

Цз. Ян\*, Цз. Тан, Ю. Ван, Ц. Ван

*School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou, 730050, Gansu, China*

## НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ БАЛОК ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ<sup>1</sup>

*J. Yang\*, J. Tang, Y. Wang, and Q. Wang*

### A NONLINEAR ANALYSIS OF THE MECHANICAL BEHAVIOR OF FUNCTIONALLY GRADED SHAPE-MEMORY ALLOY BEAMS

**Keywords:** functionally graded shape-memory alloy, tension-compression asymmetry coefficient, phase transformation, nonlinearity

The nonlinear mechanical behavior of functionally graded shape-memory alloy beams under impure bending conditions is analyzed using the beam bending theory and the stress–strain relationship of shape memory alloy materials. The volume fraction of the alloy is assumed to vary in the beam thickness direction according to a power function. The stress distribution in its cross section, in each phase transformation stage, is derived by introducing a tension-compression asymmetry coefficient, which expresses this asymmetry on the tension-compression sides of the beams. The displacement of their neutral axis, the curvature of cross section, and the variation of the phase boundary along their axial direction were calculated by solving the equilibrium equation. Results showed that the influence of a change in the power index on the tension-compression asymmetry was much greater than an alteration of the tension-compression asymmetry coefficient. The displacement of neutral axis and the curvature were nonlinearly negatively related to the power index. With increasing power index, the phase transformation boundary moved closer to the mid-span section. The displacement of neutral axis of the same cross section was nonlinearly positively related to the tension-compression asymmetry coefficient, but the curvature was nonlinearly negatively related to it. The phase boundary on

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: 1324576210@qq.com  
Corresponding author: 1324576210@qq.com

<sup>1</sup>Перевод с англ.

compressive side moved closer to the mid-span section as the tension-compression asymmetry coefficient increased. The analysis of computation results can be used as a reference in the design and application of such materials.

**Ключевые слова:** сплав функционально-градиентный с памятью формы, коэффициент асимметрии растяжения—сжатия, преобразование фазовое, нелинейность

С использованием теории изгиба балок и соотношений между напряжениями и деформациями для материалов из сплавов с памятью формы проанализировали нелинейное механическое поведение балок из функционально-градиентных сплавов с памятью формы, подверженных нечистому изгибу. Предположили, что объемное содержание сплава изменяется по толщине балки по закону степенной функции. Распределение напряжений в её поперечном сечении на каждой стадии фазового преобразования определили путем введения коэффициента асимметрии растяжения—сжатия. Перемещение нейтральной оси балки, кривизну поперечного сечения и изменение границы раздела фаз в осевом направлении рассчитали путем решения уравнения равновесия. Результаты показали, что влияние изменения показателя степени на асимметрию растяжения—сжатия намного больше, чем изменение коэффициента асимметрии растяжения—сжатия. Перемещение нейтральной оси и кривизна поперечного сечения нелинейно отрицательно связаны с показателем степени. С увеличением показателя степени граница фазового преобразования смещалась ближе к срединному сечению. Перемещение нейтральной оси того же поперечного сечения нелинейно положительно связано с коэффициентом асимметрии растяжения—сжатия, а кривизна — нелинейно отрицательно. Фазовая граница на сжатой стороне балки смещалась ближе к срединному сечению по мере увеличения коэффициента асимметрии растяжения—сжатия. Результаты расчетов могут быть использованы в качестве ориентира при разработке и применении таких материалов.

## Введение

Функционально-градиентный (FG) сплав с памятью формы (SMA) — модельный материал смеси SMA с другими материалами, широко применяемый во многих областях [1—9]. Например, NiTi—TiC [10], используемый благодаря эффективному поглощению энергии SMA и высокой прочности и стойкости к истиранию TiC [11, 12]. Причина того, что FG-SMA способен к фазовым преобразованиям, — наличие в его составе материала SMA. В [13] изучали некоторые основные свойства сплавов с памятью формы, такие как сверхэластичность, разное поведение при растяжении и сжатии, а также

переориентацию одиночного мартенсита. В [14], рассматривая влияние асимметрии растяжения—сжатия на изгибную деформацию балок SMA, описали два случая симметрии и асимметрии растяжения—сжатия с использованием двух функций преобразования, а затем обсудили влияние напряжения в разных сечениях балки и объемного содержания мартенсита на асимметрию растяжения—сжатия. В [15] проанализировали деформацию балок SMA при чистом изгибе и получили распределение напряжений по толщине. В [16] разделили консольную балку из SMA на разные области фазового преобразования в осевом направлении и определили деформационные характеристики ее свободного конца под действием сосредоточенной нагрузки в предположении, что деформация линейно распределяется по толщине. Большое количество численного моделирования и экспериментального анализа деформации изгиба SMA выполнено в [17]. В [18] модифицировали существующую модель состояния SMA с использованием теории композитных материалов и определили термомеханические свойства пластин FG-SMA. В [19] предложили аналитическое решение для предсказания деформирования FG-SMA с точки зрения зависимости напряжения от деформации при разных температурах. В [20] на основе теории микромеханики с учетом микросостава и взаимодействия материалов разработали микромеханическую модель состояния, пригодную для описания механических свойств материалов FG-SMA. В [21] изучали механику и поведение мартенситного преобразования осевых FG-балок из сплава с памятью формы с полным учетом свойств материала с использованием упрощенного линейного определяющего уравнения SMA и теории балки Бернулли—Эйлера. В [22] разработали модель консольной балки из функционально-градиентного пористого сплава с памятью формы, обобщающую модель ZM для плотных SMA с высокой степенью пористости. В [23] исследовали балки из пористого градиентного SMA с разной пористостью, применив подход усреднения композита, и получили теоретическое решение для балок при чистом изгибе с использованием теории текучести фон Мизеса и идеальной упругопластической модели. В [24] с помощью определяющего уравнения, соотношений линейной кинетики фазового преобразования слоев SMA и модели Танака и Нагака получили явное решение конструкционного отклика. Однако влияние объемного содержания SMA на асимметрию растяжения—сжатия балок FG-SMA изучено мало.

В настоящей работе для более точного описания нелинейного механического поведения балок из FG-SMA при чистом изгибе ввели коэффициент асимметрии растяжения—сжатия для количественной оценки этого эффекта, а также определения изменений местоположения нейтральной оси, кривизны и фазовой границы.

## 1. Изгибная деформация свободно опертых балок FG-SMA

*1.1. Механическая модель FG-SMA.* Рассмотрим балку FG-SMA длиной  $l$ , шириной  $b$  и толщиной  $h$ . Геометрия и координаты балки показаны на рис. 1. На балку действует равномерно распределенная нагрузка  $q$ .

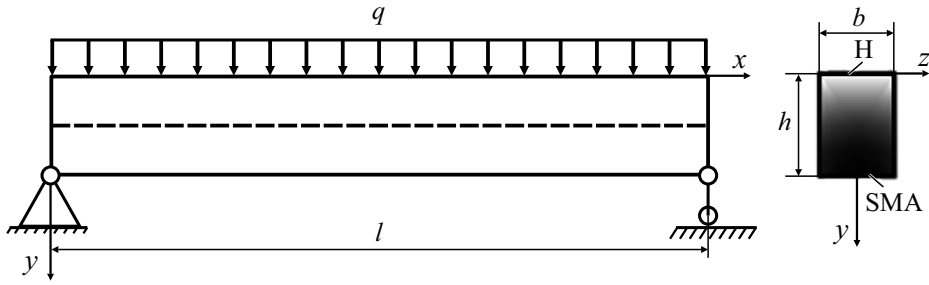


Рис. 1. Механическая модель балки FG-SMA.

Предположили, что балка FG-SMA состоит из материалов Н и SMA. Объемное содержание SMA непрерывно изменяется по толщине балки от нуля на верхней поверхности до 100% на нижней. Распределение объемного содержания SMA изменяется по закону степенной функции  $f(y) = (y/h)^n$ .

Деформацию  $\varepsilon$  в любом поперечном сечении балки запишем как

$$\varepsilon = \frac{y - y_i}{\rho}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma(y - y_i)}{E}, \quad (1)$$

где  $y_i$  — местоположение нейтральной оси на разных стадиях фазового преобразования;  $\rho$  — кривизна;  $\sigma$  — напряжение в поперечном сечении;  $E$  — модуль упругости.

Напряжения в материалах SMA и Н равны  $\sigma_1$  и  $\sigma_H$  соответственно:

$$\sigma_{\text{SMA}} = E_{\text{SMA}} \varepsilon, \quad \sigma_H = E_H \varepsilon, \quad (2)$$

где  $E_{\text{SMA}}$  и  $E_H$  — модули упругости материалов SMA и Н соответственно.

Согласно уравнению состояния материала SMA [25] можно записать, что

$$\varepsilon_{\text{ts}} = \frac{\sigma_{\text{ts}}}{E_A}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{\text{tf}} = \varepsilon_L + \frac{\sigma_{\text{tf}}}{E_M}, \quad (4)$$

$$\sigma_{\text{SMA}} = \begin{cases} E_A \varepsilon_{\text{t(c)}}, & |\varepsilon_{\text{t(c)}}| \leq \varepsilon_{\text{t(c)s}}, \\ \sigma_{\text{t(c)s}} + E_1 (\varepsilon_{\text{t(c)}} - \varepsilon_{\text{t(c)s}}), & \varepsilon_{\text{t(c)s}} \leq |\varepsilon_{\text{t(c)}}| \leq \varepsilon_{\text{t(c)f}}, \\ \sigma_{\text{t(c)f}} + E_M (\varepsilon_{\text{t(c)}} - \varepsilon_{\text{t(c)f}}), & \varepsilon_{\text{t(c)f}} \leq |\varepsilon_{\text{t(c)}}|, \end{cases} \quad (5)$$

где нижние индексы t и c обозначают растяжение и сжатие соответственно;  $E_A$  и  $E_M$  — модули упругости аустенитной и мартенситной фаз соответственно;  $E_1 = \frac{\sigma_{\text{tf}} - \sigma_{\text{ts}}}{\varepsilon_{\text{tf}} - \varepsilon_{\text{ts}}}$  — модуль упругости смешанной аустенитной и мартенситной фазы;  $\varepsilon_{\text{ts}}$  и  $\sigma_{\text{ts}}$  — критическая деформация и напряжение

при начале фазового преобразования на растянутой стороне балки;  $\varepsilon_{cs}$  и  $\sigma_{cs}$  — критическая деформация и напряжение при начале фазового преобразования на сжатой стороне соответственно;  $\varepsilon_{tf}$  и  $\sigma_{tf}$  — критическая деформация и напряжение в конце фазового преобразования на растянутой стороне соответственно;  $\varepsilon_{cf}$  и  $\sigma_{cf}$  — критическая деформация и напряжение в конце фазового преобразования на сжатой стороне соответственно;  $\varepsilon_L$  — эквивалентная остаточная деформация.

С учетом распределения SMA по толщине балки среднее напряжение в поперечном сечении запишем как

$$\sigma = [1 - f(y)]\sigma_H + f(y)\sigma_{SMA} . \quad (6)$$

**1.2. Коэффициент асимметрии растяжения—сжатия.** Для количественного описания асимметрии материала SMA в растянутой и сжатой областях балки введем коэффициент асимметрии растяжения—сжатия  $\alpha$  [10]:

$$\alpha = \frac{\sigma_{cs} - \sigma_{ts}}{\sigma_{cs} + \sigma_{ts}} = \frac{\sigma_{cf} - \sigma_{tf}}{\sigma_{cf} + \sigma_{tf}} , \quad (7)$$

из которого следует, что

$$\sigma_{cs} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \sigma_{ts} ; \quad \sigma_{cf} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \sigma_{tf} . \quad (8)$$

**1.3. Прогиб балки FG-SMA в середине пролета.** Из теории сопротивления материалов следует, что нелинейное определяющее балки FG-SMA уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 w}{d^2 x} = \left[ 1 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} \sqrt{\frac{b \int_{-\varepsilon_c}^{\varepsilon_t} \sigma \varepsilon d\varepsilon}{M}} . \quad (9)$$

## 2. Фазовое преобразование

При увеличении нагрузки материал FG-SMA от стадии упругого деформирования переходит к стадии фазового преобразования. В соответствии с изменениями свойств материала в ходе изгиба балки FG-SMA можно выделить две фазы деформирования: начальную и преобразования.

**2.1. Начальная фаза ( $\varepsilon_t < \varepsilon_{ts}$ ).** Когда в начале фазового преобразования деформация наружной поверхности растянутой области балки в определенном местоположении меньше критической, материал вблизи этого местоположения не подвергается никакому фазовому преобразованию. Это аустенитная фаза, перемещение нейтральной оси балки равно

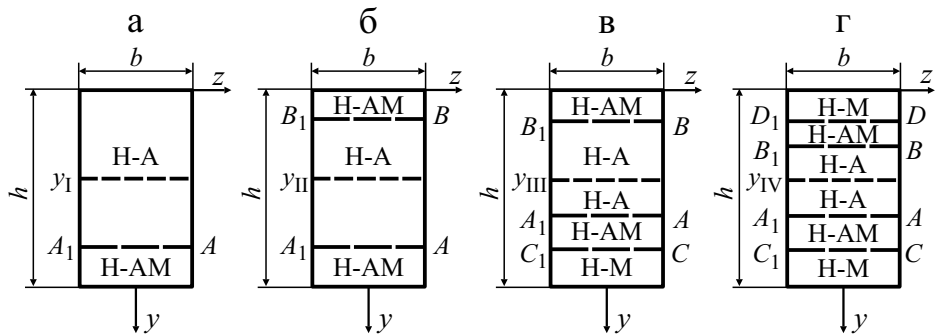


Рис. 2. Диаграммы фазового преобразования на стадиях I (а), II (б), III (в), IV (г).

нулю, деформация упругая. Распределение напряжений в поперечном сечении имеет вид

$$\sigma_x(y) = [E_H + (E_A - E_H)f(y)] \frac{y - y_0}{\rho}, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (10)$$

где  $y_0$  — координата нейтральной оси в начальной фазе.

**2.2. Фазовое преобразование** ( $\varepsilon_t \geq \varepsilon_{ts}$ ). Когда деформация  $\varepsilon_t$  на наружной поверхности растянутой области балки достигает критического значения  $\varepsilon_{ts}$ , материал вблизи поверхностного растянутого слоя претерпевает фазовое преобразование и нейтральная ось смещается. Как показано на рис. 2, область Н—А состоит из материала Н и аустенита, область Н—М — из материала Н и мартенсита, а область Н—АМ — из материала Н и смешанной фазы.

Когда деформации поверхностных слоев в растянутой и сжатой областях балки удовлетворяют неравенствам  $\varepsilon_{ts} \leq \varepsilon_t \leq \varepsilon_{tf}$  и  $|\varepsilon_c| \leq \varepsilon_{cs}$  соответственно, на растянутой стороне происходит фазовое преобразование SMA и образуется материал смешанной фазы. Материал на сжатой стороне балки в это время все еще находится в аустенитной фазе. Фазовая граница  $A_1A$  делит поперечное сечение на верхнюю часть, содержащую смешанную фазу и материал Н, и нижнюю часть, состоящую из аустенита — фазовое преобразование вступает в стадию I. Как показано на рис. 2—а, распределение напряжения  $\sigma_x$  в поперечном сечении имеет вид

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} [E_H + (E_A - E_H)f(y)] \frac{y - y_I}{\rho}, & 0 \leq y \leq y_{A_1A}, \\ f(y) \left[ \sigma_{ts} + E_1 \left( \frac{y - y_I}{\rho} - \varepsilon_{ts} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_I}{\rho}, & y_{A_1A} \leq y \leq h, \end{cases} \quad (11)$$

где  $y_I$  — местоположение нейтральной оси в фазе I;  $y_{A_1A} = y_I + \varepsilon_{ts}\rho$  — координата границы этой фазы  $A_1A$ .

Когда деформации поверхностных слоев в растянутой и сжатой областях удовлетворяют неравенствам  $\varepsilon_{ts} \leq \varepsilon_t \leq \varepsilon_{tf}$  и  $\varepsilon_{cs} \leq |\varepsilon_c| \leq \varepsilon_{cf}$  соответ-

ственно, вблизи наружной поверхности сжатой стороны возникает материал смешанной фазы и появляется новая граница раздела фаз  $B_1B$ , делящая поперечное сечение на части, содержащие смешанную фазу на обеих сторонах балки (растянутой и сжатой) и часть сечения вблизи нейтральной оси, состоящую из материала Н и аустенита, — фазовое преобразование вступает в стадию II. Как показано на рис. 2—б, распределение напряжения  $\sigma_x$  в поперечном сечении имеет вид

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} f(y) \left[ -\sigma_{cs} + E_1 \left( \frac{y - y_{II}}{\rho} + \varepsilon_{cs} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{II}}{\rho}, & 0 \leq y \leq y_{A_1A}, \\ \left[ E_H + (E_A - E_H) f(y) \right] \frac{y - y_{II}}{\rho}, & y_{A_1A} \leq y \leq y_{B_1B}, \\ f(y) \left[ \sigma_{ts} + E_1 \left( \frac{y - y_{II}}{\rho} - \varepsilon_{ts} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{II}}{\rho}, & y_{B_1B} \leq y \leq h, \end{cases} \quad (12)$$

где  $y_{II}$  — местоположение нейтральной оси на стадии II фазового преобразования;  $y_{A_1A} = y_{II} + \varepsilon_{ts}\rho$  и  $y_{B_1B} = y_{II} - \varepsilon_{cs}\rho$  — координаты границ  $A_1A$  и  $B_1B$  в этой фазе соответственно.

Когда деформации поверхностных слоев в растянутой и сжатой областях удовлетворяют неравенствам  $\varepsilon_{tf} \leq \varepsilon_t$  и  $\varepsilon_{cs} \leq |\varepsilon_c| \leq \varepsilon_{cf}$  соответственно, часть смешанной фазы вблизи растянутой поверхности балки переходит в мартенсит, а материал сжатого слоя находится в смешанной фазе. Вторая новая фазовая граница делит сечение на четыре области фазового преобразования: первую, состоящую из материала Н и мартенсита; вторую, вблизи стороны растяжения, состоящую из смешанной фазы; третью, вблизи оси балки, состоящую из аустенита и материала Н; и четвертую, вблизи сжатой стороны, состоящую из смешанной фазы, — фазовое преобразование входит в стадию III. Как показано на рис. 2—в, распределение напряжения  $\sigma_x$  в поперечном сечении имеет вид

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} f(y) \left[ -\sigma_{cs} + E_1 \left( \frac{y - y_{III}}{\rho} + \varepsilon_{cs} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{III}}{\rho}, & 0 \leq y \leq y_{A_1A}, \\ \left[ E_H + (E_A - E_H) f(y) \right] \frac{y - y_{III}}{\rho}, & y_{A_1A} \leq y \leq y_{B_1B}, \\ f(y) \left[ \sigma_{ts} + E_1 \left( \frac{y - y_{III}}{\rho} - \varepsilon_{ts} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{III}}{\rho}, & y_{B_1B} \leq y \leq y_{C_1C}, \\ f(y) \left[ \sigma_{tf} + E_M \left( \frac{y - y_{III}}{\rho} - \varepsilon_{tf} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{III}}{\rho}, & y_{C_1C} \leq y \leq h, \end{cases} \quad (13)$$

где  $y_{III}$  — местоположение нейтральной оси в стадии фазового превраще-

ния III;  $y_{A_1A} = y_{III} + \varepsilon_{ts}\rho$ ,  $y_{B_1B} = y_{III} - \varepsilon_{cs}\rho$  и  $y_{C_1C} = y_{III} + \varepsilon_{tf}\rho$  — координаты границ  $A_1A$ ,  $B_1B$  и  $C_1C$  фазы на этой стадии соответственно.

Когда деформации поверхностных слоев в растянутой и сжатой областях удовлетворяют неравенствам  $\varepsilon_{tf} \leq \varepsilon_t$  и  $\varepsilon_{cf} \leq |\varepsilon_c|$  соответственно, материал вблизи поверхностных (растянутого и сжатого) слоев полностью превращается в мартенсит. Образовавшаяся новая фазовая граница  $D_1D$  делит поперечное сечение балки на пять областей фазового преобразования: первую и пятую вблизи растянутого и сжатого слоев, состоящие из материала Н и мартенсита; вторую и четвертую, примыкающие к ним и состоящие из смешанной фазы; третью область вблизи нейтральной оси, состоящую из материала Н и аустенита. Фазовое превращение окончательно переходит в стадию IV. Как показано на рис. 2—2, распределение напряжения  $\sigma_x$  в поперечном сечении имеет вид

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} f(y) \left[ -\sigma_{cf} + E_M \left( \frac{y - y_{IV}}{\rho} + \varepsilon_{cf} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho}, & 0 \leq y \leq y_{A_1A}, \\ f(y) \left[ -\sigma_{cs} + E_1 \left( \frac{y - y_{IV}}{\rho} + \varepsilon_{cs} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho}, & y_{A_1A} \leq y \leq y_{B_1B}, \\ \left[ E_H + (E_A - E_H) f(y) \right] \frac{y - y_{IV}}{\rho}, & y_{B_1B} \leq y \leq y_{C_1C}, \\ f(y) \left[ \sigma_{ts} + E_1 \left( \frac{y - y_{IV}}{\rho} - \varepsilon_{ts} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho}, & y_{C_1C} \leq y \leq y_{D_1D}, \\ f(y) \left[ \sigma_{tf} + E_M \left( \frac{y - y_{IV}}{\rho} - \varepsilon_{tf} \right) \right] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho}, & y_{D_1D} \leq y \leq h, \end{cases} \quad (14)$$

где  $y_{IV}$  — местоположение нейтральной оси в стадии IV фазового преобразования;  $y_{A_1A} = y_{III} + \varepsilon_{ts}\rho$ ,  $y_{B_1B} = y_{III} - \varepsilon_{cs}\rho$ ,  $y_{C_1C} = y_{III} + \varepsilon_{tf}\rho$  —  $y_{D_1D} = y_{IV} - \varepsilon_{cf}\rho$  — координаты фазовых границ  $A_1A$ ,  $B_1B$ ,  $C_1C$  и  $D_1D$  на этой стадии соответственно.

#### 4. Уравнения равновесия

Имеем следующие уравнения равновесия поперечного сечения: на начальной стадии

$$\int \sigma_x(y) dA = b \int_0^h [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_0}{\rho} dy = 0, \quad (15)$$

$$M(x) = \int \sigma_x(y) y dA = b \int_0^h y [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_0}{\rho} dy = \frac{qx^2}{2}, \quad (16)$$



на стадии I

$$\int \sigma_x(y) dA = b \int_0^{y_1 + \varepsilon_{ts} \rho} [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_I}{\rho} dy +$$

$$+ b \int_{y_1 + \varepsilon_{ts} \rho}^h \left\{ f(y) [\sigma_{ts} + E_1 \left( \frac{y - y_I - \varepsilon_{ts}}{\rho} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_I}{\rho} \right\} dy = 0, \quad (17)$$

$$M(x) = \int \sigma_x(y) y dA = b \int_0^{y_1 + \varepsilon_{ts} \rho} [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_I}{\rho} y dy +$$

$$+ b \int_{y_1 + \varepsilon_{ts} \rho}^h \left\{ f(y) [\sigma_{ts} + E_1 \left( \frac{y - y_I - \varepsilon_{ts}}{\rho} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_I}{\rho} \right\} y dy, \quad (18)$$

на стадии II

$$\int \sigma_x(y) dA = b \int_0^{y_{II} - \varepsilon_{cs} \rho} \left\{ f(y) [-\sigma_{cs} + E_1 \left( \frac{y - y_{II} + \varepsilon_{cs}}{\rho} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{II}}{\rho} \right\} dy +$$

$$+ b \int_{y_{II} - \varepsilon_{cs} \rho}^{y_{II} + \varepsilon_{ts} \rho} [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_{II}}{\rho} dy +$$

$$+ b \int_{y_{II} + \varepsilon_{ts} \rho}^h \left\{ f(y) [\sigma_{ts} + E_1 \left( \frac{y - y_{II} - \varepsilon_{ts}}{\rho} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{II}}{\rho} \right\} dy = 0, \quad (19)$$

$$M(x) = \int \sigma_x(y) y dA = b \int_0^{y_{II} - \varepsilon_{cs} \rho} \left\{ f(y) [-\sigma_{cs} + E_1 \left( \frac{y - y_{II} + \varepsilon_{cs}}{\rho} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{II}}{\rho} \right\} y dy +$$

$$+ b \int_{y_{II} - \varepsilon_{cs} \rho}^{y_{II} + \varepsilon_{ts} \rho} [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_{II}}{\rho} y dy +$$

$$+ b \int_{y_{II} + \varepsilon_{ts} \rho}^h \left\{ f(y) [\sigma_{ts} + E_1 \left( \frac{y - y_{II} - \varepsilon_{ts}}{\rho} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{II}}{\rho} \right\} y dy, \quad (20)$$

на стадии III

$$\sigma(x) = \int \sigma_x(y) dA = b \int_0^{y_{III} - \varepsilon_{cs} \rho} \left\{ f(y) [-\sigma_{cs} + E_1 \left( \frac{y - y_{III} + \varepsilon_{cs}}{\rho} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{III}}{\rho} \right\} dy +$$

$$+ b \int_{y_{III} - \varepsilon_{cs} \rho}^{y_{III} + \varepsilon_{ts} \rho} [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_{III}}{\rho} y dy +$$

$$+ b \int_{y_{III} + \varepsilon_{ts} \rho}^{y_{III} + \varepsilon_{tf} \rho} \left\{ f(y) [\sigma_{ts} + E_1 \left( \frac{y - y_{III} - \varepsilon_{ts}}{\rho} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{III}}{\rho} \right\} dy +$$

$$+ b \int_{y_{III} + \varepsilon_{tf} \rho}^h \left\{ f(y) [\sigma_{tf} + E_M \left( \frac{y - y_{III} - \varepsilon_{tf}}{\rho} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{III}}{\rho} \right\} dy = 0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
M(x) = \int \sigma_x(y) y dA = & b \int_0^{y_{III} - \varepsilon_{cs} \rho} \left\{ f(y) [-\sigma_{cs} + E_1 \left( \frac{y - y_{III}}{\rho} + \varepsilon_{cs} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{III}}{\rho} \right\} y dy + \\
& + b \int_{y_{III} - \varepsilon_{cs} \rho}^{y_{III} + \varepsilon_{ts} \rho} [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_{III}}{\rho} y dy + \\
& + b \int_{y_{III} + \varepsilon_{ts} \rho}^{y_{III} + \varepsilon_{tf} \rho} \left\{ f(y) [\sigma_{ts} + E_1 \left( \frac{y - y_{III}}{\rho} - \varepsilon_{ts} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{III}}{\rho} \right\} y dy + \\
& + b \int_{y_{III} + \varepsilon_{tf} \rho}^h \left\{ f(y) [\sigma_{tf} + E_M \left( \frac{y - y_{III}}{\rho} - \varepsilon_{tf} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{III}}{\rho} \right\} y dy, \quad (22)
\end{aligned}$$

на стадии IV

$$\begin{aligned}
\int \sigma_x(y) dA = & b \int_0^{y_{IV} - \varepsilon_{cf} \rho} \left\{ f(y) [-\sigma_{cf} + E_M \left( \frac{y - y_{IV}}{\rho} + \varepsilon_{cs} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho} \right\} dy + \\
& + b \int_{y_{IV} - \varepsilon_{cf} \rho}^{y_{IV} - \varepsilon_{cs} \rho} \left\{ f(y) [-\sigma_{cs} + E_1 \left( \frac{y - y_{IV}}{\rho} + \varepsilon_{cs} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho} \right\} dy + \\
& + b \int_{y_{IV} - \varepsilon_{cs} \rho}^{y_{IV} + \varepsilon_{ts} \rho} [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_{IV}}{\rho} dy + \\
& + b \int_{y_{IV} + \varepsilon_{ts} \rho}^{y_{IV} + \varepsilon_{tf} \rho} \left\{ f(y) [\sigma_{ts} + E_1 \left( \frac{y - y_{IV}}{\rho} - \varepsilon_{ts} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho} \right\} dy + \\
& + b \int_{y_{IV} + \varepsilon_{tf} \rho}^h \left\{ f(y) [\sigma_{tf} + E_M \left( \frac{y - y_{IV}}{\rho} - \varepsilon_{tf} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho} \right\} dy = 0, \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(x) = \int \sigma_x(y) y dA = & b \int_0^{y_{IV} - \varepsilon_{cf} \rho} \left\{ f(y) [-\sigma_{cf} + E_M \left( \frac{y - y_{IV}}{\rho} + \varepsilon_{cs} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho} \right\} y dy + \\
& + b \int_{y_{IV} - \varepsilon_{cf} \rho}^{y_{IV} - \varepsilon_{cs} \rho} \left\{ f(y) [-\sigma_{cs} + E_1 \left( \frac{y - y_{IV}}{\rho} + \varepsilon_{cs} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho} \right\} y dy + \\
& + b \int_{y_{IV} - \varepsilon_{cs} \rho}^{y_{IV} + \varepsilon_{ts} \rho} [E_H + (E_A - E_H) f(y)] \frac{y - y_{IV}}{\rho} y dy + \\
& + b \int_{y_{IV} + \varepsilon_{ts} \rho}^{y_{IV} + \varepsilon_{tf} \rho} \left\{ f(y) [\sigma_{ts} + E_1 \left( \frac{y - y_{IV}}{\rho} - \varepsilon_{ts} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho} \right\} y dy + \\
& + b \int_{y_{IV} + \varepsilon_{tf} \rho}^h \left\{ f(y) [\sigma_{tf} + E_M \left( \frac{y - y_{IV}}{\rho} - \varepsilon_{tf} \right)] + [1 - f(y)] E_H \frac{y - y_{IV}}{\rho} \right\} y dy. \quad (24)
\end{aligned}$$

Изгибающий момент  $M(x)$  в приведенных уравнениях равен  $M(x) = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2$ , где  $x$  — расстояние местоположения поперечного сечения от левого конца балки.

На начальной стадии координату местоположения нейтральной оси можно определить непосредственно из уравнения осевого равновесия

$$y_0 = \frac{(n+1)(nE_H + 2E_A)}{2(n+2)(nE_H + E_A)} h \quad (25)$$

На стадии фазы преобразования значения  $\rho$  и  $y_i$  можно определить, подставив функцию распределения соответствующих нормальных напряжений в уравнение равновесия.

#### 4. Результаты и обсуждение

В [26] задачу чистого изгиба балки FG-SMA решили на основе модели состояния SMA и определили относительное среднее напряжение в поперечном сечении балки, используя параметры материала и геометрические размеры, приведенные в [26]. При  $n = 1$  и  $M = 50$  кН/м зависимость среднего напряжения в поперечном сечении, согласующаяся с результатами [26], получена с применением теории, изложенной в настоящей работе (рис. 3). Это доказывает, что формулу, полученную из модели состояния материала SMA, можно использовать при исследовании механических свойств материала FG-SMA при нечистом изгибе.

Механическая модель свободно опертой балки FG-SMA длиной  $l = 200$  мм, высотой  $h = 20$  мм, шириной  $b = 10$  мм, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой  $\alpha = 180$  кН/м, показана на рис. 1. С учетом симметричности приложения нагрузки относительно пролета балки для анализа и обсуждения рассмотрели половину балки. Параметры

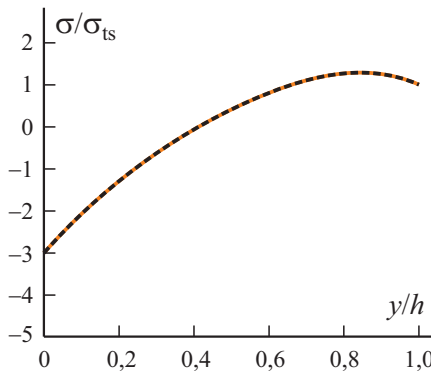


Рис. 3. Распределения напряжения  $\sigma / \sigma_{ts}$  по координате  $y / h$  в балке FG-SMA, рассчитанные в [23] (---) и настоящей работе (—).

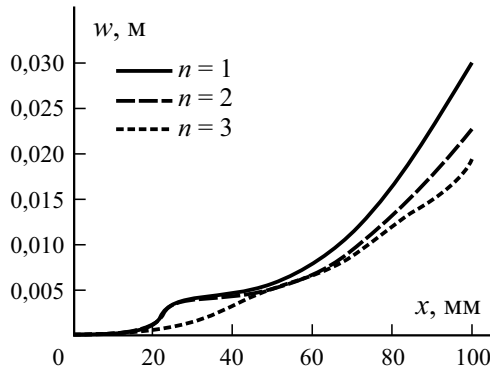


Рис. 4. Изменение прогиба  $w$  по координате  $x$  в балке при разных значениях показателя степени  $n$  и стадии фазового преобразования.

материала FG-SMA следующие:  $E_A = 70$  ГПа,  $E_M = 30$  ГПа,  $E_H = 210$  ГПа,  $\sigma_{ts} = 290$  МПа,  $\sigma_{tf} = 380$  МПа,  $\varepsilon_L = 0,069$  [27, 28].

На рис. 4 приведена зависимость прогиба балки  $w$  от координаты  $x$  при разных значениях показателя степени  $n$ , стадиях фазового преобразования и коэффициенте асимметрии растяжения—сжатия  $\alpha = 0,1$ . Из данных рисунка видно, что на начальном этапе зависимость между средним прогибом балки и местоположением поперечного сечения изменяется линейно. На стадии фазового преобразования прогиб балки в середине пролета становится тем больше, чем ближе сечение к середине пролета. В силу малого модуля упругости смешанной фазы скорость увеличения прогиба возрастает после вступления в стадию фазового преобразования. В то же время прогиб балки уменьшается с увеличением показателя степени  $n$ .

Распределение среднего нормального напряжения  $\sigma_x$  в середине пролета по высоте поперечного сечения при показателе степени  $n=1$  приведено на рис. 5—*a*. Из данных рисунка видно, что с учетом нелинейности материала и смещения нейтральной оси распределение напряжения  $\sigma_x$  асимметрично относительно растянутой и сжатой сторон балки, а напряжение на сжатой стороне значительно больше, чем на растянутой. Чем больше коэффициент асимметрии растяжения—сжатия, тем меньше максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении и значение нормального напряжения на одной и той же относительной высоте; однако влияние коэффициента асимметрии растяжения—сжатия на напряжение  $\sigma_x$  очень слабое.

На рис. 5—*б* показано распределение среднего нормального напряжения  $\sigma_x$  в середине пролета по высоте поперечного сечения при разных значениях показателя степени  $n$  и коэффициенте асимметрии растяжения—сжатия  $\alpha = 0,1$ . Видно, что влияние показателя степени на напряжение в растянутом слое значительно меньше, чем в сжатом. Чем больше показатель степени, тем больше максимальное среднее

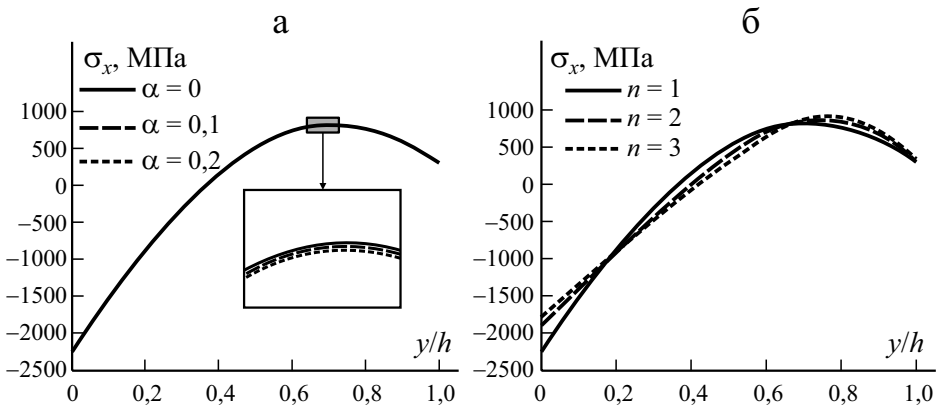


Рис. 5. Распределение нормального напряжения  $\sigma_x$  по координате  $y/h$  в срединном поперечном сечении при разных значениях коэффициента асимметрии растяжения—сжатия  $\alpha$  и  $n=1$  (а) и показателя степени  $n$  и  $\alpha=0,1$  (б).

растягивающее и меньше по модулю максимальное среднее сжимающее напряжение.

Изменение местоположения нейтральной оси в поперечном сечении балки при разных значениях коэффициента асимметрии растяжения—сжатия и  $n=1$  иллюстрируют данные рис. 6—а. Видно, что изменение коэффициента асимметрии растяжения—сжатия  $\alpha$  слабо влияет на смещение нейтральной оси. Поскольку материал нелинейный, фазовое преобразование на растянутой и сжатой сторонах балки асимметрично, что ослабляет влияние коэффициента  $\alpha$  на смещение нейтральной оси. Возле опоры смещения нейтральной оси не происходит. Когда деформация балки переходит в стадию фазового преобразования, нейтральная ось начинает смещаться в сторону сжатой области. Чем ближе она к

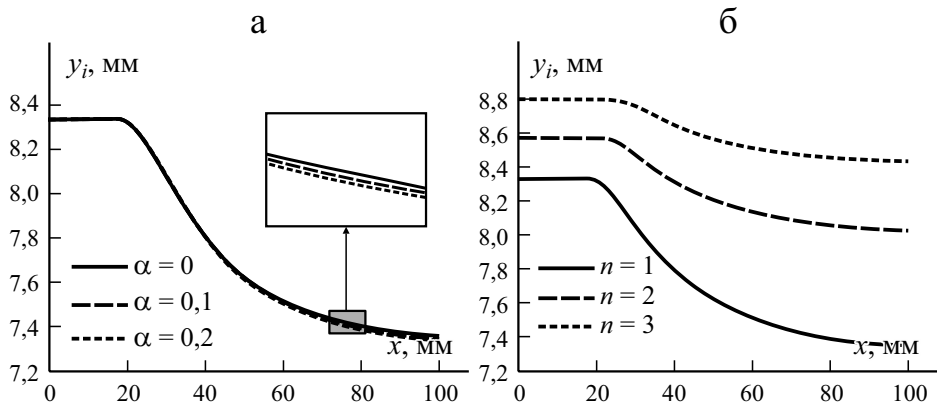


Рис. 6. Изменение координаты  $y_i$  нейтральной оси в поперечном сечении балки при разных значениях коэффициента  $\alpha$  и  $n=1$  (а) и показателя степени  $n$  и  $\alpha=0,1$  (б).

середине пролета, тем меньше наклон кривой и тем медленнее изменение. Чем больше коэффициент  $\alpha$ , тем больше смещение нейтральной оси.

На рис. 6—б показано изменение местоположения нейтральной оси балки при разных значениях показателя степени  $n$  и  $\alpha = 0,1$ . При сравнении с данными рис. 5—а видно, что влияние изменения показателя степени на смещение местоположения нейтральной оси значительно больше, чем изменения коэффициента асимметрии растяжения—сжатия. На начальном этапе чем больше показатель степени, тем дальше нейтральная ось от сжатой стороны. С началом фазового преобразования чем больше показатель степени, тем меньше максимальное смещение нейтральной оси. При большем значении показателя степени нейтральная ось в том же поперечном сечении находится дальше от сжатой стороны, а наклон кривой и амплитуда роста смещения меньше.

Зависимость кривизны оси балки от коэффициента асимметрии растяжения—сжатия  $\alpha$  при  $n=1$  приведена на рис. 7—а. Видно, что коэффициент  $\alpha$  очень слабо влияет на кривизну и кривые практически совпадают. На начальной стадии деформирования материала кривизна вблизи опоры изменяется линейно и коэффициент  $\alpha$  не влияет на ее наклон. После начала фазового превращения, когда поперечное сечение постепенно приближается к середине пролета, увеличение кривизны сначала нарастает, а затем уменьшается. Чем ближе поперечное сечение к середине пролета, тем больше кривизна, наклон кривой и меньше скорость увеличения кривизны. Чем больше коэффициент асимметрии растяжения—сжатия, тем меньше кривизна в одном и том же поперечном сечении.

На рис. 7—б показано изменение кривизны оси балки при разных значениях показателя степени и  $\alpha = 0,1$ . Наклон кривизны линейный на начальном этапе уменьшается с увеличением показателя степени. В ходе фазового преобразования чем больше показатель степени, тем меньше максимальная кривизна балки и значение кривизны в одном и том же местоположении поперечного сечения.

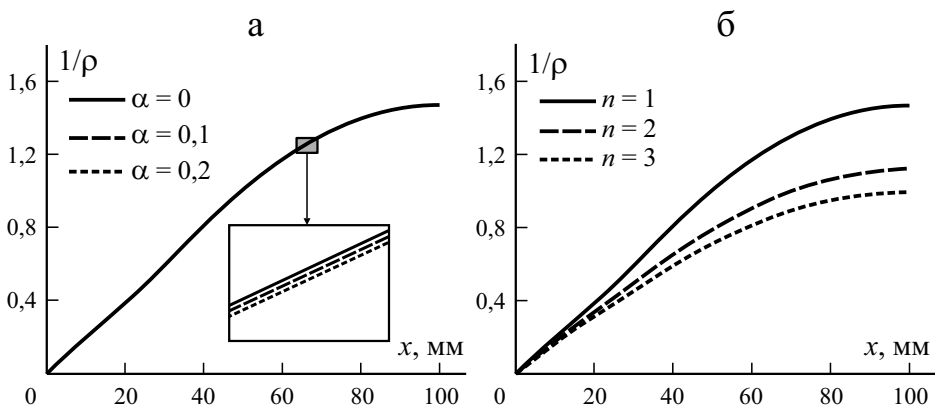


Рис. 7. Изменение кривизны  $1/\rho$  балки при разных значениях коэффициента  $\alpha$  и  $n=1$  (а) и показателя степени  $n$  и  $\alpha=0,1$  (б).

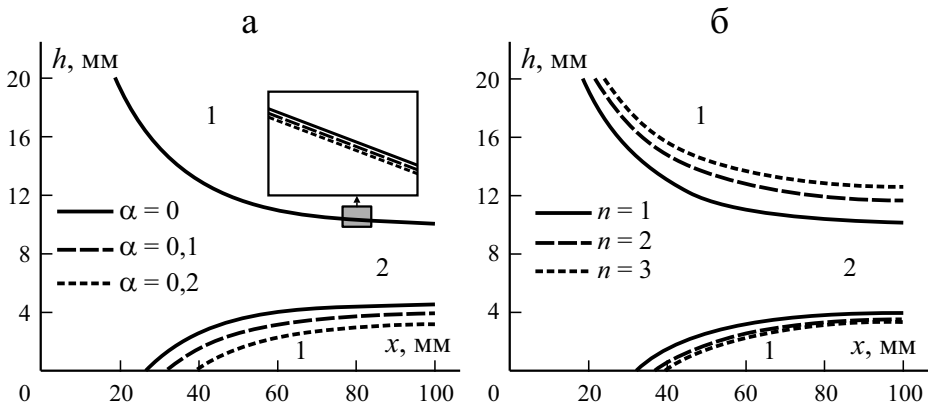


Рис. 8. Изменение фазовых границ в балке при разных значениях коэффициента  $\alpha$  и  $n = 1$  (а) и показателя степени  $n$  и  $\alpha = 0,1$  (б): 1 и 2 — фазы мартенсита и аустенита соответственно.

Изменение местоположения фазовой границы балки при разных значениях коэффициента асимметрии растяжения—сжатия и  $n = 1$  иллюстрируют данные рис. 8—а. На начальном этапе деформирования фазовое преобразование отсутствует. В начальной стадии фазового преобразования как наклон кривой, так и скорость расширения границы раздела фаз уменьшаются по мере приближения поперечного сечения к середине пролета. Влияние коэффициента асимметрии растяжения—сжатия на сжатой стороне больше, чем на растянутой. Чем больше коэффициент  $\alpha$ , тем дальше местоположение границы раздела фаз от растянутой стороны балки и тем ближе местоположение, в котором фазовая граница появляется в середине пролета.

На рис. 8—б показано изменение фазовой границы балки при разных показателя степени и  $\alpha = 0,1$ . Видно, что влияние показателя степени на изменение границы раздела фаз с растянутой стороны значительно больше, чем с сжатой. С увеличением показателя степени границы раздела фаз возникают как на растянутой, так и сжатой сторонах, и приближаются к середине пролета балки.

### Заключение

На основе теории деформирования балки при изгибе и соотношения между напряжением и деформацией для материала из сплава с памятью формы проанализировали нелинейное механическое поведение балки FG-SMA при нечистом изгибе. Основные выводы анализа заключаются в следующем.

1. Изменение объемного содержания SMA по толщине материала FG-SMA носит нелинейный характер, что приводит к асимметрии между растянутой и сжатой областями балки при изгибе. Эта особенность

уменьшает влияние коэффициента асимметрии растяжения—сжатия на фазовое преобразование балок FG-SMA.

2. Максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении, нормальное напряжение на той же относительной высоте и кривизна нелинейно отрицательно связаны с коэффициентом асимметрии растяжения—сжатия. Смещение нейтральной оси нелинейно положительно связано с коэффициентом асимметрии растяжения—сжатия. Чем больше коэффициент асимметрии растяжения—сжатия, тем дальше граница фаз на растянутой поверхности слоя, а местоположение границы раздела фаз на сжатой стороне ближе к середине пролета.

3. Максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении и относительная высота при максимальном нормальном напряжении нелинейно положительно связаны с показателем степени, а максимальное смещение нейтральной оси в одном и том же сечении, изменение начальной стадии и кривизна связаны нелинейно отрицательно с показателем степени. С увеличением показателя степени местоположения границ раздела фаз на растянутой и сжатой сторонах балки приближаются к середине пролета.

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (11472123—11862012).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Birnbaum A. J., Satoh G., and Yao, Y. L.* Functionally grading the shape memory response in NiTi films: Laser irradiation // *J. Appl. Phys.* — 2009. — Vol. 106, No. 4. — P. 1—8.
2. *Nam T. H., Yu C. A., Lee Y. J., et al.* Functionally graded Ti-Ni shape memory alloys // *Materials Sci. Forum.* — 2007. — Vol. 539—543, — P. 3169—3172.
3. *Lagoudas D. C. and Dimitirs C.* Shape Memory Alloys: Modeling Engineering Application. — Springer, US, 2008.
4. *Qidwai M. A. and Lagoudas D. C.* Numerical implementation of a shape memory alloy thermomechanical constitutive model using return mapping algorithms // *Int. J. Numerical Methods in Eng.* — 2015. — Vol. 47, No. 6. — P. 1123—1168.
5. *Tobushi H., Date K., and Miyamoto K.* Characteristics and development of shape-memory alloy heat engine // *J. Solid Mech. Mater. Eng.* — 2010. — Vol. 4, No. 7. — P. 1094—1102.
6. *Kurzawa M. and Stachowiak D.* Investigation on thermo-mechanical behavior of shape memory alloy actuator // *Arch. Electrical Eng.* — 2017. — Vol. 66, No. 4. — P. 751—760.
7. *Mineta T., Mitsui T., Watanabe Y., et al.* An active guide wire with shape memory alloy bending actuator fabricated by room temperature process // *Sensors & Actuators A Phys.* — 2001. — Vol. 97, — P. 632—637.
8. *Zbiciak A.* Dynamic analysis of pseudoelastic SMA beam // *Int. J. Mech. Sci.* — 2010. — Vol. 52, No. 1. — P. 56—64.
9. *Brinson L. C. and Lammering R.* Finite element analysis of the behavior of shape memory alloys and their applications // *Int. J. Solids Struct.* — 1993. — Vol. 30, No. 26. — P. 3261—3280.



10. *Burkes et al.* Combustion synthesis and mechanical properties of dense NiTi-TiC intermetallic-ceramic composites // *Metall. Mater. Trans. A.* — 2006. — Vol. 37, No. 1. — P. 235—242.
11. *Burkes D. E. and Moore J. J.* Microstructure and kinetics of a functionally graded NiTi-TiCx composite produced by combustion synthesis // *J. Alloys Compd.* — 2007. — Vol. 430, Nos. 1—2. — P. 274—281.
12. *Cheng Y. et al.* Surface characteristics and corrosion resistance properties of TiNi shape memory alloy coated with Ta // *Surf. Coat. Technol.* — 2004. — Vol. 186, No. 3. — P. 346—352.
13. *Auricchio F., Taylor R. L., and Lubliner J.* Shape-memory alloys: macromodelling and numerical simulations of the superelastic behavior // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* — 1997. — Vol. 146, Nos. 3—4. — P. 281—312.
14. *Mirzaeifar R. et al.* On superelastic bending of shape memory alloy beams // *Int. J. Solids Struct.* — 2013. — Vol. 50, No. 10. — P. 1664—1680.
15. *Atanackovi T. and Achenbach M.* Moment-curvature relations for a pseudoelastic beam // *Continuum Mechanics and Thermodynamics.* — 1989. — Vol. 1, No. 1. — P. 73—80.
16. *Eshghinejad A. and Elahinia M.* Exact solution for bending of shape memory alloy superelastic beams // *ASME 2011 Conf. on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems*, 2015.
17. *De La Flor S., Urbina C., and Ferrando F.* Asymmetrical bending model for NiTi shape memory wires: numerical simulations and experimental analysis // *Strain.* — 2011. — Vol. 47, No. 3. — P. 255—267.
18. *Liu B. F., Ni P., and Zhang W.* On Behaviors of Functionally Graded SMAs under Therm-Mechanical Coupling // *Acta Mechanica Solida Sinica.* — 2016. — Vol. 29, No. 1. — P. 46—58.
19. *Shariat B. S., Meng Q., Mahmud A. S., et al.* Functionally graded shape memory alloys: Design, fabrication and experimental evaluation // *Mater. Des.* — 2017. — Vol. 124, No. 1. — P. 225—237.
20. *Xue L. J., Dui G. S. and Liu B. F.* Micromechanical constitutive model of functionally graded shape memory alloy // *Eng. Mech.* — 2014. — Vol. 31, No. 2. — P. 225—229 [in Chinese].
21. *Kang Z., Wang Z., Zhou B., and Xue S.* Galerkin Weighted residual method for axially functionally graded shape memory alloy beams // *J. Mech.* — 2019. — Vol. 36, No. 3. — P. 331—345.
22. *Viet N. V. and Zaki W.* Bending model for functionally graded porous shape memory alloy/poroelastic composite cantilever beams // *Appl. Math. Modelling.* — 2021. — Vol. 97, No. 9. — P. 398—417.
23. *Zhang Y., Liu B., Du C., and Zhou R.* On the behaviors of porous shape memory alloy beam with gradient porosity under pure bending // *J. Mater. Res.* — 2018. — Vol. 34, No. 2. — P. 282—289.
24. *Sepiani H., Ebrahimi F., and Karimipour H.* A mathematical model for smart functionally graded beam integrated with shape memory alloy actuators // *J. Mech. Sci. Technol.* — 2009. — Vol. 23, No. 12. — P. 3179—3190.
25. *Wang J. C. and Yang J. N.* Nonlinear analysis of shape memory alloy beam under the thermal and the mechanical loads // *Matéria (Rio de Janeiro).* — 2019. — Vol. 24, No. 1. — e—12297.
26. *Xue L. J., Dui G. S., and Liu B. F.* Theoretical analysis of pure bending of functionally graded shape memory composite beams // *J. Mech. Eng.* — 2012. — Vol. 48, No. 22. — P. 40—45 [in Chinese].

27. *Bo Z., Lagoudas D. C., and Miller D.* Material characterization of SMA actuators under nonproportional thermomechanical loading // *Smart Struct. Mater.: Math. Control in Smart Struct. Int. Soc. Optics Photonics.* — 1999.

28. *Zhu Y. P. and Dui G. S.* A macro-constitutive model of polycrystalline NiTi SMAs including tensile-compressive asymmetry and torsion pseudoelastic behaviors // *Int. J. Eng. Sci.* — 2010. — Vol. 48, No. 12. — P. 2099—2106.

Поступила в редакцию 15.07.2021

Окончательный вариант поступил 08.03.2022

Received July 15, 2021 (March 8, 2022)

---