

*А. А. Паньков\**

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990 Россия*

## **ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НА ЭФФЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ПЬЕЗОКОМПОЗИТА**

*А. А. Pan'kov\**

### **EFFECT OF THE INITIAL STRESS STATE ON THE EFFECTIVE PROPERTIES OF PIEZOCOMPOSITE**

**Keywords:** composite, effective properties, initial stress state, electromagnetic elasticity, piezoeffect, magnetostriction, numerical modeling

A new numerical-analytical solution of the problem on the “effective modulus” of statistical mechanics of piezocomposites is obtained considering the presence of an initial stressed electromagnetic-elastic state of an irregular structure with ellipsoidal inhomogeneities. The Green function method for a homogeneous piezoelectromagnetic elastic medium is used. The validity of the new solution is confirmed by comparing it with the known asymptotic solution for the case of an elastic laminated composite in the presence of an initial stress state of its layers. Results of a numerical analysis of influence of the initial stress state on the effective properties of elastic two-phase composites with layered, unidirectional-fibrous and granular structures are presented. For a composite with spherical inclusions, the appearance of “induced” anisotropy at the macrolevel, owing to the presence of the initial stress state of the structure, was revealed. A numerical analysis of influence of the axisymmetric macrolevel initial stress state on the effective transversely isotropic electroelastic properties of a PZT-4/fluoroplastic composite with unidirectional piezoelectric fibers is presented. The effective characteristics of the piezocomposite on which the initial stress state had a significant effect were revealed.

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [a\\_a\\_pankov@mail.ru](mailto:a_a_pankov@mail.ru)  
Corresponding author: [a\\_a\\_pankov@mail.ru](mailto:a_a_pankov@mail.ru)

**Ключевые слова:** композит, свойства эффективные, состояние напряженное начальное, электромагнитоупругость, пьезоэффект, магнитострикция, моделирование численное

Получено новое численно-аналитическое решение задачи “эффективного модуля” статистической механики пьезокомпозитов с учетом наличия начального напряженного электромагнитоупругого состояния нерегулярной структуры с эллипсоидальными неоднородностями. Использован метод функций Грина для однородной пьезоэлектромагнитоупругой среды. Новые решения подтверждены сравнением с известным асимптотическим решением для случая упругого слоистого композита при наличии начального напряженного состояния слоев. Представлены результаты численного анализа влияния начального напряженного состояния на эффективные свойства упругих двухфазных композитов со слоистой, однонаправленно-волокнистой и гранулированной структурами. Для композита со сферическими включениями выявлено появление на макроуровне “наведенной” анизотропии, обусловленной наличием начального напряженного состояния структуры. Дан численный анализ влияния осесимметричного макроуровневого начального напряженного состояния на эффективные трансверсально-изотропные электроупругие свойства композита PZT-4/фторопласт с однонаправленными пьезоэлектрическими волокнами. Выявлены эффективные характеристики пьезокомпозита, на которые начальное напряженное состояние оказывает существенное влияние.

## Введение

Нелинейные эффекты деформирования композитов обусловлены, в общем, различными факторами, один из которых — наличие в материале начального напряженного состояния [1—3]. Изучение закономерностей и эффектов влияния начального напряженного состояния элементов структуры материала на особенности его последующего нагружения — одна из задач механики композитов [1—9]. Решение этой задачи актуально для различных практических приложений, в частности, ультразвукового неразрушающего контроля напряженного состояния нагруженных конструкций [10], методов геомеханики и сейсмических исследований [11]. “Линеаризованный подход” [3, 6, 7, 12, 13] теории упругости использован ранее для математического моделирования распространения упругих волн в структурно-неоднородных упругих средах с начальным напряженным состоянием [14—16]. Этот подход использован также для нахождения асимптотических решений эффективных свойств упругих композитов с идеально периодическими начально-напряженными структурами [17—20], например, когда начальное напряженное состояние

слоистой или однонаправлено-волокнистой структуры обусловлено их тепловым нагревом [17]. Изучение эффектов влияния начального напряженного состояния на свойства и поведение материала актуально также для пьезоэлектрических и/или пьезомагнитных (магнитострикционных) композитов, которые интегрируются в современные “интеллектуальные” конструкции в качестве информационных элементов, датчиков и/или актуаторов систем управления акустическими и/или аэродинамическими характеристиками поверхностей, геометрической формой, напряженным состоянием, демпфированием вибраций конструкции [21]. Математическое моделирование поведения пьезоактивных композитов на микро-, макроуровнях и прогнозирование их эффективных свойств основывается на постановке и решении связанных краевых задач электромагнитоупругости для микронеоднородной представительной области с использованием методов механики композитов, в частности, асимптотических методов [17—20, 22] и методов на основе двоякопериодических комплексных функций [23] для идеально периодических структур и методов статистической механики композитов для нерегулярных структур [24—26]. Ранее в рамках “обобщенного сингулярного приближения” [25], основанного на методе функций Грина, получены решения связанных стохастических краевых задач электромагнитоупругости для нерегулярных случайных, в том числе квазипериодических, пьезоактивных структур композитов [27, 28]. Линеаризованный подход теории упругости для тела с начальным напряженным состоянием обобщен на магнитоэлектрорупругий материал [29]. Численный анализ динамического поведения пьезоэлектрических структур с учетом начального электромеханического напряженного состояния элементов структуры дан в [30].

Цель работы — численно-аналитическое решение задачи “эффективного модуля” для пьезоактивного композита с начально-напряженной структурой из пьезоэлектрических магнитострикционных фаз в рамках обобщенного сингулярного приближения статистической механики композитов [25, 28].

## 1. Постановка задачи

Пусть представительная область  $\mathbf{V}$  композита состоит из некоторого числа  $F$  однородных трансверсально-изотропных пьезоэлектромагнитных фаз ( $f = \overline{1, F}$ ), плоскости изотропии которых лежат в координатной плоскости  $\eta_1\eta_2$ , ось поляризации  $\eta_3$ . Взаимное нерегулярное (случайное) расположение фаз в объеме композита задаем через индикаторные функции  $i_f(\mathbf{r})$  фаз, для которых  $i_f = 1$  при  $\mathbf{r} \in \mathbf{V}_f$ ,  $i_f = 0$  при  $\mathbf{r} \notin \mathbf{V}_f$ , где  $\mathbf{V}_f$  — область  $f$ -й фазы в  $\mathbf{V} = \bigcup_{f=1}^F \mathbf{V}_f$ . В области  $\mathbf{V}$  композита имеем некоторое начальное равновесное электромагнитоупругое состояние  $\zeta_0 = \{\boldsymbol{\sigma}^0, \mathbf{D}^0, \mathbf{B}^0\}$  в виде полей начальных механических напряжений  $\boldsymbol{\sigma}^0$ ,

электрической  $\mathbf{D}^0$  и магнитной  $\mathbf{B}^0$  индукций, обусловленных действием на композит некоторых начальных внешних механических нагрузок [1—20] и/или электромагнитных полей [29, 30], и, как следствие, имеют ненулевые осредненные (макроскопические) значения  $\sigma^{*0} \equiv \langle \sigma^0 \rangle$ ,  $\mathbf{D}^{*0} \equiv \langle \mathbf{D}^0 \rangle$ ,  $\mathbf{B}^{*0} \equiv \langle \mathbf{B}^0 \rangle$ , где  $\langle \dots \rangle = 1/V \int_V \dots d\mathbf{r}$  — оператор осреднения по области  $V$ . Значения  $\sigma^{*0} = 0$ ,  $\mathbf{D}^{*0} = 0$ ,  $\mathbf{B}^{*0} = 0$  имеем для случая наличия самоуравновешенных остаточных напряжений  $\sigma^0$  и индукций  $\mathbf{D}^0$ ,  $\mathbf{B}^0$  внутри области  $V$  после ее разгрузки на макроуровне. Начальные поля  $\sigma^0$ ,  $\mathbf{D}^0$ ,  $\mathbf{B}^0$  удовлетворяют уравнениям равновесия  $\sigma_{ij,j}^0 = 0$  и непрерывности  $D_{i,i}^0 = 0$ ,  $B_{i,i}^0 = 0$ .

При последующем (дополнительном к начальному) электромеханическом нагружении области  $V$  композита возникающие поля напряжений  $\sigma$  и индукций  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  удовлетворяют уравнениям равновесия [1, 20] и непрерывности [29, 30] вида

$$(\sigma_{ij} + \sigma_{kj}^0 u_{i,k}),_{,j} = 0, \quad (D_j + D_k^0 u_{j,k}),_{,j} = 0, \quad (B_j + B_k^0 u_{j,k}),_{,j} = 0 \quad (1)$$

с учетом поправок (дополнительных слагаемых), обусловленных наличием заданных начальных полей  $\sigma^0$ ,  $\mathbf{D}^0$ ,  $\mathbf{B}^0$  и дополнительного искомого поля перемещений  $\mathbf{u}$ . Первое уравнение в (1) может быть преобразовано к виду

$$\sigma_{ij,j} + \sigma_{kj}^0 u_{i,k,j} = 0$$

с учетом выполнения уравнений равновесия  $\sigma_{kj,j}^0 = 0$  для поля  $\sigma^0$ . В (1) напряжения  $\sigma$  и индукции  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  выражены по известным определяющим соотношениям [31]

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} u_{m,n} - e_{nij} E_n - h_{nij} H_n - \beta_{ij} \Theta,$$

$$D_i = e_{imn} u_{m,n} + \lambda_{in} E_n + \pi_i \Theta, \quad (2)$$

$$B_i = h_{imn} u_{m,n} + \mu_{in} H_n + \vartheta_i \Theta$$

через градиенты перемещений  $\nabla \mathbf{u}$ , напряженности электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей, однородное приращение температуры  $\Theta$  с использованием известных тензоров упругих свойств  $\mathbf{C}_f$ , пьезоэлектрических  $\mathbf{e}_f$  и пьезомагнитных (магнитострикционных)  $\mathbf{h}_f$  свойств, диэлектрических  $\lambda_f$  и магнитных  $\mu_f$  проницаемостей, температурных коэффициентов  $\beta_f$ , пирозлектрических  $\pi_f$  и пиромагнитных  $\vartheta_f$  постоянных для каждой фазы  $f$ . Компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ , векторов напряженностей  $E_i = -\varphi_{,i}$ ,  $H_i = -\psi_{,i}$  вычисляем через поля перемещений

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ , электрического  $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$  и магнитного  $\psi = \psi(\mathbf{r})$  потенциалов с граничными условиями

$$u_{i|\Gamma} = u_{ij}^* r'_j, \varphi_{|\Gamma} = -E_i^* r'_i, \psi_{|\Gamma} = -B_i^* r'_i, \quad (3)$$

где  $\mathbf{r}' \in \Gamma$  — граница области  $\mathbf{V}$ , осредненные или макроскопические значения напряжений  $\boldsymbol{\sigma}^* = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ , градиентов перемещений  $\mathbf{u}^* = \langle \nabla \mathbf{u} \rangle$ , напряженностей электрического  $\mathbf{E}^* = \langle \mathbf{E} \rangle$  и магнитного  $\mathbf{H}^* = \langle \mathbf{H} \rangle$  полей для области  $\mathbf{V}$ . Связанная краевая задача электромагнитоупругости в области  $\mathbf{V}$  с граничными условиями (3) примет вид

$$\begin{aligned} (C_{ijmn} u_{m,n})_{,j} + (\sigma_{kj}^0 u_{i,k})_{,j} + (e_{nij} \varphi_{,n})_{,j} + (h_{nij} \psi_{,n})_{,j} - \beta_{ij,j} \Theta &= 0, \\ (e_{jmn} u_{m,n})_{,j} + (D_k^0 u_{j,k})_{,j} - (\lambda_{jn} \varphi_{,n})_{,j} + \pi_{j,j} \Theta &= 0, \\ (h_{jmn} u_{m,n})_{,j} + (B_k^0 u_{j,k})_{,j} - (\mu_{jn} \psi_{,n})_{,j} + \vartheta_{j,j} \Theta &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

относительно искомым полей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ ,  $\varphi(\mathbf{r})$ ,  $\psi(\mathbf{r})$ , которые ищем в виде разложений

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{r}) &= u_{ij}^* r_j + a_{imn}(\zeta_0, \mathbf{r}) u_{mn}^* + b_{in}(\zeta_0, \mathbf{r}) E_n^* + d_{in}(\zeta_0, \mathbf{r}) H_n^* + t_i(\zeta_0, \mathbf{r}) \Theta, \\ -\varphi(\mathbf{r}) &= E_j^* r_j + f_{mn}^{(1)}(\zeta_0, \mathbf{r}) u_{mn}^* + h_n^{(1)}(\zeta_0, \mathbf{r}) E_n^* + m_n^{(1)}(\zeta_0, \mathbf{r}) H_n^* + t^{(1)}(\zeta_0, \mathbf{r}) \Theta, \\ -\psi(\mathbf{r}) &= H_j^* r_j + f_{mn}^{(2)}(\zeta_0, \mathbf{r}) u_{mn}^* + h_n^{(2)}(\zeta_0, \mathbf{r}) E_n^* + m_n^{(2)}(\zeta_0, \mathbf{r}) H_n^* + t^{(2)}(\zeta_0, \mathbf{r}) \Theta \end{aligned} \quad (5)$$

с учетом зависимости коэффициентов разложений от начального напряженного состояния  $\zeta_0 = \{\boldsymbol{\sigma}^0, \mathbf{D}^0, \mathbf{B}^0\}$  композита.

## 2. Метод функций Грина

Введем в рассмотрение функции Грина

$$\mathbf{G} = \begin{Bmatrix} U_{ik} & U_i^{(1)} & U_i^{(2)} \\ \Phi_k & \Phi^{(1)} & \Phi^{(2)} \\ \Psi_k & \Psi^{(1)} & \Psi^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

для однородной анизотропной пьезоэлектромагнитной среды — “среды сравнения” [25, 28], где  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\rho})$ ,  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ . В первом столбце матрицы (6)  $U_{ik}$ ,  $\Phi_k$ ,  $\Psi_k$  — перемещения по оси  $r_i$ , электрический и магнитный потенциалы в точке  $\mathbf{r}$  от действия в точке  $\mathbf{r}_1$  единичной силы вдоль координатной оси  $r_k$ ; во втором и третьем столбцах —  $U_{ik}^{(1)}$ ,  $\Phi_k^{(1)}$ ,  $\Psi_k^{(1)}$  и  $U_{ik}^{(2)}$ ,  $\Phi_k^{(2)}$ ,  $\Psi_k^{(2)}$  — перемещения по оси  $r_i$ , электрический и магнитный потенциалы

в точке  $\mathbf{r}$  от действия в точке  $\mathbf{r}_1$  единичного электрического или магнитного источника соответственно. Свойства среды сравнения задаем через тензоры упругих свойств  $\mathbf{C}_\bullet$ , диэлектрической  $\lambda_\bullet$  и магнитной  $\mu_\bullet$  проницаемостей, пьезоэлектрических  $\mathbf{e}_\bullet$  и пьезомагнитных  $\mathbf{h}_\bullet$  модулей, которые (в различных приближениях) можно приравнять к осредненным по объему свойствам  $\mathbf{C}_\bullet = \langle \mathbf{C} \rangle$ , ...,  $\mathbf{h}_\bullet = \langle \mathbf{h} \rangle$ , или к свойствам одной из фаз композита  $\mathbf{C}_\bullet = \mathbf{C}_f$ , ...,  $\mathbf{h}_\bullet = \mathbf{h}_f$ , или к искомым эффективным свойствам композита  $\mathbf{C}_\bullet = \mathbf{C}^*$ , ...,  $\mathbf{h}_\bullet = \mathbf{h}^*$  по схеме самосогласования [25—27].

В результате от постановки краевой задачи (4) перейдем к системе интегродифференциальных уравнений

$$u'_i(\mathbf{r}) = \int_V U_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{g}_j(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V U_i^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{q}^{(1)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V U_i^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{q}^{(2)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1,$$

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \int_V \Phi_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{g}_j(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V \Phi^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{q}^{(1)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V \Phi^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{q}^{(2)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1,$$
(7)

$$\psi'(\mathbf{r}) = \int_V \Psi_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{g}_j(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V \Psi^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{q}^{(1)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V \Psi^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{q}^{(2)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1$$

относительно пульсаций  $\mathbf{u}'(\mathbf{r})$ ,  $\varphi'(\mathbf{r})$ ,  $\psi'(\mathbf{r})$ , обусловленных действием в однородной среде ( $\mathbf{C}_\bullet$ ,  $\lambda_\bullet$ ,  $\mu_\bullet$ ,  $\mathbf{e}_\bullet$ ,  $\mathbf{h}_\bullet$ ) распределенных объемных сил  $\tilde{g}_i = g_{ij,j}$ , электрических  $\tilde{q}^{(1)} = q_{i,i}^{(1)}$  и магнитных  $\tilde{q}^{(2)} = q_{i,i}^{(2)}$  источников, где поля

$$g_{ij} = C'_{ijmn} u_{mn}^* - e'_{nij} E_n^* - h'_{nij} H_n^* - \beta'_{ij} \Theta + C'_{ijmn} u'_{m,n} + e'_{nij} \varphi'_{,n} + h'_{nij} \psi'_{,n} + \sigma_{kj}^0 u'_{i,k},$$

$$q_j^{(1)} = e'_{jmn} u_{mn}^* + \lambda'_{jn} E_n^* + \pi'_j \Theta + e'_{jmn} u'_{m,n} - \lambda'_{jn} \varphi'_{,n} + D_k^0 u_{jk}^* + D_k^0 u'_{j,k}, \quad (8)$$

$$q_j^{(2)} = h'_{jmn} u_{mn}^* + \mu'_{jn} H_n^* + \vartheta'_j \Theta + h'_{jmn} u'_{m,n} - \mu'_{jn} \psi'_{,n} + B_k^0 u_{jk}^* + B_k^0 u'_{j,k}$$

с учетом равенств  $(\sigma_{kj}^0 u_{ik}^*)_{,j} = \sigma_{kj,j}^0 u_{ik}^* = 0$  в силу выполнения уравнений равновесия  $\sigma_{nj,j}^0 = 0$  для начальных напряжений  $\sigma^0(\mathbf{r})$  в области  $\mathbf{V}$  и независимости макроскопических величин  $u_{mn}^*$ ,  $E_n^*$ ,  $H_n^*$  от координат  $\mathbf{r}$ . Здесь использованы обозначения пульсаций

$$\sigma'^0(\mathbf{r}) = \sigma^0(\mathbf{r}) - \sigma^{*0}, \quad \mathbf{D}'^0(\mathbf{r}) = \mathbf{D}^0(\mathbf{r}) - \mathbf{D}^{*0}, \quad \mathbf{B}'^0(\mathbf{r}) = \mathbf{B}^0(\mathbf{r}) - \mathbf{B}^{*0} \quad (9)$$

для начального напряженного состояния, отклонений микронеоднородных свойств композита от однородных свойств среды сравнения

$$\mathbf{C}'_{\bullet}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{C}(\mathbf{r}) - \mathbf{C}_{\bullet} = \tilde{\mathbf{C}} + \mathbf{C}'(\mathbf{r}), \dots, \boldsymbol{\mu}'_{\bullet}(\mathbf{r}) \equiv \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\mu}_{\bullet} = \tilde{\boldsymbol{\mu}} + \boldsymbol{\mu}'(\mathbf{r}), \quad (10)$$

где тензоры разностей  $\tilde{\mathbf{C}} = \langle \mathbf{C} \rangle - \mathbf{C}_{\bullet}$ , ...,  $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \langle \boldsymbol{\mu} \rangle - \boldsymbol{\mu}_{\bullet}$ . С использованием “теоремы о свертках” дифференцирование  $\partial / \partial r_{(1)i}$  функций  $\mathbf{g}(\mathbf{r}_1)$ ,  $\mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{r}_1)$ ,  $\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{r}_1)$  в подинтегральных выражениях интегродифференциальных уравнений (7) может быть заменено дифференцированием  $-\partial / \partial r_{(1)i}$  или  $\partial / \partial r_i$  соответствующих ядер — функций Грина  $\mathbf{U}$ ,  $\Phi$ , ...,  $\Psi^{(2)}$  (6) [24—28] с учетом их разностного аргумента  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$  и асимптотических равенств нулю при  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \rightarrow \infty$ .

### 3. Эффективные свойства пьезоэлектромагнитного композита с начальным напряженным состоянием

Искомые тензоры эффективных свойств  $\mathbf{C}^*$ ,  $\boldsymbol{\lambda}^*$ ,  $\boldsymbol{\mu}^*$ ,  $\mathbf{e}^*$ ,  $\mathbf{h}^*$ ,  $\boldsymbol{\beta}^*$ ,  $\boldsymbol{\pi}^*$ ,  $\mathcal{G}^*$  и дополнительно тензоры электромагнитной связанности  $\boldsymbol{\chi}^*$ ,  $\boldsymbol{\kappa}^*$  композита с пьезоэлектрическими и пьезомагнитными фазами при наличии начального напряженного электромагнитоупругого состояния  $\zeta_0 = \{\boldsymbol{\sigma}^0, \mathbf{D}^0, \mathbf{B}^0\}$  входят в определяющие соотношения на макроуровне композита

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^* &= C_{ijmn}^* \varepsilon_{mn}^* - e_{(\sigma)nij}^* E_n^* - h_{(\sigma)nij}^* H_n^* - \beta_{ij}^* \Theta, \\ D_i^* &= e_{(D)imn}^* \varepsilon_{mn}^* + \lambda_{in}^* E_n^* + \chi_{in}^* H_n^* + \pi_i^* \Theta, \\ B_i^* &= h_{(B)imn}^* \varepsilon_{mn}^* + \mu_{in}^* H_n^* + \kappa_{in}^* E_n^* + \mathcal{G}_i^* \Theta, \end{aligned} \quad (11)$$

связывая макроскопические значения напряжения  $\boldsymbol{\sigma}^* = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ , индукций  $\mathbf{D}^* = \langle \mathbf{D} \rangle$ ,  $\mathbf{B}^* = \langle \mathbf{B} \rangle$  с деформацией  $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ , напряженностями  $\mathbf{E}^* = \langle \mathbf{E} \rangle$ ,  $\mathbf{H}^* = \langle \mathbf{H} \rangle$  и температурой нагрева  $\Theta$  представительной области  $\mathbf{V}$  композита. В общем случае компоненты тензоров  $\mathbf{C}^*$ , ...,  $\mathcal{G}^*$  (11) рассчитываем по формулам [26—28]

$$\begin{aligned} C_{ijmn}^* &= \langle C_{ijmn} \rangle + \langle C'_{ijdb} a_{dmn,b} \rangle + \langle e'_{pij} f_{mn,p}^{(1)} \rangle + \langle h'_{pij} f_{mn,p}^{(2)} \rangle, \\ \lambda_{kn}^* &= \langle \lambda_{kn} \rangle + \langle \lambda'_{kp} h_{n,p}^{(1)} \rangle + \langle e'_{kpq} b_{qn,p} \rangle, \\ \mu_{kn}^* &= \langle \mu_{kn} \rangle + \langle \mu'_{kp} m_{n,p}^{(2)} \rangle + \langle h'_{kpq} d_{qn,p} \rangle, \\ e_{(\sigma)nij}^* &= \langle e_{nij} \rangle - \langle C'_{ijpq} b_{qn,p} \rangle + \langle e'_{pij} h_{n,p}^{(1)} \rangle + \langle h'_{pij} h_{n,p}^{(2)} \rangle, \\ h_{(\sigma)nij}^* &= \langle h_{nij} \rangle - \langle C'_{ijpq} d_{qn,p} \rangle + \langle e'_{pij} m_{n,p}^{(1)} \rangle + \langle h'_{pij} m_{n,p}^{(2)} \rangle, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 e_{(D)imn}^* &= \langle e_{imn} \rangle + \langle e'_{ipq} a_{pmn,q} \rangle + \langle \lambda'_{ip} f_{mn,p}^{(1)} \rangle, \\
 h_{(B)imn}^* &= \langle h_{imn} \rangle + \langle h'_{ipq} a_{pmn,q} \rangle + \langle \mu'_{ip} f_{mn,p}^{(2)} \rangle, \\
 \chi_{kn}^* &= \langle \lambda'_{kp} m_{n,p}^{(1)} \rangle + \langle e'_{kpq} d_{qn,p} \rangle, \quad \kappa_{kn}^* = \langle \mu'_{kp} h_{n,p}^{(2)} \rangle + \langle h'_{kpq} b_{qn,p} \rangle, \\
 \beta_{ij}^* &= \langle \beta_{ij} \rangle - \langle C'_{ijdb} t_{d,b} \rangle + \langle e'_{pij} t_{p}^{(1)} \rangle + \langle h'_{pij} t_{p}^{(2)} \rangle, \\
 \pi_i^* &= \langle \pi_i \rangle + \langle \lambda'_{ip} t_{p}^{(1)} \rangle + \langle e'_{ipq} t_{q,p} \rangle, \\
 \vartheta_i^* &= \langle \vartheta_i \rangle + \langle \mu'_{ip} t_{p}^{(2)} \rangle + \langle h'_{ipq} t_{q,p} \rangle,
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

где верхним индексом “ ’ ” обозначены пульсации тензоров электромагнитотермоупругих свойств микроструктуры композита. Иными словами, задача нахождения тензоров  $\mathbf{C}^*$ , ...,  $\mathbf{G}^*$  эффективных свойств композита (11) сводится к нахождению полей производных  $a_{dmn,b}(\mathbf{r})$ ,  $f_{mn,p}^{(1)}(\mathbf{r})$ , ...,  $t_{p}^{(2)}(\mathbf{r})$  и последующему осреднению произведений в правых частях равенств (12). Интегродифференциальные уравнения относительно этих полей получим в результате дифференцирования левых и правых частей уравнений (7) с учетом “теоремы о свертках”, обозначений (8)—(10) и разложений (5). Ядра этих уравнений — вторые производные функций Грина  $\nabla\nabla\mathbf{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)$ , где  $\nabla$  — оператор дифференцирования по координатам  $\mathbf{r}$ .

В “обобщенном сингулярном приближении”  $\nabla\nabla\mathbf{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \approx \mathbf{G}^S \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)$  [25], в частности, для рассматриваемого случая [28] пьезоэлектромагнитной среды сравнения с эллипсоидальным “зерном неоднородности” у вторых производных функций Грина учитываются лишь сингулярные составляющие

$$\mathbf{G}^S = \begin{pmatrix} U_{imjn}^S & U_{imn}^{S(1)} & U_{imn}^{S(2)} \\ \Phi_{imn}^S & \Phi_{mn}^{S(1)} & \Phi_{mn}^{S(2)} \\ \Psi_{imn}^S & \Psi_{mn}^{S(1)} & \Psi_{mn}^{S(2)} \end{pmatrix}.
 \tag{13}$$

В приближении (13) из общих соотношений (12) следует решение для искомых тензоров  $\mathbf{C}^*$ , ...,  $\mathbf{G}^*$  эффективных свойств, например, для двухфазного композита с начальным напряженным состоянием

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}^* &= \langle \mathbf{C} \rangle + \Delta^c, \quad \boldsymbol{\lambda}^* = \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle + \Delta^\lambda, \quad \boldsymbol{\mu}^* = \langle \boldsymbol{\mu} \rangle + \Delta^\mu, \\
 \mathbf{e}_{(\sigma)}^* &= \langle \mathbf{e} \rangle + \Delta_{(\sigma)}^e, \quad \mathbf{h}_{(\sigma)}^* = \langle \mathbf{h} \rangle + \Delta_{(\sigma)}^h,
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

$$\mathbf{e}_{(D)}^* = \langle \mathbf{e} \rangle + \Delta_{(D)}^e, \quad \mathbf{h}_{(B)}^* = \langle \mathbf{h} \rangle + \Delta_{(B)}^h, \quad (14)$$

$$\chi^* = \Delta^\chi, \quad \kappa^* = \Delta^\kappa, \quad \beta^* = \langle \beta \rangle + \Delta^\beta, \quad \pi^* = \langle \pi \rangle + \Delta^\pi, \quad \vartheta^* = \langle \vartheta \rangle + \Delta^\vartheta$$

через поправки

$$\Delta_{ijmn}^c = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{C}_{ijdb}\bar{A}_{dbmn} - \bar{e}_{pij}\bar{F}_{pmn}^{(1)} - \bar{h}_{pij}\bar{F}_{pmn}^{(2)}),$$

$$\Delta_{(\sigma)nij}^e = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{e}_{pij}\bar{H}_{pn}^{(1)} + \bar{h}_{pij}\bar{H}_{pn}^{(2)} - \bar{C}_{ijpq}\bar{B}_{pqn})$$

$$\Delta_{(\sigma)nij}^h = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{e}_{pij}\bar{M}_{pn}^{(1)} + \bar{h}_{pij}\bar{M}_{pn}^{(2)} - \bar{C}_{ijpq}\bar{D}_{pqn}),$$

$$\Delta_{(D)imm}^e = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{e}_{ipq}\bar{A}_{pqmn} + \bar{\lambda}_{ip}\bar{F}_{pmn}^{(1)}),$$

$$\Delta_{(B)imm}^h = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{h}_{ipq}\bar{A}_{pqmn} + \bar{\mu}_{ip}\bar{F}_{pmn}^{(2)}), \quad (15)$$

$$\Delta_{kn}^\lambda = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{\lambda}_{kp}\bar{H}_{pn}^{(1)} + \bar{e}_{kpq}\bar{B}_{pqn}),$$

$$\Delta_{kn}^\mu = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{\mu}_{kp}\bar{M}_{pn}^{(2)} + \bar{h}_{kpq}\bar{D}_{pqn}),$$

$$\Delta_{kn}^\chi = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{\lambda}_{kp}\bar{M}_{pn}^{(1)} + \bar{e}_{kpq}\bar{D}_{pqn}),$$

$$\Delta_{kn}^\kappa = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{\mu}_{kp}\bar{H}_{pn}^{(2)} + \bar{h}_{kpq}\bar{B}_{pqn}),$$

$$\Delta_{ij}^\beta = \nu_1(1-\nu_1)(-\bar{C}_{ijdb}\bar{T}_{db} + \bar{e}_{pij}\bar{T}_p^{(1)} + \bar{h}_{pij}\bar{T}_p^{(2)}),$$

$$\Delta_i^\pi = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{\lambda}_{ip}\bar{T}_p^{(1)} + \bar{e}_{ipq}\bar{T}_{pq}),$$

$$\Delta_i^\vartheta = \nu_1(1-\nu_1)(\bar{\mu}_{ip}\bar{T}_p^{(2)} + \bar{h}_{ipq}\bar{T}_{pq})$$

к соответствующим осредненным по объему значениям  $\langle \mathbf{C} \rangle, \dots, \langle \vartheta \rangle$ . Для рассматриваемого двухфазного композита тензоры  $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \dots, \bar{\mathbf{T}}^{(2)}$  в (15) входят в разложения

$$\bar{u}_{ij} = \bar{A}_{ijmn}u_{mn}^* + \bar{B}_{ijn}E_n^* + \bar{D}_{ijn}H_n^* + \bar{T}_{ij}\Theta,$$

$$\bar{E}_i = \bar{F}_{imn}^{(1)}u_{mn}^* + \bar{H}_{in}^{(1)}E_n^* + \bar{M}_{in}^{(1)}H_n^* + \bar{T}_i^{(1)}\Theta, \quad (16)$$

$$\bar{H}_i = \bar{F}_{imn}^{(2)}u_{mn}^* + \bar{H}_{in}^{(2)}E_n^* + \bar{M}_{in}^{(2)}H_n^* + \bar{T}_i^{(2)}\Theta$$

с учетом представления пульсаций производных перемещений  $u'_{i,j}(\mathbf{r})$ , напряженностей электрического  $\mathbf{E}'(\mathbf{r})$  и магнитного  $\mathbf{H}'(\mathbf{r})$  полей в виде

$$u'_{i,j}(\mathbf{r}) \equiv u_{i,j}(\mathbf{r}) - u_{ij}^* = \bar{u}_{ij}i'_i(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}^* = \bar{\mathbf{E}}i'_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}'(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}^* = \bar{\mathbf{H}}i'_1(\mathbf{r})$$

для рассматриваемого двухфазного композита. В (15), (16) использованы обозначения тензоров разностей

$$\bar{A}_{ijmn} = \overline{a_{ijn,j}}(\zeta_0), \quad \bar{B}_{ijn} = \overline{b_{in,j}}(\zeta_0), \quad \bar{D}_{ijn} = \overline{d_{in,j}}(\zeta_0), \quad \bar{T}_{ij} = \overline{t_{i,j}}(\zeta_0),$$

$$\bar{F}_{imn}^{(1)} = \overline{f_{mn,i}^{(1)}}(\zeta_0), \quad \bar{H}_{in}^{(1)} = \overline{h_{n,i}^{(1)}}(\zeta_0), \quad \bar{M}_{in}^{(1)} = \overline{m_{n,i}^{(1)}}(\zeta_0), \quad \bar{T}_i^{(1)} = \overline{t_{,i}^{(1)}}(\zeta_0),$$

$$\bar{F}_{imn}^{(2)} = \overline{f_{mn,i}^{(2)}}(\zeta_0), \quad \bar{H}_{in}^{(2)} = \overline{h_{n,i}^{(2)}}(\zeta_0), \quad \bar{M}_{in}^{(2)} = \overline{m_{n,i}^{(2)}}(\zeta_0), \quad \bar{T}_i^{(2)} = \overline{t_{,i}^{(2)}}(\zeta_0)$$

через коэффициенты разложений (5). В (15) также использованы выражения пульсаций полей электромагнитотермоупругих свойств  $\mathbf{C}'(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{C}}i'_1(\mathbf{r}), \dots, \boldsymbol{\mu}'(\mathbf{r}) = \bar{\boldsymbol{\mu}}i'_1(\mathbf{r})$  и начального напряженного состояния

$$\boldsymbol{\sigma}'^0(\mathbf{r}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^0 i'_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{D}'^0(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{D}}^0 i'_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}'^0(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{B}}^0 i'_1(\mathbf{r}) \quad (17)$$

через пульсацию  $i'_1(\mathbf{r})$  индикаторной функции  $i_1(\mathbf{r})$  для 1-й фазы, где

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2, \dots, \quad \bar{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2, \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^0 &= \boldsymbol{\sigma}_1^0 - \boldsymbol{\sigma}_2^0, \quad \bar{\mathbf{D}}^0 = \mathbf{D}_1^0 - \mathbf{D}_2^0, \quad \bar{\mathbf{B}}^0 = \mathbf{B}_1^0 - \mathbf{B}_2^0, \\ \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2, \quad \bar{\nabla \mathbf{a}} = \nabla \mathbf{a}_1 - \nabla \mathbf{a}_2, \dots, \\ \bar{\mathbf{T}}^{(2)} &= \mathbf{T}_1^{(2)} - \mathbf{T}_2^{(2)}, \quad \bar{\nabla \mathbf{t}}^{(2)} = \nabla \mathbf{t}_1^{(2)} - \nabla \mathbf{t}_2^{(2)} \quad \text{—} \end{aligned} \quad (18)$$

тензоры разностей соответствующих значений в 1-й и 2-й фазах композита с учетом обозначений  $\mathbf{A}_{1,2} \equiv \nabla \mathbf{a}_{1,2}, \dots, \mathbf{T}_{1,2}^{(2)} \equiv \nabla \mathbf{t}_{1,2}^{(2)}$ . Отметим, что поля начального напряженного состояния принимают вид

$$\boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\sigma}^{*0} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^0 i'_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{D}^0(\mathbf{r}) = \mathbf{D}^{*0} + \bar{\mathbf{D}}^0 i'_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}^0(\mathbf{r}) = \mathbf{B}^{*0} + \bar{\mathbf{B}}^0 i'_1(\mathbf{r})$$

с учетом выражений для пульсаций (17). Тензоры  $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \dots, \bar{\mathbf{T}}^{(2)}$  в (15), (16) находим как решения соответствующих четырех независимых систем линейных алгебраических уравнений (см. Приложение).

Отметим, что для трансверсально-изотропного (с осью симметрии  $r_3$ ) композита в отсутствие начального напряженного состояния тензоры эффективных пьезоэлектрических  $\mathbf{e}^*$  и пьезомагнитных (магнитострикционных)  $\mathbf{h}^*$  модулей, электромагнитных связанностей  $\boldsymbol{\kappa}^*, \boldsymbol{\chi}^*$  (11), (12) в матричной форме записи имеют вид [26—28, 31]

$$\|e_{ij}^*\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15}^* & 0 & 0 \\ e_{31}^* & e_{31}^* & e_{33}^* & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$h_{ij}^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & h_{14}^* & h_{15}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{15}^* & -h_{14}^* & 0 \\ h_{31}^* & h_{31}^* & h_{33}^* & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (19)$$

$$\| \kappa_{ij}^* \| = \begin{vmatrix} \kappa_{11}^* & \kappa_{12}^* & 0 \\ -\kappa_{12}^* & \kappa_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33}^* \end{vmatrix}, \quad \| \chi_{ij}^* \| = \| \kappa_{ij}^* \|^\top, \quad (20)$$

где верхним индексом “Т” обозначена операция транспонирования, тензорные и матричные индексы связаны между собой соотношениями  $11 \rightarrow 1$ ,  $22 \rightarrow 2$ ,  $33 \rightarrow 3$ ,  $23$  и  $32 \rightarrow 4$ ,  $13$  и  $31 \rightarrow 5$ ,  $12$  и  $21 \rightarrow 6$ . Начальное напряженное состояние элементов структуры (фаз)  $\zeta_0 = \{\sigma^0, \mathbf{D}^0, \mathbf{V}^0\}$  в представительной области  $\mathbf{V}$  и в целом на макроуровне  $\zeta_0^* = \{\sigma^{*0}, \mathbf{D}^{*0}, \mathbf{V}^{*0}\}$  композита задаются через компоненты тензора начальных макродеформаций  $\varepsilon^{*0}$ , компоненты векторов начальных макронапряженностей  $\mathbf{E}^{*0}$ ,  $\mathbf{H}^{*0}$  и температуру нагрева  $\Theta^0$  представительной области  $\mathbf{V}$  композита. При этом тензоры  $\sigma^{*0}$ ,  $\mathbf{D}^{*0}$ ,  $\mathbf{V}^{*0}$  связаны с заданными значениями тензоров  $\varepsilon^{*0}$ ,  $\mathbf{E}^{*0}$ ,  $\mathbf{H}^{*0}$  посредством тензоров начальных эффективных свойств  $\mathbf{C}^{*0}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}^{*0}$ ,  $\boldsymbol{\mu}^{*0}$ ,  $\mathbf{e}^{*0}$ ,  $\mathbf{h}^{*0}$ ,  $\boldsymbol{\beta}^{*0}$ ,  $\boldsymbol{\pi}^{*0}$ ,  $\mathcal{G}^{*0}$ ,  $\boldsymbol{\chi}^{*0}$ ,  $\boldsymbol{\kappa}^{*0}$  композита (2) [28]. В результате, например, при заданной начальной осевой деформации  $\varepsilon_{33}^{0*} \neq 0$ , когда другие компоненты  $\varepsilon_{ij}^{0*} = 0$ ,  $\mathbf{E}^{*0} = 0$ ,  $\mathbf{H}^{*0} = 0$  имеем ненулевые значения компонент начального напряженного состояния элементов структуры  $\zeta_0$  и композита  $\zeta_0^*$ . Значения начального напряженного состояния фаз  $\zeta_{0f} \equiv \langle \zeta_0 \rangle_f = \{\sigma_f^0, \mathbf{D}_f^0, \mathbf{V}_f^0\}$ , в частности тензоры  $\sigma_{1,2}^0$ ,  $\mathbf{D}_{1,2}^0$ ,  $\mathbf{V}_{1,2}^0$ , двухфазного композита (18) могут быть найдены, например, по известному решению [28] без начального напряженного состояния (т.е. по решению (14), (15), (см. Приложение) для случая  $\zeta_0 = 0$ ), где  $\langle \dots \rangle_f = 1/V_f \int_{\mathbf{V}_f} \dots d\mathbf{r}$  — оператор осреднения по области  $\mathbf{V}_f$   $f$ -й фазы композита,  $\mathbf{V} = \bigcup_{f=1}^2 \mathbf{V}_f$ .

**4. Результаты численного моделирования.** На рис. 1 представлены результаты сравнения графиков полученного решения (14), (15), (см. Приложение) с известным асимптотическим решением [20] для компонент  $C_{3333}^*$ ,  $C_{3322}^*$ ,  $C_{3232}^*$  тензора результирующих эффективных упругих свойств трансверсально-изотропного слоистого двухфазного композита со следующими изотропными упругими свойствами слоев:  $E_{(1)} = 10$  ГПа,  $E_{(2)} = 0,1$  ГПа,  $\nu_{(1)} = \nu_{(2)} = 0,3$ , относительное объемное содержание фаз  $\nu_1 = 0,9$ ,  $\nu_2 = 1 - \nu_1 = 0,1$ . Отметим, что для слоистого композита полученное решение обобщенного сингулярного приближения, в частности, для

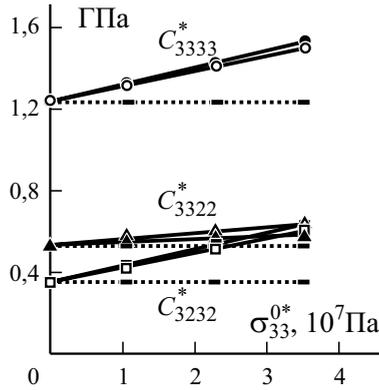


Рис. 1. Зависимость эффективных модулей  $C_{3333}^*$  (○, ●),  $C_{3322}^*$  (Δ, ▲),  $C_{3232}^*$  (□, ■) от начального макронапряжения  $\sigma_{33}^{0*}$  слоистого композита; (—) — без учета напряжения  $\sigma_{33}^{0*}$ .

тензора  $\mathbf{C}^*$ , не зависит от выбора значений тензора упругих свойств среды сравнения  $\mathbf{C}_\bullet$ . Здесь начальное напряженное состояние  $\sigma_{22}^{0*} = \sigma_{11}^{0*} \neq 0$ ,  $\sigma_{33}^{0*} \neq 0$  на макроуровне слоистого композита обусловлено осевым деформированием  $\varepsilon_{33}^{0*} > 0$  при равенстве нулю остальных компонент  $\varepsilon_{ij}^{0*} = 0$  тензора начальных макродеформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}^{0*}$  композита. Например, в случае  $\varepsilon_{33}^{0*} = 0,01, 0,02, 0,03$  имеем  $\sigma_{22}^{0*} = \sigma_{11}^{0*} \approx 3,393 \text{ МПа}, 8,686 \text{ МПа}, 13,979 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{33}^{0*} \approx 10,450 \text{ МПа}, 22,800 \text{ МПа}, 35,150 \text{ МПа}$  соответственно. Асимптотическое решение [20] получено для случая малых относительных значений  $\sigma_{33}^{0*} / C_{3333}^{0*}$  начальных макронапряжений  $\sigma^{0*}$  относительно упругих модулей фаз и всего композита в целом  $\mathbf{C}^{0*}$ , что соответствует случаю малых значений начальных макродеформаций  $\varepsilon_{33}^{0*}$ . Именно для малых значений  $\varepsilon_{33}^{0*} \in (0; 0,01)$  графики полученного нового решения наиболее близко расположены к прямолинейным графикам асимптотического решения (см. рис. 1).

На рис. 2 представлены результаты расчета компонент  $C_{1133}^*$ ,  $C_{1122}^*$ ,  $C_{1313}^*$ ,  $C_{1212}^*$ ,  $C_{3333}^*$ ,  $C_{1111}^*$  в зависимости от начальной одноосной макродеформации  $\varepsilon_{33}^{0*}$  первоначально изотропного на макроуровне композита с изотропными упругими свойствами сферических включений и матрицы:  $E_{(1)} = 10 \text{ ГПа}$ ,  $E_{(2)} = 0,1 \text{ ГПа}$ ,  $\nu_{(1)} = \nu_{(2)} = 0,3$ , относительное объемное содержание волокон  $\nu_1 = 0,9$ ; тензор упругих свойств среды сравнения  $\mathbf{C}_\bullet = \mathbf{C}_2$ . Здесь начальное напряженное состояние  $\sigma_{22}^{0*} = \sigma_{11}^{0*} \neq 0$ ,  $\sigma_{33}^{0*} \neq 0$  композита обусловлено одноосной макродеформацией  $\varepsilon_{33}^{0*} > 0$  композита. Для случаев

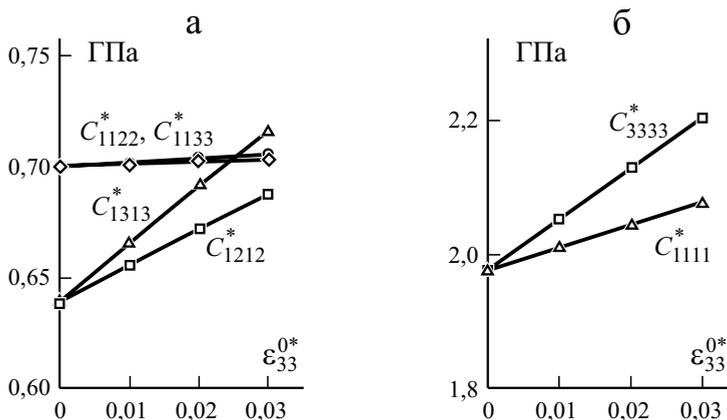


Рис. 2. Зависимость эффективных модулей  $C_{1133}^*$  ( $\circ$ ),  $C_{1122}^*$  ( $\diamond$ ),  $C_{1313}^*$  ( $\Delta$ ),  $C_{1212}^*$  ( $\square$ ) (а);  $C_{3333}^*$  ( $\square$ ),  $C_{1111}^*$  ( $\Delta$ ) (б) от начальной одноосной макродеформации  $\epsilon_{33}^{0*}$  композита со сферическими включениями.

$\epsilon_{33}^{0*} = 0,01, 0,02, 0,03$  имеем  $\sigma_{22}^{0*} = \sigma_{11}^{0*} \approx 6,996$  МПа, 13,992 МПа, 20,987 МПа,  $\sigma_{33}^{0*} \approx 19,763$  МПа, 39,525 МПа, 59,288 МПа соответственно. Графики на рис. 2 выявили появление анизотропии результирующих эффективных упругих свойств композита, обусловленной наличием его начального напряженного состояния ( $\epsilon_{33}^{0*} > 0$ ), что проявляется в различии результирующих значений компонент  $C_{1313}^* \neq C_{1212}^*$  (см. рис. 2—а),  $C_{3333}^* \neq C_{1111}^*$  (см. рис. 2—б) при наличии равенств  $C_{1313}^{*(0)} = C_{1212}^{*(0)}$ ,  $C_{3333}^{*(0)} = C_{1111}^{*(0)}$  для их первоначальных значений. Выявлены равенство  $C_{1122}^* \approx C_{1133}^*$  и малая зависимость этих компонент от величины начального напряженного состояния композита (рис. 2—а).

Для пьезоэлектрического трансверсально-изотропного композита с однонаправленно-волокнистой структурой на рис. 3 представлены результаты расчета (14), (15) (см. Приложение) относительных значений эффективных технических упругих постоянных — модуля Юнга  $E_1^*$ , коэффициента Пуассона  $\nu_{12}^*$ , модулей сдвига  $G_{12}^*$ ,  $G_{13}^*$  и пьезоэлектрических модулей  $e_{311}^*$ ,  $e_{113}^*$  в зависимости от содержания  $\nu_1$  пьезоэлектрических волокон PZT-4 [31]. Упругие свойства изотропной матрицы (фторопласт) заданы значениями модуля Юнга  $E_{(2)} = 0,1$  ГПа и коэффициента Пуассона  $\nu_{(2)} = 0,3$ . При численном расчете эффективных свойств пьезокомпозита полагались равенства  $\mathbf{C}_\bullet = \mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{e}_\bullet = \mathbf{e}_2$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_\bullet = \boldsymbol{\lambda}_2$  для электроупругих свойств среды сравнения,  $a_3 / a_{1(2)} \rightarrow \infty$ ,  $a_1 = a_2$  — для зерна неоднородности. Для рассмотренных случаев начального напряженного состояния ( $\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*} \neq 0$ ,  $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ ) имеем приближенные равенства для модуля Юнга  $E_3^* / E_3^{0*} \approx 1$ , коэффициента Пуассона  $\nu_{13}^* / \nu_{13}^{0*} \approx 1$ , пьезоэлектрического модуля  $e_{333}^* / e_{333}^{0*} \approx 1$  и диэлектри-

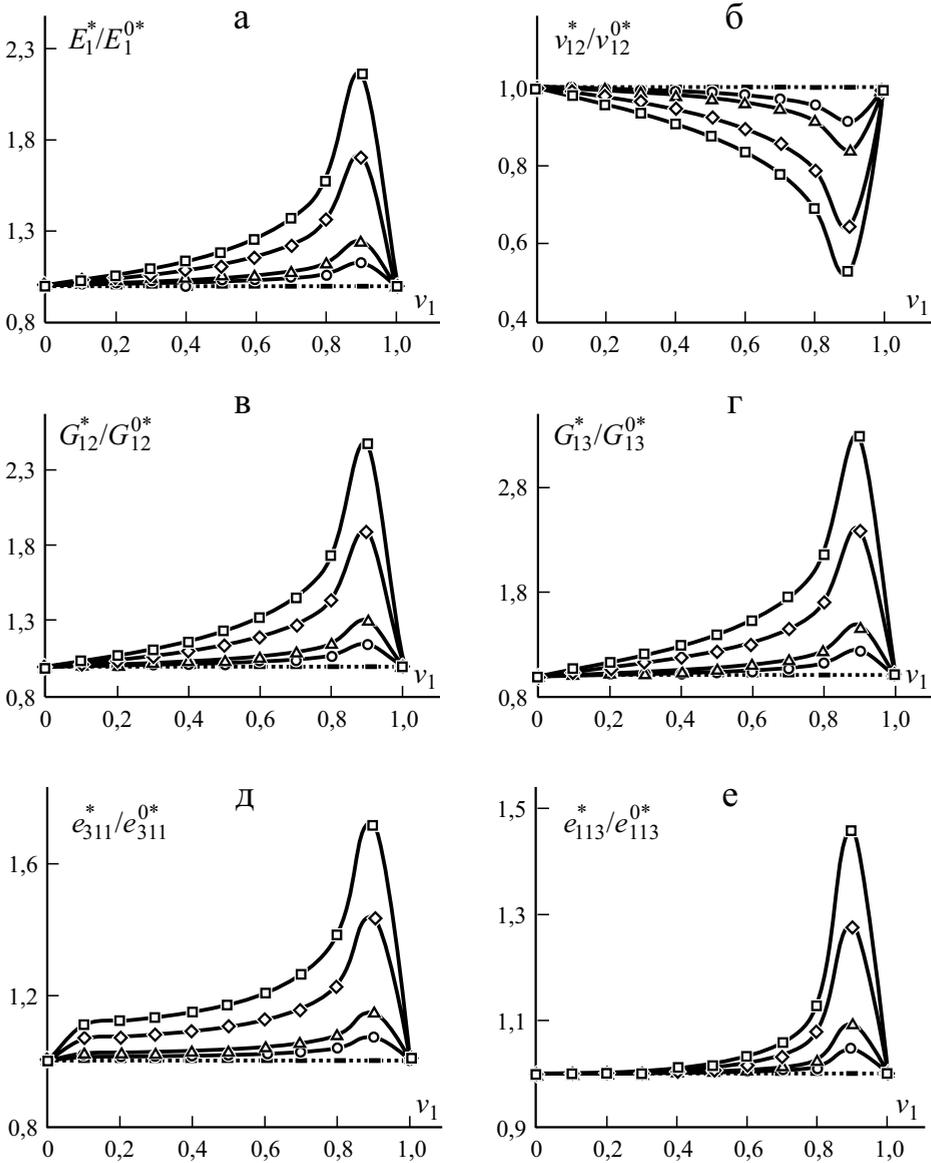


Рис. 3. Относительные значения эффективного модуля Юнга  $E_1^*$  (а), коэффициента Пуассона  $\nu_{12}^*$  (б), модулей сдвига  $G_{12}^*$  (в),  $G_{13}^*$  (г), пьезоэлектрических модулей  $e_{311}^*$  (д),  $e_{113}^*$  (е) композита в зависимости от содержания пьезоволокон  $v_1$  в эпоксидной матрице для случаев  $\varepsilon_{11}^{0*} = \varepsilon_{22}^{0*} = 0$  (—), 0,01 (○), 0,02 (Δ), 0,06 (◇), 0,1 (□) при  $\varepsilon_{33}^{0*} = 0$ .

ческих проницаемостей  $\lambda_{11}^*/\lambda_{11}^{0*} \approx 1$ ,  $\lambda_{33}^*/\lambda_{33}^{0*} \approx 1$ . Результаты численного моделирования подтвердили равенства тензоров эффективных пьезомодулей

$\mathbf{e}_{(\sigma)}^* = \mathbf{e}_{(D)}^*$ ,  $\mathbf{h}_{(\sigma)}^* = \mathbf{h}_{(B)}^*$  в соотношениях (11), (12) для композита с начальным напряженным состоянием; известно [31], что аналогичные равенства справедливы для пьезоматериалов без начального напряженного состояния (2).

На основе результатов численного моделирования (14), (15) (см. Приложение) выявлено, что для электромагнитоупругого трансверсально-изотропного композита пьезоэлектрик/феррит — однонаправленные ферритовые волокна в пьезоэлектрике PZT-4 [26—28] тензоры электромагнитной связанности  $\|\chi_{ij}^*\|$ ,  $\|\kappa_{ij}^*\|$  по-прежнему имеют однотипный вид (20), но  $\|\chi_{ij}^*\| \neq \|\kappa_{ij}^*\|^T$ ,  $\chi_{33}^* = \kappa_{33}^*$  для рассмотренных случаев:  $\varepsilon_{11}^{0*} = \varepsilon_{22}^{0*} \neq 0$  или  $\varepsilon_{33}^{0*} \neq 0$  осесимметричного по оси  $r_3$  начального напряженного состояния композита. В частности, при объемной доле ферритовых волокон  $\nu_1 = 0,6$  имеем относительные значения

$$\kappa_{11}^* / \kappa_{11}^{0*} = 0,88, \quad \kappa_{33}^* / \kappa_{33}^{0*} = 0,96, \quad \kappa_{12}^* / \kappa_{12}^{0*} = \kappa_{21}^* / \kappa_{21}^{0*} = 0,88,$$

$$\chi_{11}^* / \chi_{11}^{0*} = -7,70, \quad \chi_{33}^* / \chi_{33}^{0*} = 0,96, \quad \chi_{12}^* / \chi_{12}^{0*} = \chi_{21}^* / \chi_{21}^{0*} = -7,68$$

для случая  $\varepsilon_{11}^{0*} = \varepsilon_{22}^{0*} = 0,05$ ,

$$\kappa_{11}^* / \kappa_{11}^{0*} = 0,96, \quad \kappa_{33}^* / \kappa_{33}^{0*} = 0,99, \quad \kappa_{12}^* / \kappa_{12}^{0*} = \kappa_{21}^* / \kappa_{21}^{0*} = 0,96,$$

$$\chi_{11}^* / \chi_{11}^{0*} = -2,18, \quad \chi_{33}^* / \chi_{33}^{0*} = 0,99, \quad \chi_{12}^* / \chi_{12}^{0*} = \chi_{21}^* / \chi_{21}^{0*} = -2,17$$

для случая  $\varepsilon_{33}^{0*} = 0,05$ , когда тензоры электромагнитоупругих свойств среды сравнения  $\mathbf{C}_\bullet = \mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{e}_\bullet = \mathbf{e}_2$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_\bullet = \boldsymbol{\lambda}_2$ ,  $\mathbf{h}_\bullet = \mathbf{h}_2$ ,  $\boldsymbol{\mu}_\bullet = \boldsymbol{\mu}_2$ .

### Заключение

Получено новое численно-аналитическое решение (14)—(18) (см. Приложение) задачи “эффективного модуля”  $\mathbf{C}^*$ , ...,  $\mathcal{G}^*$  (11) статистической механики композитов с пьезоэлектрическими магнитоэлектрическими фазами с начальным напряженным состоянием на микро-  $\zeta_0 = \{\boldsymbol{\sigma}^0, \mathbf{D}^0, \mathbf{B}^0\}$  и макро-  $\zeta_0^* = \{\boldsymbol{\sigma}^{0*}, \mathbf{D}^{0*}, \mathbf{B}^{0*}\}$  уровнях композита. Решение получено в рамках обобщенного сингулярного приближения статистической механики композитов [25] с использованием ранее полученного нового решения [28] для сингулярных составляющих вторых производных функций Грина пьезоэлектромагнитной среды с эллипсоидальным зерном неоднородности. Представлены результаты численного моделирования влияния начального механического напряженного состояния на эффективные упругие свойства слоистого композита (см. рис. 1) и композита со сферическими включениями (см. рис. 2). Полученные решения на рис. 1 подтверждены численным сравнением с известным асимптотическим решением [20] для слоистого композита при наличии начального напря-

женного состояния  $\zeta_0$ ,  $\zeta_0^*$  на обоих уровнях структуры. Выявлено, что начальное напряженное состояние структуры влияет на анизотропию (класс симметрии) эффективных свойств композита на макроуровне, в частности (см. рис. 2), начальное напряженное состояние с осевой симметрией обуславливает появление трансверсально-изотропных эффективных упругих свойств у первоначально изотропного композита. Осуществлен расчет, построены графики и выявлен немонотонный характер зависимостей относительных эффективных электроупругих характеристик (см. рис. 3) трансверсально-изотропного композита PZT-4/фторопласт от объемной доли  $v_1$  пьезоэлектрических волокон с учетом начального деформирования композита в трансверсальной плоскости. Установлено, что начальное деформирование влияет лишь на некоторые эффективные характеристики композита, и это влияние наиболее значительно при объемной доле волокон  $v_1 \approx 0,9$ .

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Пермского края в рамках научного проекта № 20-41-596010.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. — Oxford: Pergamon Press, 1982. — 630 p. [Перевод: Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. — М.: Мир, 1987. — 542 с.
2. Гузь А. Н. Об определении приведенных упругих постоянных композитных слоистых материалов с начальными напряжениями // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1975. — № 3 — С. 216—219.
3. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. — В 2-х т. Т. 1 Общие вопросы; Т. 2. Закономерности распространения. — Киев: Наук. думка. — 376 с; 536 с.
4. Алехин В. В., Аннин Б. Д., Колпаков А. Г. Синтез слоистых материалов и конструкций. — Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1988. — 128 с.
5. Akbarov S. D., Guliev M. S. Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite prestretched compound circular cylinder made of incompressible materials // Int. Appl. Mech. — 2009. — Vol. 45, No. 10. — P. 1141—1151.
6. Akbarov S. D. Recent investigations on dynamic problems for an elastic body with initial (residual) stresses // Int. Appl. Mech. — 2007. — Vol. 43, No. 12. — P. 1305—1324.
7. Akbarov S. D. Stability Loss and Buckling Delamination: Three-dimensional Linearized Approach for Elastic and Viscoelastic Composites. — Springer, 2013 — 448 p.
8. Гулиев М. С., Сейфуллаев А. И., Абдуллаева Д. Н. Исследование распространения упругих волн в составном цилиндре с начальным кручением // Строит. механика инженерных конструкций и сооружений. — 2018. — № 5. — С. 404—413.
9. Белянкова Т. И., Калинин В. В. Свойства преднапряженных изотропных материалов при учете упругих модулей высших порядков // Наука Юга России. — 2017. — № 2. — С. 3—12.

10. Гузь А. Н. Об ультразвуковом неразрушающем методе определения напряжений в элементах конструкций и в приповерхностных слоях материалов: фокус на украинские исследования (обзор) // Прикл. механика. — 2014. — Т. 50, № 3. — С. 3—30.
11. Kuliev G. G., Jabbarov M. D. To elastic waves propagation in strained nonlinear anisotropic media // Proc. Sci. Earth Acad. Scie. Azerbaijan. — 1998. — N 2. — P.103—112.
12. Guz A. N. Fundamentals of the Three-dimensional theory of Stability of Deformable Bodies. — Springer, 1999. — 555 p.
13. Akbarov S. D. Dynamics of Pre-strained Bi-material Elastic Systems: Linearized Three-dimensional Approach. — Springer, 2016. — 1004 p.
14. Gupta S., Majhi D.K., Kundu S., Vishwakarma S. K. Propagation of torsional surface waves in a homogeneous layer of finite thickness over an initially stressed heterogeneous half-space // Appl. Mathematics Comput. — 2012. — Vol. 218, No. 9. — P. 5655—5664.
15. Hu W. T., Chen W. Y. Influence of lateral initial pressure on axisymmetric wave propagation in hollow cylinder based on first power hypo-elastic model // J. Central South Univ. — 2014. — Vol. 21, No. 2. — P. 753—760.
16. Yesil U. B. Forced and natural vibrations of an orthotropic pre—stressed rectangular plate with neighboring two cylindrical cavities // Comput. Mater. Continua. — 2017. — Vol. 53, No. 1. — P. 1—22.
17. Kolpakov A. G. Effect of influation of initial stresses on the homogenized characteristics of composite // Mech. Materials. — 2005. — Vol. 37, No. 8. — P. 840—854.
18. Kolpakov A. G. On the dependence of the velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // Comput. Struct. — 1992. — Vol. 44, Nos. 1-2. — P. 97—101.
19. Kolpakov A. G. Averaged characteristics of stressed laminated media // J. Eng. Phys. — 1995. — Vol. 68, No. 5. — P. 605—613.
20. Колпаков А. Г. Усредненные модели упругих композиционных материалов и элементов конструкций: Дис ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.04. — Новосибирск, 2002. — 291 с.
21. Pan'kov A. A., Anoshkin A. N., Pisarev P. V., Bayandin S. R. Using an electro-mechanical analogy to describe the damping characteristics of an MFC actuator // IOP Conf. Ser: Mater. Sci. Eng. — 2021. — 1093 — 012023, P. 1—6.
22. Победра Б. Е. Механика композиционных материалов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. — 336 с.
23. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. — М.: Наука, 1970. — 556 с.
24. Волков С. Д., Ставров В. П. Статистическая механика композитных материалов. — Минск.: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1978. — 208 с.
25. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. — М.: Наука, 1976. — 399 с.
26. Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Леценко П. В. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. — Киев: Наук. думка, 1989. — 208 с.
27. Паньков А. А. Статистическая механика пьезокомпозитов. — Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. — 480 с.
28. Паньков А. А. Коэффициенты электромагнитной связи композита с пьезоактивными фазами // Физ. мезомеханика. — 2011. — Т. 14, № 2. — С.93—99.

29. Guo X., Wei P. Dispersion relations of elastic waves in one-dimensional piezo-electric/piezomagnetic phononic crystal with initial stresses // Ultrasonics. — 2016. — Vol. 66. — P. 72—85.

30. Dasdemir A. Forced vibrations of pre-stressed sandwich plate-strip with elastic layers and piezoelectric core // Int. Appl. Mech. — 2018. — Vol. 54, No. 4. — P. 480—493.

31. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физ. акустика. Т. 1: Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А. — М.: Мир, 1966. — С.204—326.

Поступила в редакцию 20.09.2021

Окончательный вариант поступил 11.01.2022

Received Sept. 20, 2021(Jan. 11, 2022)

### Приложение

Компоненты тензоров  $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \dots, \bar{\mathbf{T}}^{(2)}$  — решения четырех независимых систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_{ijks}^{(1,1)} \bar{A}_{ksmn} + a_{ijk}^{(1,2)} \bar{F}_{kmn}^{(1)} + a_{ijk}^{(1,3)} \bar{F}_{kmn}^{(2)} &= b_{ijn}^{(1)}, \\ a_{iks}^{(2,1)} \bar{A}_{ksmn} + a_{ik}^{(2,2)} \bar{F}_{kmn}^{(1)} + a_{ik}^{(2,3)} \bar{F}_{kmn}^{(2)} &= b_{imn}^{(2)}, \end{aligned} \quad (\text{П1})$$

$$\begin{aligned} a_{iks}^{(3,1)} \bar{A}_{ksmn} + a_{ik}^{(3,2)} \bar{F}_{kmn}^{(1)} + a_{ik}^{(3,3)} \bar{F}_{kmn}^{(2)} &= b_{imn}^{(3)}, \\ a_{ijks}^{(1,1)} \bar{B}_{ksn} + a_{ikd}^{(1,2)} \bar{H}_{dn}^{(1)} + a_{ikd}^{(1,3)} \bar{H}_{dn}^{(2)} &= c_{ijn}^{(1)}, \\ a_{iks}^{(2,1)} \bar{B}_{ksn} + a_{ik}^{(2,2)} \bar{H}_{kn}^{(1)} + a_{ik}^{(2,3)} \bar{H}_{kn}^{(2)} &= c_{in}^{(2)}, \end{aligned} \quad (\text{П2})$$

$$\begin{aligned} a_{iks}^{(3,1)} \bar{B}_{ksn} + a_{ik}^{(3,2)} \bar{H}_{kn}^{(1)} + a_{ik}^{(3,3)} \bar{H}_{kn}^{(2)} &= c_{in}^{(3)}, \\ a_{ijks}^{(1,1)} \bar{D}_{ksn} + a_{ikd}^{(1,2)} \bar{M}_{dn}^{(1)} + a_{ikd}^{(1,3)} \bar{M}_{dn}^{(2)} &= d_{ijn}^{(1)}, \\ a_{iks}^{(2,1)} \bar{D}_{ksn} + a_{ik}^{(2,2)} \bar{M}_{kn}^{(1)} + a_{ik}^{(2,3)} \bar{M}_{kn}^{(2)} &= d_{in}^{(2)}, \end{aligned} \quad (\text{П3})$$

$$\begin{aligned} a_{iks}^{(3,1)} \bar{D}_{ksn} + a_{ik}^{(3,2)} \bar{M}_{kn}^{(1)} + a_{ik}^{(3,3)} \bar{M}_{kn}^{(2)} &= d_{in}^{(3)}, \\ a_{ijks}^{(1,1)} \bar{T}_{ks} + a_{ijd}^{(1,2)} \bar{T}_d^{(1)} + a_{ijd}^{(1,3)} \bar{T}_d^{(2)} &= f_{ij}^{(1)}, \\ a_{iks}^{(2,1)} \bar{T}_{ks} + a_{ik}^{(2,2)} \bar{T}_k^{(1)} + a_{ik}^{(2,3)} \bar{T}_k^{(2)} &= f_i^{(2)}, \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

$$a_{iks}^{(3,1)} \bar{T}_{ks} + a_{ik}^{(3,2)} \bar{T}_k^{(1)} + a_{ik}^{(3,3)} \bar{T}_k^{(2)} = f_i^{(3)},$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned}
 a_{ijks}^{(1,1)} &= \delta_{ik}\delta_{js} - U_{ijdb}^s \left[ \tilde{C}_{dbks} + \delta_{dk}\sigma_{bs}^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{C}_{dbks} + \delta_{dk}\bar{\sigma}_{bs}^0) \right] - \\
 &\quad - U_{ijd}^{s(1)} \left[ \tilde{e}_{dks} + \delta_{dk}D_s^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{e}_{dks} + \delta_{dk}\bar{D}_s^0) \right] - \\
 &\quad - U_{ijd}^{s(2)} \left[ \tilde{h}_{dks} + \delta_{dk}B_s^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{h}_{dks} + \delta_{dk}\bar{B}_s^0) \right], \\
 a_{ijk}^{(1,2)} &= U_{ijdb}^s \left[ \tilde{e}_{kdb} + (1-2\nu_1)\bar{e}_{kdb} \right] - U_{ijd}^{s(1)} \left[ \tilde{\lambda}_{dk} + (1-2\nu_1)\bar{\lambda}_{dk} \right], \\
 a_{ijk}^{(1,3)} &= U_{ijdb}^s \left[ \tilde{h}_{kdb} + (1-2\nu_1)\bar{h}_{kdb} \right] - U_{ijd}^{s(2)} \left[ \tilde{\mu}_{dk} + (1-2\nu_1)\bar{\mu}_{dk} \right], \\
 a_{ik}^{(2,1)} &= -\Phi_{idb}^s \left[ \tilde{C}_{dbks} + \delta_{dk}\sigma_{bs}^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{C}_{dbks} + \delta_{dk}\bar{\sigma}_{bs}^0) \right] - \\
 &\quad - \Phi_{id}^{s(1)} \left[ \tilde{e}_{dks} + \delta_{dk}D_s^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{e}_{dks} + \delta_{dk}\bar{D}_s^0) \right] - \\
 &\quad - \Phi_{id}^{s(2)} \left[ \tilde{h}_{dks} + \delta_{dk}B_s^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{h}_{dks} + \delta_{dk}\bar{B}_s^0) \right], \\
 a_{ik}^{(2,2)} &= -\delta_{ik} + \Phi_{idb}^s \left[ \tilde{e}_{kdb} + (1-2\nu_1)\bar{e}_{kdb} \right] - \Phi_{id}^{s(1)} \left[ \tilde{\lambda}_{dk} + (1-2\nu_1)\bar{\lambda}_{dk} \right], \\
 a_{ik}^{(2,3)} &= \Phi_{idb}^s \left[ \tilde{h}_{kdb} + (1-2\nu_1)\bar{h}_{kdb} \right] - \Phi_{id}^{s(2)} \left[ \tilde{\mu}_{dk} + (1-2\nu_1)\bar{\mu}_{dk} \right], \\
 a_{ik}^{(3,1)} &= -\Psi_{idb}^s \left[ \tilde{C}_{dbks} + \delta_{dk}\sigma_{bs}^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{C}_{dbks} + \delta_{dk}\bar{\sigma}_{bs}^0) \right] - \\
 &\quad - \Psi_{id}^{s(1)} \left[ \tilde{e}_{dks} + \delta_{dk}D_s^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{e}_{dks} + \delta_{dk}\bar{D}_s^0) \right] - \\
 &\quad - \Psi_{id}^{s(2)} \left[ \tilde{h}_{dks} + \delta_{dk}B_s^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{h}_{dks} + \delta_{dk}\bar{B}_s^0) \right], \\
 a_{ik}^{(3,2)} &= \Psi_{idb}^s \left[ \tilde{e}_{kdb} + (1-2\nu_1)\bar{e}_{kdb} \right] - \Psi_{id}^{s(1)} \left[ \tilde{\lambda}_{dk} + (1-2\nu_1)\bar{\lambda}_{dk} \right], \\
 a_{ik}^{(3,3)} &= -\delta_{ik} + \Psi_{idb}^s \left[ \tilde{h}_{kdb} + (1-2\nu_1)\bar{h}_{kdb} \right] - \Psi_{id}^{s(2)} \left[ \tilde{\mu}_{dk} + (1-2\nu_1)\bar{\mu}_{dk} \right],
 \end{aligned}$$

правые части 1-й системы уравнений (П1)

$$\begin{aligned}
 b_{ijmn}^{(1)} &= U_{ijks}^s \bar{C}_{ksmn} + U_{ijk}^{s(1)} (\bar{e}_{kmn} + \delta_{km}\bar{D}_n^0) + U_{ijk}^{s(2)} (\bar{h}_{kmn} + \delta_{km}\bar{B}_n^0), \\
 b_{imn}^{(2)} &= \Phi_{iks}^s \bar{C}_{ksmn} + \Phi_{ik}^{s(1)} (\bar{e}_{kmn} + \delta_{km}\bar{D}_n^0) + \Phi_{ik}^{s(2)} (\bar{h}_{kmn} + \delta_{km}\bar{B}_n^0), \\
 b_{imn}^{(3)} &= \Psi_{iks}^s \bar{C}_{ksmn} + \Psi_{ik}^{s(1)} (\bar{e}_{kmn} + \delta_{km}\bar{D}_n^0) + \Psi_{ik}^{s(2)} (\bar{h}_{kmn} + \delta_{km}\bar{B}_n^0)
 \end{aligned}$$

для 2-й и 3-й систем уравнений (П2), (П3) —

$$\begin{aligned}
 c_{ijn}^{(1)} &= -U_{ijks}^s \bar{e}_{nks} + U_{ijk}^{s(1)} \bar{\lambda}_{kn}, & c_{in}^{(2)} &= -\Phi_{iks}^s \bar{e}_{nks} + \Phi_{ik}^{s(1)} \bar{\lambda}_{kn}, \\
 c_{in}^{(3)} &= -\Psi_{iks}^s \bar{e}_{nks} + \Psi_{ik}^{s(1)} \bar{\lambda}_{kn}, & d_{ijn}^{(1)} &= -U_{ijks}^s \bar{h}_{nks} + U_{ijk}^{s(2)} \bar{\mu}_{kn}, \\
 d_{in}^{(2)} &= -\Phi_{iks}^s \bar{h}_{nks} + \Phi_{ik}^{s(2)} \bar{\mu}_{kn}, & d_{in}^{(3)} &= -\Psi_{iks}^s \bar{h}_{nks} + \Psi_{ik}^{s(2)} \bar{\mu}_{kn},
 \end{aligned}$$

для 4-й системы уравнений (П4) —

$$\begin{aligned}
 f_{ij}^{(1)} &= -U_{ijks}^s \bar{\beta}_{ks} + U_{ijk}^{s(1)} \bar{\pi}_k + U_{ijk}^{s(2)} \bar{\vartheta}_k, \\
 f_i^{(2)} &= -\Phi_{iks}^s \bar{\beta}_{ks} + \Phi_{ik}^{s(1)} \bar{\pi}_k + \Phi_{ik}^{s(2)} \bar{\vartheta}_k, \\
 f_i^{(3)} &= -\Psi_{iks}^s \bar{\beta}_{ks} + \Psi_{ik}^{s(1)} \bar{\pi}_k + \Psi_{ik}^{s(2)} \bar{\vartheta}_k
 \end{aligned}$$

для вычисления искоемых величин  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\bar{\mathbf{F}}^{(1)}$ , ...,  $\bar{\mathbf{T}}^{(2)}$  с учетом обозначений сингулярных составляющих  $\mathbf{G}^s$  (13), тензоров разностей  $\tilde{\mathbf{C}}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}$ ,  $\bar{\mathbf{\sigma}}^0$ , ... (10), (18).

---