.
21. Gubin S. P., Yurkov G. Y. and Kosobudsky I. D. Nanomaterials based on metal-containing nanoparticles in polyethylene and other carbon-chain polymers // Int. J. Mater. Prod. Technol. — 2005. — Vol. 23, No. 1—2. — P. 2—25.
22. Standard Test Method for Determining the Antimicrobial Activity of Immobilized Antimicrobial Agents Under Dynamic Contact Conditions (Withdrawn 2010). <https://www.astm.org/e2149-01.html> (2010)
23. Yurkov G. Y., Gubin S. P., Pankratov D. A., Koksharov Y. A., Kozinkin A. V., Spichkin Y. I., Nedoseikina T. I., Pirog I. V. and Vlasenko V. G. Iron (III) oxide nanoparticles in a polyethylene matrix // Inorg. Mater. — 2002. — Vol. 38, No. 2. — P. 137—145.
24. Gubin S. P., Spichkin Y. I., Koksharov Y. A., Yurkov G. Y., Kozinkin A. V., Nedoseikina T. I., Korobov M. S. and Tishin A. M. Magnetic and structural properties of Co nanoparticles in a polymeric matrix // J. Magn. Magn. Mater. — 2003. — Vol. 265, No. 2. — P. 234—242.

25. Technology tip: Gels in polyethylene films. https://www.exxonmobilchemical.com/resources/library/library-detail?assetid=3474&assetname=tft_gels_in_polyethylene_films_en (2022)

26. Stop Those Gels! <https://www.ptonline.com/articles/stop-those-gels> (2022)

27. *Sobha K., Surendranath K., Meena V., Jwala K. T., Swetha N. and Latha K. S. M.* Emerging trends in nanobiotechnology // *Biotechnol. Mol. Biol. Rev.* — 2010. — Vol. 4, No. 1. — P. 1—12.

28. *Belkhedkar M. R. and Ubale A. U.* Physical properties of nanostructured Mn₃O₄ thin films synthesized by SILAR method at room temperature for antibacterial application // *J. Mol. Struct.* — 2014. — Vol. 1068. — P. 94—100.

Поступила в редакцию 08.03.2022

Окончательный вариант поступил 15.06.2022

Received March 8, 2022 (June 15, 2022)

Цз. Ян*, Цз. Тан, Ю. Ван, Ц. Ван

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou, 730050, Gansu, China

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ БАЛОК ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ¹

J. Yang, J. Tang, Y. Wang, and Q. Wang*

A NONLINEAR ANALYSIS OF THE MECHANICAL BEHAVIOR OF FUNCTIONALLY GRADED SHAPE-MEMORY ALLOY BEAMS

Keywords: functionally graded shape-memory alloy, tension-compression asymmetry coefficient, phase transformation, nonlinearity

The nonlinear mechanical behavior of functionally graded shape-memory alloy beams under impure bending conditions is analyzed using the beam bending theory and the stress–strain relationship of shape memory alloy materials. The volume fraction of the alloy is assumed to vary in the beam thickness direction according to a power function. The stress distribution in its cross section, in each phase transformation stage, is derived by introducing a tension-compression asymmetry coefficient, which expresses this asymmetry on the tension-compression sides of the beams. The displacement of their neutral axis, the curvature of cross section, and the variation of the phase boundary along their axial direction were calculated by solving the equilibrium equation. Results showed that the influence of a change in the power index on the tension-compression asymmetry was much greater than an alteration of the tension-compression asymmetry coefficient. The displacement of neutral axis and the curvature were nonlinearly negatively related to the power index. With increasing power index, the phase transformation boundary moved closer to the mid-span section. The displacement of neutral axis of the same cross section was nonlinearly positively related to the tension-compression asymmetry coefficient, but the curvature was nonlinearly negatively related to it. The phase boundary on

*Автор, с которым следует вести переписку: 1324576210@qq.com
Corresponding author: 1324576210@qq.com

¹Перевод с англ.

compressive side moved closer to the mid-span section as the tension-compression asymmetry coefficient increased. The analysis of computation results can be used as a reference in the design and application of such materials.

Ключевые слова: сплав функционально-градиентный с памятью формы, коэффициент асимметрии растяжения—сжатия, преобразование фазовое, нелинейность

С использованием теории изгиба балок и соотношений между напряжениями и деформациями для материалов из сплавов с памятью формы проанализировали нелинейное механическое поведение балок из функционально-градиентных сплавов с памятью формы, подверженных нечистому изгибу. Предположили, что объемное содержание сплава изменяется по толщине балки по закону степенной функции. Распределение напряжений в её поперечном сечении на каждой стадии фазового преобразования определили путем введения коэффициента асимметрии растяжения—сжатия. Перемещение нейтральной оси балки, кривизну поперечного сечения и изменение границы раздела фаз в осевом направлении рассчитали путем решения уравнения равновесия. Результаты показали, что влияние изменения показателя степени на асимметрию растяжения—сжатия намного больше, чем изменение коэффициента асимметрии растяжения—сжатия. Перемещение нейтральной оси и кривизна поперечного сечения нелинейно отрицательно связаны с показателем степени. С увеличением показателя степени граница фазового преобразования смещалась ближе к срединному сечению. Перемещение нейтральной оси того же поперечного сечения нелинейно положительно связано с коэффициентом асимметрии растяжения—сжатия, а кривизна — нелинейно отрицательно. Фазовая граница на сжатой стороне балки смещалась ближе к срединному сечению по мере увеличения коэффициента асимметрии растяжения—сжатия. Результаты расчетов могут быть использованы в качестве ориентира при разработке и применении таких материалов.

Введение

Функционально-градиентный (FG) сплав с памятью формы (SMA) — модельный материал смеси SMA с другими материалами, широко применяемый во многих областях [1—9]. Например, NiTi—TiC [10], используемый благодаря эффективному поглощению энергии SMA и высокой прочности и стойкости к истиранию TiC [11, 12]. Причина того, что FG-SMA способен к фазовым преобразованиям, — наличие в его составе материала SMA. В [13] изучали некоторые основные свойства сплавов с памятью формы, такие как сверхэластичность, разное поведение при растяжении и сжатии, а также

переориентацию одиночного мартенсита. В [14], рассматривая влияние асимметрии растяжения—сжатия на изгибную деформацию балок SMA, описали два случая симметрии и асимметрии растяжения—сжатия с использованием двух функций преобразования, а затем обсудили влияние напряжения в разных сечениях балки и объемного содержания мартенсита на асимметрию растяжения—сжатия. В [15] проанализировали деформацию балок SMA при чистом изгибе и получили распределение напряжений по толщине. В [16] разделили консольную балку из SMA на разные области фазового преобразования в осевом направлении и определили деформационные характеристики ее свободного конца под действием сосредоточенной нагрузки в предположении, что деформация линейно распределяется по толщине. Большое количество численного моделирования и экспериментального анализа деформации изгиба SMA выполнено в [17]. В [18] модифицировали существующую модель состояния SMA с использованием теории композитных материалов и определили термомеханические свойства пластин FG-SMA. В [19] предложили аналитическое решение для предсказания деформирования FG-SMA с точки зрения зависимости напряжения от деформации при разных температурах. В [20] на основе теории микромеханики с учетом микросостава и взаимодействия материалов разработали микромеханическую модель состояния, пригодную для описания механических свойств материалов FG-SMA. В [21] изучали механику и поведение мартенситного преобразования осевых FG-балок из сплава с памятью формы с полным учетом свойств материала с использованием упрощенного линейного определяющего уравнения SMA и теории балки Бернулли—Эйлера. В [22] разработали модель консольной балки из функционально-градиентного пористого сплава с памятью формы, обобщающую модель ZM для плотных SMA с высокой степенью пористости. В [23] исследовали балки из пористого градиентного SMA с разной пористостью, применив подход усреднения композита, и получили теоретическое решение для балок при чистом изгибе с использованием теории текучести фон Мизеса и идеальной упругопластической модели. В [24] с помощью определяющего уравнения, соотношений линейной кинетики фазового преобразования слоев SMA и модели Танака и Нагака получили явное решение конструкционного отклика. Однако влияние объемного содержания SMA на асимметрию растяжения—сжатия балок FG-SMA изучено мало.

В настоящей работе для более точного описания нелинейного механического поведения балок из FG-SMA при чистом изгибе ввели коэффициент асимметрии растяжения—сжатия для количественной оценки этого эффекта, а также определения изменений местоположения нейтральной оси, кривизны и фазовой границы.

1. Изгибная деформация свободно опертых балок FG-SMA

1.1. Механическая модель FG-SMA. Рассмотрим балку FG-SMA длиной l , шириной b и толщиной h . Геометрия и координаты балки показаны на рис. 1. На балку действует равномерно распределенная нагрузка q .

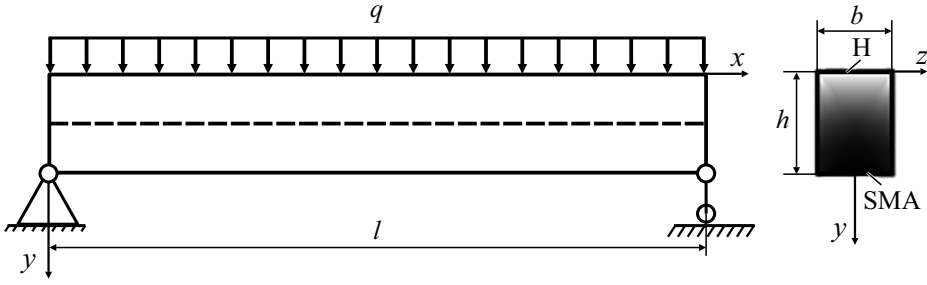


Рис. 1. Механическая модель балки FG-SMA.

Предположили, что балка FG-SMA состоит из материалов Н и SMA. Объемное содержание SMA непрерывно изменяется по толщине балки от нуля на верхней поверхности до 100% на нижней. Распределение объемного содержания SMA изменяется по закону степенной функции $f(y) = (y/h)^n$.

Деформацию ε в любом поперечном сечении балки запишем как

$$\varepsilon = \frac{y - y_i}{\rho}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma(y - y_i)}{E}, \quad (1)$$

где y_i — местоположение нейтральной оси на разных стадиях фазового преобразования; ρ — кривизна; σ — напряжение в поперечном сечении; E — модуль упругости.

Напряжения в материалах SMA и Н равны σ_1 и σ_H соответственно:

$$\sigma_{SMA} = E_{SMA} \varepsilon, \quad \sigma_H = E_H \varepsilon, \quad (2)$$

где E_{SMA} и E_H — модули упругости материалов SMA и Н соответственно.

Согласно уравнению состояния материала SMA [25] можно записать, что

$$\varepsilon_{ts} = \frac{\sigma_{ts}}{E_A}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{tf} = \varepsilon_L + \frac{\sigma_{tf}}{E_M}, \quad (4)$$

$$\sigma_{SMA} = \begin{cases} E_A \varepsilon_{t(c)}, & |\varepsilon_{t(c)}| \leq \varepsilon_{t(c)s}, \\ \sigma_{t(c)s} + E_1 (\varepsilon_{t(c)} - \varepsilon_{t(c)s}), & \varepsilon_{t(c)s} \leq |\varepsilon_{t(c)}| \leq \varepsilon_{t(c)f}, \\ \sigma_{t(c)f} + E_M (\varepsilon_{t(c)} - \varepsilon_{t(c)f}), & \varepsilon_{t(c)f} \leq |\varepsilon_{t(c)}|, \end{cases} \quad (5)$$

где нижние индексы t и с обозначают растяжение и сжатие соответственно; E_A и E_M — модули упругости аустенитной и мартенситной фаз соответственно; $E_1 = \frac{\sigma_{tf} - \sigma_{ts}}{\varepsilon_{tf} - \varepsilon_{ts}}$ — модуль упругости смешанной аустенитной и мартенситной фазы; ε_{ts} и σ_{ts} — критическая деформация и напряжение

при начале фазового преобразования на растянутой стороне балки; ε_{cs} и σ_{cs} — критическая деформация и напряжение при начале фазового преобразования на сжатой стороне соответственно; ε_{tf} и σ_{tf} — критическая деформация и напряжение в конце фазового преобразования на растянутой стороне соответственно; ε_{cf} и σ_{cf} — критическая деформация и напряжение в конце фазового преобразования на сжатой стороне соответственно; ε_L — эквивалентная остаточная деформация.

С учетом распределения SMA по толщине балки среднее напряжение в поперечном сечении запишем как

$$\sigma = [1 - f(y)]\sigma_H + f(y)\sigma_{SMA} . \tag{6}$$

1.2. Коэффициент асимметрии растяжения—сжатия. Для количественного описания асимметрии материала SMA в растянутой и сжатой областях балки введем коэффициент асимметрии растяжения—сжатия α [10]:

$$\alpha = \frac{\sigma_{cs} - \sigma_{ts}}{\sigma_{cs} + \sigma_{ts}} = \frac{\sigma_{cf} - \sigma_{tf}}{\sigma_{cf} + \sigma_{tf}} , \tag{7}$$

из которого следует, что

$$\sigma_{cs} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \sigma_{ts} ; \quad \sigma_{cf} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \sigma_{tf} . \tag{8}$$

1.3. Прогиб балки FG-SMA в середине пролета. Из теории сопротивления материалов следует, что нелинейное определяющее балки FG-SMA уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 w}{d^2 x} = \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} \sqrt{\frac{b \int_{-\varepsilon_c}^{\varepsilon_t} \sigma \varepsilon d\varepsilon}{M}} . \tag{9}$$

2. Фазовое преобразование

При увеличении нагрузки материал FG-SMA от стадии упругого деформирования переходит к стадии фазового преобразования. В соответствии с изменениями свойств материала в ходе изгиба балки FG-SMA можно выделить две фазы деформирования: начальную и преобразования.

2.1. Начальная фаза ($\varepsilon_t < \varepsilon_{ts}$). Когда в начале фазового преобразования деформация наружной поверхности растянутой области балки в определенном местоположении меньше критической, материал вблизи этого местоположения не подвергается никакому фазовому преобразованию. Это аустенитная фаза, перемещение нейтральной оси балки равно

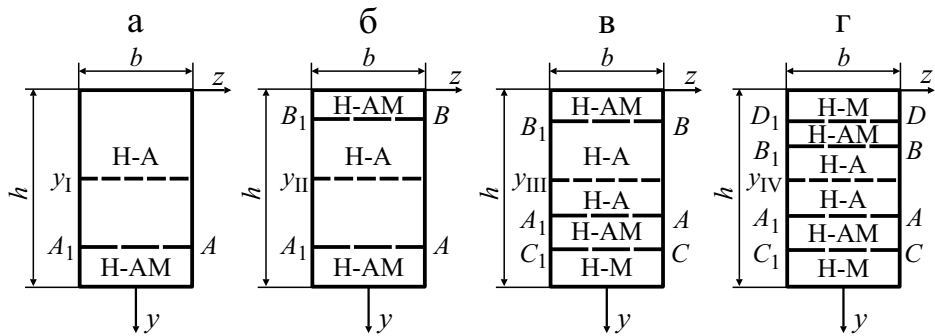


Рис. 2. Диаграммы фазового преобразования на стадиях I (а), II (б), III (в), IV (г).

нулю, деформация упругая. Распределение напряжений в поперечном сечении имеет вид

$$\sigma_x(y) = [E_H + (E_A - E_H)f(y)] \frac{y - y_0}{\rho}, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (10)$$

где y_0 — координата нейтральной оси в начальной фазе.

2.2. Фазовое преобразование ($\varepsilon_t \geq \varepsilon_{ts}$). Когда деформация ε_t на наружной поверхности растянутой области балки достигает критического значения ε_{ts} , материал вблизи поверхностного растянутого слоя претерпевает фазовое преобразование и нейтральная ось смещается. Как показано на рис. 2, область Н—А состоит из материала Н и аустенита, область Н—М — из материала Н и мартенсита, а область Н—АМ — из материала Н и смешанной фазы.

Когда деформации поверхностных слоев в растянутой и сжатой областях балки удовлетворяют неравенствам $\varepsilon_{ts} \leq \varepsilon_t \leq \varepsilon_{tf}$ и $|\varepsilon_c| \leq \varepsilon_{cs}$ соответственно, на растянутой стороне происходит фазовое преобразование SMA и образуется материал смешанной фазы. Материал на сжатой стороне балки в это время все еще находится в аустенитной фазе. Фазовая граница A_1A делит поперечное сечение на верхнюю часть, содержащую смешанную фазу и материал Н, и нижнюю часть, состоящую из аустенита — фазовое преобразование вступает в стадию I. Как показано на рис. 2—а, распределение напряжения σ_x в поперечном сечении имеет вид

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} [E_H + (E_A - E_H)f(y)] \frac{y - y_I}{\rho}, & 0 \leq y \leq y_{A_1A}, \\ f(y) \left[\sigma_{ts} + E_1 \left(\frac{y - y_I}{\rho} - \varepsilon_{ts} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_I}{\rho}, & y_{A_1A} \leq y \leq h, \end{cases} \quad (11)$$

где y_I — местоположение нейтральной оси в фазе I; $y_{A_1A} = y_I + \varepsilon_{ts}\rho$ — координата границы этой фазы A_1A .

Когда деформации поверхностных слоев в растянутой и сжатой областях удовлетворяют неравенствам $\varepsilon_{ts} \leq \varepsilon_t \leq \varepsilon_{tf}$ и $\varepsilon_{cs} \leq |\varepsilon_c| \leq \varepsilon_{cf}$ соответ-

ственно, вблизи наружной поверхности сжатой стороны возникает материал смешанной фазы и появляется новая граница раздела фаз B_1B , делящая поперечное сечение на части, содержащие смешанную фазу на обеих сторонах балки (растянутой и сжатой) и часть сечения вблизи нейтральной оси, состоящую из материала Н и аустенита, — фазовое преобразование вступает в стадию II. Как показано на рис. 2—б, распределение напряжения σ_x в поперечном сечении имеет вид

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} f(y) \left[-\sigma_{cs} + E_1 \left(\frac{y - y_{II}}{\rho} + \varepsilon_{cs} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{II}}{\rho}, & 0 \leq y \leq y_{A_1A}, \\ \left[E_H + (E_A - E_H) f(y) \right] \frac{y - y_{II}}{\rho}, & y_{A_1A} \leq y \leq y_{B_1B}, \\ f(y) \left[\sigma_{ts} + E_1 \left(\frac{y - y_{II}}{\rho} - \varepsilon_{ts} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{II}}{\rho}, & y_{B_1B} \leq y \leq h, \end{cases} \quad (12)$$

где y_{II} — местоположение нейтральной оси на стадии II фазового преобразования; $y_{A_1A} = y_{II} + \varepsilon_{ts}\rho$ и $y_{B_1B} = y_{II} - \varepsilon_{cs}\rho$ — координаты границ A_1A и B_1B в этой фазе соответственно.

Когда деформации поверхностных слоев в растянутой и сжатой областях удовлетворяют неравенствам $\varepsilon_{tf} \leq \varepsilon_t$ и $\varepsilon_{cs} \leq |\varepsilon_c| \leq \varepsilon_{cf}$ соответственно, часть смешанной фазы вблизи растянутой поверхности балки переходит в мартенсит, а материал сжатого слоя находится в смешанной фазе. Вторая новая фазовая граница делит сечение на четыре области фазового преобразования: первую, состоящую из материала Н и мартенсита; вторую, вблизи стороны растяжения, состоящую из смешанной фазы; третью, вблизи оси балки, состоящую из аустенита и материала Н; и четвертую, вблизи сжатой стороны, состоящую из смешанной фазы, — фазовое преобразование входит в стадию III. Как показано на рис. 2—в, распределение напряжения σ_x в поперечном сечении имеет вид

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} f(y) \left[-\sigma_{cs} + E_1 \left(\frac{y - y_{III}}{\rho} + \varepsilon_{cs} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{III}}{\rho}, & 0 \leq y \leq y_{A_1A}, \\ \left[E_H + (E_A - E_H) f(y) \right] \frac{y - y_{III}}{\rho}, & y_{A_1A} \leq y \leq y_{B_1B}, \\ f(y) \left[\sigma_{ts} + E_1 \left(\frac{y - y_{III}}{\rho} - \varepsilon_{ts} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{III}}{\rho}, & y_{B_1B} \leq y \leq y_{C_1C}, \\ f(y) \left[\sigma_{tf} + E_M \left(\frac{y - y_{III}}{\rho} - \varepsilon_{tf} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{III}}{\rho}, & y_{C_1C} \leq y \leq h, \end{cases} \quad (13)$$

где y_{III} — местоположение нейтральной оси в стадии фазового превраще-

ния III; $y_{A_1A} = y_{III} + \varepsilon_{ts}\rho$, $y_{B_1B} = y_{III} - \varepsilon_{cs}\rho$ и $y_{C_1C} = y_{III} + \varepsilon_{tf}\rho$ — координаты границ A_1A , B_1B и C_1C фазы на этой стадии соответственно.

Когда деформации поверхностных слоев в растянутой и сжатой областях удовлетворяют неравенствам $\varepsilon_{tf} \leq \varepsilon_t$ и $\varepsilon_{cf} \leq |\varepsilon_c|$ соответственно, материал вблизи поверхностных (растянутого и сжатого) слоев полностью превращается в мартенсит. Образовавшаяся новая фазовая граница D_1D делит поперечное сечение балки на пять областей фазового преобразования: первую и пятую вблизи растянутого и сжатого слоев, состоящие из материала Н и мартенсита; вторую и четвертую, примыкающие к ним и состоящие из смешанной фазы; третью область вблизи нейтральной оси, состоящую из материала Н и аустенита. Фазовое превращение окончательно переходит в стадию IV. Как показано на рис. 2—2, распределение напряжения σ_x в поперечном сечении имеет вид

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} f(y) \left[-\sigma_{cf} + E_M \left(\frac{y - y_{IV}}{\rho} + \varepsilon_{cf} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho}, & 0 \leq y \leq y_{A_1A}, \\ f(y) \left[-\sigma_{cs} + E_1 \left(\frac{y - y_{IV}}{\rho} + \varepsilon_{cs} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho}, & y_{A_1A} \leq y \leq y_{B_1B}, \\ \left[E_H + (E_A - E_H) f(y) \right] \frac{y - y_{IV}}{\rho}, & y_{B_1B} \leq y \leq y_{C_1C}, \\ f(y) \left[\sigma_{ts} + E_1 \left(\frac{y - y_{IV}}{\rho} - \varepsilon_{ts} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho}, & y_{C_1C} \leq y \leq y_{D_1D}, \\ f(y) \left[\sigma_{tf} + E_M \left(\frac{y - y_{IV}}{\rho} - \varepsilon_{tf} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho}, & y_{D_1D} \leq y \leq h, \end{cases} \quad (14)$$

где y_{IV} — местоположение нейтральной оси в стадии IV фазового преобразования; $y_{A_1A} = y_{III} + \varepsilon_{ts}\rho$, $y_{B_1B} = y_{III} - \varepsilon_{cs}\rho$, $y_{C_1C} = y_{III} + \varepsilon_{tf}\rho$ — $y_{D_1D} = y_{IV} - \varepsilon_{cf}\rho$ — координаты фазовых границ A_1A , B_1B , C_1C и D_1D на этой стадии соответственно.

4. Уравнения равновесия

Имеем следующие уравнения равновесия поперечного сечения: на начальной стадии

$$\int \sigma_x(y) dA = b \int_0^h [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_0}{\rho} dy = 0, \quad (15)$$

$$M(x) = \int \sigma_x(y) y dA = b \int_0^h y [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_0}{\rho} dy = \frac{qx^2}{2}, \quad (16)$$

на стадии I

$$\int \sigma_x(y) dA = b \int_0^{y_1 + \varepsilon_{ts} \rho} [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_I}{\rho} dy +$$

$$+ b \int_{y_1 + \varepsilon_{ts} \rho}^h \left\{ f(y) [\sigma_{ts} + E_1 \left(\frac{y - y_I - \varepsilon_{ts}}{\rho} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_I}{\rho} \right\} dy = 0, \quad (17)$$

$$M(x) = \int \sigma_x(y) y dA = b \int_0^{y_1 + \varepsilon_{ts} \rho} [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_I}{\rho} y dy +$$

$$+ b \int_{y_1 + \varepsilon_{ts} \rho}^h \left\{ f(y) [\sigma_{ts} + E_1 \left(\frac{y - y_I - \varepsilon_{ts}}{\rho} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_I}{\rho} \right\} y dy, \quad (18)$$

на стадии II

$$\int \sigma_x(y) dA = b \int_0^{y_{II} - \varepsilon_{cs} \rho} \left\{ f(y) [-\sigma_{cs} + E_1 \left(\frac{y - y_{II} + \varepsilon_{cs}}{\rho} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{II}}{\rho} \right\} dy +$$

$$+ b \int_{y_{II} - \varepsilon_{cs} \rho}^{y_{II} + \varepsilon_{ts} \rho} [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_{II}}{\rho} dy +$$

$$+ b \int_{y_{II} + \varepsilon_{ts} \rho}^h \left\{ f(y) [\sigma_{ts} + E_1 \left(\frac{y - y_{II} - \varepsilon_{ts}}{\rho} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{II}}{\rho} \right\} dy = 0, \quad (19)$$

$$M(x) = \int \sigma_x(y) y dA = b \int_0^{y_{II} - \varepsilon_{cs} \rho} \left\{ f(y) [-\sigma_{cs} + E_1 \left(\frac{y - y_{II} + \varepsilon_{cs}}{\rho} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{II}}{\rho} \right\} y dy +$$

$$+ b \int_{y_{II} - \varepsilon_{cs} \rho}^{y_{II} + \varepsilon_{ts} \rho} [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_{II}}{\rho} y dy +$$

$$+ b \int_{y_{II} + \varepsilon_{ts} \rho}^h \left\{ f(y) [\sigma_{ts} + E_1 \left(\frac{y - y_{II} - \varepsilon_{ts}}{\rho} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{II}}{\rho} \right\} y dy, \quad (20)$$

на стадии III

$$\sigma(x) = \int \sigma_x(y) dA = b \int_0^{y_{III} - \varepsilon_{cs} \rho} \left\{ f(y) [-\sigma_{cs} + E_1 \left(\frac{y - y_{III} + \varepsilon_{cs}}{\rho} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{III}}{\rho} \right\} dy +$$

$$+ b \int_{y_{III} - \varepsilon_{cs} \rho}^{y_{III} + \varepsilon_{ts} \rho} [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_{III}}{\rho} y dy +$$

$$+ b \int_{y_{III} + \varepsilon_{ts} \rho}^{y_{III} + \varepsilon_{tf} \rho} \left\{ f(y) [\sigma_{ts} + E_1 \left(\frac{y - y_{III} - \varepsilon_{ts}}{\rho} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{III}}{\rho} \right\} dy +$$

$$+ b \int_{y_{III} + \varepsilon_{tf} \rho}^h \left\{ f(y) [\sigma_{tf} + E_M \left(\frac{y - y_{III} - \varepsilon_{tf}}{\rho} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{III}}{\rho} \right\} dy = 0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
M(x) = \int \sigma_x(y) y dA = & b \int_0^{y_{III} - \varepsilon_{cs} \rho} \left\{ f(y) [-\sigma_{cs} + E_1 \left(\frac{y - y_{III}}{\rho} + \varepsilon_{cs} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{III}}{\rho} \right\} y dy + \\
& + b \int_{y_{III} - \varepsilon_{cs} \rho}^{y_{III} + \varepsilon_{ts} \rho} [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_{III}}{\rho} y dy + \\
& + b \int_{y_{III} + \varepsilon_{ts} \rho}^{y_{III} + \varepsilon_{tf} \rho} \left\{ f(y) [\sigma_{ts} + E_1 \left(\frac{y - y_{III}}{\rho} - \varepsilon_{ts} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{III}}{\rho} \right\} y dy + \\
& + b \int_{y_{III} + \varepsilon_{tf} \rho}^h \left\{ f(y) [\sigma_{tf} + E_M \left(\frac{y - y_{III}}{\rho} - \varepsilon_{tf} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{III}}{\rho} \right\} y dy, \quad (22)
\end{aligned}$$

на стадии IV

$$\begin{aligned}
\int \sigma_x(y) dA = & b \int_0^{y_{IV} - \varepsilon_{cf} \rho} \left\{ f(y) [-\sigma_{cf} + E_M \left(\frac{y - y_{IV}}{\rho} + \varepsilon_{cs} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho} \right\} dy + \\
& + b \int_{y_{IV} - \varepsilon_{cf} \rho}^{y_{IV} - \varepsilon_{cs} \rho} \left\{ f(y) [-\sigma_{cs} + E_1 \left(\frac{y - y_{IV}}{\rho} + \varepsilon_{cs} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho} \right\} dy + \\
& + b \int_{y_{IV} - \varepsilon_{cs} \rho}^{y_{IV} + \varepsilon_{ts} \rho} [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_{IV}}{\rho} dy + \\
& + b \int_{y_{IV} + \varepsilon_{ts} \rho}^{y_{IV} + \varepsilon_{tf} \rho} \left\{ f(y) [\sigma_{ts} + E_1 \left(\frac{y - y_{IV}}{\rho} - \varepsilon_{ts} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho} \right\} dy + \\
& + b \int_{y_{IV} + \varepsilon_{tf} \rho}^h \left\{ f(y) [\sigma_{tf} + E_M \left(\frac{y - y_{IV}}{\rho} - \varepsilon_{tf} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho} \right\} dy = 0, \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(x) = \int \sigma_x(y) y dA = & b \int_0^{y_{IV} - \varepsilon_{cf} \rho} \left\{ f(y) [-\sigma_{cf} + E_M \left(\frac{y - y_{IV}}{\rho} + \varepsilon_{cs} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho} \right\} y dy + \\
& + b \int_{y_{IV} - \varepsilon_{cf} \rho}^{y_{IV} - \varepsilon_{cs} \rho} \left\{ f(y) [-\sigma_{cs} + E_1 \left(\frac{y - y_{IV}}{\rho} + \varepsilon_{cs} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho} \right\} y dy + \\
& + b \int_{y_{IV} - \varepsilon_{cs} \rho}^{y_{IV} + \varepsilon_{ts} \rho} [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_{IV}}{\rho} y dy + \\
& + b \int_{y_{IV} + \varepsilon_{ts} \rho}^{y_{IV} + \varepsilon_{tf} \rho} \left\{ f(y) [\sigma_{ts} + E_1 \left(\frac{y - y_{IV}}{\rho} - \varepsilon_{ts} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho} \right\} y dy + \\
& + b \int_{y_{IV} + \varepsilon_{tf} \rho}^h \left\{ f(y) [\sigma_{tf} + E_M \left(\frac{y - y_{IV}}{\rho} - \varepsilon_{tf} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho} \right\} y dy. \quad (24)
\end{aligned}$$

Изгибающий момент $M(x)$ в приведенных уравнениях равен $M(x) = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2$, где x — расстояние местоположения поперечного сечения от левого конца балки.

На начальной стадии координату местоположения нейтральной оси можно определить непосредственно из уравнения осевого равновесия

$$y_0 = \frac{(n+1)(nE_H + 2E_A)}{2(n+2)(nE_H + E_A)} h \quad (25)$$

На стадии фазы преобразования значения ρ и y_i можно определить, подставив функцию распределения соответствующих нормальных напряжений в уравнение равновесия.

4. Результаты и обсуждение

В [26] задачу чистого изгиба балки FG-SMA решили на основе модели состояния SMA и определили относительное среднее напряжение в поперечном сечении балки, используя параметры материала и геометрические размеры, приведенные в [26]. При $n = 1$ и $M = 50$ кН/м зависимость среднего напряжения в поперечном сечении, согласующаяся с результатами [26], получена с применением теории, изложенной в настоящей работе (рис. 3). Это доказывает, что формулу, полученную из модели состояния материала SMA, можно использовать при исследовании механических свойств материала FG-SMA при нечистом изгибе.

Механическая модель свободно опертой балки FG-SMA длиной $l = 200$ мм, высотой $h = 20$ мм, шириной $b = 10$ мм, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой $\alpha = 180$ кН/м, показана на рис. 1. С учетом симметричности приложения нагрузки относительно пролета балки для анализа и обсуждения рассмотрели половину балки. Параметры

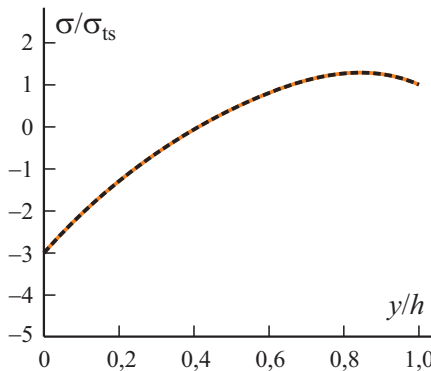


Рис. 3. Распределения напряжения σ / σ_{ts} по координате y / h в балке FG-SMA, рассчитанные в [23] (---) и настоящей работе (—).

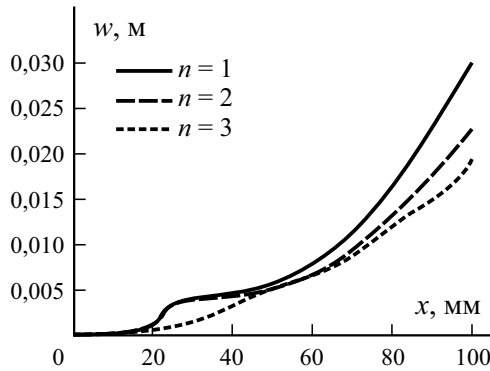


Рис. 4. Изменение прогиба w по координате x в балке при разных значениях показателя степени n и стадии фазового преобразования.

материала FG-SMA следующие: $E_A = 70$ ГПа, $E_M = 30$ ГПа, $E_H = 210$ ГПа, $\sigma_{ts} = 290$ МПа, $\sigma_{tf} = 380$ МПа, $\varepsilon_L = 0,069$ [27, 28].

На рис. 4 приведена зависимость прогиба балки w от координаты x при разных значениях показателя степени n , стадиях фазового преобразования и коэффициенте асимметрии растяжения—сжатия $\alpha = 0,1$. Из данных рисунка видно, что на начальном этапе зависимость между средним прогибом балки и местоположением поперечного сечения изменяется линейно. На стадии фазового преобразования прогиб балки в середине пролета становится тем больше, чем ближе сечение к середине пролета. В силу малого модуля упругости смешанной фазы скорость увеличения прогиба возрастает после вступления в стадию фазового преобразования. В то же время прогиб балки уменьшается с увеличением показателя степени n .

Распределение среднего нормального напряжения σ_x в середине пролета по высоте поперечного сечения при показателе степени $n=1$ приведено на рис. 5—*a*. Из данных рисунка видно, что с учетом нелинейности материала и смещения нейтральной оси распределение напряжения σ_x асимметрично относительно растянутой и сжатой сторон балки, а напряжение на сжатой стороне значительно больше, чем на растянутой. Чем больше коэффициент асимметрии растяжения—сжатия, тем меньше максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении и значение нормального напряжения на одной и той же относительной высоте; однако влияние коэффициента асимметрии растяжения—сжатия на напряжение σ_x очень слабое.

На рис. 5—*б* показано распределение среднего нормального напряжения σ_x в середине пролета по высоте поперечного сечения при разных значениях показателя степени n и коэффициенте асимметрии растяжения—сжатия $\alpha = 0,1$. Видно, что влияние показателя степени на напряжение в растянутом слое значительно меньше, чем в сжатом. Чем больше показатель степени, тем больше максимальное среднее

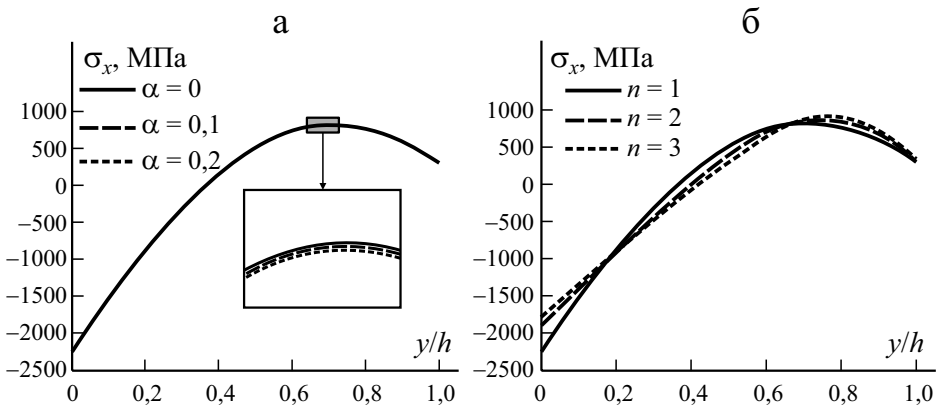


Рис. 5. Распределение нормального напряжения σ_x по координате y/h в срединном поперечном сечении при разных значениях коэффициента асимметрии растяжения—сжатия α и $n=1$ (а) и показателя степени n и $\alpha=0,1$ (б).

растягивающее и меньше по модулю максимальное среднее сжимающее напряжение.

Изменение местоположения нейтральной оси в поперечном сечении балки при разных значениях коэффициента асимметрии растяжения—сжатия и $n=1$ иллюстрируют данные рис. 6—а. Видно, что изменение коэффициента асимметрии растяжения—сжатия α слабо влияет на смещение нейтральной оси. Поскольку материал нелинейный, фазовое преобразование на растянутой и сжатой сторонах балки асимметрично, что ослабляет влияние коэффициента α на смещение нейтральной оси. Возле опоры смещения нейтральной оси не происходит. Когда деформация балки переходит в стадию фазового преобразования, нейтральная ось начинает смещаться в сторону сжатой области. Чем ближе она к

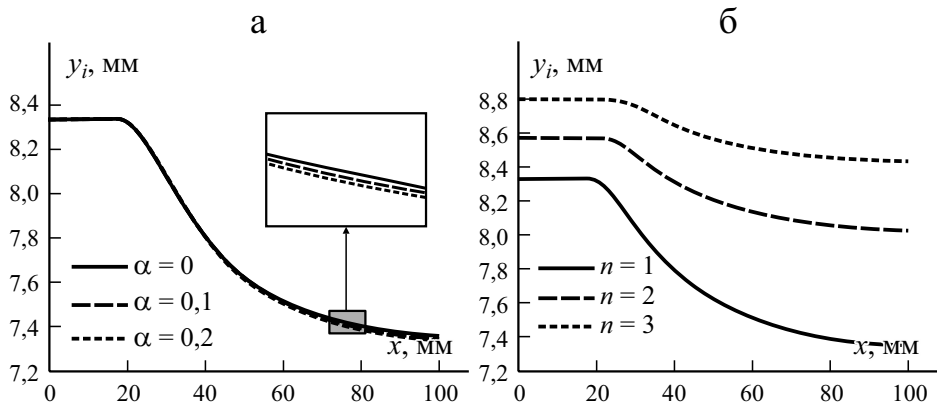


Рис. 6. Изменение координаты y_i нейтральной оси в поперечном сечении балки при разных значениях коэффициента α и $n=1$ (а) и показателя степени n и $\alpha=0,1$ (б).

середине пролета, тем меньше наклон кривой и тем медленнее изменение. Чем больше коэффициент α , тем больше смещение нейтральной оси.

На рис. 6—б показано изменение местоположения нейтральной оси балки при разных значениях показателя степени n и $\alpha = 0,1$. При сравнении с данными рис. 5—а видно, что влияние изменения показателя степени на смещение местоположения нейтральной оси значительно больше, чем изменения коэффициента асимметрии растяжения—сжатия. На начальном этапе чем больше показатель степени, тем дальше нейтральная ось от сжатой стороны. С началом фазового преобразования чем больше показатель степени, тем меньше максимальное смещение нейтральной оси. При большем значении показателя степени нейтральная ось в том же поперечном сечении находится дальше от сжатой стороны, а наклон кривой и амплитуда роста смещения меньше.

Зависимость кривизны оси балки от коэффициента асимметрии растяжения—сжатия α при $n=1$ приведена на рис. 7—а. Видно, что коэффициент α очень слабо влияет на кривизну и кривые практически совпадают. На начальной стадии деформирования материала кривизна вблизи опоры изменяется линейно и коэффициент α не влияет на ее наклон. После начала фазового превращения, когда поперечное сечение постепенно приближается к середине пролета, увеличение кривизны сначала нарастает, а затем уменьшается. Чем ближе поперечное сечение к середине пролета, тем больше кривизна, наклон кривой и меньше скорость увеличения кривизны. Чем больше коэффициент асимметрии растяжения—сжатия, тем меньше кривизна в одном и том же поперечном сечении.

На рис. 7—б показано изменение кривизны оси балки при разных значениях показателя степени и $\alpha = 0,1$. Наклон кривизны линейный на начальном этапе уменьшается с увеличением показателя степени. В ходе фазового преобразования чем больше показатель степени, тем меньше максимальная кривизна балки и значение кривизны в одном и том же местоположении поперечного сечения.

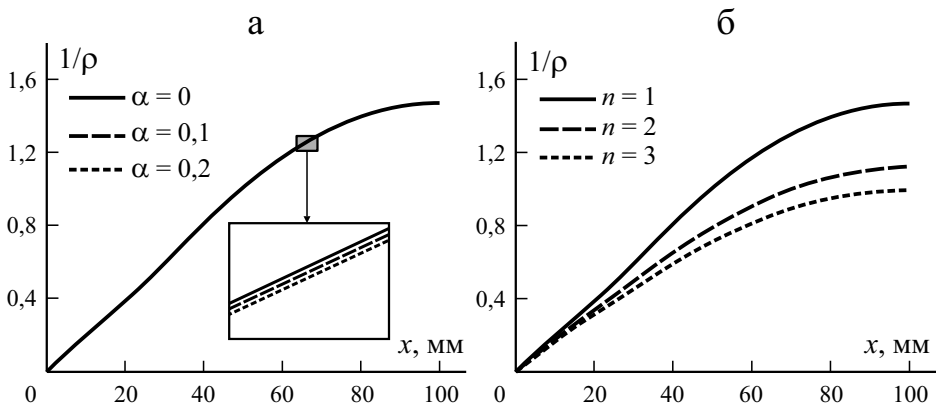


Рис. 7. Изменение кривизны $1/\rho$ балки при разных значениях коэффициента α и $n=1$ (а) и показателя степени n и $\alpha=0,1$ (б).

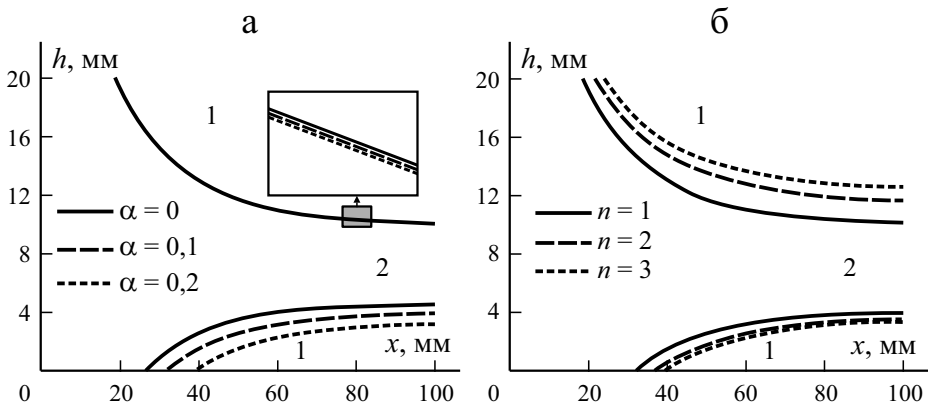


Рис. 8. Изменение фазовых границ в балке при разных значениях коэффициента α и $n = 1$ (а) и показателя степени n и $\alpha = 0,1$ (б): 1 и 2 — фазы мартенсита и аустенита соответственно.

Изменение местоположения фазовой границы балки при разных значениях коэффициента асимметрии растяжения—сжатия и $n = 1$ иллюстрируют данные рис. 8—а. На начальном этапе деформирования фазовое преобразование отсутствует. В начальной стадии фазового преобразования как наклон кривой, так и скорость расширения границы раздела фаз уменьшаются по мере приближения поперечного сечения к середине пролета. Влияние коэффициента асимметрии растяжения—сжатия на сжатой стороне больше, чем на растянутой. Чем больше коэффициент α , тем дальше местоположение границы раздела фаз от растянутой стороны балки и тем ближе местоположение, в котором фазовая граница появляется в середине пролета.

На рис. 8—б показано изменение фазовой границы балки при разных показателя степени и $\alpha = 0,1$. Видно, что влияние показателя степени на изменение границы раздела фаз с растянутой стороны значительно больше, чем с сжатой. С увеличением показателя степени границы раздела фаз возникают как на растянутой, так и сжатой сторонах, и приближаются к середине пролета балки.

Заключение

На основе теории деформирования балки при изгибе и соотношения между напряжением и деформацией для материала из сплава с памятью формы проанализировали нелинейное механическое поведение балки FG-SMA при нечистом изгибе. Основные выводы анализа заключаются в следующем.

1. Изменение объемного содержания SMA по толщине материала FG-SMA носит нелинейный характер, что приводит к асимметрии между растянутой и сжатой областями балки при изгибе. Эта особенность

уменьшает влияние коэффициента асимметрии растяжения—сжатия на фазовое преобразование балок FG-SMA.

2. Максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении, нормальное напряжение на той же относительной высоте и кривизна нелинейно отрицательно связаны с коэффициентом асимметрии растяжения—сжатия. Смещение нейтральной оси нелинейно положительно связано с коэффициентом асимметрии растяжения—сжатия. Чем больше коэффициент асимметрии растяжения—сжатия, тем дальше граница фаз на растянутой поверхности слоя, а местоположение границы раздела фаз на сжатой стороне ближе к середине пролета.

3. Максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении и относительная высота при максимальном нормальном напряжении нелинейно положительно связаны с показателем степени, а максимальное смещение нейтральной оси в одном и том же сечении, изменение начальной стадии и кривизна связаны нелинейно отрицательно с показателем степени. С увеличением показателя степени местоположения границ раздела фаз на растянутой и сжатой сторонах балки приближаются к середине пролета.

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (11472123—11862012).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Birnbaum A. J., Satoh G., and Yao, Y. L.* Functionally grading the shape memory response in NiTi films: Laser irradiation // *J. Appl. Phys.* — 2009. — Vol. 106, No. 4. — P. 1—8.
2. *Nam T. H., Yu C. A., Lee Y. J., et al.* Functionally graded Ti-Ni shape memory alloys // *Materials Sci. Forum.* — 2007. — Vol. 539—543, — P. 3169—3172.
3. *Lagoudas D. C. and Dimitirs C.* Shape Memory Alloys: Modeling Engineering Application. — Springer, US, 2008.
4. *Qidwai M. A. and Lagoudas D. C.* Numerical implementation of a shape memory alloy thermomechanical constitutive model using return mapping algorithms // *Int. J. Numerical Methods in Eng.* — 2015. — Vol. 47, No. 6. — P. 1123—1168.
5. *Tobushi H., Date K., and Miyamoto K.* Characteristics and development of shape-memory alloy heat engine // *J. Solid Mech. Mater. Eng.* — 2010. — Vol. 4, No. 7. — P. 1094—1102.
6. *Kurzawa M. and Stachowiak D.* Investigation on thermo-mechanical behavior of shape memory alloy actuator // *Arch. Electrical Eng.* — 2017. — Vol. 66, No. 4. — P. 751—760.
7. *Mineta T., Mitsui T., Watanabe Y., et al.* An active guide wire with shape memory alloy bending actuator fabricated by room temperature process // *Sensors & Actuators A Phys.* — 2001. — Vol. 97, — P. 632—637.
8. *Zbiciak A.* Dynamic analysis of pseudoelastic SMA beam // *Int. J. Mech. Sci.* — 2010. — Vol. 52, No. 1. — P. 56—64.
9. *Brinson L. C. and Lammering R.* Finite element analysis of the behavior of shape memory alloys and their applications // *Int. J. Solids Struct.* — 1993. — Vol. 30, No. 26. — P. 3261—3280.

10. *Burkes et al.* Combustion synthesis and mechanical properties of dense NiTi-TiC intermetallic-ceramic composites // *Metall. Mater. Trans. A.* — 2006. — Vol. 37, No. 1. — P. 235—242.
11. *Burkes D. E. and Moore J. J.* Microstructure and kinetics of a functionally graded NiTi-TiCx composite produced by combustion synthesis // *J. Alloys Compd.* — 2007. — Vol. 430, Nos. 1—2. — P. 274—281.
12. *Cheng Y. et al.* Surface characteristics and corrosion resistance properties of TiNi shape memory alloy coated with Ta // *Surf. Coat. Technol.* — 2004. — Vol. 186, No. 3. — P. 346—352.
13. *Auricchio F., Taylor R. L., and Lubliner J.* Shape-memory alloys: macromodelling and numerical simulations of the superelastic behavior // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* — 1997. — Vol. 146, Nos. 3—4. — P. 281—312.
14. *Mirzaeifar R. et al.* On superelastic bending of shape memory alloy beams // *Int. J. Solids Struct.* — 2013. — Vol. 50, No. 10. — P. 1664—1680.
15. *Atanackovi T. and Achenbach M.* Moment-curvature relations for a pseudoelastic beam // *Continuum Mechanics and Thermodynamics.* — 1989. — Vol. 1, No. 1. — P. 73—80.
16. *Eshghinejad A. and Elahinia M.* Exact solution for bending of shape memory alloy superelastic beams // *ASME 2011 Conf. on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems*, 2015.
17. *De La Flor S., Urbina C., and Ferrando F.* Asymmetrical bending model for NiTi shape memory wires: numerical simulations and experimental analysis // *Strain.* — 2011. — Vol. 47, No. 3. — P. 255—267.
18. *Liu B. F., Ni P., and Zhang W.* On Behaviors of Functionally Graded SMAs under Therm-Mechanical Coupling // *Acta Mechanica Solida Sinica.* — 2016. — Vol. 29, No. 1. — P. 46—58.
19. *Shariat B. S., Meng Q., Mahmud A. S., et al.* Functionally graded shape memory alloys: Design, fabrication and experimental evaluation // *Mater. Des.* — 2017. — Vol. 124, No. 1. — P. 225—237.
20. *Xue L. J., Dui G. S. and Liu B. F.* Micromechanical constitutive model of functionally graded shape memory alloy // *Eng. Mech.* — 2014. — Vol. 31, No. 2. — P. 225—229 [in Chinese].
21. *Kang Z., Wang Z., Zhou B., and Xue S.* Galerkin Weighted residual method for axially functionally graded shape memory alloy beams // *J. Mech.* — 2019. — Vol. 36, No. 3. — P. 331—345.
22. *Viet N. V. and Zaki W.* Bending model for functionally graded porous shape memory alloy/poroelastic composite cantilever beams // *Appl. Math. Modelling.* — 2021. — Vol. 97, No. 9. — P. 398—417.
23. *Zhang Y., Liu B., Du C., and Zhou R.* On the behaviors of porous shape memory alloy beam with gradient porosity under pure bending // *J. Mater. Res.* — 2018. — Vol. 34, No. 2. — P. 282—289.
24. *Sepiani H., Ebrahimi F., and Karimipour H.* A mathematical model for smart functionally graded beam integrated with shape memory alloy actuators // *J. Mech. Sci. Technol.* — 2009. — Vol. 23, No. 12. — P. 3179—3190.
25. *Wang J. C. and Yang J. N.* Nonlinear analysis of shape memory alloy beam under the thermal and the mechanical loads // *Matéria (Rio de Janeiro).* — 2019. — Vol. 24, No. 1. — e—12297.
26. *Xue L. J., Dui G. S., and Liu B. F.* Theoretical analysis of pure bending of functionally graded shape memory composite beams // *J. Mech. Eng.* — 2012. — Vol. 48, No. 22. — P. 40—45 [in Chinese].

27. *Bo Z., Lagoudas D. C., and Miller D.* Material characterization of SMA actuators under nonproportional thermomechanical loading // *Smart Struct. Mater.: Math. Control in Smart Struct. Int. Soc. Optics Photonics.* — 1999.

28. *Zhu Y. P. and Dui G. S.* A macro-constitutive model of polycrystalline NiTi SMAs including tensile-compressive asymmetry and torsion pseudoelastic behaviors // *Int. J. Eng. Sci.* — 2010. — Vol. 48, No. 12. — P. 2099—2106.

Поступила в редакцию 15.07.2021

Окончательный вариант поступил 08.03.2022

Received July 15, 2021 (March 8, 2022)

*А. А. Паньков**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990 Россия

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НА ЭФФЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ПЬЕЗОКОМПОЗИТА

*А. А. Pan'kov**

EFFECT OF THE INITIAL STRESS STATE ON THE EFFECTIVE PROPERTIES OF PIEZOCOMPOSITE

Keywords: composite, effective properties, initial stress state, electromagnetic elasticity, piezoeffect, magnetostriction, numerical modeling

A new numerical-analytical solution of the problem on the “effective modulus” of statistical mechanics of piezocomposites is obtained considering the presence of an initial stressed electromagnetic-elastic state of an irregular structure with ellipsoidal inhomogeneities. The Green function method for a homogeneous piezoelectromagnetic elastic medium is used. The validity of the new solution is confirmed by comparing it with the known asymptotic solution for the case of an elastic laminated composite in the presence of an initial stress state of its layers. Results of a numerical analysis of influence of the initial stress state on the effective properties of elastic two-phase composites with layered, unidirectional-fibrous and granular structures are presented. For a composite with spherical inclusions, the appearance of “induced” anisotropy at the macrolevel, owing to the presence of the initial stress state of the structure, was revealed. A numerical analysis of influence of the axisymmetric macrolevel initial stress state on the effective transversely isotropic electroelastic properties of a PZT-4/fluoroplastic composite with unidirectional piezoelectric fibers is presented. The effective characteristics of the piezocomposite on which the initial stress state had a significant effect were revealed.

*Автор, с которым следует вести переписку: a_a_pankov@mail.ru
Corresponding author: a_a_pankov@mail.ru

Ключевые слова: композит, свойства эффективные, состояние напряженное начальное, электромагнитоупругость, пьезоэффект, магнитоотрицательность, моделирование численное

Получено новое численно-аналитическое решение задачи “эффективного модуля” статистической механики пьезокомпозитов с учетом наличия начального напряженного электромагнитоупругого состояния нерегулярной структуры с эллипсоидальными неоднородностями. Использован метод функций Грина для однородной пьезоэлектромагнитоупругой среды. Новые решения подтверждены сравнением с известным асимптотическим решением для случая упругого слоистого композита при наличии начального напряженного состояния слоев. Представлены результаты численного анализа влияния начального напряженного состояния на эффективные свойства упругих двухфазных композитов со слоистой, однонаправленно-волокнистой и гранулированной структурами. Для композита со сферическими включениями выявлено появление на макроуровне “наведенной” анизотропии, обусловленной наличием начального напряженного состояния структуры. Дан численный анализ влияния осесимметричного макроуровневого начального напряженного состояния на эффективные трансверсально-изотропные электроупругие свойства композита PZT-4/фторопласт с однонаправленными пьезоэлектрическими волокнами. Выявлены эффективные характеристики пьезокомпозита, на которые начальное напряженное состояние оказывает существенное влияние.

Введение

Нелинейные эффекты деформирования композитов обусловлены, в общем, различными факторами, один из которых — наличие в материале начального напряженного состояния [1—3]. Изучение закономерностей и эффектов влияния начального напряженного состояния элементов структуры материала на особенности его последующего нагружения — одна из задач механики композитов [1—9]. Решение этой задачи актуально для различных практических приложений, в частности, ультразвукового неразрушающего контроля напряженного состояния нагруженных конструкций [10], методов геомеханики и сейсмических исследований [11]. “Линеаризованный подход” [3, 6, 7, 12, 13] теории упругости использован ранее для математического моделирования распространения упругих волн в структурно-неоднородных упругих средах с начальным напряженным состоянием [14—16]. Этот подход использован также для нахождения асимптотических решений эффективных свойств упругих композитов с идеально периодическими начально-напряженными структурами [17—20], например, когда начальное напряженное состояние

слоистой или однонаправлено-волокнистой структуры обусловлено их тепловым нагревом [17]. Изучение эффектов влияния начального напряженного состояния на свойства и поведение материала актуально также для пьезоэлектрических и/или пьезомагнитных (магнитострикционных) композитов, которые интегрируются в современные “интеллектуальные” конструкции в качестве информационных элементов, датчиков и/или актуаторов систем управления акустическими и/или аэродинамическими характеристиками поверхностей, геометрической формой, напряженным состоянием, демпфированием вибраций конструкции [21]. Математическое моделирование поведения пьезоактивных композитов на микро-, макроуровнях и прогнозирование их эффективных свойств основывается на постановке и решении связанных краевых задач электромагнитоупругости для микронеоднородной представительной области с использованием методов механики композитов, в частности, асимптотических методов [17—20, 22] и методов на основе двоякопериодических комплексных функций [23] для идеально периодических структур и методов статистической механики композитов для нерегулярных структур [24—26]. Ранее в рамках “обобщенного сингулярного приближения” [25], основанного на методе функций Грина, получены решения связанных стохастических краевых задач электромагнитоупругости для нерегулярных случайных, в том числе квазипериодических, пьезоактивных структур композитов [27, 28]. Линеаризованный подход теории упругости для тела с начальным напряженным состоянием обобщен на магнитоэлектрорупругий материал [29]. Численный анализ динамического поведения пьезоэлектрических структур с учетом начального электромеханического напряженного состояния элементов структуры дан в [30].

Цель работы — численно-аналитическое решение задачи “эффективного модуля” для пьезоактивного композита с начально-напряженной структурой из пьезоэлектрических магнитострикционных фаз в рамках обобщенного сингулярного приближения статистической механики композитов [25, 28].

1. Постановка задачи

Пусть представительная область \mathbf{V} композита состоит из некоторого числа F однородных трансверсально-изотропных пьезоэлектромагнитных фаз ($f = \overline{1, F}$), плоскости изотропии которых лежат в координатной плоскости $\eta_1\eta_2$, ось поляризации η_3 . Взаимное нерегулярное (случайное) расположение фаз в объеме композита задаем через индикаторные функции $i_f(\mathbf{r})$ фаз, для которых $i_f = 1$ при $\mathbf{r} \in \mathbf{V}_f$, $i_f = 0$ при $\mathbf{r} \notin \mathbf{V}_f$, где \mathbf{V}_f — область f -й фазы в $\mathbf{V} = \bigcup_{f=1}^F \mathbf{V}_f$. В области \mathbf{V} композита имеем некоторое начальное равновесное электромагнитоупругое состояние $\zeta_0 = \{\boldsymbol{\sigma}^0, \mathbf{D}^0, \mathbf{B}^0\}$ в виде полей начальных механических напряжений $\boldsymbol{\sigma}^0$,

электрической \mathbf{D}^0 и магнитной \mathbf{B}^0 индукций, обусловленных действием на композит некоторых начальных внешних механических нагрузок [1—20] и/или электромагнитных полей [29, 30], и, как следствие, имеют ненулевые осредненные (макроскопические) значения $\sigma^{*0} \equiv \langle \sigma^0 \rangle$, $\mathbf{D}^{*0} \equiv \langle \mathbf{D}^0 \rangle$, $\mathbf{B}^{*0} \equiv \langle \mathbf{B}^0 \rangle$, где $\langle \dots \rangle = 1/V \int_V \dots d\mathbf{r}$ — оператор осреднения по области V . Значения $\sigma^{*0} = 0$, $\mathbf{D}^{*0} = 0$, $\mathbf{B}^{*0} = 0$ имеем для случая наличия самоуравновешенных остаточных напряжений σ^0 и индукций \mathbf{D}^0 , \mathbf{B}^0 внутри области V после ее разгрузки на макроуровне. Начальные поля σ^0 , \mathbf{D}^0 , \mathbf{B}^0 удовлетворяют уравнениям равновесия $\sigma_{ij,j}^0 = 0$ и непрерывности $D_{i,i}^0 = 0$, $B_{i,i}^0 = 0$.

При последующем (дополнительном к начальному) электромеханическом нагружении области V композита возникающие поля напряжений σ и индукций \mathbf{D} , \mathbf{B} удовлетворяют уравнениям равновесия [1, 20] и непрерывности [29, 30] вида

$$(\sigma_{ij} + \sigma_{kj}^0 u_{i,k}),_{,j} = 0, \quad (D_j + D_k^0 u_{j,k}),_{,j} = 0, \quad (B_j + B_k^0 u_{j,k}),_{,j} = 0 \quad (1)$$

с учетом поправок (дополнительных слагаемых), обусловленных наличием заданных начальных полей σ^0 , \mathbf{D}^0 , \mathbf{B}^0 и дополнительного искомого поля перемещений \mathbf{u} . Первое уравнение в (1) может быть преобразовано к виду

$$\sigma_{ij,j} + \sigma_{kj}^0 u_{i,k,j} = 0$$

с учетом выполнения уравнений равновесия $\sigma_{kj,j}^0 = 0$ для поля σ^0 . В (1) напряжения σ и индукции \mathbf{D} , \mathbf{B} выражены по известным определяющим соотношениям [31]

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} u_{m,n} - e_{nij} E_n - h_{nij} H_n - \beta_{ij} \Theta,$$

$$D_i = e_{imn} u_{m,n} + \lambda_{in} E_n + \pi_i \Theta, \quad (2)$$

$$B_i = h_{imn} u_{m,n} + \mu_{in} H_n + \vartheta_i \Theta$$

через градиенты перемещений $\nabla \mathbf{u}$, напряженности электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} полей, однородное приращение температуры Θ с использованием известных тензоров упругих свойств \mathbf{C}_f , пьезоэлектрических \mathbf{e}_f и пьезомагнитных (магнитострикционных) \mathbf{h}_f свойств, диэлектрических λ_f и магнитных μ_f проницаемостей, температурных коэффициентов β_f , пирозлектрических π_f и пиромагнитных ϑ_f постоянных для каждой фазы f . Компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$, векторов напряженностей $E_i = -\varphi_{,i}$, $H_i = -\psi_{,i}$ вычисляем через поля перемещений

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$, электрического $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ и магнитного $\psi = \psi(\mathbf{r})$ потенциалов с граничными условиями

$$u_{i|\Gamma} = u_{ij}^* r'_j, \varphi_{|\Gamma} = -E_i^* r'_i, \psi_{|\Gamma} = -B_i^* r'_i, \quad (3)$$

где $\mathbf{r}' \in \Gamma$ — граница области \mathbf{V} , осредненные или макроскопические значения напряжений $\boldsymbol{\sigma}^* = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$, градиентов перемещений $\mathbf{u}^* = \langle \nabla \mathbf{u} \rangle$, напряженностей электрического $\mathbf{E}^* = \langle \mathbf{E} \rangle$ и магнитного $\mathbf{H}^* = \langle \mathbf{H} \rangle$ полей для области \mathbf{V} . Связанная краевая задача электромагнитоупругости в области \mathbf{V} с граничными условиями (3) примет вид

$$\begin{aligned} (C_{ijmn} u_{m,n})_{,j} + (\sigma_{kj}^0 u_{i,k})_{,j} + (e_{nij} \varphi_{,n})_{,j} + (h_{nij} \psi_{,n})_{,j} - \beta_{ij,j} \Theta &= 0, \\ (e_{jmn} u_{m,n})_{,j} + (D_k^0 u_{j,k})_{,j} - (\lambda_{jn} \varphi_{,n})_{,j} + \pi_{j,j} \Theta &= 0, \\ (h_{jmn} u_{m,n})_{,j} + (B_k^0 u_{j,k})_{,j} - (\mu_{jn} \psi_{,n})_{,j} + \vartheta_{j,j} \Theta &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

относительно искомым полей $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, $\varphi(\mathbf{r})$, $\psi(\mathbf{r})$, которые ищем в виде разложений

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{r}) &= u_{ij}^* r_j + a_{imn}(\zeta_0, \mathbf{r}) u_{mn}^* + b_{in}(\zeta_0, \mathbf{r}) E_n^* + d_{in}(\zeta_0, \mathbf{r}) H_n^* + t_i(\zeta_0, \mathbf{r}) \Theta, \\ -\varphi(\mathbf{r}) &= E_j^* r_j + f_{mn}^{(1)}(\zeta_0, \mathbf{r}) u_{mn}^* + h_n^{(1)}(\zeta_0, \mathbf{r}) E_n^* + m_n^{(1)}(\zeta_0, \mathbf{r}) H_n^* + t^{(1)}(\zeta_0, \mathbf{r}) \Theta, \\ -\psi(\mathbf{r}) &= H_j^* r_j + f_{mn}^{(2)}(\zeta_0, \mathbf{r}) u_{mn}^* + h_n^{(2)}(\zeta_0, \mathbf{r}) E_n^* + m_n^{(2)}(\zeta_0, \mathbf{r}) H_n^* + t^{(2)}(\zeta_0, \mathbf{r}) \Theta \end{aligned} \quad (5)$$

с учетом зависимости коэффициентов разложений от начального напряженного состояния $\zeta_0 = \{\boldsymbol{\sigma}^0, \mathbf{D}^0, \mathbf{B}^0\}$ композита.

2. Метод функций Грина

Введем в рассмотрение функции Грина

$$\mathbf{G} = \begin{Bmatrix} U_{ik} & U_i^{(1)} & U_i^{(2)} \\ \Phi_k & \Phi^{(1)} & \Phi^{(2)} \\ \Psi_k & \Psi^{(1)} & \Psi^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

для однородной анизотропной пьезоэлектромагнитной среды — “среды сравнения” [25, 28], где $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\rho})$, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$. В первом столбце матрицы (6) U_{ik} , Φ_k , Ψ_k — перемещения по оси r_i , электрический и магнитный потенциалы в точке \mathbf{r} от действия в точке \mathbf{r}_1 единичной силы вдоль координатной оси r_k ; во втором и третьем столбцах — $U_{ik}^{(1)}$, $\Phi_k^{(1)}$, $\Psi_k^{(1)}$ и $U_{ik}^{(2)}$, $\Phi_k^{(2)}$, $\Psi_k^{(2)}$ — перемещения по оси r_i , электрический и магнитный потенциалы

в точке \mathbf{r} от действия в точке \mathbf{r}_1 единичного электрического или магнитного источника соответственно. Свойства среды сравнения задаем через тензоры упругих свойств \mathbf{C}_\bullet , диэлектрической λ_\bullet и магнитной μ_\bullet проницаемостей, пьезоэлектрических \mathbf{e}_\bullet и пьезомагнитных \mathbf{h}_\bullet модулей, которые (в различных приближениях) можно приравнять к осредненным по объему свойствам $\mathbf{C}_\bullet = \langle \mathbf{C} \rangle$, ..., $\mathbf{h}_\bullet = \langle \mathbf{h} \rangle$, или к свойствам одной из фаз композита $\mathbf{C}_\bullet = \mathbf{C}_f$, ..., $\mathbf{h}_\bullet = \mathbf{h}_f$, или к искомым эффективным свойствам композита $\mathbf{C}_\bullet = \mathbf{C}^*$, ..., $\mathbf{h}_\bullet = \mathbf{h}^*$ по схеме самосогласования [25—27].

В результате от постановки краевой задачи (4) перейдем к системе интегродифференциальных уравнений

$$u'_i(\mathbf{r}) = \int_V U_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{g}_j(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V U_i^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{q}^{(1)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V U_i^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{q}^{(2)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1,$$

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \int_V \Phi_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{g}_j(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V \Phi^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{q}^{(1)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V \Phi^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{q}^{(2)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1,$$
(7)

$$\psi'(\mathbf{r}) = \int_V \Psi_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{g}_j(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V \Psi^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{q}^{(1)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V \Psi^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{q}^{(2)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1$$

относительно пульсаций $\mathbf{u}'(\mathbf{r})$, $\varphi'(\mathbf{r})$, $\psi'(\mathbf{r})$, обусловленных действием в однородной среде (\mathbf{C}_\bullet , λ_\bullet , μ_\bullet , \mathbf{e}_\bullet , \mathbf{h}_\bullet) распределенных объемных сил $\tilde{g}_i = g_{ij,j}$, электрических $\tilde{q}^{(1)} = q_{i,i}^{(1)}$ и магнитных $\tilde{q}^{(2)} = q_{i,i}^{(2)}$ источников, где поля

$$g_{ij} = C'_{ijmn} u_{mn}^* - e'_{nij} E_n^* - h'_{nij} H_n^* - \beta'_{ij} \Theta + C'_{ijmn} u'_{m,n} + e'_{nij} \varphi'_{,n} + h'_{nij} \psi'_{,n} + \sigma_{kj}^0 u'_{i,k},$$

$$q_j^{(1)} = e'_{jmn} u_{mn}^* + \lambda'_{jn} E_n^* + \pi'_j \Theta + e'_{jmn} u'_{m,n} - \lambda'_{jn} \varphi'_{,n} + D_k^0 u_{jk}^* + D_k^0 u'_{j,k}, \quad (8)$$

$$q_j^{(2)} = h'_{jmn} u_{mn}^* + \mu'_{jn} H_n^* + \vartheta'_j \Theta + h'_{jmn} u'_{m,n} - \mu'_{jn} \psi'_{,n} + B_k^0 u_{jk}^* + B_k^0 u'_{j,k}$$

с учетом равенств $(\sigma_{kj}^0 u_{ik}^*)_{,j} = \sigma_{kj,j}^0 u_{ik}^* = 0$ в силу выполнения уравнений равновесия $\sigma_{nj,j}^0 = 0$ для начальных напряжений $\sigma^0(\mathbf{r})$ в области \mathbf{V} и независимости макроскопических величин u_{mn}^* , E_n^* , H_n^* от координат \mathbf{r} . Здесь использованы обозначения пульсаций

$$\sigma'^0(\mathbf{r}) = \sigma^0(\mathbf{r}) - \sigma^{*0}, \quad \mathbf{D}'^0(\mathbf{r}) = \mathbf{D}^0(\mathbf{r}) - \mathbf{D}^{*0}, \quad \mathbf{B}'^0(\mathbf{r}) = \mathbf{B}^0(\mathbf{r}) - \mathbf{B}^{*0} \quad (9)$$

для начального напряженного состояния, отклонений микронеоднородных свойств композита от однородных свойств среды сравнения

$$\mathbf{C}'_{\bullet}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{C}(\mathbf{r}) - \mathbf{C}_{\bullet} = \tilde{\mathbf{C}} + \mathbf{C}'(\mathbf{r}), \dots, \boldsymbol{\mu}'_{\bullet}(\mathbf{r}) \equiv \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\mu}_{\bullet} = \tilde{\boldsymbol{\mu}} + \boldsymbol{\mu}'(\mathbf{r}), \quad (10)$$

где тензоры разностей $\tilde{\mathbf{C}} = \langle \mathbf{C} \rangle - \mathbf{C}_{\bullet}$, ..., $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \langle \boldsymbol{\mu} \rangle - \boldsymbol{\mu}_{\bullet}$. С использованием “теоремы о свертках” дифференцирование $\partial / \partial r_{(1)i}$ функций $\mathbf{g}(\mathbf{r}_1)$, $\mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{r}_1)$, $\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{r}_1)$ в подинтегральных выражениях интегродифференциальных уравнений (7) может быть заменено дифференцированием $-\partial / \partial r_{(1)i}$ или $\partial / \partial r_i$ соответствующих ядер — функций Грина \mathbf{U} , Φ , ..., $\Psi^{(2)}$ (6) [24—28] с учетом их разностного аргумента $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ и асимптотических равенств нулю при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \rightarrow \infty$.

3. Эффективные свойства пьезоэлектромагнитного композита с начальным напряженным состоянием

Искомые тензоры эффективных свойств \mathbf{C}^* , $\boldsymbol{\lambda}^*$, $\boldsymbol{\mu}^*$, \mathbf{e}^* , \mathbf{h}^* , $\boldsymbol{\beta}^*$, $\boldsymbol{\pi}^*$, \mathcal{G}^* и дополнительно тензоры электромагнитной связанности $\boldsymbol{\chi}^*$, $\boldsymbol{\kappa}^*$ композита с пьезоэлектрическими и пьезомагнитными фазами при наличии начального напряженного электромагнитоупругого состояния $\zeta_0 = \{\boldsymbol{\sigma}^0, \mathbf{D}^0, \mathbf{B}^0\}$ входят в определяющие соотношения на макроуровне композита

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^* &= C_{ijmn}^* \varepsilon_{mn}^* - e_{(\sigma)nij}^* E_n^* - h_{(\sigma)nij}^* H_n^* - \beta_{ij}^* \Theta, \\ D_i^* &= e_{(D)imn}^* \varepsilon_{mn}^* + \lambda_{in}^* E_n^* + \chi_{in}^* H_n^* + \pi_i^* \Theta, \\ B_i^* &= h_{(B)imn}^* \varepsilon_{mn}^* + \mu_{in}^* H_n^* + \kappa_{in}^* E_n^* + \mathcal{G}_i^* \Theta, \end{aligned} \quad (11)$$

связывая макроскопические значения напряжения $\boldsymbol{\sigma}^* = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$, индукций $\mathbf{D}^* = \langle \mathbf{D} \rangle$, $\mathbf{B}^* = \langle \mathbf{B} \rangle$ с деформацией $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$, напряженностями $\mathbf{E}^* = \langle \mathbf{E} \rangle$, $\mathbf{H}^* = \langle \mathbf{H} \rangle$ и температурой нагрева Θ представительной области \mathbf{V} композита. В общем случае компоненты тензоров \mathbf{C}^* , ..., \mathcal{G}^* (11) рассчитываем по формулам [26—28]

$$\begin{aligned} C_{ijmn}^* &= \langle C_{ijmn} \rangle + \langle C'_{ijdb} a_{dmn,b} \rangle + \langle e'_{pij} f_{mn,p}^{(1)} \rangle + \langle h'_{pij} f_{mn,p}^{(2)} \rangle, \\ \lambda_{kn}^* &= \langle \lambda_{kn} \rangle + \langle \lambda'_{kp} h_{n,p}^{(1)} \rangle + \langle e'_{kpq} b_{qn,p} \rangle, \\ \mu_{kn}^* &= \langle \mu_{kn} \rangle + \langle \mu'_{kp} m_{n,p}^{(2)} \rangle + \langle h'_{kpq} d_{qn,p} \rangle, \\ e_{(\sigma)nij}^* &= \langle e_{nij} \rangle - \langle C'_{ijpq} b_{qn,p} \rangle + \langle e'_{pij} h_{n,p}^{(1)} \rangle + \langle h'_{pij} h_{n,p}^{(2)} \rangle, \\ h_{(\sigma)nij}^* &= \langle h_{nij} \rangle - \langle C'_{ijpq} d_{qn,p} \rangle + \langle e'_{pij} m_{n,p}^{(1)} \rangle + \langle h'_{pij} m_{n,p}^{(2)} \rangle, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 e_{(D)imn}^* &= \langle e_{imn} \rangle + \langle e'_{ipq} a_{pmn,q} \rangle + \langle \lambda'_{ip} f_{mn,p}^{(1)} \rangle, \\
 h_{(B)imn}^* &= \langle h_{imn} \rangle + \langle h'_{ipq} a_{pmn,q} \rangle + \langle \mu'_{ip} f_{mn,p}^{(2)} \rangle, \\
 \chi_{kn}^* &= \langle \lambda'_{kp} m_{n,p}^{(1)} \rangle + \langle e'_{kpq} d_{qn,p} \rangle, \quad \kappa_{kn}^* = \langle \mu'_{kp} h_{n,p}^{(2)} \rangle + \langle h'_{kpq} b_{qn,p} \rangle, \\
 \beta_{ij}^* &= \langle \beta_{ij} \rangle - \langle C'_{ijdb} t_{d,b} \rangle + \langle e'_{pij} t_{p}^{(1)} \rangle + \langle h'_{pij} t_{p}^{(2)} \rangle, \\
 \pi_i^* &= \langle \pi_i \rangle + \langle \lambda'_{ip} t_{p}^{(1)} \rangle + \langle e'_{ipq} t_{q,p} \rangle, \\
 \vartheta_i^* &= \langle \vartheta_i \rangle + \langle \mu'_{ip} t_{p}^{(2)} \rangle + \langle h'_{ipq} t_{q,p} \rangle,
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

где верхним индексом “ ’ ” обозначены пульсации тензоров электромагнитотермоупругих свойств микроструктуры композита. Иными словами, задача нахождения тензоров \mathbf{C}^* , ..., $\mathbf{\vartheta}^*$ эффективных свойств композита (11) сводится к нахождению полей производных $a_{dmn,b}(\mathbf{r})$, $f_{mn,p}^{(1)}(\mathbf{r})$, ..., $t_{p}^{(2)}(\mathbf{r})$ и последующему осреднению произведений в правых частях равенств (12). Интегродифференциальные уравнения относительно этих полей получим в результате дифференцирования левых и правых частей уравнений (7) с учетом “теоремы о свертках”, обозначений (8)—(10) и разложений (5). Ядра этих уравнений — вторые производные функций Грина $\nabla \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$, где ∇ — оператор дифференцирования по координатам \mathbf{r} .

В “обобщенном сингулярном приближении” $\nabla \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \approx \mathbf{G}^S \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ [25], в частности, для рассматриваемого случая [28] пьезоэлектромагнитной среды сравнения с эллипсоидальным “зерном неоднородности” у вторых производных функций Грина учитываются лишь сингулярные составляющие

$$\mathbf{G}^S = \begin{pmatrix} U_{imjn}^S & U_{imn}^{S(1)} & U_{imn}^{S(2)} \\ \Phi_{imn}^S & \Phi_{mn}^{S(1)} & \Phi_{mn}^{S(2)} \\ \Psi_{imn}^S & \Psi_{mn}^{S(1)} & \Psi_{mn}^{S(2)} \end{pmatrix}.
 \tag{13}$$

В приближении (13) из общих соотношений (12) следует решение для искомых тензоров \mathbf{C}^* , ..., $\mathbf{\vartheta}^*$ эффективных свойств, например, для двухфазного композита с начальным напряженным состоянием

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}^* &= \langle \mathbf{C} \rangle + \Delta^c, \quad \boldsymbol{\lambda}^* = \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle + \Delta^\lambda, \quad \boldsymbol{\mu}^* = \langle \boldsymbol{\mu} \rangle + \Delta^\mu, \\
 \mathbf{e}_{(\sigma)}^* &= \langle \mathbf{e} \rangle + \Delta_{(\sigma)}^e, \quad \mathbf{h}_{(\sigma)}^* = \langle \mathbf{h} \rangle + \Delta_{(\sigma)}^h,
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

$$\mathbf{e}_{(D)}^* = \langle \mathbf{e} \rangle + \Delta_{(D)}^e, \quad \mathbf{h}_{(B)}^* = \langle \mathbf{h} \rangle + \Delta_{(B)}^h, \quad (14)$$

$$\chi^* = \Delta^\chi, \quad \kappa^* = \Delta^\kappa, \quad \beta^* = \langle \beta \rangle + \Delta^\beta, \quad \pi^* = \langle \pi \rangle + \Delta^\pi, \quad \vartheta^* = \langle \vartheta \rangle + \Delta^\vartheta$$

через поправки

$$\Delta_{ijmn}^c = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{C}_{ijdb}\bar{A}_{dbmn} - \bar{e}_{pij}\bar{F}_{pmn}^{(1)} - \bar{h}_{pij}\bar{F}_{pmn}^{(2)}),$$

$$\Delta_{(\sigma)nij}^e = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{e}_{pij}\bar{H}_{pn}^{(1)} + \bar{h}_{pij}\bar{H}_{pn}^{(2)} - \bar{C}_{ijpq}\bar{B}_{pqn})$$

$$\Delta_{(\sigma)nij}^h = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{e}_{pij}\bar{M}_{pn}^{(1)} + \bar{h}_{pij}\bar{M}_{pn}^{(2)} - \bar{C}_{ijpq}\bar{D}_{pqn}),$$

$$\Delta_{(D)imm}^e = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{e}_{ipq}\bar{A}_{pqmn} + \bar{\lambda}_{ip}\bar{F}_{pmn}^{(1)}),$$

$$\Delta_{(B)imm}^h = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{h}_{ipq}\bar{A}_{pqmn} + \bar{\mu}_{ip}\bar{F}_{pmn}^{(2)}), \quad (15)$$

$$\Delta_{kn}^\lambda = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{\lambda}_{kp}\bar{H}_{pn}^{(1)} + \bar{e}_{kpq}\bar{B}_{pqn}),$$

$$\Delta_{kn}^\mu = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{\mu}_{kp}\bar{M}_{pn}^{(2)} + \bar{h}_{kpq}\bar{D}_{pqn}),$$

$$\Delta_{kn}^\chi = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{\lambda}_{kp}\bar{M}_{pn}^{(1)} + \bar{e}_{kpq}\bar{D}_{pqn}),$$

$$\Delta_{kn}^\kappa = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{\mu}_{kp}\bar{H}_{pn}^{(2)} + \bar{h}_{kpq}\bar{B}_{pqn}),$$

$$\Delta_{ij}^\beta = \nu_1(1-\nu_1)(-\bar{C}_{ijdb}\bar{T}_{db} + \bar{e}_{pij}\bar{T}_p^{(1)} + \bar{h}_{pij}\bar{T}_p^{(2)}),$$

$$\Delta_i^\pi = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{\lambda}_{ip}\bar{T}_p^{(1)} + \bar{e}_{ipq}\bar{T}_{pq}),$$

$$\Delta_i^\vartheta = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{\mu}_{ip}\bar{T}_p^{(2)} + \bar{h}_{ipq}\bar{T}_{pq})$$

к соответствующим осредненным по объему значениям $\langle \mathbf{C} \rangle, \dots, \langle \vartheta \rangle$. Для рассматриваемого двухфазного композита тензоры $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \dots, \bar{\mathbf{T}}^{(2)}$ в (15) входят в разложения

$$\bar{u}_{ij} = \bar{A}_{ijmn}u_{mn}^* + \bar{B}_{ijn}E_n^* + \bar{D}_{ijn}H_n^* + \bar{T}_{ij}\Theta,$$

$$\bar{E}_i = \bar{F}_{imn}^{(1)}u_{mn}^* + \bar{H}_{in}^{(1)}E_n^* + \bar{M}_{in}^{(1)}H_n^* + \bar{T}_i^{(1)}\Theta, \quad (16)$$

$$\bar{H}_i = \bar{F}_{imn}^{(2)}u_{mn}^* + \bar{H}_{in}^{(2)}E_n^* + \bar{M}_{in}^{(2)}H_n^* + \bar{T}_i^{(2)}\Theta$$

с учетом представления пульсаций производных перемещений $u'_{i,j}(\mathbf{r})$, напряженностей электрического $\mathbf{E}'(\mathbf{r})$ и магнитного $\mathbf{H}'(\mathbf{r})$ полей в виде

$$u'_{i,j}(\mathbf{r}) \equiv u_{i,j}(\mathbf{r}) - u_{ij}^* = \bar{u}_{ij}i'_i(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}^* = \bar{\mathbf{E}}i'_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}'(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}^* = \bar{\mathbf{H}}i'_1(\mathbf{r})$$

для рассматриваемого двухфазного композита. В (15), (16) использованы обозначения тензоров разностей

$$\bar{A}_{ijmn} = \overline{a_{ijn,j}}(\boldsymbol{\zeta}_0), \quad \bar{B}_{ijn} = \overline{b_{in,j}}(\boldsymbol{\zeta}_0), \quad \bar{D}_{ijn} = \overline{d_{in,j}}(\boldsymbol{\zeta}_0), \quad \bar{T}_{ij} = \overline{t_{i,j}}(\boldsymbol{\zeta}_0),$$

$$\bar{F}_{imn}^{(1)} = \overline{f_{mn,i}^{(1)}}(\boldsymbol{\zeta}_0), \quad \bar{H}_{in}^{(1)} = \overline{h_{n,i}^{(1)}}(\boldsymbol{\zeta}_0), \quad \bar{M}_{in}^{(1)} = \overline{m_{n,i}^{(1)}}(\boldsymbol{\zeta}_0), \quad \bar{T}_i^{(1)} = \overline{t_{,i}^{(1)}}(\boldsymbol{\zeta}_0),$$

$$\bar{F}_{imn}^{(2)} = \overline{f_{mn,i}^{(2)}}(\boldsymbol{\zeta}_0), \quad \bar{H}_{in}^{(2)} = \overline{h_{n,i}^{(2)}}(\boldsymbol{\zeta}_0), \quad \bar{M}_{in}^{(2)} = \overline{m_{n,i}^{(2)}}(\boldsymbol{\zeta}_0), \quad \bar{T}_i^{(2)} = \overline{t_{,i}^{(2)}}(\boldsymbol{\zeta}_0)$$

через коэффициенты разложений (5). В (15) также использованы выражения пульсаций полей электромагнитотермоупругих свойств $\mathbf{C}'(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{C}}i'_1(\mathbf{r}), \dots, \boldsymbol{\mu}'(\mathbf{r}) = \bar{\boldsymbol{\mu}}i'_1(\mathbf{r})$ и начального напряженного состояния

$$\boldsymbol{\sigma}'^0(\mathbf{r}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^0 i'_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{D}'^0(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{D}}^0 i'_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}'^0(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{B}}^0 i'_1(\mathbf{r}) \quad (17)$$

через пульсацию $i'_1(\mathbf{r})$ индикаторной функции $i_1(\mathbf{r})$ для 1-й фазы, где

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2, \dots, \bar{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2,$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^0 = \boldsymbol{\sigma}_1^0 - \boldsymbol{\sigma}_2^0, \quad \bar{\mathbf{D}}^0 = \mathbf{D}_1^0 - \mathbf{D}_2^0, \quad \bar{\mathbf{B}}^0 = \mathbf{B}_1^0 - \mathbf{B}_2^0, \quad (18)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2, \quad \bar{\nabla \mathbf{a}} = \nabla \mathbf{a}_1 - \nabla \mathbf{a}_2, \dots,$$

$$\bar{\mathbf{T}}^{(2)} = \mathbf{T}_1^{(2)} - \mathbf{T}_2^{(2)}, \quad \bar{\nabla \mathbf{t}}^{(2)} = \nabla \mathbf{t}_1^{(2)} - \nabla \mathbf{t}_2^{(2)} \quad \text{—}$$

тензоры разностей соответствующих значений в 1-й и 2-й фазах композита с учетом обозначений $\mathbf{A}_{1,2} \equiv \nabla \mathbf{a}_{1,2}, \dots, \mathbf{T}_{1,2}^{(2)} \equiv \nabla \mathbf{t}_{1,2}^{(2)}$. Отметим, что поля начального напряженного состояния принимают вид

$$\boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\sigma}^{*0} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^0 i'_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{D}^0(\mathbf{r}) = \mathbf{D}^{*0} + \bar{\mathbf{D}}^0 i'_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}^0(\mathbf{r}) = \mathbf{B}^{*0} + \bar{\mathbf{B}}^0 i'_1(\mathbf{r})$$

с учетом выражений для пульсаций (17). Тензоры $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \dots, \bar{\mathbf{T}}^{(2)}$ в (15), (16) находим как решения соответствующих четырех независимых систем линейных алгебраических уравнений (см. Приложение).

Отметим, что для трансверсально-изотропного (с осью симметрии r_3) композита в отсутствие начального напряженного состояния тензоры эффективных пьезоэлектрических \mathbf{e}^* и пьезомагнитных (магнитострикционных) \mathbf{h}^* модулей, электромагнитных связанностей $\boldsymbol{\kappa}^*, \boldsymbol{\chi}^*$ (11), (12) в матричной форме записи имеют вид [26—28, 31]

$$\|e_{ij}^*\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15}^* & 0 & 0 \\ e_{31}^* & e_{31}^* & e_{33}^* & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$h_{ij}^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & h_{14}^* & h_{15}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{15}^* & -h_{14}^* & 0 \\ h_{31}^* & h_{31}^* & h_{33}^* & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (19)$$

$$\| \kappa_{ij}^* \| = \begin{vmatrix} \kappa_{11}^* & \kappa_{12}^* & 0 \\ -\kappa_{12}^* & \kappa_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33}^* \end{vmatrix}, \quad \| \chi_{ij}^* \| = \| \kappa_{ij}^* \|^\top, \quad (20)$$

где верхним индексом “Т” обозначена операция транспонирования, тензорные и матричные индексы связаны между собой соотношениями $11 \rightarrow 1$, $22 \rightarrow 2$, $33 \rightarrow 3$, 23 и $32 \rightarrow 4$, 13 и $31 \rightarrow 5$, 12 и $21 \rightarrow 6$. Начальное напряженное состояние элементов структуры (фаз) $\zeta_0 = \{\sigma^0, \mathbf{D}^0, \mathbf{V}^0\}$ в представительной области \mathbf{V} и в целом на макроуровне $\zeta_0^* = \{\sigma^{*0}, \mathbf{D}^{*0}, \mathbf{V}^{*0}\}$ композита задаются через компоненты тензора начальных макродеформаций ε^{*0} , компоненты векторов начальных макронапряженностей \mathbf{E}^{*0} , \mathbf{H}^{*0} и температуру нагрева Θ^0 представительной области \mathbf{V} композита. При этом тензоры σ^{*0} , \mathbf{D}^{*0} , \mathbf{V}^{*0} связаны с заданными значениями тензоров ε^{*0} , \mathbf{E}^{*0} , \mathbf{H}^{*0} посредством тензоров начальных эффективных свойств \mathbf{C}^{*0} , $\boldsymbol{\lambda}^{*0}$, $\boldsymbol{\mu}^{*0}$, \mathbf{e}^{*0} , \mathbf{h}^{*0} , $\boldsymbol{\beta}^{*0}$, $\boldsymbol{\pi}^{*0}$, \mathcal{G}^{*0} , $\boldsymbol{\chi}^{*0}$, $\boldsymbol{\kappa}^{*0}$ композита (2) [28]. В результате, например, при заданной начальной осевой деформации $\varepsilon_{33}^{0*} \neq 0$, когда другие компоненты $\varepsilon_{ij}^{0*} = 0$, $\mathbf{E}^{*0} = 0$, $\mathbf{H}^{*0} = 0$ имеем ненулевые значения компонент начального напряженного состояния элементов структуры ζ_0 и композита ζ_0^* . Значения начального напряженного состояния фаз $\zeta_{0f} \equiv \langle \zeta_0 \rangle_f = \{\sigma_f^0, \mathbf{D}_f^0, \mathbf{V}_f^0\}$, в частности тензоры $\sigma_{1,2}^0$, $\mathbf{D}_{1,2}^0$, $\mathbf{V}_{1,2}^0$, двухфазного композита (18) могут быть найдены, например, по известному решению [28] без начального напряженного состояния (т.е. по решению (14), (15), (см. Приложение) для случая $\zeta_0 = 0$), где $\langle \dots \rangle_f = 1/V_f \int_{\mathbf{V}_f} \dots d\mathbf{r}$ — оператор осреднения по области \mathbf{V}_f f -й фазы композита, $\mathbf{V} = \bigcup_{f=1}^2 \mathbf{V}_f$.

4. Результаты численного моделирования. На рис. 1 представлены результаты сравнения графиков полученного решения (14), (15), (см. Приложение) с известным асимптотическим решением [20] для компонент C_{3333}^* , C_{3322}^* , C_{3232}^* тензора результирующих эффективных упругих свойств трансверсально-изотропного слоистого двухфазного композита со следующими изотропными упругими свойствами слоев: $E_{(1)} = 10$ ГПа, $E_{(2)} = 0,1$ ГПа, $\nu_{(1)} = \nu_{(2)} = 0,3$, относительное объемное содержание фаз $\nu_1 = 0,9$, $\nu_2 = 1 - \nu_1 = 0,1$. Отметим, что для слоистого композита полученное решение обобщенного сингулярного приближения, в частности, для

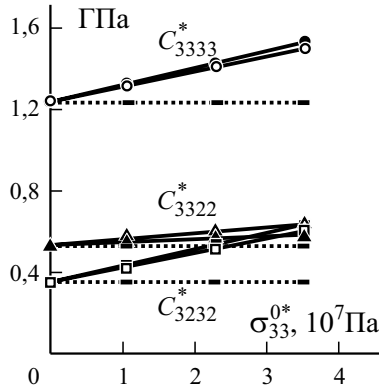


Рис. 1. Зависимость эффективных модулей C_{3333}^* (○, ●), C_{3322}^* (Δ, ▲), C_{3232}^* (□, ■) от начального макронапряжения σ_{33}^{0*} слоистого композита; (—) — без учета напряжения σ_{33}^{0*} .

тензора C^* , не зависит от выбора значений тензора упругих свойств среды сравнения C_\bullet . Здесь начальное напряженное состояние $\sigma_{22}^{0*} = \sigma_{11}^{0*} \neq 0$, $\sigma_{33}^{0*} \neq 0$ на макроуровне слоистого композита обусловлено осевым деформированием $\varepsilon_{33}^{0*} > 0$ при равенстве нулю остальных компонент $\varepsilon_{ij}^{0*} = 0$ тензора начальных макродеформаций ε^{0*} композита. Например, в случае $\varepsilon_{33}^{0*} = 0,01, 0,02, 0,03$ имеем $\sigma_{22}^{0*} = \sigma_{11}^{0*} \approx 3,393$ МПа, 8,686 МПа, 13,979 МПа, $\sigma_{33}^{0*} \approx 10,450$ МПа, 22,800 МПа, 35,150 МПа соответственно. Асимптотическое решение [20] получено для случая малых относительных значений $\sigma_{33}^{0*} / C_{3333}^{0*}$ начальных макронапряжений σ^{0*} относительно упругих модулей фаз и всего композита в целом C^{0*} , что соответствует случаю малых значений начальных макродеформаций ε_{33}^{0*} . Именно для малых значений $\varepsilon_{33}^{0*} \in (0; 0,01)$ графики полученного нового решения наиболее близко расположены к прямолинейным графикам асимптотического решения (см. рис. 1).

На рис. 2 представлены результаты расчета компонент C_{1133}^* , C_{1122}^* , C_{1313}^* , C_{1212}^* , C_{3333}^* , C_{1111}^* в зависимости от начальной одноосной макродеформации ε_{33}^{0*} первоначально изотропного на макроуровне композита с изотропными упругими свойствами сферических включений и матрицы: $E_{(1)} = 10$ ГПа, $E_{(2)} = 0,1$ ГПа, $\nu_{(1)} = \nu_{(2)} = 0,3$, относительное объемное содержание волокон $\nu_1 = 0,9$; тензор упругих свойств среды сравнения $C_\bullet = C_2$. Здесь начальное напряженное состояние $\sigma_{22}^{0*} = \sigma_{11}^{0*} \neq 0$, $\sigma_{33}^{0*} \neq 0$ композита обусловлено одноосной макродеформацией $\varepsilon_{33}^{0*} > 0$ композита. Для случаев

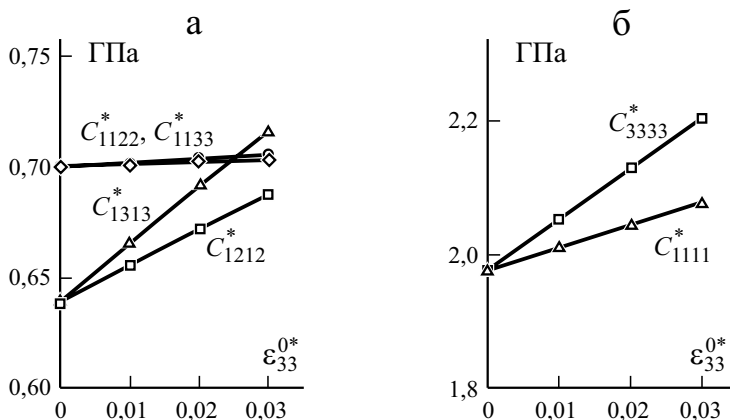


Рис. 2. Зависимость эффективных модулей C_{1133}^* (○), C_{1122}^* (◇), C_{1313}^* (Δ), C_{1212}^* (□) (а); C_{3333}^* (□), C_{1111}^* (Δ) (б) от начальной одноосной макродеформации ϵ_{33}^{0*} композита со сферическими включениями.

$\epsilon_{33}^{0*} = 0,01, 0,02, 0,03$ имеем $\sigma_{22}^{0*} = \sigma_{11}^{0*} \approx 6,996$ МПа, 13,992 МПа, 20,987 МПа, $\sigma_{33}^{0*} \approx 19,763$ МПа, 39,525 МПа, 59,288 МПа соответственно. Графики на рис. 2 выявили появление анизотропии результирующих эффективных упругих свойств композита, обусловленной наличием его начального напряженного состояния ($\epsilon_{33}^{0*} > 0$), что проявляется в различии результирующих значений компонент $C_{1313}^* \neq C_{1212}^*$ (см. рис. 2—а), $C_{3333}^* \neq C_{1111}^*$ (см. рис. 2—б) при наличии равенств $C_{1313}^{*(0)} = C_{1212}^{*(0)}$, $C_{3333}^{*(0)} = C_{1111}^{*(0)}$ для их первоначальных значений. Выявлены равенство $C_{1122}^* \approx C_{1133}^*$ и малая зависимость этих компонент от величины начального напряженного состояния композита (рис. 2—а).

Для пьезоэлектрического трансверсально-изотропного композита с однонаправленно-волокнистой структурой на рис. 3 представлены результаты расчета (14), (15) (см. Приложение) относительных значений эффективных технических упругих постоянных — модуля Юнга E_1^* , коэффициента Пуассона ν_{12}^* , модулей сдвига G_{12}^* , G_{13}^* и пьезоэлектрических модулей e_{311}^* , e_{113}^* в зависимости от содержания ν_1 пьезоэлектрических волокон PZT-4 [31]. Упругие свойства изотропной матрицы (фторопласт) заданы значениями модуля Юнга $E_{(2)} = 0,1$ ГПа и коэффициента Пуассона $\nu_{(2)} = 0,3$. При численном расчете эффективных свойств пьезокомпозита полагались равенства $\mathbf{C}_\bullet = \mathbf{C}_2$, $\mathbf{e}_\bullet = \mathbf{e}_2$, $\boldsymbol{\lambda}_\bullet = \boldsymbol{\lambda}_2$ для электроупругих свойств среды сравнения, $a_3 / a_{1(2)} \rightarrow \infty$, $a_1 = a_2$ — для зерна неоднородности. Для рассмотренных случаев начального напряженного состояния ($\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*} \neq 0$, $\epsilon_{33}^{0*} = 0$) имеем приближенные равенства для модуля Юнга $E_3^* / E_3^{0*} \approx 1$, коэффициента Пуассона $\nu_{13}^* / \nu_{13}^{0*} \approx 1$, пьезоэлектрического модуля $e_{333}^* / e_{333}^{0*} \approx 1$ и диэлектри-

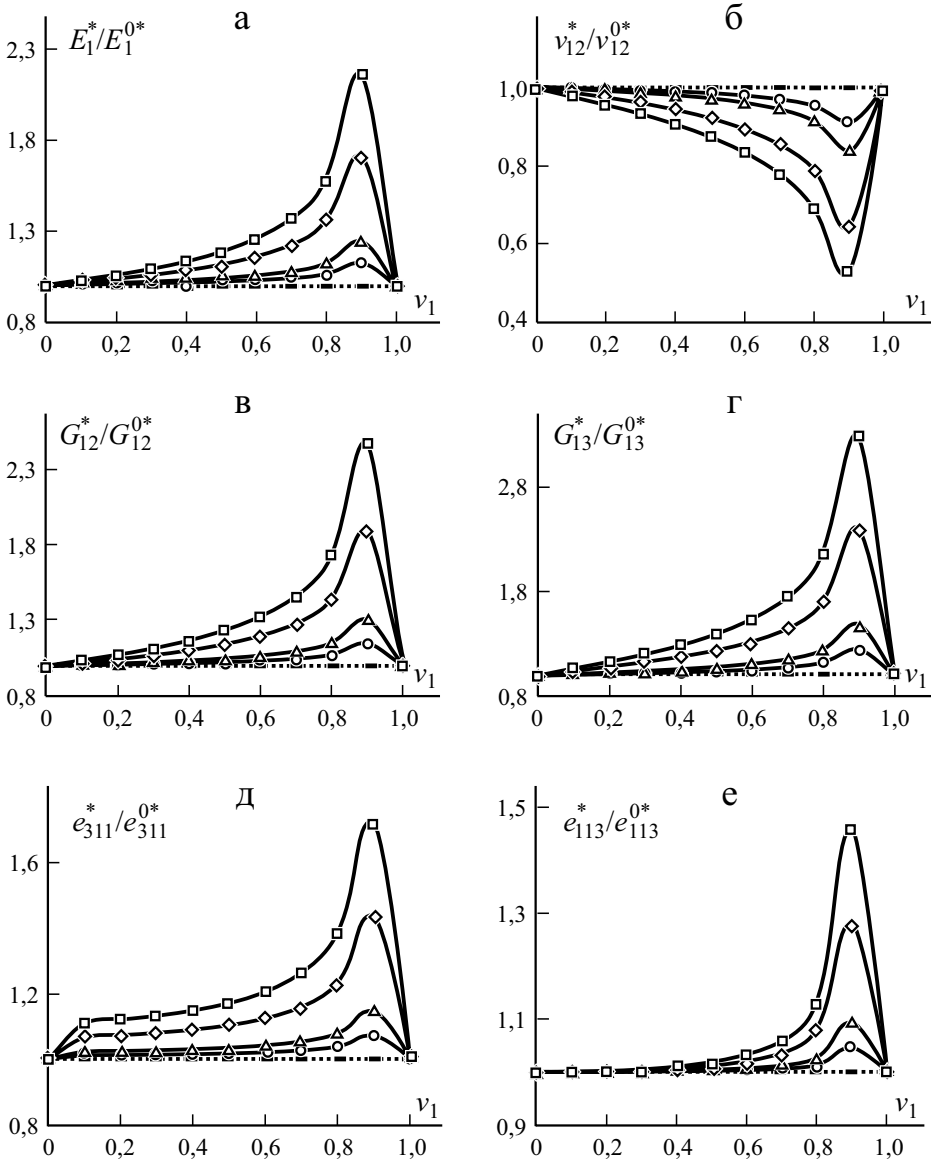


Рис. 3. Относительные значения эффективного модуля Юнга E_1^* (а), коэффициента Пуассона ν_{12}^* (б), модулей сдвига G_{12}^* (в), G_{13}^* (г), пьезоэлектрических модулей e_{311}^* (д), e_{113}^* (е) композита в зависимости от содержания пьезоволокон v_1 в эпоксидной матрице для случаев $\varepsilon_{11}^{0*} = \varepsilon_{22}^{0*} = 0$ (—), 0,01 (○), 0,02 (△), 0,06 (◇), 0,1 (□) при $\varepsilon_{33}^{0*} = 0$.

ческих проницаемостей $\lambda_{11}^*/\lambda_{11}^{0*} \approx 1$, $\lambda_{33}^*/\lambda_{33}^{0*} \approx 1$. Результаты численного моделирования подтвердили равенства тензоров эффективных пьезомодулей

$\mathbf{e}_{(\sigma)}^* = \mathbf{e}_{(D)}^*$, $\mathbf{h}_{(\sigma)}^* = \mathbf{h}_{(B)}^*$ в соотношениях (11), (12) для композита с начальным напряженным состоянием; известно [31], что аналогичные равенства справедливы для пьезоматериалов без начального напряженного состояния (2).

На основе результатов численного моделирования (14), (15) (см. Приложение) выявлено, что для электромагнитоупругого трансверсально-изотропного композита пьезоэлектрик/феррит — однонаправленные ферритовые волокна в пьезоэлектрике PZT-4 [26—28] тензоры электромагнитной связанности $\|\chi_{ij}^*\|$, $\|\kappa_{ij}^*\|$ по-прежнему имеют однотипный вид (20), но $\|\chi_{ij}^*\| \neq \|\kappa_{ij}^*\|^T$, $\chi_{33}^* = \kappa_{33}^*$ для рассмотренных случаев: $\varepsilon_{11}^{0*} = \varepsilon_{22}^{0*} \neq 0$ или $\varepsilon_{33}^{0*} \neq 0$ осесимметричного по оси r_3 начального напряженного состояния композита. В частности, при объемной доле ферритовых волокон $\nu_1 = 0,6$ имеем относительные значения

$$\kappa_{11}^* / \kappa_{11}^{0*} = 0,88, \quad \kappa_{33}^* / \kappa_{33}^{0*} = 0,96, \quad \kappa_{12}^* / \kappa_{12}^{0*} = \kappa_{21}^* / \kappa_{21}^{0*} = 0,88,$$

$$\chi_{11}^* / \chi_{11}^{0*} = -7,70, \quad \chi_{33}^* / \chi_{33}^{0*} = 0,96, \quad \chi_{12}^* / \chi_{12}^{0*} = \chi_{21}^* / \chi_{21}^{0*} = -7,68$$

для случая $\varepsilon_{11}^{0*} = \varepsilon_{22}^{0*} = 0,05$,

$$\kappa_{11}^* / \kappa_{11}^{0*} = 0,96, \quad \kappa_{33}^* / \kappa_{33}^{0*} = 0,99, \quad \kappa_{12}^* / \kappa_{12}^{0*} = \kappa_{21}^* / \kappa_{21}^{0*} = 0,96,$$

$$\chi_{11}^* / \chi_{11}^{0*} = -2,18, \quad \chi_{33}^* / \chi_{33}^{0*} = 0,99, \quad \chi_{12}^* / \chi_{12}^{0*} = \chi_{21}^* / \chi_{21}^{0*} = -2,17$$

для случая $\varepsilon_{33}^{0*} = 0,05$, когда тензоры электромагнитоупругих свойств среды сравнения $\mathbf{C}_\bullet = \mathbf{C}_2$, $\mathbf{e}_\bullet = \mathbf{e}_2$, $\boldsymbol{\lambda}_\bullet = \boldsymbol{\lambda}_2$, $\mathbf{h}_\bullet = \mathbf{h}_2$, $\boldsymbol{\mu}_\bullet = \boldsymbol{\mu}_2$.

Заключение

Получено новое численно-аналитическое решение (14)—(18) (см. Приложение) задачи “эффективного модуля” \mathbf{C}^* , ..., \mathcal{G}^* (11) статистической механики композитов с пьезоэлектрическими магнитоэлектрическими фазами с начальным напряженным состоянием на микро- $\zeta_0 = \{\boldsymbol{\sigma}^0, \mathbf{D}^0, \mathbf{B}^0\}$ и макро- $\zeta_0^* = \{\boldsymbol{\sigma}^{0*}, \mathbf{D}^{0*}, \mathbf{B}^{0*}\}$ уровнях композита. Решение получено в рамках обобщенного сингулярного приближения статистической механики композитов [25] с использованием ранее полученного нового решения [28] для сингулярных составляющих вторых производных функций Грина пьезоэлектромагнитной среды с эллипсоидальным зерном неоднородности. Представлены результаты численного моделирования влияния начального механического напряженного состояния на эффективные упругие свойства слоистого композита (см. рис. 1) и композита со сферическими включениями (см. рис. 2). Полученные решения на рис. 1 подтверждены численным сравнением с известным асимптотическим решением [20] для слоистого композита при наличии начального напря-

женного состояния ζ_0 , ζ_0^* на обоих уровнях структуры. Выявлено, что начальное напряженное состояние структуры влияет на анизотропию (класс симметрии) эффективных свойств композита на макроуровне, в частности (см. рис. 2), начальное напряженное состояние с осевой симметрией обуславливает появление трансверсально-изотропных эффективных упругих свойств у первоначально изотропного композита. Осуществлен расчет, построены графики и выявлен немонотонный характер зависимостей относительных эффективных электроупругих характеристик (см. рис. 3) трансверсально-изотропного композита PZT-4/фторопласт от объемной доли v_1 пьезоэлектрических волокон с учетом начального деформирования композита в трансверсальной плоскости. Установлено, что начальное деформирование влияет лишь на некоторые эффективные характеристики композита, и это влияние наиболее значительно при объемной доле волокон $v_1 \approx 0,9$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Пермского края в рамках научного проекта № 20-41-596010.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. — Oxford: Pergamon Press, 1982. — 630 p. [Перевод: Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. — М.: Мир, 1987. — 542 с.
2. Гузь А. Н. Об определении приведенных упругих постоянных композитных слоистых материалов с начальными напряжениями // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1975. — № 3 — С. 216—219.
3. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. — В 2-х т. Т. 1 Общие вопросы; Т. 2. Закономерности распространения. — Киев: Наук. думка. — 376 с; 536 с.
4. Алехин В. В., Аннин Б. Д., Колпаков А. Г. Синтез слоистых материалов и конструкций. — Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1988. — 128 с.
5. Akbarov S. D., Guliev M. S. Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite prestretched compound circular cylinder made of incompressible materials // Int. Appl. Mech. — 2009. — Vol. 45, No. 10. — P. 1141—1151.
6. Akbarov S. D. Recent investigations on dynamic problems for an elastic body with initial (residual) stresses // Int. Appl. Mech. — 2007. — Vol. 43, No. 12. — P. 1305—1324.
7. Akbarov S. D. Stability Loss and Buckling Delamination: Three-dimensional Linearized Approach for Elastic and Viscoelastic Composites. — Springer, 2013 — 448 p.
8. Гулиев М. С., Сейфуллаев А. И., Абдуллаева Д. Н. Исследование распространения упругих волн в составном цилиндре с начальным кручением // Строит. механика инженерных конструкций и сооружений. — 2018. — № 5. — С. 404—413.
9. Белянкова Т. И., Калинин В. В. Свойства преднапряженных изотропных материалов при учете упругих модулей высших порядков // Наука Юга России. — 2017. — № 2. — С. 3—12.

10. Гузь А. Н. Об ультразвуковом неразрушающем методе определения напряжений в элементах конструкций и в приповерхностных слоях материалов: фокус на украинские исследования (обзор) // Прикл. механика. — 2014. — Т. 50, № 3. — С. 3—30.
11. Kuliev G. G., Jabbarov M. D. To elastic waves propagation in strained nonlinear anisotropic media // Proc. Sci. Earth Acad. Scie. Azerbaijan. — 1998. — N 2. — P.103—112.
12. Guz A. N. Fundamentals of the Three-dimensional theory of Stability of Deformable Bodies. — Springer, 1999. — 555 p.
13. Akbarov S. D. Dynamics of Pre-strained Bi-material Elastic Systems: Linearized Three-dimensional Approach. — Springer, 2016. — 1004 p.
14. Gupta S., Majhi D.K., Kundu S., Vishwakarma S. K. Propagation of torsional surface waves in a homogeneous layer of finite thickness over an initially stressed heterogeneous half-space // Appl. Mathematics Comput. — 2012. — Vol. 218, No. 9. — P. 5655—5664.
15. Hu W. T., Chen W. Y. Influence of lateral initial pressure on axisymmetric wave propagation in hollow cylinder based on first power hypo-elastic model // J. Central South Univ. — 2014. — Vol. 21, No. 2. — P. 753—760.
16. Yesil U. B. Forced and natural vibrations of an orthotropic pre—stressed rectangular plate with neighboring two cylindrical cavities // Comput. Mater. Continua. — 2017. — Vol. 53, No. 1. — P. 1—22.
17. Kolpakov A. G. Effect of influation of initial stresses on the homogenized characteristics of composite // Mech. Materials. — 2005. — Vol. 37, No. 8. — P. 840—854.
18. Kolpakov A. G. On the dependence of the velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // Comput. Struct. — 1992. — Vol. 44, Nos. 1-2. — P. 97—101.
19. Kolpakov A. G. Averaged characteristics of stressed laminated media // J. Eng. Phys. — 1995. — Vol. 68, No. 5. — P. 605—613.
20. Колпаков А. Г. Усредненные модели упругих композиционных материалов и элементов конструкций: Дис ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.04. — Новосибирск, 2002. — 291 с.
21. Pan'kov A. A., Anoshkin A. N., Pisarev P. V., Bayandin S. R. Using an electro-mechanical analogy to describe the damping characteristics of an MFC actuator // IOP Conf. Ser: Mater. Sci. Eng. — 2021. — 1093 — 012023, P. 1—6.
22. Победра Б. Е. Механика композиционных материалов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. — 336 с.
23. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. — М.: Наука, 1970. — 556 с.
24. Волков С. Д., Ставров В. П. Статистическая механика композитных материалов. — Минск.: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1978. — 208 с.
25. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. — М.: Наука, 1976. — 399 с.
26. Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Леценко П. В. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. — Киев: Наук. думка, 1989. — 208 с.
27. Паньков А. А. Статистическая механика пьезокомпозитов. — Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. — 480 с.
28. Паньков А. А. Коэффициенты электромагнитной связи композита с пьезоактивными фазами // Физ. мезомеханика. — 2011. — Т. 14, № 2. — С.93—99.

29. Guo X., Wei P. Dispersion relations of elastic waves in one-dimensional piezo-electric/piezomagnetic phononic crystal with initial stresses // Ultrasonics. — 2016. — Vol. 66. — P. 72—85.

30. Dasdemir A. Forced vibrations of pre-stressed sandwich plate-strip with elastic layers and piezoelectric core // Int. Appl. Mech. — 2018. — Vol. 54, No. 4. — P. 480—493.

31. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физ. акустика. Т. 1: Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А. — М.: Мир, 1966. — С.204—326.

Поступила в редакцию 20.09.2021

Окончательный вариант поступил 11.01.2022

Received Sept. 20, 2021(Jan. 11, 2022)

Приложение

Компоненты тензоров $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \dots, \bar{\mathbf{T}}^{(2)}$ — решения четырех независимых систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_{ijks}^{(1,1)} \bar{A}_{ksmn} + a_{ijk}^{(1,2)} \bar{F}_{kmn}^{(1)} + a_{ijk}^{(1,3)} \bar{F}_{kmn}^{(2)} &= b_{ijn}^{(1)}, \\ a_{iks}^{(2,1)} \bar{A}_{ksmn} + a_{ik}^{(2,2)} \bar{F}_{kmn}^{(1)} + a_{ik}^{(2,3)} \bar{F}_{kmn}^{(2)} &= b_{imn}^{(2)}, \end{aligned} \tag{П1}$$

$$\begin{aligned} a_{iks}^{(3,1)} \bar{A}_{ksmn} + a_{ik}^{(3,2)} \bar{F}_{kmn}^{(1)} + a_{ik}^{(3,3)} \bar{F}_{kmn}^{(2)} &= b_{imn}^{(3)}, \\ a_{ijks}^{(1,1)} \bar{B}_{ksn} + a_{ikd}^{(1,2)} \bar{H}_{dn}^{(1)} + a_{ikd}^{(1,3)} \bar{H}_{dn}^{(2)} &= c_{ijn}^{(1)}, \\ a_{iks}^{(2,1)} \bar{B}_{ksn} + a_{ik}^{(2,2)} \bar{H}_{kn}^{(1)} + a_{ik}^{(2,3)} \bar{H}_{kn}^{(2)} &= c_{in}^{(2)}, \end{aligned} \tag{П2}$$

$$\begin{aligned} a_{iks}^{(3,1)} \bar{B}_{ksn} + a_{ik}^{(3,2)} \bar{H}_{kn}^{(1)} + a_{ik}^{(3,3)} \bar{H}_{kn}^{(2)} &= c_{in}^{(3)}, \\ a_{ijks}^{(1,1)} \bar{D}_{ksn} + a_{ikd}^{(1,2)} \bar{M}_{dn}^{(1)} + a_{ikd}^{(1,3)} \bar{M}_{dn}^{(2)} &= d_{ijn}^{(1)}, \\ a_{iks}^{(2,1)} \bar{D}_{ksn} + a_{ik}^{(2,2)} \bar{M}_{kn}^{(1)} + a_{ik}^{(2,3)} \bar{M}_{kn}^{(2)} &= d_{in}^{(2)}, \end{aligned} \tag{П3}$$

$$\begin{aligned} a_{iks}^{(3,1)} \bar{D}_{ksn} + a_{ik}^{(3,2)} \bar{M}_{kn}^{(1)} + a_{ik}^{(3,3)} \bar{M}_{kn}^{(2)} &= d_{in}^{(3)}, \\ a_{ijks}^{(1,1)} \bar{T}_{ks} + a_{ijd}^{(1,2)} \bar{T}_d^{(1)} + a_{ijd}^{(1,3)} \bar{T}_d^{(2)} &= f_{ij}^{(1)}, \\ a_{iks}^{(2,1)} \bar{T}_{ks} + a_{ik}^{(2,2)} \bar{T}_k^{(1)} + a_{ik}^{(2,3)} \bar{T}_k^{(2)} &= f_i^{(2)}, \end{aligned} \tag{П4}$$

$$a_{iks}^{(3,1)} \bar{T}_{ks} + a_{ik}^{(3,2)} \bar{T}_k^{(1)} + a_{ik}^{(3,3)} \bar{T}_k^{(2)} = f_i^{(3)},$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned}
 a_{ijks}^{(1,1)} &= \delta_{ik}\delta_{js} - U_{ijdb}^s \left[\tilde{C}_{dbks} + \delta_{dk}\sigma_{bs}^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{C}_{dbks} + \delta_{dk}\bar{\sigma}_{bs}^0) \right] - \\
 &\quad - U_{ijd}^{s(1)} \left[\tilde{e}_{dks} + \delta_{dk}D_s^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{e}_{dks} + \delta_{dk}\bar{D}_s^0) \right] - \\
 &\quad - U_{ijd}^{s(2)} \left[\tilde{h}_{dks} + \delta_{dk}B_s^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{h}_{dks} + \delta_{dk}\bar{B}_s^0) \right], \\
 a_{ijk}^{(1,2)} &= U_{ijdb}^s \left[\tilde{e}_{kdb} + (1-2\nu_1)\bar{e}_{kdb} \right] - U_{ijd}^{s(1)} \left[\tilde{\lambda}_{dk} + (1-2\nu_1)\bar{\lambda}_{dk} \right], \\
 a_{ijk}^{(1,3)} &= U_{ijdb}^s \left[\tilde{h}_{kdb} + (1-2\nu_1)\bar{h}_{kdb} \right] - U_{ijd}^{s(2)} \left[\tilde{\mu}_{dk} + (1-2\nu_1)\bar{\mu}_{dk} \right], \\
 a_{ikis}^{(2,1)} &= -\Phi_{idb}^s \left[\tilde{C}_{dbks} + \delta_{dk}\sigma_{bs}^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{C}_{dbks} + \delta_{dk}\bar{\sigma}_{bs}^0) \right] - \\
 &\quad - \Phi_{id}^{s(1)} \left[\tilde{e}_{dks} + \delta_{dk}D_s^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{e}_{dks} + \delta_{dk}\bar{D}_s^0) \right] - \\
 &\quad - \Phi_{id}^{s(2)} \left[\tilde{h}_{dks} + \delta_{dk}B_s^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{h}_{dks} + \delta_{dk}\bar{B}_s^0) \right], \\
 a_{ik}^{(2,2)} &= -\delta_{ik} + \Phi_{idb}^s \left[\tilde{e}_{kdb} + (1-2\nu_1)\bar{e}_{kdb} \right] - \Phi_{id}^{s(1)} \left[\tilde{\lambda}_{dk} + (1-2\nu_1)\bar{\lambda}_{dk} \right], \\
 a_{ik}^{(2,3)} &= \Phi_{idb}^s \left[\tilde{h}_{kdb} + (1-2\nu_1)\bar{h}_{kdb} \right] - \Phi_{id}^{s(2)} \left[\tilde{\mu}_{dk} + (1-2\nu_1)\bar{\mu}_{dk} \right], \\
 a_{ikis}^{(3,1)} &= -\Psi_{idb}^s \left[\tilde{C}_{dbks} + \delta_{dk}\sigma_{bs}^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{C}_{dbks} + \delta_{dk}\bar{\sigma}_{bs}^0) \right] - \\
 &\quad - \Psi_{id}^{s(1)} \left[\tilde{e}_{dks} + \delta_{dk}D_s^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{e}_{dks} + \delta_{dk}\bar{D}_s^0) \right] - \\
 &\quad - \Psi_{id}^{s(2)} \left[\tilde{h}_{dks} + \delta_{dk}B_s^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{h}_{dks} + \delta_{dk}\bar{B}_s^0) \right], \\
 a_{ik}^{(3,2)} &= \Psi_{idb}^s \left[\tilde{e}_{kdb} + (1-2\nu_1)\bar{e}_{kdb} \right] - \Psi_{id}^{s(1)} \left[\tilde{\lambda}_{dk} + (1-2\nu_1)\bar{\lambda}_{dk} \right], \\
 a_{ik}^{(3,3)} &= -\delta_{ik} + \Psi_{idb}^s \left[\tilde{h}_{kdb} + (1-2\nu_1)\bar{h}_{kdb} \right] - \Psi_{id}^{s(2)} \left[\tilde{\mu}_{dk} + (1-2\nu_1)\bar{\mu}_{dk} \right],
 \end{aligned}$$

правые части 1-й системы уравнений (П1)

$$\begin{aligned}
 b_{ijmn}^{(1)} &= U_{ijks}^s \bar{C}_{ksmn} + U_{ijk}^{s(1)} (\bar{e}_{kmn} + \delta_{km}\bar{D}_n^0) + U_{ijk}^{s(2)} (\bar{h}_{kmn} + \delta_{km}\bar{B}_n^0), \\
 b_{imn}^{(2)} &= \Phi_{iks}^s \bar{C}_{ksmn} + \Phi_{ik}^{s(1)} (\bar{e}_{kmn} + \delta_{km}\bar{D}_n^0) + \Phi_{ik}^{s(2)} (\bar{h}_{kmn} + \delta_{km}\bar{B}_n^0), \\
 b_{imn}^{(3)} &= \Psi_{iks}^s \bar{C}_{ksmn} + \Psi_{ik}^{s(1)} (\bar{e}_{kmn} + \delta_{km}\bar{D}_n^0) + \Psi_{ik}^{s(2)} (\bar{h}_{kmn} + \delta_{km}\bar{B}_n^0)
 \end{aligned}$$

для 2-й и 3-й систем уравнений (П2), (П3) —

$$\begin{aligned}
 c_{ijn}^{(1)} &= -U_{ijks}^s \bar{e}_{nks} + U_{ijk}^{s(1)} \bar{\lambda}_{kn}, & c_{in}^{(2)} &= -\Phi_{iks}^s \bar{e}_{nks} + \Phi_{ik}^{s(1)} \bar{\lambda}_{kn}, \\
 c_{in}^{(3)} &= -\Psi_{iks}^s \bar{e}_{nks} + \Psi_{ik}^{s(1)} \bar{\lambda}_{kn}, & d_{ijn}^{(1)} &= -U_{ijks}^s \bar{h}_{nks} + U_{ijk}^{s(2)} \bar{\mu}_{kn}, \\
 d_{in}^{(2)} &= -\Phi_{iks}^s \bar{h}_{nks} + \Phi_{ik}^{s(2)} \bar{\mu}_{kn}, & d_{in}^{(3)} &= -\Psi_{iks}^s \bar{h}_{nks} + \Psi_{ik}^{s(2)} \bar{\mu}_{kn},
 \end{aligned}$$

для 4-й системы уравнений (П4) —

$$\begin{aligned}
 f_{ij}^{(1)} &= -U_{ijks}^s \bar{\beta}_{ks} + U_{ijk}^{s(1)} \bar{\pi}_k + U_{ijk}^{s(2)} \bar{\vartheta}_k, \\
 f_i^{(2)} &= -\Phi_{iks}^s \bar{\beta}_{ks} + \Phi_{ik}^{s(1)} \bar{\pi}_k + \Phi_{ik}^{s(2)} \bar{\vartheta}_k, \\
 f_i^{(3)} &= -\Psi_{iks}^s \bar{\beta}_{ks} + \Psi_{ik}^{s(1)} \bar{\pi}_k + \Psi_{ik}^{s(2)} \bar{\vartheta}_k
 \end{aligned}$$

для вычисления искоемых величин $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{F}}^{(1)}$, ..., $\bar{\mathbf{T}}^{(2)}$ с учетом обозначений сингулярных составляющих \mathbf{G}^s (13), тензоров разностей $\tilde{\mathbf{C}}$, $\bar{\mathbf{C}}$, $\bar{\mathbf{\sigma}}^0$, ... (10), (18).

Р. Гюнеш^а, Дж. Аль-Грайшави^б*

^аDepartment of Mechanical Engineering, Erciyes University, Kayseri 38039, Turkey

^бGraduate School of Natural and Applied Sciences, Erciyes University, Kayseri 38039, Turkey

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ТОЛСТЫХ И ТОНКИХ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ ПРИ НИЗКОСКОРОСТНОМ УДАРЕ¹

R. Gunes and J. Al-Hraishawi*

EXPERIMENTAL INVESTIGATION INTO THE LOW-VELOCITY IMPACT BEHAVIOR OF THICK AND THIN LAMINATED COMPOSITES

Keywords: low-velocity impact, VARI method, polymer matrix composite, thick and thin laminated composites

The low-velocity impact behavior of thick and thin unidirectional E-glass fiber-reinforced laminated composite plates with three different stacking sequences subjected to three different impact energies have been investigated. The test specimens were produced by the Vacuum Assisted Resin Injection (VARI) method in a laboratory environment. The thick specimens contained 50 layers of unidirectional E-glass fibers and the thin ones — 16 layers of unidirectional E-glass fibers. The low-velocity impact tests were carried out using a CEAST Fractovis drop-weight impact test device. The contact force–time and energy–time graphics were plotted and the experimental results were interpreted in detail.

Ключевые слова: удар низкоскоростной, метод инфузии вакуумной, композит с матрицей полимерной, композиты слоистые толстые и тонкие

Исследованы низкоскоростные ударные характеристики толстых и тонких композитных пластин, однонаправленно армированных E-стекловолокнами с тремя последовательностями укладки, подвергнутых воздействию трех уровней энергии удара. Образ-

*Автор, с которым следует вести переписку: recepg@erciyes.edu.tr
Corresponding author: recepg@erciyes.edu.tr

¹Перевод с англ.

цы для испытаний изготовлены методом вакуумной инфузии в лабораторных условиях. Толстые образцы имели 50 слоев из однонаправленных E-стекловолокон, а тонкие — 16 слоев. Испытания на низкоскоростной удар проведены на установке CEAST Fcastovis с падающим грузом. Построены экспериментальные временные зависимости контактной силы и энергии удара и полученные результаты подробно проанализированы.

Введение

Большое разнообразие и превосходные свойства композитов с полимерной матрицей (КПМ), а также возможность изготовления толстых и сложных инженерных конструкций с использованием этих материалов привели к неуклонному росту применения КПМ, особенно в приложениях с особыми требованиями по технике безопасности. Эти материалы, сначала использованные для снижения конструкционной массы и повышения коррозионной стойкости, впоследствии получили широкое распространение в крупных толстостенных конструкциях, часто сложной формы, особенно в авиации/обороне, транспорте (автомобильном, морском и воздушном), мостах, строительстве, электро- и ядерной энергетике, канализационных водостоках, химических заводах и оффшорных приложениях. Толстые композиты также могут заменить металлические конструкции, особенно в ударных и баллистических приложениях. Однако по сравнению с традиционными металлическими конструкциями слоистые композиты при воздействии ударной нагрузки могут подвергаться разным механизмам повреждения, включая растрескивание матрицы, разрывы волокон и расслоения. Ударные нагрузки обуславливают возникновение в композитных конструкциях повреждений, едва заметных при визуальном осмотре. Общеизвестно, что такие внутренние ударные повреждения могут значительно снизить конструкционные характеристики и срок службы слоистых композитов. Повышенная сила удара значительно увеличивает площадь расслоения и существенно снижает остаточную прочность слоистого композита при сжатии. Предыдущие исследования показали, что обусловленная ударом остаточная прочность при сжатии и распространение расслоения нечувствительны к толщине пластины в диапазоне от 5 до 25 мм. Это обусловлено тем, что изгибная деформация по толщине толстых слоистых композитов [1] пренебрежимо мала по сравнению со сдвиговой. Иными словами, толстый слоистый композит ведет себя как полубесконечное тело. Ударные повреждения, возникающие в таких конструкциях, носят локальный характер в виде разрыва волокон вокруг места удара [2].

Проведены многочисленные экспериментальные и численные исследования низкоскоростного ударного поведения тонких слоистых композитов [3—13], а также слоистых композитов с добавками наночастиц (углеродных нанотрубок, наноглины) [14, 15]. Однако опубликовано мало

исследований ударного поведения толстых композитных конструкций. В [16] представлены аналитические уравнения для предсказания проникновения и перфорации толстых слоистых композитов при ударе с разной скоростью в нормальном направлении снарядами, имеющими носовую часть разной формы (усеченную, коническую, плоскую, оживальную и полусферическую). Получено хорошее совпадение теоретических и экспериментальных результатов. В [17] изучали ударную реакцию толстых композитных пластин, подвергнутых предварительному одноосному растяжению. Путем измерения определили влияние предварительной нагрузки на области расслоения. В [18] представили подход к моделированию экспериментально испытанных толстых панелей из углепластиков, подвергающихся низкоскоростным ударам. Полученные результаты обсудили с точки зрения силы, энергии, перемещения, деформации и расслоения. В [19] представили подробное исследование механизмов повреждения и разрушения толстых слоистых композитов, подвергающихся низкоскоростным ударам. Обсудили характеристики распределения расслоения в толстых слоистых композитах, объединив экспериментальные результаты и численное моделирование. В [20] оценивали влияние толщины слоистого композита на инициирование и распространение повреждений при низкоскоростных ударах и на остаточную прочность после них. Численные результаты показали близкое соответствие с экспериментальными в рассмотренном диапазоне толщин слоистого композита. В [21] экспериментально изучали низкоскоростное ударное поведение сандвич-композитов, армированных базальтовыми волокнами, при разной энергии удара и толщине лицевого слоя. Установлено, что увеличение толщины лицевого слоя уменьшает остаточную деформацию и увеличивает пиковую нагрузку. В [22] представили всесторонний обзор нелинейного механического поведения КППМ.

Из представленного обзора литературы следует, что необходимы новые исследования для лучшего понимания низкоскоростного ударного поведения толстых слоистых композитов. Поэтому в настоящей работе экспериментально исследовано низкоскоростное ударное поведение тонких и толстых пластин из слоистых композитов с целью лучшего понимания влияния толщины, последовательности укладки и величины энергии на их ударное поведение.

Изготовили образцы толстых и тонких слоистых композитов с укладками $[0^\circ/90^\circ]$, $[30^\circ/60^\circ]$ и $[-45^\circ/+45^\circ]$. Тонкие композитные пластины на основе E-стекловолокон и эпоксидной смолы изготовили толщиной ~ 8 мм из 16 однонаправленных слоев стекловолокон, а толстые — толщиной ~ 25 мм из 50 однонаправленных слоев стекловолокон. Все образцы подвергли экспериментальному воздействию низкоскоростных ударных нагрузок с энергией 20, 40 и 60 Дж. Полученные результаты представили в терминах контактной силы и кинетической энергии, а также выявили и детально изучили повреждения каждого образца.

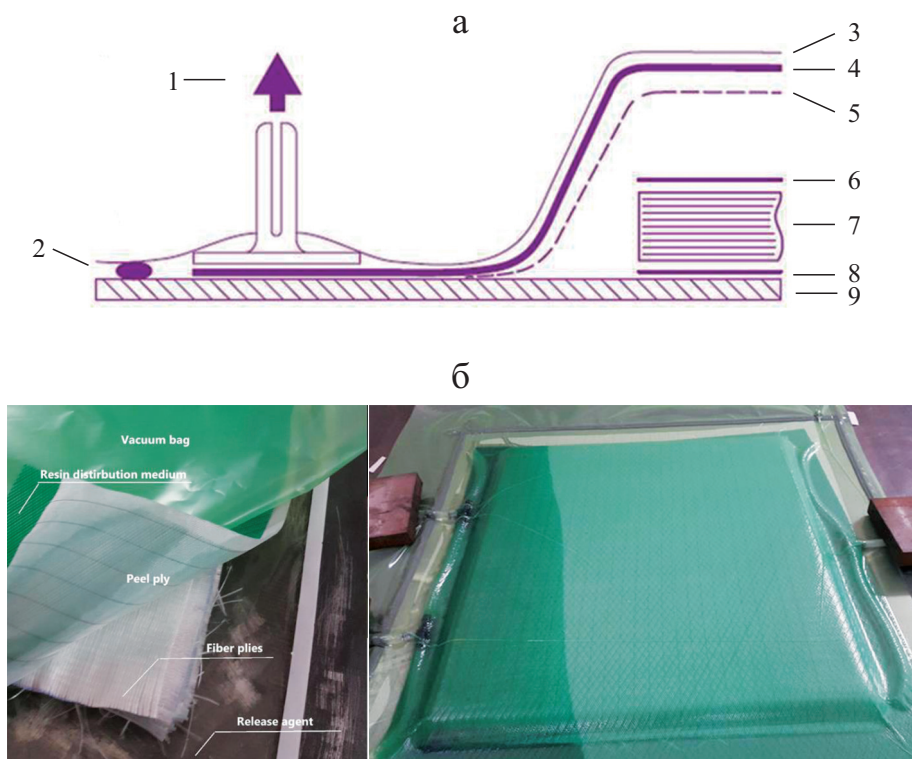


Рис. 1. Изготовление слоистых композитов методом вакуумной инфузии: схема метода (а) и его экспериментальная установка (б): 1 — вакуумный насос; 2 — вакуумная герметизирующая лента; 3 — вакуумная пленка; 4 — поглотитель; 5 — перфорированная пленка; 6 — разделительный слой; 7 — слоистый композит; 8 — термоплата.

1. Экспериментальный метод

1.1. Изготовление слоистых композитов для экспериментов. Все слоистые композиты изготовили из однонаправленных E-стекловолокон плотностью 600 г/м^2 в качестве арматуры и матрицы из смеси смолы MGS LH160 и отвердителя MGS LH160, смешанных в соотношении 3:1.

Образцы изготовили методом вакуумной инфузии смолы (рис. 1). После заполнения вакуумной среды смолой ее отверждали не менее 2 ч при $100 \text{ }^\circ\text{C}$ с использованием противодействия под алюминиевым столом. Затем со слоистого композита удалили разделительную пленку на нижней поверхности и вакуумный нейлон, инфузионную сетку и отслаивающийся слой. Таким образом изготовили тонкие и толстые слоистые композиты. Образцы размером $100 \times 100 \text{ мм}$ для испытаний на удар вырезали с помощью специального дискового резака.

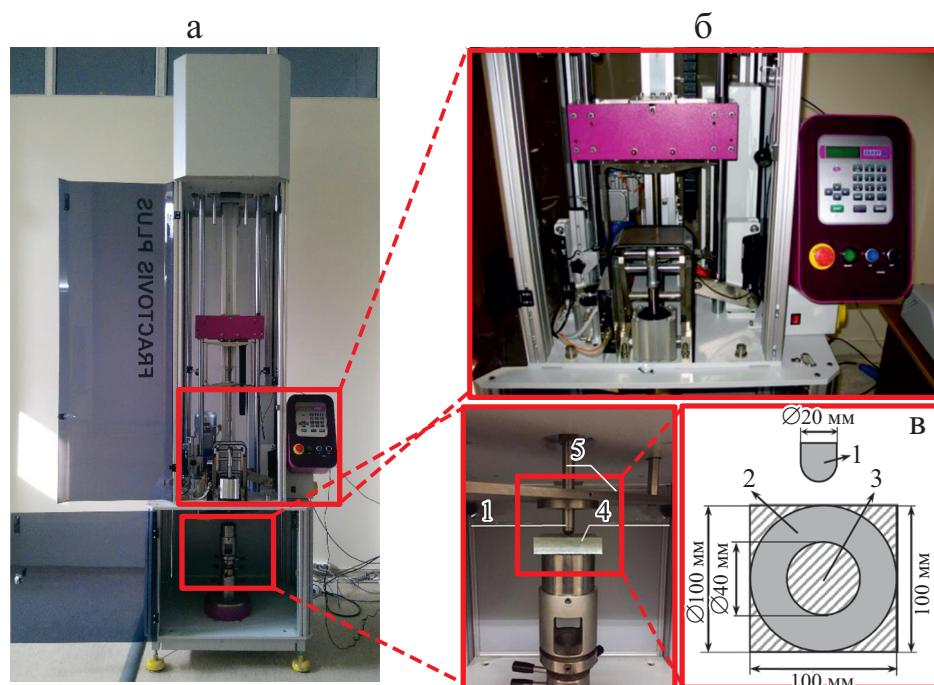


Рис. 2. Установка для испытаний падающим грузом (а), система защиты от отскока (б) и устройство для соединения образцов (в): 1 — ударник; 2 — фиксатор; 3 — область удара; 4 — образец; 5 — пневмонический захват.

Слоистые композиты во избежание загрязнения изготовили на очищенных от масла и грязи поверхностях в беспыльной среде для исключения влияния загрязнения на качество и характеристики композита.

1.2. Установка для ударных испытаний и их параметры. Испытания на низкоскоростной удар выполнили на установке CEAST Fractovis Plus (рис. 2—а) с системой защиты от отскока (рис. 2—б) во избежание повторных ударов в ходе испытаний. Ударник полусферической формы диаметром 20 мм соединен с датчиком силы 40 кН, имевшими общую массу 5,045 кг. Образцы для испытаний удерживала пневматическая система с круглым держателем с внутренним диаметром 40 мм (рис. 2—в). Результаты испытаний регистрировала система сбора данных (DAS 16000), а зависящее от времени изменение контактной силы $F(t)$ — датчик силы с программой визуального воздействия. Таким образом, на выходе испытательного устройства с падающим грузом действовала сила $F(t)$, прикладываемая к ударному элементу через равные промежутки времени, пропорциональная частоте выборки данных. Зависящие от времени скорость $v(t)$, перемещение $\delta(t)$ и поглощенную энергию $E_a(t)$ рассчитывали по контактной силе $F(t)$ согласно кинематическим соотношениям [23]

$$v(t) = v_i + gt - \int_0^t \frac{F(t)}{m} dt, \quad (1)$$

$$\delta(t) = v_i t + \frac{gt^2}{2} - \int_0^t \int_0^t \frac{F(t)}{m} dt dt, \quad (2)$$

$$E_a(t) = \frac{m(v_i^2 - v(t)^2)}{2} + mg\delta(t), \quad (3)$$

где g — ускорение силы тяжести; m — масса ударника; v_i — скорость ударника перед ударом по образцу.

Скорость удара достигала от 0,75 до 4,6 м/с за счет свободного сброса траверсы с высоты 30—1100 мм, а общая масса ударника могла быть увеличена до 70 кг. Энергию удара можно было изменять в диапазоне от 0,6 до 755 Дж. При использовании дополнительной энергетической системы с подпружиненной скоростной системой энергию удара можно было увеличить до 1800 Дж. В каждом испытании ударный элемент попадал в центр композитных образцов (центральный удар).

Испытание начинали, отпуская ударник с заданной высоты. Как только ударник достигал образца, датчик времени посылал сигнал на два триггера времени. Скорость ударника вычисляли по времени его прохождения между триггерами. Предполагали, что энергия ударника передается композитному образцу без учета потерь тепла и энергии при ударе.

Эксперименты по низкоскоростному удару провели при комнатной температуре. Масса ударника, равная 5,045 кг, не изменялась в ходе экспериментов. Диаметр носовой части ударника 20 мм. Использовали квадратные образцы размером 100×100 мм, толщиной 25 и 8 мм. Образцы с укладками $[0^\circ/90^\circ]$, $[30^\circ/60^\circ]$, $[-45^\circ/+45^\circ]$ подвергали воздействию энергии удара 20, 40 и 60 Дж.

2. Результаты и обсуждение

Влияние толщины, последовательности укладки слоев и разной энергии удара на ударное поведение слоистых композитов исследовали экспериментально. Для достоверности получаемых результатов ударные испытания каждого типа слоистого композита повторяли трижды. Результаты оказались весьма схожими. Ударный отклик образцов анализировали с помощью временных зависимостей контактной силы и энергии удара и фотографий повреждений. Силу сопротивления, оказываемую образцом на головку ударника, учитывали как функцию времени и сохраняли для последующего отображения и оценки. Для каждого образца регистрировали контактную силу в несколько последовательных моментов времени. Историю изменения скорости ударника вычисляли путем интегрирования истории силы (деленной на массу ударника) и суммирования с начальной скоростью удара. Соответствующую историю перемещения ударника вычисляли путем интегрирования истории скорости от времени. На основе историй перемещения и скорости ударника вычисляли историю энергии,

Экспериментальные результаты для тонких и толстых композитов с разной укладкой при ударе с разной энергией

Образец	Энергия удара, Дж	Поглощенная энергия, Дж	Максимальная контактная сила, кН	Время контакта, мс
$[0^\circ/90^\circ]_{16}$	20	12,655	13,91	4,031
$[0^\circ/90^\circ]_{16}$	40	21,558	16,986	3,937
$[0^\circ/90^\circ]_{16}$	60	29,805	22,153	4
$[0^\circ/90^\circ]_{50}$	20	11,67	24,016	2,125
$[0^\circ/90^\circ]_{50}$	40	22,927	33,705	2,562
$[0^\circ/90^\circ]_{50}$	60	31,707	40,839	1,762
$[30^\circ/60^\circ]_{16}$	20	13,551	14,4	3,987
$[30^\circ/60^\circ]_{16}$	40	22,302	17,634	3,987
$[30^\circ/60^\circ]_{16}$	60	26,677	23,17	3,762
$[30^\circ/60^\circ]_{50}$	20	11,466	24,567	2,512
$[30^\circ/60^\circ]_{50}$	40	23,261	34,717	2,262
$[30^\circ/60^\circ]_{50}$	60	31,725	41,34	1,987
$[-45^\circ/+45^\circ]_{16}$	20	10,981	13,24	4,487
$[-45^\circ/+45^\circ]_{16}$	40	22,531	17,499	3,987
$[-45^\circ/+45^\circ]_{16}$	60	28,857	22,523	3,987
$[-45^\circ/+45^\circ]_{50}$	20	10,425	25,579	2
$[-45^\circ/+45^\circ]_{50}$	40	20,65	36,706	2
$[-45^\circ/+45^\circ]_{50}$	60	30,437	41,34	1,88

характеризующую историю передачи энергии от ударника к композиту. Экспериментальные данные приведены в таблице.

2.1. Влияние толщины. История силы низкоскоростного удара предоставляет важную информацию о распространении и инициировании повреждения. Известно, что резкое падение нагрузки в истории силы удара связано с уменьшением жесткости слоистых композитов в силу возникновения расслоения [24, 25].

Влияние толщины на ударный отклик слоистых композитов исследовали, сопоставляя динамику ударной нагрузки образцов разной толщины, подвергнутых энергии удара 20, 40 и 60 Дж. Контактная сила и ее максимальное значение — важные параметры, характеризующие материал. В данном контексте знание контактной силы и ее максимального значения в отношении толщины слоя с известной в нем ориентацией армирующих волокон полезно с точки зрения проектирования и анализа.

Для лучшего наблюдения за повреждением композитов, армированных стекловолокнами, исследовали светопропускание [26]. Поскольку слоистые композиты, использованные в настоящем исследовании, относительно толстые, после удара места повреждений фотографировали при достаточном освещении; затем изображения масштабировали и импортировали в

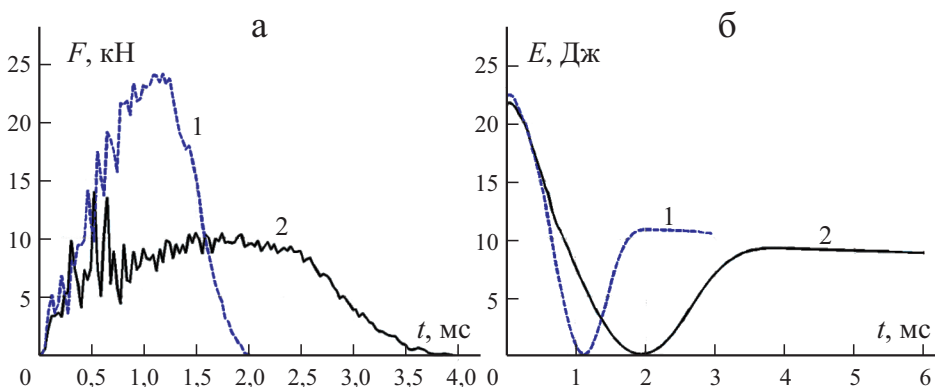


Рис. 3. Временные зависимости контактной силы F — t (а) и кинетической энергии E — t (б) толстых (1) и тонких (2) композитов с укладкой $[0^\circ/90^\circ]$ при ударе энергией 20 Дж.

специальную графическую программу. После определения с помощью этой программы периметра области повреждения вычисляли ее площадь и оценивали картины повреждения на передней и задней поверхностях этой области.

Влияние толщины образца на ударный отклик слоистых композитов, подвергнутых разной энергии удара, было одинаковым. Поэтому подробно обсудим результаты только при энергии удара 20 Дж.

На рис. 3 приведены временные зависимости контактной силы F — t и кинетической энергии E — t тонких и толстых композитов с укладкой $[0^\circ/90^\circ]$, подвергнутых энергии удара 20 Дж. У тонких образцов пиковое значение контактной силы 13,91 кН и время контакта 0,531 мс, а у толстых — 24,016 кН и 1,187 мс соответственно; различие пиковых значений 42,08%. Поглощенная энергия в тонком и толстом образцах равна 12,655 и 11,67 Дж соответственно. В силу большей гибкости тонкий композит поглотил на 7,78% больше энергии, чем толстый. На рис. 4 показаны картины повреждений тонкого и толстого образцов. Площадь повреждения на передней и задней поверхностях тонкого образца 321,82 и 793,59 мм² соответственно. Площадь повреждения на передней поверхности толсто-

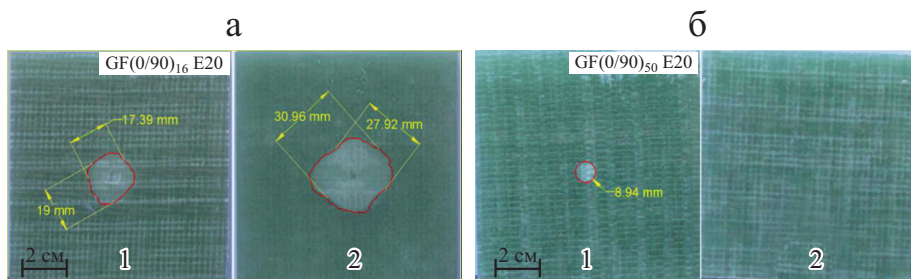


Рис. 4. Фотографии повреждений на передней (1) и задней (2) поверхностях тонких (а) и толстых (б) образцов композита с укладкой $[0^\circ/90^\circ]$ после удара энергией 20 Дж.

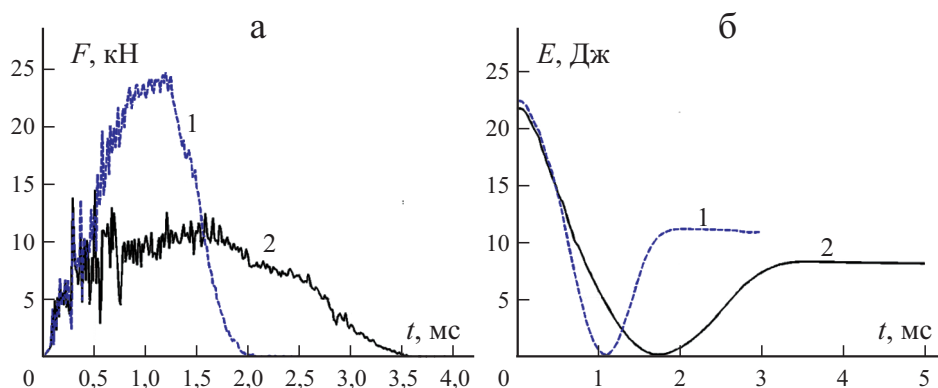


Рис. 5. Временные зависимости контактной силы $F-t$ (а) и кинетической энергии $E-t$ (б) толстых (1) и тонких (2) композитов с укладкой $[30^\circ/60^\circ]$ при ударе энергией 20 Дж.

го образца $62,78 \text{ мм}^2$; на задней поверхности никаких повреждений не обнаружено.

На рис. 5 приведены временные зависимости контактной силы $F-t$ и кинетической энергии $E-t$ тонких и толстых композитов с укладкой $[30^\circ/60^\circ]$, подвергнутых энергии удара 20 Дж. Пиковое значение контактной силы 14,4 кН и время контакта 0,5 мс у тонкого образца, а у толстого — 24,567 кН и 1,187 мс соответственно; различие пиковых значений 41,38%. Поглощенная энергия в тонком и толстом образцах 13,551 и 11,466 Дж соответственно. Тонкий композит поглотил на 15,38% больше энергии, чем толстый, в силу большей гибкости. На рис. 6 показаны картины повреждений тонкого и толстого образцов. Площадь повреждения на передней и задней поверхностях тонкого образца 310,06 и 1025,92 мм^2 соответственно. У толстого образца площадь повреждения на передней поверхности 55,8 мм^2 ; на задней поверхности повреждений не обнаружено.

На рис. 7 приведены временные зависимости контактной силы $F-t$ и кинетической энергии $E-t$ тонких и толстых композитов с укладкой $[-45^\circ/+45^\circ]$ при энергии удара 20 Дж. У тонкого образца пиковое значение контактной силы 13,24 кН и время контакта 0,662 мс, а у толстого —

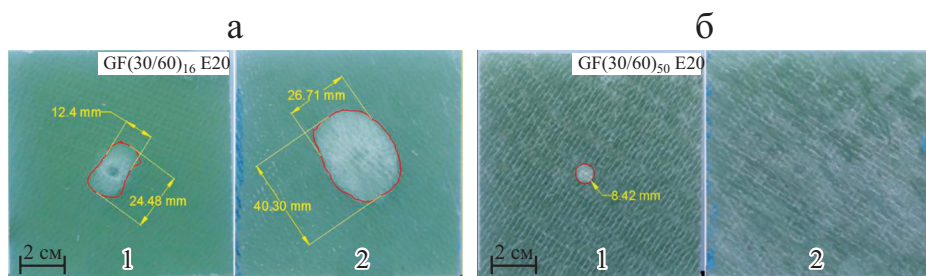


Рис. 6. Фотографии повреждений на передней (1) и задней (2) поверхностях тонких (а) и толстых (б) образцов композита с укладкой $[30^\circ/60^\circ]$ после удара энергией 20 Дж.

25,579 кН и 0,925 мс соответственно; различие пиковых значений 48,238 %. Поглощенная энергия в тонком и толстом образцах 10,981 и 10,425 Дж соответственно. Тонкий композит поглотил на 5,063% больше энергии, чем толстый, в силу большей гибкости. На рис. 8 показаны картины повреждений тонкого и толстого образцов. Площадь повреждения на передней и задней поверхностях тонкого образца 336,48 и 888,91 мм² соответственно. Площадь повреждения на передней поверхности толстого образца 60,02 мм²; на задней поверхности повреждений не наблюдали.

Повреждения слоистых композитов при низкоскоростных ударах можно разделить на две категории: внутрислойные (повреждение волокон и растрескивание матрицы) и межслойные (расслоение) [27]. Влияние толщины слоистых композитов на их ударный отклик показано путем сравнения динамики ударных сил. Из данных рис. 7 отчетливо видно, что пиковое контактное усилие возрастает, а продолжительность контакта уменьшается с увеличением толщины слоистого композита. При этом не наблюдали никаких неожиданных падений нагрузки ни у толстых, ни у тонких образцов. Часть энергии удара теряется на тепло и колебания, а остальная играет решающую роль в развитии таких повреждений, как расслоение, разрыв волокон и растрескивание матрицы [26]. Большое поглощение энергии связано с межслойными и внутрислойными повреждениями при высоких уровнях энергии удара. У толстых образцов устойчивость к повреждениям достаточно высока, чтобы избежать любого расслоения, и большая часть энергии удара может быть поглощена упругими деформациями. Кроме того, вблизи места удара возникают локальные внутрислойные повреждения в виде разрыва волокон и смятия матрицы.

В тонких образцах повреждения обусловлены преимущественно изгибом и проявляются в большей степени на задней поверхности образцов в виде расслоений (межслойные), разрывов волокон и повреждения матрицы (внутрислойные). С увеличением энергии удара увеличивается количество повреждений. Площадь повреждения на задней поверхности образцов

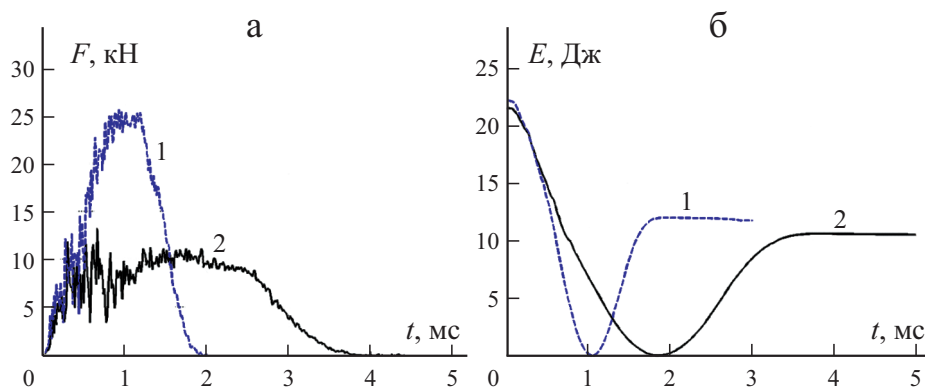


Рис. 7. Временные зависимости контактной силы $F-t$ (а) и кинетической энергии $E-t$ (б) толстых (1) и тонких (2) композитов с укладкой $[-45^\circ/+45^\circ]$ при ударе энергией 20 Дж.

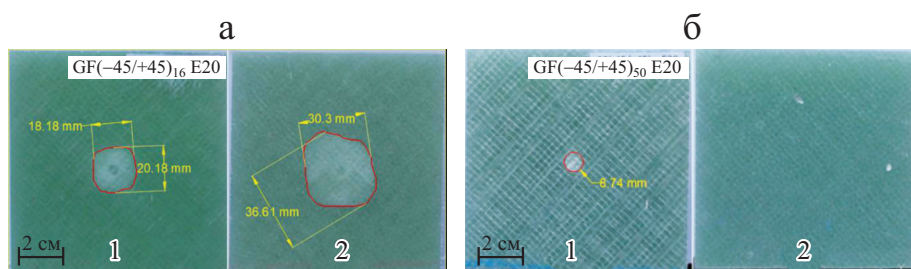


Рис. 8. Фотографии повреждений на передней (1) и задней (2) поверхностях тонких (а) и толстых (б) образцов композита с укладкой $[-45^\circ/+45^\circ]$ после удара энергией 20 Дж.

больше, чем на передней, в силу действия растягивающих напряжений на задней поверхности [26, 27]. Полученные результаты свидетельствуют о том, что уровни энергии удара, использованные в экспериментах, не привели к значительным повреждениям в толстых образцах, т.е. толстые образцы способны сопротивляться большей энергии удара, чем тонкие.

2.2. Влияние последовательности укладки. Исследовали ударные характеристики тонких и толстых слоистых композитов с укладками $[0^\circ/90^\circ]$, $[30^\circ/60^\circ]$ и $[-45^\circ/+45^\circ]$. Поскольку при разной энергии удара наблюдали аналогичное поведение композитов, подробно обсудим влияние укладки при энергии удара 60 Дж.

На рис. 9 приведены временные зависимости контактной силы $F-t$ для тонких и толстых образцов эпоксидных стеклопластиков с укладкой $[0^\circ/90^\circ]$, $[30^\circ/60^\circ]$ и $[-45^\circ/+45^\circ]$, подвергнутых удару с энергией 60 Дж. У тонких образцов пиковые значения контактной силы 22,15, 23,17 и 22,52 кН и время контакта 1,62, 1,43 и 1,66 мс соответственно. Различие наибольшего и наименьшего пиковых значений $\sim 4,6\%$. У толстых образцов пико-

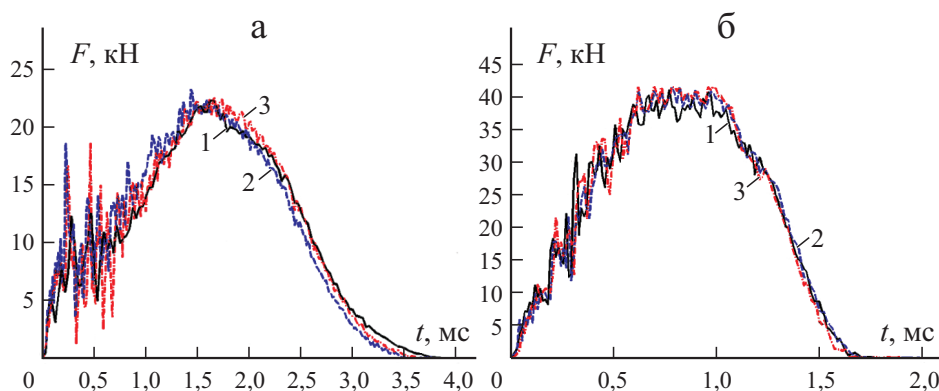


Рис. 9. Временные зависимости контактной силы $F-t$ тонких (а) и толстых (б) композитов с укладкой $[0^\circ/90^\circ]$ (1), $[30^\circ/60^\circ]$ (2) и $[-45^\circ/+45^\circ]$ (3) при ударе энергией 60 Дж.

вые значения контактной силы 40,83, 41,26 и 41,34 кН и время контакта 0,77, 0,82 и 0,7 мс $\sim 1,23\%$.

Экспериментальные и численные исследования показали, что можно выделить три стадии поврежденности слоистого композита: при небольшой энергии удара возникают только расслоения; при умеренной энергии удара — расслоения и повреждение матрицы; при большой энергии удара возникают сильные расслоения, повреждения матрицы и разрывы волокон [27]. При энергии удара 60 Дж на временных зависимостях $F-t$ тонких слоистых композитов видны сильные колебания до того, как контактная сила достигла пикового значения, что может свидетельствовать о происходящем расслоении и повреждении матрицы. В толстых слоистых композитах эти колебания меньше. При данной энергии удара в верхних слоях толстых слоистых композитов наблюдали локальные повреждения в виде смятия матрицы и разрыва волокон вблизи точки удара.

На рис. 10 показаны фотографии передних и задних поверхностей тонких и толстых образцов слоистых композитов после удара с энергией 60 Дж. В тонких образцах площади повреждения на передней и задней поверхностях следующие: при укладке $[0^\circ/90^\circ]$ — 1026,7 и 1629,79 мм² соответственно; при укладке $[0^\circ/60^\circ]$ — 861,9 и 1368,5 мм² соответственно; при укладке $[-45^\circ/+45^\circ]$ — 1030,96 и 1494,12 мм² соответственно. Наблюдали, что области расслоения сообразны с ориентацией слоев [26, 27]. Кроме того, в силу обратного эффекта площадь расслоения на задней поверхности больше, чем на передней, при всех рассмотренных укладках слоистых композитов.

В толстых образцах с укладкой $[0^\circ/90^\circ]$, $[30^\circ/60^\circ]$ и $[-45^\circ/+45^\circ]$ площадь повреждения на передней поверхности 86,65, 91,95 и 90,07 мм² соответственно; на задней поверхности повреждения отсутствуют в силу большой жесткости (см. рис. 10).

Исследовали влияние ориентации слоев на ударные характеристики слоистых композитов с одинаковым размером образцов, количеством слоев и толщиной. В экспериментах наблюдали слабое влияние угла ориентации слоев на отклик композитов при ударе в силу очень жестких граничных условий, реализованных в установке на низкоскоростной удар. Изменения контактной силы были очень близкими у всех образцов с разной ориентацией слоев. Вообще говоря, по мере увеличения длины волокон в композитной пластине ее упругость также возрастает. Поэтому деформации под нагрузкой, возникающие в пластине, возрастут.

2.3. Влияние величины энергии удара. Тонкие и толстые композитные образцы подвергли ударам с энергией 20, 40 и 60 Дж. Уже наименьшая энергия удара вызывала заметные повреждения тонких и толстых композитных образцов. Поскольку при разной укладке композитов наблюдали аналогичное поведение, подробно обсудим влияние энергии удара на поведение тонких и толстых композитов с укладкой $[0^\circ/90^\circ]$. Временные зависимости контактной силы $F-t$ и кинетической энергии $E-t$, а также фотографии повреждений на передней и задней поверхностях эпок-

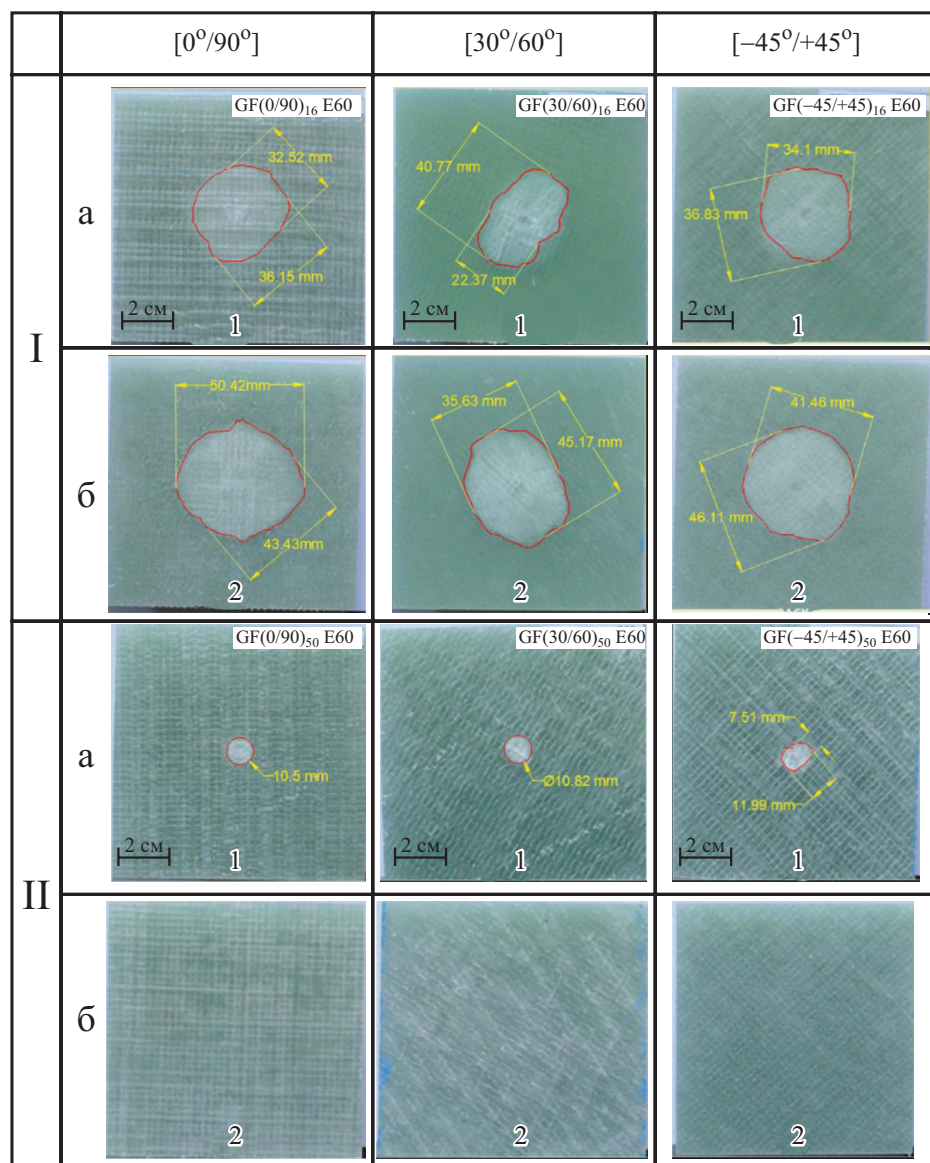


Рис. 10. Фотографии повреждений на передней (а) и задней (б) поверхностях тонких (I) и толстых (II) образцов композита с разными укладками после удара энергией 60 Дж.

сидных стеклопластиков с укладкой $[0^\circ/90^\circ]$ после удара с энергией 20 , 40 и 60 Дж приведены на рис. 11 и 12 для тонких и толстых образцов соответственно. Величина поглощенной энергии и пиковая контактная сила толстых и тонких композитов возрастали с увеличением энергии удара.

С увеличением энергии удара возрастала площадь повреждения на передней и задней поверхностях тонких слоистых композитов [26, 27]. Визуальный осмотр поврежденных тонких слоистых композитов свиде-

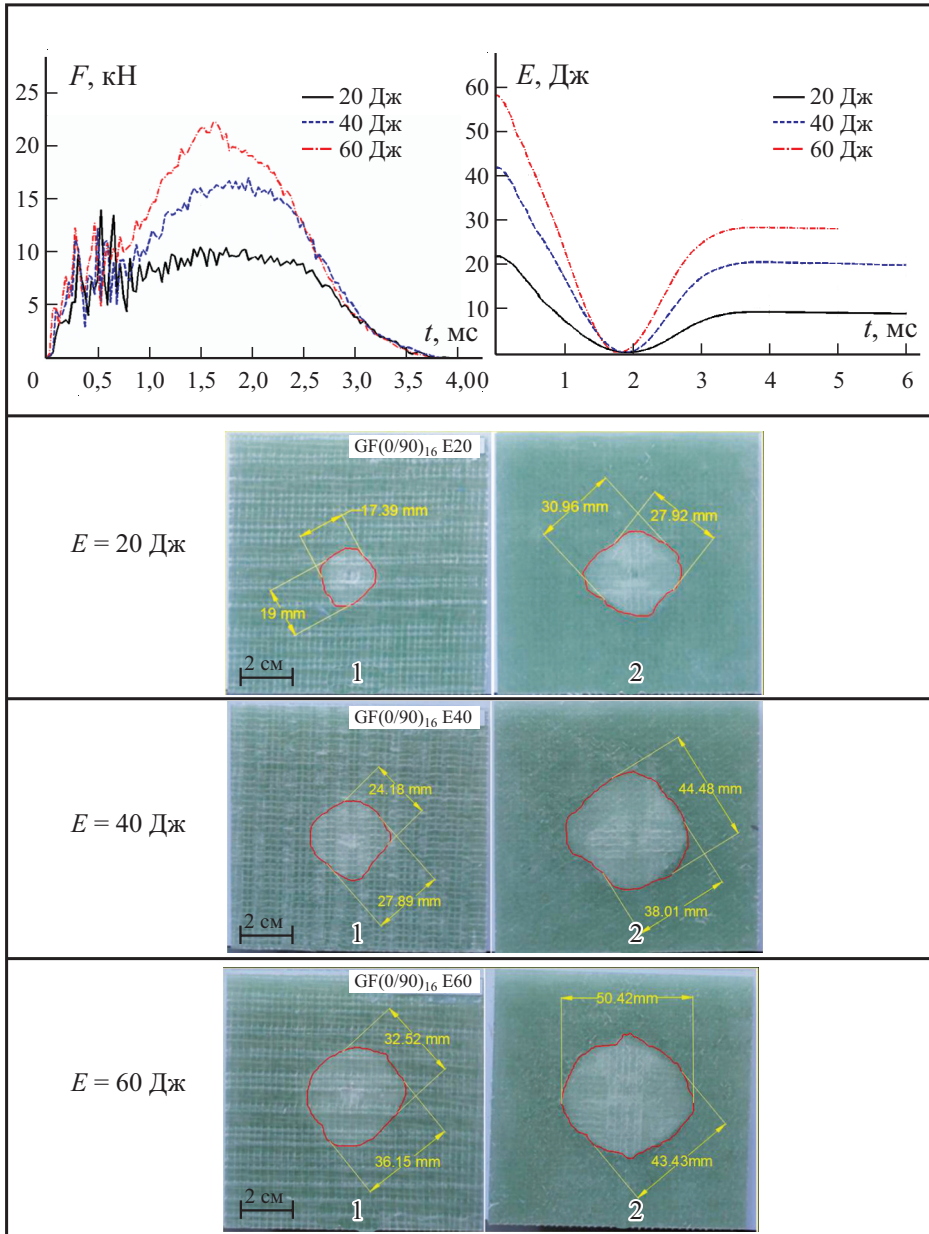


Рис. 11. Временные зависимости контактной силы $F-t$ и кинетической энергии $E-t$ и фотографии повреждений на передней (1) и задней (2) поверхностях тонкого композита с укладкой $[0^\circ/90^\circ]$ при ударе энергией 20, 40 и 60 Дж.

тествовал о растрескивании/смятии матрицы, разрыве волокон и расслоении, зависящих от доминирующей изгибающей нагрузки.

У толстых слоистых композитов небольшие области повреждения в виде разрыва волокон и смятия матрицы наблюдали только на передней по-

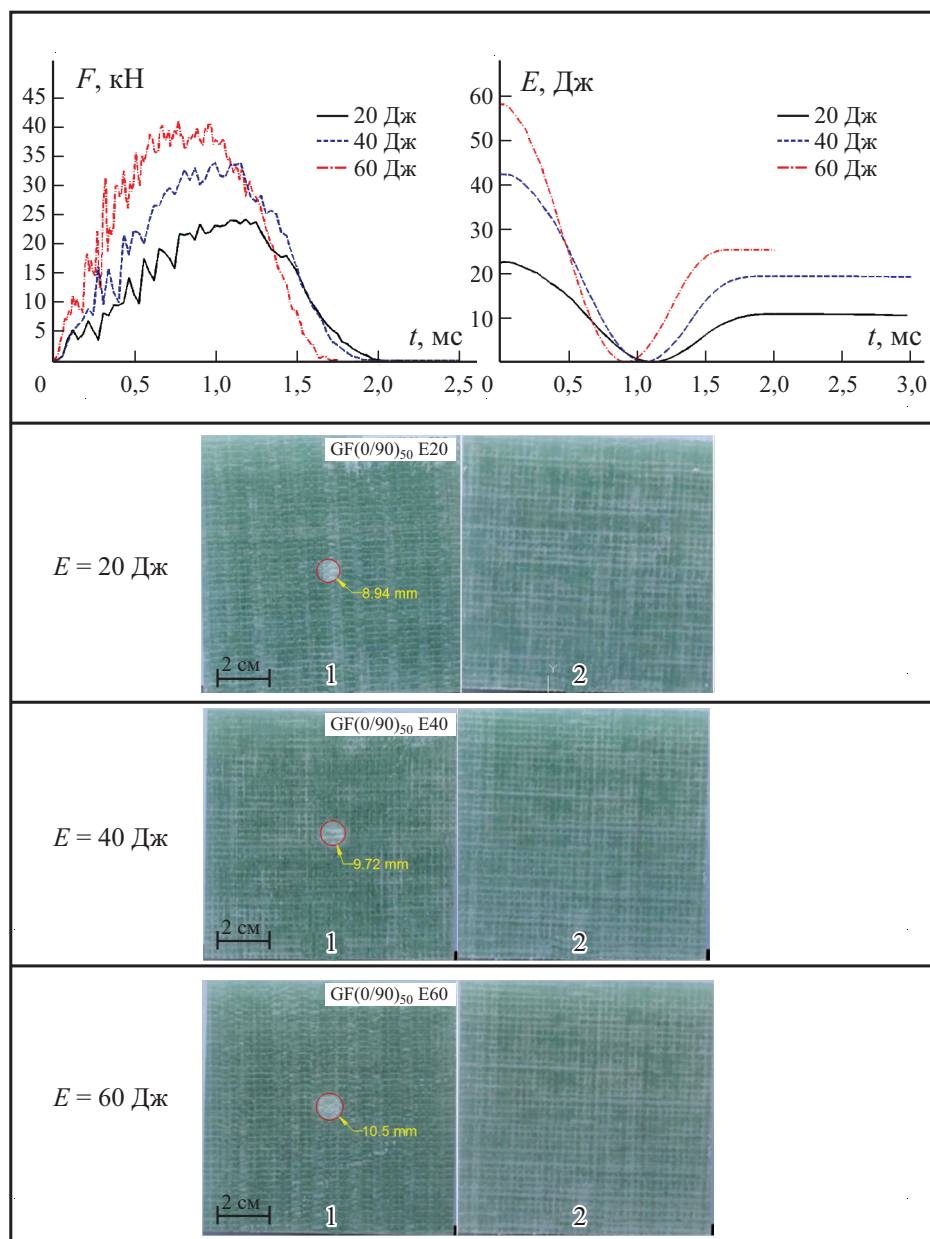


Рис. 12. То же для толстого композита.

верхности в районе точки удара, увеличивающиеся с увеличением энергии удара. В силу большой жесткости задняя поверхность толстых образцов при приложенных уровнях энергии удара не повреждалась.

Заклучение

В настоящей работе при комнатной температуре экспериментально исследовали характеристики толстых (50 слоев) и тонких (16 слоев) эпоксидных стеклопластиков к укладками $[0^\circ/90^\circ]$, $[30^\circ/60^\circ]$ и $[-45^\circ/+45^\circ]$ при ударе с энергией 20, 40 и 60 Дж. Установили, что контактная сила и прогиб слоистых композитов возрастают с увеличением энергии удара. При увеличении энергии удара в три раза пиковая контактная сила у всех тонких и толстых композитов с рассмотренными укладками возросла в 1,6—1,7 раза. Площадь повреждения на передней и задней поверхностях возрастала с увеличением энергии удара. Повреждения композитов на задней поверхности тонких образцов в силу действия растягивающих напряжений и расслоения, обусловленных изгибом, были значительно больше, чем на передней. При увеличении толщины пластин с 8 мм (16 слоев) до 25 мм (50 слоев) пиковое значение контактной силы возросло в 1,7—2 раза. Кроме того, с увеличением толщины образцов отношение поглощенной энергии к полной энергии удара уменьшалось. Для образцов одинаковой толщины при увеличении энергии удара максимальная контактная сила также возрастала, а продолжительность контакта изменялась незначительно. В толстых слоистых композитах большая часть энергии удара рассеивалась за счет упругих деформаций и меньше поглощалась в силу повреждения. Механизмы разрушения толстых и тонких слоистых композитов различны. В толстых композитах основной механизм разрушения — поперечный сдвиг, а в тонких — большие мембранные деформации. Влияние ориентации слоев на контактную силу тонких и толстых композитов оказалось незначительным в силу жестких граничных условий в экспериментальной установке. Наблюдали, что повреждения после удара связаны с ориентацией слоев в композите.

Работа выполнена при финансовой поддержке Группы координации научно-исследовательских проектов Университета Эрджиес в рамках исследовательского гранта № FYL-2017-7739.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Reid S. R. and Zhou G. Impact Behaviour of Fibre-Reinforced Composite Materials and Structures. — Cambridge: CRC Press, Woodhead Publishing Ltd, UK, 2000.
2. Abrate S. Impact on Composite Structures. — Cambridge: Cambridge University Press, UK, 1998.
3. Baucum J. N. and Zikry M. A. Low-velocity impact damage progression in woven E-glass composite systems // Composites: Part A. — 2005. — Vol. 36, No. 5. — P. 658—664.
4. Gustin J., Joneson A., Mahinfalah M., and Stone J. Low velocity impact of combination Kevlar/carbon fiber sandwich composites // Compos. Struct. — 2005. — Vol. 69, No. 4. — P. 396—406.

5. *Gómez-del Río T., Zaera R., Barbero E., and Navarro C.* Damage in CFRPs due to low velocity impact at low temperature // *Composites: Part B.* — 2005. — Vol. 36, No. 1. — P. 41—50.
6. *Yuaner M. and Kara M.* Dynamic response of laminated composites subjected to low-velocity impact // *J. Compos. Mater.* — 2007. — Vol. 41, No. 24. — P. 2877—2896.
7. *Choi I. H.* Low-velocity impact analysis of composite laminates under initial in-plane load // *Compos. Struct.* — 2008. — Vol. 86, Nos. 1—3. — P. 251—257.
8. *Karakuzu R., Erbil E., and Aktas M.* Impact characterization of glass/epoxy composite plates: an experimental and numerical study // *Composites: Part B.* — 2010. — Vol. 41, No. 5. — P. 388—395.
9. *Evcı C. and Gülgeç M.* An experimental investigation on the impact response of composite materials // *Int. J. Impact Eng.* — 2012. — Vol. 43, May. — P. 40—51.
10. *Chirangivee K. R., Harsha S., and Akash D. A.* Computational analyses of effect of stacking orientation on low velocity impact behavior of GFRP composite laminates // *Int. J. Res. Eng. Technol.* — 2014. — Vol. 3, No. 3. — P. 978—982.
11. *Boumbimba R. M., Froustey C., Viot P., and Gerard P.* Low velocity impact response and damage of laminate composite glass fibre/epoxy based tri-block copolymer // *Composites: Part B.* — 2015. — Vol. 76, Jul. — P. 332—342.
12. *Khan S. H., Sharma A. P., and Parameswaran V.* An Impact induced damage in composite laminates with intra-layer and inter-laminate damage // *Procedia Eng.* — 2017. — Vol. 173. — P. 409—416.
13. *Bulut M. and Erklığ A.* An experimental investigation on damage characteristics of laminated hybrid composites subjected to low velocity impact // *Polym. Compos.* — 2018. — Vol. 39, No. 9. — P. 3129—3139.
14. *Taraghi I., Fereidoon A., and Taheri-Behrooz F.* Low-velocity impact response of woven Kevlar/epoxy laminated composites reinforced with multi-walled carbon nanotubes at ambient and low temperatures // *Mater. Des.* — 2014. — Vol. 53, Jan. — P. 152—158.
15. *Fakhreddini-Najafabadi S., Torabi M., and Taheri-Behrooz F.* An experimental investigation on the low-velocity impact performance of the CFRP filled with nanoclay // *Aerosp. Sci. Technol.* — 2021. — Vol. 16, Sep. — P. 106858.
16. *Wen H. M.* Penetration and perforation of thick FRP laminates // *Compos. Sci. Technol.* — 2001. — Vol. 61, No. 8. — P. 1163—1172.
17. *Guillaud N., Froustey C., Dau F., and Viot P.* Impact response of thick composite plates under uniaxial tensile preloading // *Compos. Struct.* — 2015. — Vol. 121, Mar. — P. 172—181.
18. *Jimenez A. G., Manes A., Beligni A., Dziendzikowski M. M., Sbarufatti C., and M. Giglio.* Modelling and experimental testing of thick CFRP composites subjected to low velocity impacts // *Procedia Struct. Integr.* — 2019. — Vol. 24. — P. 101—109.
19. *Duan M., Yue Z., and Song Q.* Investigation of damage to thick composite laminates under low-velocity impact and frequency-sweep vibration loading conditions // *Adv. Mech. Eng.* — 2020. — Vol. 12, No. 10. — P. 1—14.
20. *Sachse R., Pickett A. K., and Middendorf P.* Simulation of impact and residual strength of thick laminate composites // *Composites: Part B.* — 2020. — Vol. 195, Aug. — P. 1—16.
21. *Bulut M.* Low-velocity impact tests on basalt fiber/polypropylene core honeycomb sandwich composites // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 56, No. 1. — P. 121—130.
22. *Fallahi H., Taheri-Behrooz F., and Asadi A.* Nonlinear mechanical response of polymer matrix composites: A review // *Polym. Rev.* — 2020. — Vol. 60, No. 1. — P. 42—85.

23. ASTM International, D7136/D7136M – 12 Standard Test Method for Measuring the Damage Resistance of a Fiber-Reinforced Polymer Matrix Composite to a Drop-Weight Impact Event.

24. *Faggiani A. and Falzon B. G.* Predicting low-velocity impact damage on a stiffened composite panel // *Composites: Part A*. — 2010. — Vol. 41, No. 6. — P. 737—749.

25. *Szefek P. and Olsson R.* Tensile stiffness distribution in impacted composite laminates determined by an inverse method // *Composites: Part A*. — 2008. — Vol. 39, No. 8. — P. 1282—1293.

26. *Azhdari S., Fakhreddini-Najafabadi S., and Taheri-Behrooz F.* An experimental and numerical investigation on low velocity impact response of GLAREs // *Compos. Struct.* — 2021. — Vol. 271, Sept. — P. 114123.

27. *Tuoa H., Lua Z., Maa X., Xinga J., and Zhang C.* Damage and failure mechanism of thin composite laminates under low-velocity impact and compression-after-impact loading conditions // *Composites: Part B*. — 2019. — Vol. 163, Apr. — P. 642—654.

Поступила в редакцию 01.10.2021

Окончательный вариант поступил 04.02.2022

Received Oct. 1, 2021 (Feb. 4, 2022)

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Турусов Р. А., Поликарпова И. А., Орлов М. А., Сергеев А. Ю., Солодилов В. И.</i> Напряженно-деформированное состояние преформы при послыонной автоматизированной нашивке ровинга	865
<i>Львов Г. И.</i> Численная гомогенизация теплофизических свойств волокнистых композитов	883
<i>Хошгофтар М. Дж., Карими М., Сейфури С.</i> Нелинейный анализ изгиба пластин из слоистого композита с использованием уточненной зигзагообразной теории	905
<i>Захаров Д. Д.</i> Точные уравнения и нахождение частот среза при свободных колебаниях пластин из функционально-градиентных материалов	927
<i>Мишра Н., Дас К.</i> Сравнительное исследование инкрементальной самосогласованной и Эшелби—Мори—Танака моделей для оценки электроупругих свойств пьезоэлектрических полимерных композитов с ортотропной матрицей	943
<i>Адамов А. А., Келлер И. Э., Острер С. Г., Селетков Д. В.</i> Оценка работоспособности антифрикционных ПТФЭ-композитов при давлении свыше 60 МПа. I. Сравнение твердости и деформационных свойств в условиях свободного и стесненного сжатия	965
<i>Абатурова Н. А., Ломовской В. А., Галушко Т. Б., Ломовская Н. Ю.</i> Релаксационные процессы в нанокompозитной системе поливинилвый спирт—йод—йодид калия	987
<i>Аликин М. Б., Алексеева К. Д., Панфилов Д. А., Дворко И. М., Лавров Н. А.</i> Свойства эпоксидных композиций, отвержденных продуктами аминолита вторичных полиэтилентерефталата и поликарбоната	999
<i>Юрков Г. Ю., Пророкова Н. П., Козинкин А. В., Вавилова С. Ю., Солодилов В. И., Максимова А. В., Власенко В. Г., Кириллов В. Е., Бузник В. М.</i> Полипропиленовые нити, модифицированные марганецсодержащими наночастицами	1011
<i>Ян Цз., Тан Цз., Ван Ю., Ван Ц.</i> Нелинейный анализ механического поведения балок из функционально-градиентного сплава с памятью формы	1031
<i>Паньков А. А.</i> Влияние начального напряженного состояния на эффективные свойства пьезокompозита	1049
<i>Гюнеш Р., Аль-Грайшави Дж.</i> Экспериментальное исследование поведения толстых и тонких слоистых композитов при низкоскоростном ударе	1069

CONTENTS

<i>Turusov R. A., Polikarpova I. A., Orlov M. A., Sergeev A. Yu., and Solodilov V. I.</i> Stress-strain state of a preform made by the tailored fiber placement	865
<i>Lvov G. I.</i> Numerical homogenization of the thermophysical properties of fibrous composites . .	883
<i>Khoshgoftar M. J., Karimi M., and Seifoori S.</i> Nonlinear bending analysis of a laminated composite plate using a refined zig-zag theory	905
<i>Zakharov D. D.</i> Exact equations and finding the cut-off frequencies in free vibrations of functionally graded plates	927
<i>Mishra N. and Das K.</i> A comparative study of incremental self-consistent and Eshelby—Mori—Tanaka models for estimating the electroelastic properties of piezoelectric polymer composites with an orthotropic matrix	943
<i>Adamov A. A., Keller I. E., Ostrer S. G., and Seletkov D. V.</i> Evaluation of the performance of antifriction PTFE composites at a pressure over 60 MPa. I. Comparison of their hardness and deformation properties under free and constrained compression	965
<i>Abaturova N. A., Lomovskoy V. A., Galushko T. B., and Lomovskaya N. Yu.</i> Relaxation processes in the nanocomposite polyvinyl alcohol—iodine—potassium iodide system . .	987
<i>Alikin M. B., Alekseeva K. D., Panfilov D. A., Dvorko I. M., Lavrov N. A.</i> The properties of epoxy compositions cured by aminolytic splitting products of a secondary polyethylene terephthalate and polycarbonate	999
<i>Yurkov G. Y., Prorokova N. P., Kozinkin A. V., Vavilova S. Y., Solodilov V. I., Maksimov A. V., Vlasenko V. G., Kirillov V. E., Buznik V. M.</i> Polypropylene filaments modified with manganese-containing nanoparticles	1011
<i>Yang J., Tang J., Wang Y., and Wang Q.</i> A nonlinear analysis of the mechanical behavior of functionally graded shape-memory alloy beams	1031
<i>Pan'kov A. A.</i> Effect of the initial stress state on the effective properties of piezocomposite . .	1049
<i>Gunes R. and Al-Hraishawi J.</i> Experimental investigation into the low-velocity impact behavior of thick and thin laminated composites	1069



Исправление ошибок

В статье *А. Н. Соловьёв^{а,б}, Т. Б. До^а, В. А. Чебаненко^в, И. А. Паринов^б* «ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОМПОЗИТНОГО ПЬЕЗОАКТИВНОГО БИМОРФА В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ: ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ» («Механика композитных материалов»). — 2022. — Т. 58, № 4. — С. 675—690 на с. 675 следует читать:

^аДонской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

^бЮжный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

^вФедеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

Список некоторых планируемых конференций (Композиты и перспективные материалы)

2022—2025

Modern Materials and Manufacturing 2023

April 25-27, Tallinn, Estonia
<https://taltech.ee/en/mmm2021>

ICFC9

The ninth International Conference on Fatigue of Composites

June 21-23, 2023, University of Padova, Vicenza, Italy
<http://static.gest.unipd.it/icfc9/>

The 14-th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes

June 25-29, 2023, AGH University of Science and Technology, Krakow, Poland
<http://numiform2023.agh.edu.pl/>

SMART 2023

10th ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials

July 3-6, 2023, University of Patras, Patras, Greece
<https://www.smart2023.eu/>

AB2023

7th International Conference on Structural Adhesive Bonding

July 13-14, 2023, University of Porto (FEUP), Porto, Portugal
<https://web.fe.up.pt/~ab2023/>

CICE 2023

11th International Conference on Fiber-Reinforced Polymer (FRP) Composites in Civil Engineering

July 23-26, 2023, Rio de Janeiro, Brazil
<https://cice2023.org/> ; <https://easychair.org/cfp/CICE2023>

ICCM-23

International Conference on Composite Materials

July 30 - August 4, 2023, Belfast, Ireland
<https://iccm23.org/about-the-conference/>

ISNDCM

17th International Symposium on the Nondestructive Characterization of Materials

August 14-17, 2023, The Empa Akademie; Dübendorf (Zurich), Switzerland
<https://asnt.eventsair.com/isndcm23/>

11th ECNP International Conference on Nanostructured Polymers and Nanocomposites

August 29-31, 2023, Lodz, Poland
<http://ecnp2020.p.lodz.pl/>

FEMS EUROMAT23

Materials Science and Technology in Europe

September 3-7, 2023, Frankfurt on the Main, Germany

<https://euromat2023.com/>

5th Polish Congress of Mechanics

25th International Conference on Computer Methods in Mechanics

September 4-7, 2023, Gliwice, Poland

<https://pcm-cmm.com/>

COMPOSITES 2023

9th ECCOMAS Thematic Conference on the Mechanical Response of Composites

September 12-14, 2023, Trapani, Sicily, Italy

<https://composites2023.cimne.com/>

ICPIC 2023

International Congress of Polymers in Concrete

September 17-20, 2023, Warsaw University of Technology, Poland

<https://icpic2022.org/organizers/>

9th International Conference on Fracture of Polymers, Composites and Adhesives

September 17-21, 2023, Eurotel Victoria, Les Diablerets, Switzerland

<https://www.elsevier.com/events/conferences/esistc4conference>

IUTAM Symposium Creep in Structures

September 18-22, 2023, Magdeburg, Germany

<http://www.iutam-symposium.ovgu.de>

VBE2023

The First International Conference on Vehicle Body Engineering

November 2-3, 2023, University of Porto (FEUP), Porto, Portugal

<https://web.fe.up.pt/~vbe2023/>

ECCOMAS CONGRESS 2024

9th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering

June 3-7, 2024, Lisbon, Portugal

<https://eccomas2024.org/>

MDA 2024

5th International Conference on Materials Design and Applications

July 4-5, 2024, University of Porto (FEUP), Porto, Portugal

<https://web.fe.up.pt/~mda2024/>

ECCM21 2024

21st European Conference on Composite Materials

July 2-5, 2024, Nantes, France

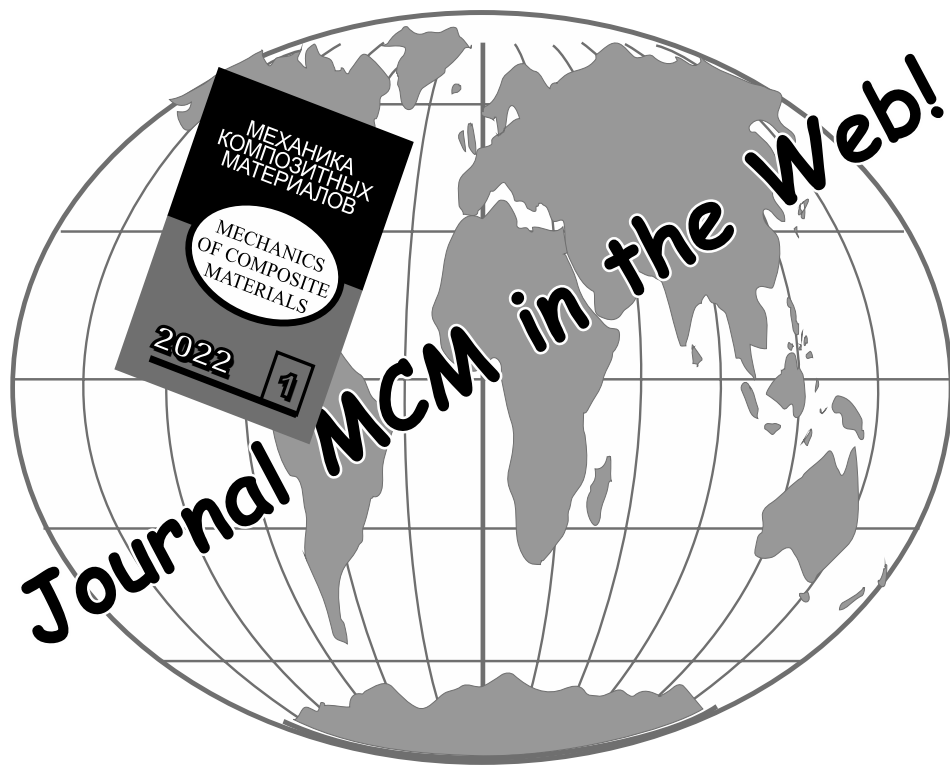
<https://www.showsbee.com/fairs/European-Conference-Composite-Materials.html>

ICCM24

The 24th International Conference on Composite Materials

August 9-15, 2025, Baltimore, Maryland, U.S.A

<http://iccm24.com/>



Адрес редакции:

ул. Айзкрауклес, 23, Рига, LV-1006 Латвия
<https://www.apgads.lu.lv/journals/mkm/>
e-mail: mcm@pmi.lv, tatjana.gubina@pmi.lv

Address:

23 Aizkraukles St., Riga, LV-1006 Latvia
<https://www.apgads.lu.lv/en/journals/mkm/>
e-mail: mcm@pmi.lv, tatjana.gubina@pmi.lv

Редактор *Т. В. Губина*

Редактор английского текста *А. Лагздиньш*

Перевод для издания журнала на английском языке *В. Кулакова, А. Лагздиньша*

Компьютерная верстка *А. В. Пумпурс*

Корректор *С. А. Видинеев*

Отпечатано в типографии SIA "Eiro Print", ул. Апес, 5А – 89, Рига, LV-1039 Латвия