

*Н. Мишра<sup>а</sup>, К. Дас<sup>б\*</sup>*

*<sup>а</sup>School of Minerals, Metallurgical and Materials Engineering, Indian Institute of Technology  
Bhubaneswar, Odisha-752050, India*

*<sup>б</sup>Department of Metallurgy and Materials Engineering, Indian Institute of Engineering Science  
and Technology Shibpur, Howrah 711103, West Bengal, India*

## **СРАВНИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИНКРЕМЕНТАЛЬНОЙ САМОСОГЛАСОВАННОЙ И ЭШЕЛБИ—МОРИ—ТАНАКА МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ СВОЙСТВ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ С ОРТОТРОПНОЙ МАТРИЦЕЙ<sup>1</sup>**

*N. Mishra and K. Das\**

### **A COMPARATIVE STUDY OF INCREMENTAL SELF-CONSISTENT AND ESHELBY-MORI-TANAKA MODELS FOR ESTIMATING THE ELECTROELASTIC PROPERTIES OF PIEZOELECTRIC POLYMER COMPOSITES WITH AN ORTHOTROPIC MATRIX**

**Keywords:** orthotropic polymer matrix, self-consistency, Eshelby-Mori-Tanaka model, kinematic uniform boundary conditions

The efficiency of two micromechanical models, the incremental self-consistent (ISC) model and a modified Eshelby-Mori-Tanaka (EMT) model is evaluated, in predicting the effective electroelastic properties of unidirectional piezoelectric polymer composites with an orthotropic polymeric matrix, especially at high volume fractions of reinforcement. The effective electroelastic properties of PZT-7A/PVDF composites were obtained using both the models and they were compared with those found using a representative volume element (RVE)-based finite-element (FE) model. Composites with two different types of connectivity and four different types of reinforcement geometry (spherical, ellipsoidal, circular cylindrical, and elliptic cylindrical) were considered. Our analysis showed that, in general, better results predicted the modified EMT model.

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [kaushik@metal.iests.ac.in](mailto:kaushik@metal.iests.ac.in)  
Corresponding author: [kaushik@metal.iests.ac.in](mailto:kaushik@metal.iests.ac.in)

<sup>1</sup>Перевод с англ.

**Ключевые слова:** матрица полимерная ортотропная, самосогласованность, модель Эшелби—Мори—Танака, условия граничные однородные кинематические

Оценена эффективность двух микромеханических моделей — инкрементальной самосогласованной (ISC) и модифицированной Эшелби—Мори—Танака (EMT) — для предсказания эффективных электроупругих свойств однонаправленных пьезоэлектрических полимерных композитов с ортотропной полимерной матрицей, особенно при большом объемном содержании арматуры. Эффективные электроупругие свойства композитов на основе пьезокерамики PZT-7A и поливинилиденфторида (PVDF) определены с использованием обеих моделей и сопоставлены с рассчитанными с помощью конечно-элементной модели на основе представительных объемных элементов (ПОЭ). Рассмотрены композиты с двумя разными типами связности и четырьмя формами геометрии арматуры (сферической, эллипсоидальной, круглоцилиндрической и эллиптически-цилиндрической). Анализ показал, что в целом модифицированная модель EMT лучше предсказывает эффективные свойства композита.

## Введение

Пьезоэлектрические полимерные композиты — отличный выбор в качестве функциональных материалов в гибкой микроэлектронике в силу хороших электромеханических характеристик, отличной гибкости и малой массы [1]. Присущая этим композитам способность преобразовывать механическую энергию в электрическую и наоборот делает их чрезвычайно популярными в качестве исполнительных механизмов и датчиков в микроустройствах [2, 3]. Некоторые примеры таких полимерных композитов — полидиметилсилоксан (PDMS)/титанат бария ( $\text{BaTiO}_3$ ) [4], SU8/оксид цинка (ZnO) [5], PDMS/ниобат магния — титанат свинца (PMN—PT) [6], эпоксид/PMN—PT [7]. Использование микромеханических моделей для предсказания эффективных свойств композитов снижает стоимость и время физических экспериментов.

Некоторые исследователи разработали модели для определения электроупругих свойств пьезоэлектрических композитов. Например, в [8] распространили микромеханику Эшелби—Мори—Танака (EMT) [9, 10] на проблему пьезоэлектрических включений в области линейного пьезоэлектричества. На основе разработки, выполненной в [8], изучали эффективные электроупругие свойства разных пьезоэлектрических композитов [11—15]. В [16] использовали метод асимптотической гомогенизации для разработки аналитических выражений для расчета эффективных свойств бинарного пьезоэлектрического композита (с фазами, имеющими гексагональную симметрию), содержащего однонаправленные пьезоэлектрические цилиндрические волокна в непьезоэлектрической матрице. В [17]

использовали метод конечных элементов (МКЭ), основанный на периодических граничных условиях, и метод асимптотической гомогенизации для оценки и сравнения эффективных свойств бинарного пьезоэлектрического композита, состоящего из однонаправленных цилиндрических волокон из трансверсально-изотропной пьезокерамики, погруженных в изотропную пассивную матрицу. Исследования в этой области также недавно выполнили в [18—20]. Эффективные свойства анизотропных сложных композитов, например, композитов с ортотропной матрицей, также оценили в [21, 22].

Инкрементальный самосогласованный (ISC) метод основан на дифференциальной [23] и классической самосогласованной [24] схемах. Многие исследователи использовали метод ISC для оценки эффективных свойств композитов с изотропной или трансверсально-изотропной матрицей [24—26]. Установлено, что метод ISC лучше предсказывает эффективные свойства, чем классическая самосогласованная схема. При достаточно большом объемном содержании арматуры он обеспечивает результаты, аналогичные получаемым с помощью метода EMT [26]. Однако в доступной литературе почти отсутствует сравнение результатов, полученных с помощью разных микромеханических моделей для пьезоэлектрических композитов с ортотропной матрицей. Поэтому цель настоящей работы — оценить эффективность метода ISC для предсказания свойств ортотропных композитов. Эффективные электроупругие свойства, определенные с помощью моделей EMT и ISC и рассчитанные МКЭ, сравнили между собой, особенно при большом объемном содержании арматуры.

Для этой цели рассмотрели четыре типа представительных объемных элементов (ПОЭ) композитов с ортотропными матрицами, армированными круглыми цилиндрическими (композит 1—3) и эллиптическими цилиндрическими (композит 1—3) волокнами, эллипсоидальными (композит 0—3) и сферическими включениями (композит 0—3). В качестве примера для анализа выбрали композит с ортотропной поливинилиденфторидной (PVDF) матрицей и арматурой из цирконат-титаната (PZT-7A).

## 1. Свойства материала

В качестве материала использовали композит PZT-7A/PVDF с электроупругими свойствами, приведенными в таблице.

PVDF — ортотропный пьезоэлектрический полимер. В зависимости от условий обработки существует пять полиморфов PVDF:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$  [27], из которых наиболее широко исследован полиморф  $\beta$ , обладающий важными свойствами: сегнето- и пьезоэлектрическими; легкостью и механической гибкостью [28]. Точно так же PZT, представляющий сегнетоэлектрическую керамику, широко используют в микроэлектромеханических системах (MEMS) в качестве датчиков и исполнительных механизмов благодаря высокому пьезоэлектрическому коэффициенту [29]. Однако в силу жесткости и хрупкости керамика подвержена случайному разрушению и ее нельзя использовать в гибкой электронике. Для устранения этого недостатка

## Свойства составляющих материалов [31]

| Свойство                    | PVDF   | PZT 7A |
|-----------------------------|--------|--------|
| $C_{11}$ , ГПа              | 3,8    | 148,0  |
| $C_{12}$ , ГПа              | 1,9    | 76,2   |
| $C_{13}$ , ГПа              | 1,0    | 74,2   |
| $C_{22}$ , ГПа              | 3,2    | 148,0  |
| $C_{23}$ , ГПа              | 0,9    | 74,2   |
| $C_{33}$ , ГПа              | 1,2    | 131,0  |
| $C_{44}$ , ГПа              | 0,7    | 25,4   |
| $C_{55}$ , ГПа              | 0,9    | 25,4   |
| $C_{66}$ , ГПа              | 0,9    | 35,9   |
| $k_{11}/k_0$                | 7,4    | 460,0  |
| $k_{22}/k_0$                | 9,3    | 460,0  |
| $k_{33}/k_0$                | 7,6    | 235,0  |
| $e_{15}$ , К/М <sup>2</sup> | 0      | 9,2    |
| $e_{24}$ , К/М <sup>2</sup> | 0      | 9,2    |
| $e_{31}$ , К/М <sup>2</sup> | 0,024  | -2,1   |
| $e_{32}$ , К/М <sup>2</sup> | 0,001  | -2,1   |
| $e_{33}$ , К/М <sup>2</sup> | -0,027 | 9,5    |

керамику можно комбинировать с полимерами для образования пьезоэлектрических полимерных композитов. PZT в сочетании с PVDF образует полимерный композит PVDF/PZT, обладающий свойствами как PZT, так и PVDF. Благодаря своим диэлектрическим и пьезоэлектрическим свойствам, а также легкости композиты PVDF/PZT используют в качестве функциональных материалов в микроустройствах [30]. Поэтому в настоящей работе для исследования выбрали композитную систему PVDF/PZT-7A с включениями разной формы: бесконечно длинными круглыми цилиндрами, бесконечно длинными эллиптическими цилиндрами, эллипсоидами и сферами (рис. 1—*a*). Полимер PVDF имеет орторомбическую симметрию, а керамика PZT-7A — гексагональную (6 мм). Оба составляющих материала поляризовали в направлении оси 3.

Рассмотрели четыре композитные системы, состоящие из ортотропных матриц и трансверсально-изотропных армирующих элементов: (i) круглых цилиндров с соотношениями  $\frac{a_1}{a_2} = 1$  и  $\frac{a_3}{a_1} = \infty$  (бесконечно длинные в направлении 3), (ii) эллиптических цилиндров с соотношениями  $\frac{a_1}{a_2} = 2$  и  $\frac{a_3}{a_1} = \infty$  (бесконечно длинные в направлении 3), (iii) эллипсоидов с соотношениями  $\frac{a_1}{a_2} = 1$  и  $\frac{a_3}{a_1} = 2$ , (iv) сфер с соотношениями  $\frac{a_1}{a_2} = 1$  и  $\frac{a_3}{a_1} = 1$ .

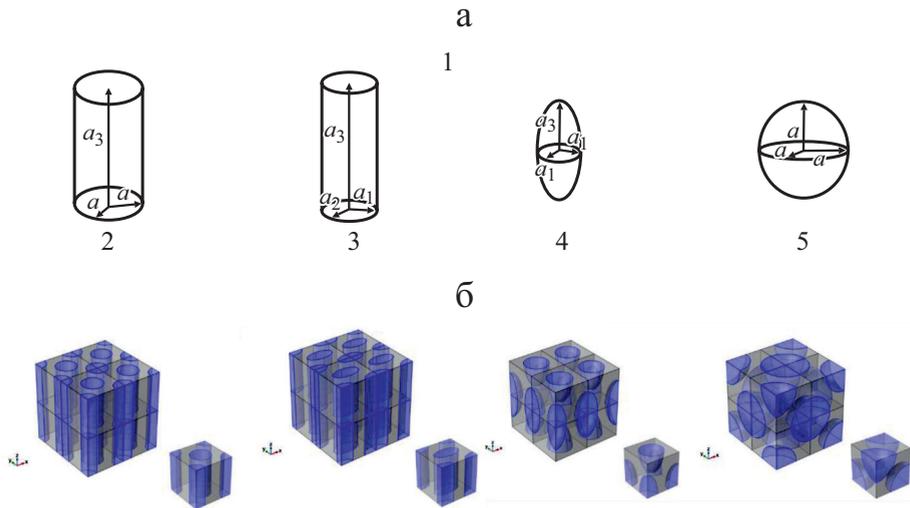


Рис. 1. Разные формы включений (1), использованные в моделях ISC и EMT (а), и восьмие части ПОЭ с конечно-элементными сетками (б): 2, 3 — круговой и эллиптический цилиндры; 4 — эллипсоид; 5 — сфера.

Здесь,  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  — полудлины главных осей арматуры, как показано на рис. 1—а.

## 2. Теория

Уравнения состояния линейного пьезоэлектрического материала запишем как

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}^E \varepsilon_{mn} - e_{nij} E_n, \quad D_i = e_{imn} \varepsilon_{mn} + k_{in}^\varepsilon E_n, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$  и  $D_i$  — компоненты тензора напряжений второго ранга и вектора электрических смещений соответственно;  $C_{ijmn}^E$ ,  $k_{in}^\varepsilon$ ,  $e_{nij}$  — компоненты тензора жесткости четвертого ранга, измеренного при постоянной напряженности электрического поля  $E$ , компоненты тензора диэлектрической проницаемости второго ранга, измеренного при постоянной деформации  $\varepsilon$ , и компоненты тензора коэффициентов пьезоэлектрической связи третьего ранга (также известные как пьезоэлектрические коэффициенты),  $\varepsilon_{mn}$  и  $E_i$  — компоненты тензора деформаций второго ранга и вектор напряженности электрического поля соответственно.

Кроме того, решение уравнения (1) требует выполнения уравнений упругого равновесия и закона электростатики Гаусса. Уравнения упругого равновесия в отсутствие массовых сил можно записать как  $\sigma_{ij,j} = 0$ , а уравнения для закона Гаусса в отсутствие свободного заряда — как  $D_{i,i} = 0$ . В уравнениях равновесия запятая в нижних индексах означает частное дифференцирование по следующей за ней координате. Компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{mn}$  связаны с компонентами вектора перемещений  $u_m$

как  $\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2}(u_{m,n} + u_{n,m})$ . Компоненты вектора напряженности электрического поля  $E_n$  связаны с электрическим потенциалом  $\phi$  как  $E_n = -\phi_{,n}$ .

Уравнения состояния можно переписать в обозначениях Барнетта и Лоте [32] с помощью преобразования

$$\begin{aligned} (11) &\rightarrow 1, (22) \rightarrow 2, (33) \rightarrow 3, \\ (23), (32) &\rightarrow 4, (13), (31) \rightarrow 5, (12), (21) \rightarrow 6, \\ (14), (41) &\rightarrow 7, (24), (42) \rightarrow 8, \text{ и } (34), (43) \rightarrow 9. \end{aligned}$$

Величины  $Z_{Mn}$ ,  $\Sigma_{iJ}$  и  $F_{iJMn}$  теперь определим как деформации—напряженность электрического поля, напряжения—электрические смещения и пьезоэлектрические или электроупругие модули соответственно:

$$Z_{Mn} = \begin{cases} \varepsilon_{mn} & \text{при } M(=m) = 1, 2, 3, \\ -E_n & M = 4, \end{cases} \quad (2)$$

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij} & \text{при } J(=j) = 1, 2, 3, \\ D_i & J = 4, \end{cases} \quad (3)$$

$$F_{iJMn} = \begin{cases} C_{ijmn}^E & J, M = 1, 2, 3, \\ e_{nij} & \text{при } J = 1, 2, 3; M = 4, \\ e_{imn} & J = 4; M = 1, 2, 3, \\ -k_{in}^\varepsilon & J = M = 4. \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом,  $F_{1122}$  преобразуется в  $F_{12} = C_{12}^E$ , а  $F_{3443}$  — в  $F_{99} = -k_{33}^\varepsilon$ . Уравнение состояния также можно записать в матричной форме как  $[\Sigma]_{9 \times 1} = [F]_{9 \times 9} [Z]_{9 \times 1}$  или в развернутом виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ C_{12}^E & C_{22}^E & C_{23}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{32} \\ C_{13}^E & C_{23}^E & C_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^E & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & -k_{11}^\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 & 0 & -k_{22}^\varepsilon & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{33}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \\ -E_1 \\ -E_2 \\ -E_3 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Определение матрицы электроупругих модулей  $F$  имеет важное значение для описания характеристик пьезоэлектрического материала. В настоящей работе для определения эффективных электроупругих свойств би-нарного однонаправленного композита использовали метод ISC. Матрицу электроупругих модулей арматуры и матрицы обозначили как  $F_r$  и  $F_m$  соответственно. Композит подвергали действию однородного упругого перемещения и однородного электрического потенциала. Микромеханические модели, используемые для определения матрицы эффективных электроупругих модулей  $F^{eff}$ , описаны в последующих разделах.

**2.1. Подход Эшелби—Мори—Танака** основан на методе среднего напряжения Мори—Танака и является модификацией эквивалентной задачи Эшелби о включениях с учетом неразбавленных концентраций включений. В [8] данный метод распространили на задачу о пьезоэлектрических включениях, а в [11] предложили матрицу эффективного электроупругого модуля в виде

$$F_{EMT}^{eff} = F_m + \nu_r (F_r - F_m) T_{EMT}^{piezo}, \quad (6)$$

где  $\nu_r$  — объемное содержание арматуры;  $T_{EMT}^{piezo}$  — тензор концентрации для пьезоэлектрического материала:

$$T_{EMT}^{piezo} = \{\mathbb{I} + S^{piezo} F_m^{-1} (F_r - F_m)\}^{-1} [\nu_m \mathbb{I} + \{\mathbb{I} + S^{piezo} F_m^{-1} (F_r - F_m)\}^{-1}]^{-1}. \quad (7)$$

Здесь  $\mathbb{I}$  — единичная матрица;  $S^{piezo}$  — пьезоэлектрический тензор Эшелби. Верхний индекс  $m$  в последующих уравнениях относится к фазе матрицы. Верхние индексы  $E$  и  $\varepsilon$ , появившиеся в уравнении (1), далее не используем. Отметим, что далее величины  $C_{ij}^m$  и  $k_{ij}^m$  будут означать  $(C_{ij}^m)^E$  и  $(k_{ij}^m)^\varepsilon$  соответственно. Следовательно, постоянные жесткости  $C_{ij}^m$  относятся к жесткости матрицы, измеренной при постоянном электрическом поле, а диэлектрические постоянные матрицы  $k_{ij}^m$  — к измеренным при постоянной деформации.

Компонентами пьезоэлектрического тензора Эшелби  $S^{piezo}$  для ортотропной матрицы с круглыми и эллиптическими цилиндрическими волокнами (композитная система 1—3) вычисляем по формулам

$$\begin{aligned} S_{1111} &= \frac{1}{4\pi} (C_{11}^m I_{1111} + C_{21}^m I_{2112}), \quad S_{1122} = \frac{1}{4\pi} (C_{12}^m I_{1111} + C_{22}^m I_{2112}), \\ S_{1133} &= \frac{1}{4\pi} (C_{13}^m I_{1111} + C_{23}^m I_{2112}), \quad S_{1143} = \frac{1}{4\pi} (e_{31}^m I_{1111} + e_{32}^m I_{2112}), \\ S_{2211} &= \frac{1}{4\pi} (C_{11}^m I_{1221} + C_{21}^m I_{2222}), \quad S_{2222} = \frac{1}{4\pi} (C_{12}^m I_{1221} + C_{22}^m I_{2222}), \\ S_{2233} &= \frac{1}{4\pi} (C_{13}^m I_{1221} + C_{23}^m I_{2222}), \quad S_{2243} = \frac{1}{4\pi} (e_{31}^m I_{1221} + e_{32}^m I_{2222}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
S_{2323} &= \frac{1}{8\pi} \left( C_{44}^m I_{2233} + e_{24}^m I_{2234} \right), \quad S_{2342} = \frac{1}{8\pi} \left( e_{24}^m I_{2233} - k_{22}^m I_{2234} \right), \\
S_{1313} &= \frac{1}{8\pi} \left( C_{44}^m I_{1133} + e_{24}^m I_{1134} \right), \quad S_{1341} = \frac{1}{8\pi} \left( e_{15}^m I_{1133} - k_{11}^m I_{1134} \right), \\
S_{1212} &= \frac{1}{8\pi} \left[ C_{66}^m (I_{1122} + I_{1212} + I_{2121} + I_{2211}) \right], \\
S_{4223} &= \frac{1}{4\pi} \left( C_{44}^m I_{2243} + e_{24}^m I_{2244} \right), \\
S_{4242} &= \frac{1}{4\pi} \left( e_{24}^m I_{2243} - k_{22}^m I_{2244} \right).
\end{aligned} \tag{8}$$

Компонентами тензора  $S^{piezo}$  для ортотропной матрицы с эллипсоидальными или сферическими включениями (компози́тная система 0—3) вычисляем как

$$\begin{aligned}
S_{1111} &= \frac{1}{4\pi} \left( C_{11}^m I_{1111} + C_{21}^m I_{2112} + C_{13}^m I_{3113} + e_{31}^m I_{3114} \right), \\
S_{1122} &= \frac{1}{4\pi} \left( C_{12}^m I_{1111} + C_{22}^m I_{2112} + C_{32}^m I_{3113} + e_{32}^m I_{3114} \right), \\
S_{1133} &= \frac{1}{4\pi} \left( C_{13}^m I_{1111} + C_{23}^m I_{2112} + C_{33}^m I_{3113} + e_{33}^m I_{3114} \right), \\
S_{1143} &= \frac{1}{4\pi} \left( e_{31}^m I_{1111} + e_{32}^m I_{2112} + e_{33}^m I_{3113} - k_{33}^m I_{3114} \right), \\
S_{2211} &= \frac{1}{4\pi} \left( C_{11}^m I_{1221} + C_{21}^m I_{2222} + C_{31}^m I_{3223} + e_{31}^m I_{3224} \right), \\
S_{2222} &= \frac{1}{4\pi} \left( C_{12}^m I_{1221} + C_{22}^m I_{2222} + C_{32}^m I_{3223} + e_{32}^m I_{3224} \right), \\
S_{2233} &= \frac{1}{4\pi} \left( C_{13}^m I_{1221} + C_{23}^m I_{2222} + C_{33}^m I_{3223} + e_{33}^m I_{3224} \right), \\
S_{2243} &= \frac{1}{4\pi} \left( e_{31}^m I_{1221} + e_{32}^m I_{2222} + e_{33}^m I_{3223} - k_{33}^m I_{3224} \right), \\
S_{3311} &= \frac{1}{4\pi} \left( C_{11}^m I_{1331} + C_{21}^m I_{2332} + C_{31}^m I_{3333} + e_{31}^m I_{3334} \right), \\
S_{3322} &= \frac{1}{4\pi} \left( C_{12}^m I_{1331} + C_{22}^m I_{2332} + C_{32}^m I_{3333} + e_{32}^m I_{3334} \right), \\
S_{3333} &= \frac{1}{4\pi} \left( C_{13}^m I_{1331} + C_{23}^m I_{2332} + C_{33}^m I_{3333} + e_{33}^m I_{3334} \right),
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 S_{3323} &= \frac{1}{4\pi} \left[ C_{44}^m (I_{2333} + I_{2332}) + e_{24}^m I_{2332} \right], \\
 S_{3343} &= \frac{1}{4\pi} \left( e_{31}^m I_{1331} + e_{32}^m I_{2332} + e_{31}^m I_{3333} - k_{33}^m I_{3334} \right), \\
 S_{2323} &= \frac{1}{8\pi} \left[ C_{44}^m (I_{2233} + I_{2323} + I_{3232} + I_{2322}) + e_{24}^m (I_{2234} + I_{2324}) \right], \\
 S_{2342} &= \frac{1}{8\pi} \left[ e_{24}^m (I_{2233} + I_{2323} + I_{3232} + I_{2322}) - k_{22}^m (I_{2234} + I_{2324}) \right], \\
 S_{1313} &= \frac{1}{8\pi} \left[ C_{55}^m (I_{1133} + I_{1313} + I_{3131} + I_{3311}) + e_{15}^m (I_{1134} + I_{1314}) \right], \\
 S_{1341} &= \frac{1}{8\pi} \left[ e_{15}^m (I_{1133} + I_{1313} + I_{3131} + I_{3311}) - k_{11}^m (I_{1134} + I_{1314}) \right], \\
 S_{1212} &= \frac{1}{8\pi} \left[ C_{66}^m (I_{1122} + I_{1212} + I_{2121} + I_{2211}) \right], \\
 S_{4113} &= \frac{1}{4\pi} \left[ C_{55}^m (I_{1143} + I_{3141}) + e_{15}^m I_{1144} \right], \\
 S_{4141} &= \frac{1}{4\pi} \left[ e_{15}^m (I_{1143} + I_{3141}) - k_{11}^m I_{1144} \right], \\
 S_{4223} &= \frac{1}{4\pi} \left[ C_{44}^m (I_{2243} + I_{3242}) + e_{24}^m I_{2244} \right], \\
 S_{4242} &= \frac{1}{4\pi} \left[ e_{24}^m (I_{2243} + I_{3242}) - k_{22}^m I_{2244} \right], \\
 S_{4311} &= \frac{1}{4\pi} \left( C_{11}^m I_{1341} + C_{21}^m I_{2342} + C_{31}^m I_{3343} + e_{31}^m I_{3344} \right), \\
 S_{4322} &= \frac{1}{4\pi} \left( C_{12}^m I_{1341} + C_{22}^m I_{2342} + C_{32}^m I_{3343} + e_{32}^m I_{3344} \right), \\
 S_{4333} &= \frac{1}{4\pi} \left( C_{13}^m I_{1341} + C_{23}^m I_{2342} + C_{33}^m I_{3343} + e_{33}^m I_{3344} \right), \\
 S_{4343} &= \frac{1}{4\pi} \left( e_{31}^m I_{1341} + e_{32}^m I_{2342} + e_{33}^m I_{3343} - k_{33}^m I_{3344} \right).
 \end{aligned} \tag{9}$$

В уравнениях (8) и (9)  $I_{inMJ}$  — компоненты функции Грина. Для композита 1—3 ненулевые компоненты  $I_{inMJ}$  равны

$$I_{11MJ} = \int_{|y|=1} y_1^2 K_{MJ}^{-1}(y_1, \alpha y_2, 0) dA, \tag{10}$$

$$I_{22MJ} = \int_{|y|=1} \alpha^2 y_2^2 K_{MJ}^{-1}(y_1, \alpha y_2, 0) dA, \tag{10}$$

$$I_{22MJ} = \int_{|y|=1} \alpha^2 y_2^2 K_{MJ}^{-1}(y_1, \alpha y_2, 0) dA.$$

С учетом  $\alpha = 1$  и  $\alpha = 0,5$  получены значения функций Грина для композитов с круглыми и эллиптическими цилиндрическими волокнами соответственно. Аналогично для композитов 0—3 ненулевые компоненты  $I_{inMJ}$  имеют вид

$$\begin{aligned} I_{11MJ} &= \int_{|y|=1} y_1^2 K_{MJ}^{-1}(y_1, \alpha y_2, \beta y_3) dA, \\ I_{22MJ} &= \int_{|y|=1} \alpha^2 y_2^2 K_{MJ}^{-1}(y_1, \alpha y_2, \beta y_3) dA, \\ I_{33MJ} &= \int_{|y|=1} \beta^2 y_3^2 K_{MJ}^{-1}(y_1, \alpha y_2, \beta y_3) dA, \\ I_{1212} &= \int_{|y|=1} \alpha y_1 y_2 K_{12}^{-1}(y_1, \alpha y_2, \beta y_3) dA, \\ I_{1313} &= \int_{|y|=1} \beta y_1 y_3 K_{13}^{-1}(y_1, \alpha y_2, \beta y_3) dA, \\ I_{1314} &= \int_{|y|=1} \beta y_1 y_3 K_{14}^{-1}(y_1, \alpha y_2, \beta y_3) dA, \\ I_{2323} &= \int_{|y|=1} \alpha \beta y_2 y_3 K_{23}^{-1}(y_1, \alpha y_2, \beta y_3) dA, \\ I_{2324} &= \int_{|y|=1} \alpha \beta y_2 y_3 K_{24}^{-1}(y_1, \alpha y_2, \beta y_3) dA. \end{aligned} \tag{11}$$

С учетом  $\alpha = 1$  и  $\beta = 1$  для сфер и  $\alpha = 1$  и  $\beta = 0,5$  для эллипсоидов получили значения функций Грина композитов, армированных сферическими и эллипсоидальными включениями соответственно.

Матрица  $K_{MJ}$  имеет вид

$$K_{MJ} = \begin{bmatrix} C_{11}^m x_1^2 + C_{66}^m x_2^2 + C_{55}^m x_3^2 & (C_{12}^m + C_{66}^m) x_1 x_2 & (C_{13}^m + C_{55}^m) x_1 x_3 & (e_{31}^m + e_{15}^m) x_1 x_3 \\ (C_{12}^m + C_{66}^m) x_1 x_2 & C_{66}^m x_1^2 + C_{22}^m x_2^2 + C_{44}^m x_3^2 & (C_{23}^m + C_{44}^m) x_2 x_3 & (e_{32}^m + e_{24}^m) x_2 x_3 \\ (C_{55}^m + C_{31}^m) x_1 x_3 & (C_{44}^m + C_{32}^m) x_2 x_3 & C_{55}^m x_1^2 + C_{44}^m x_2^2 + C_{33}^m x_3^2 & e_{15}^m x_1^2 + e_{24}^m x_2^2 + e_{33}^m x_3^2 \\ (e_{31}^m + e_{15}^m) x_1 x_3 & (e_{32}^m + e_{24}^m) x_2 x_3 & e_{15}^m x_1^2 + e_{24}^m x_2^2 + e_{33}^m x_3^2 & -k_{11}^m x_1^2 - k_{22}^m x_2^2 - k_{33}^m x_3^2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Полную производную  $I_{inMJ}$  можно найти в работе [22].

**2.2. Инкрементальный самосогласованный метод (ISC).** В данном методе арматуру вводят в матрицу поэтапно: после каждого шага полу-

ченный композит на следующем шаге выполняет роль матрицы. Количество арматуры, вводимой на каждом шаге, зависит от количества шагов и конечного объемного содержания арматуры. Таким образом, объемное содержание арматуры возрастает постепенно.

Рассмотрим двухфазный композит объемом  $V^C$ , включающим объемы арматуры  $V^r$  и матрицы  $V^m$ :

$$V^r + V^m = V^C. \quad (13)$$

Пусть  $N$  — общее количество шагов, необходимых для расчета эффективных свойств композита, а  $v_r$  — объемное содержание арматуры. На конкретном шаге  $i$  объемное содержание арматуры равно

$$v_r^i = \frac{v_r}{N} i = \Delta v_r i. \quad (14)$$

После  $i - 1$  шага общий объем композита  $V_{i-1}^C$  согласно уравнению (13) равен

$$V_{i-1}^C = \Delta v_r (i - 1) V^r + (1 - (i - 1) \Delta v_r) V^m. \quad (15)$$

Объем композита  $V_{i-1}^C$  теперь становится объемом матрицы на следующем шаге  $i$ . Для сохранения общего объема системы в нее необходимо ввести неизвестное объемное содержание арматуры  $\Delta v_i$  такое, что

$$\Delta v_i V^r + (1 - \Delta v_i) V_{i-1}^C = i \Delta v_r V^r + (1 - i \Delta v_r) V^m. \quad (16)$$

Подставив (14) в уравнение (16), получим

$$\Delta v_i = \frac{\Delta v_r}{1 - (i - 1) \Delta v_r}. \quad (17)$$

Приведенное выражение представляет собой объемную долю арматуры (приращение), которую необходимо добавлять к материалу матрицы на каждом шаге. Из приведенного обсуждения ясно, что эффективные свойства композита зависят от общего количества шагов  $N$ . На основании исследования сходимости выбрали значение  $N = 100$ .

Эффективная электроупругая матрица композита имеет вид

$$F_{SC}^{eff} = F_m + v_r (F_r - F_m) T_{SC}^{piezo}, \quad (18)$$

где  $T_{SC}^{piezo}$  — тензор концентрации пьезоэлектрического материала:

$$T_{SC}^{piezo} = [\mathbb{I} + S_{eff}^{piezo} F_0^{-1} (F_r - F_0)]^{-1}, \quad (19)$$

$F_0$  — матрица электроупругих модулей эффективной среды (зависящая от  $N$ );  $S_{eff}^{piezo}$  — пьезоэлектрический тензор Эшелби. Необходимо отме-

тить, что  $S_{eff}^{piezo}$  — функция эффективной среды и также зависит от  $F_0$ . Блок-схема алгоритма ISC приведена на рис. 2.

**2.3. Конечно-элементная модель**, используемая в настоящей работе, основана на однородных перемещениях и потенциальных граничных условиях. Рассмотрели четыре кубических ПОЭ с длиной сторон  $l = 120$  нм, с четырьмя типами однонаправленных включений (упорядоченных в направлении оси  $z$ ). Центр тяжести ПОЭ совпадает с началом координат. В силу наличия зеркальной/отражательной симметрии вдоль трех орто-

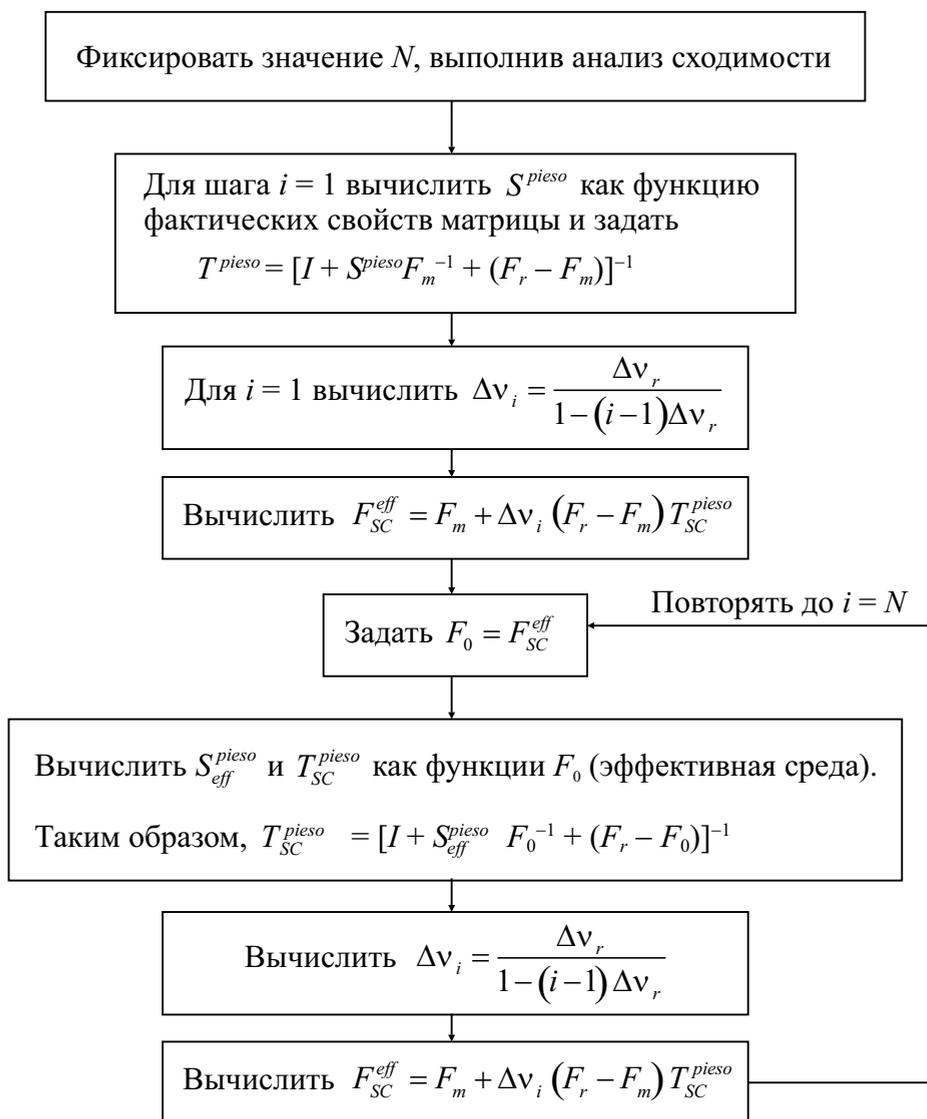


Рис. 2. Блок-схема алгоритма инкрементального самосогласованного метода.

гональных плоскостей, проходящих через начало координат ПОЭ, для анализа МКЭ использовали только одну восьмую часть их объема, как показано на рис. 1—б. 10-Узловые квадратичные тетраэдрические конечные элементы с 40 степенями свободы использовали для создания конечно-элементных сеток ПОЭ, показанных на рис. 1—б. Степени свободы в узловой точке конечного элемента включают три заданных перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  в направлениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно и один потенциал  $\phi$ . Конечно-элементный анализ выполнили с помощью программного обеспечения COMSOL Multiphysics. Поверхность с внешней нормалью вдоль оси  $+x$  обозначили как грань  $+x$ , а поверхность с внешней нормалью вдоль оси  $-x$  — как грань  $-x$ . Грани  $+y$ ,  $-y$ ,  $+z$  определили аналогичным образом. Для определения компонент эффективной жесткости  $C_{ij}^{eff}$  перемещения на внешних поверхностях использовали для создания ненулевого значения известной компоненты деформации. Другие компоненты деформации и все компоненты электрического поля принимали равными нулю. Например, для оценки компонент  $C_{11}^{eff}$  и  $C_{12}^{eff}$  небольшое положительное перемещение  $u$  приложили в направлении оси  $x$  по нормали к грани  $+x$ . Остальные компоненты перемещения считали равными нулю. Электрический потенциал  $\phi$  также принимали равным нулю на всех шести гранях. Затем вычислили усредненные по объему напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  и  $\bar{\sigma}_{22}$  и усредненную по объему приложенную деформацию  $\bar{\varepsilon}_{11}$ , а затем значения компонент эффективной жесткости вычислили как  $C_{11}^{eff} = \frac{\bar{\sigma}_{11}}{\bar{\varepsilon}_{11}}$  и  $C_{12}^{eff} = \frac{\bar{\sigma}_{22}}{\bar{\varepsilon}_{11}}$ . Для оценки компонент матрицы коэффициентов пьезоэлектрического напряжения  $e_{ij}^{eff}$  и относительной диэлектрической проницаемости матрицы  $k_{ij}^{eff} / k_0$  использовали известную составляющую напряженности электрического поля, гарантируя, что все компоненты приложенной деформации равны нулю. Например, для вычисления компонент  $e_{33}^{eff}$  и  $k_{33}^{eff} / k_0$  приняли  $u = 0$  на гранях  $+x$  и  $-x$ ;  $v = 0$  на гранях  $+y$  и  $-y$ ;  $w = 0$  на гранях  $+z$  и  $-z$ . Граничное условие нулевого электрического потенциала применили на грани  $-z$ , а к положительной грани  $+z$  приложили небольшой электрический потенциал. Затем рассчитали усредненную по объему компоненту напряжения  $\bar{\sigma}_{33}$ , усредненную по объему компоненту электрического смещения  $\bar{D}_3$  и усредненную по объему компоненту напряженности  $\bar{E}_3$  приложенного электрического поля. Затем вычислили эффективные характеристики  $e_{33}^{eff} = \frac{\bar{\sigma}_{33}}{-\bar{E}_3}$  и  $k_{33}^{eff} / k_0 = \frac{\bar{D}_3}{\bar{E}_3}$ . Выполнили анализ сходимости решения МКЭ и определили, что оптимальный размер конечно-элементной сетки 4,8. Подробности конечно-элементной процедуры и граничных условий можно найти в работе [33].

### 3. Результаты и обсуждение

Эффективные электроупругие свойства четырех типов композитов PZT-7A/PVDF, определенные с помощью моделей EMT, ISC и МКЭ, представлены как функции объемного содержания арматуры  $V_r$  (PZT-7A). Это позволило сравнить результаты микромеханических моделей EMT, ISC с рассчитанными МКЭ. Сравнение значений осевых модулей Юнга всех четырех ПОЭ представлено в разделе 3.1, а коэффициентов пьезоэлектрической деформации и относительных диэлектрических постоянных ПОЭ — в разделах 3.2 и 3.3 соответственно.

**3.1. Осевой модуль Юнга и модуль сдвига в плоскости.** Эффективный осевой модуль Юнга  $Y_3^{eff} = \frac{1}{S_{33}^{eff}}$  (в направлении  $z$  или 3) и модуль сдвига в плоскости  $G_{12}^{eff} = \frac{1}{S_{33}^{eff}}$  композитных систем 1—3 и 0—3 приведены на рис. 3—*a* и 3—*б* соответственно, где  $S_{33}^{eff}$  и  $S_{66}^{eff}$  — компоненты эффективной матрицы податливости, получаемой путем обращения матрицы эффективной жесткости.

Данные рис. 3—*a* иллюстрируют влияние объемного содержания  $V_r$  PZT-7A на величины  $Y_3^{eff}$  и  $G_{12}^{eff}$  композита 1—3 с круглыми и эллиптическими цилиндрическими включениями. Значения модуля Юнга, предсказанные моделями ISC и EMT, очень близки к рассчитанным МКЭ во всем диапазоне объемного содержания PZT-7A. Для модуля сдвига наблюдали аналогичную тенденцию до объемного содержания PZT-7A  $\sim 0,4$ . При большем объемном содержании модель ISC сильно переоценила значение  $G_{12}^{eff}$ , тогда как результаты модели EMT были близки к расчету МКЭ.

Влияние объемного содержания PZT-7A на модули  $Y_3^{eff}$  и  $G_{12}^{eff}$  композита 0—3 с эллипсоидальными и сферическими включениями отражают данные рис. 3—*б*. В обоих случаях до объемного содержания PZT-7A  $\sim 0,25$  модели ISC и EMT предсказывали аналогичные значения осевого модуля Юнга. При большем объемном содержании модель ISC превышала значения, рассчитанные с помощью МКЭ, тогда как результаты по модели EMT были намного ближе к конечно-элементным. Для модуля сдвига  $G_{12}^{eff}$  результаты EMT были ближе к конечно-элементным, чем результаты ISC.

**3.2. Постоянные пьезоэлектрической деформации**  $d_{33}^{eff}$  и  $d_{31}^{eff}$  композитных систем 1—3 и 0—3 иллюстрируют данные рис. 4. Компоненты матрицы коэффициентов пьезоэлектрической деформации вычислили с помощью матрицы эффективных коэффициентов пьезоэлектрических напряжений  $[e]_{3 \times 6}^{eff}$  и эффективной матрицы податливости  $[S]_{6 \times 6}^{eff}$ , используя уравнение  $[d]_{3 \times 6}^{eff} = [e]_{3 \times 6}^{eff} [S]_{6 \times 6}^{eff}$ . Для композитов 1—3 с круглыми и эллиптическими цилиндрическими волокнами модель ISC предсказала значения  $d_{33}^{eff}$ , очень близкие к рассчитанным МКЭ во всем диапазоне

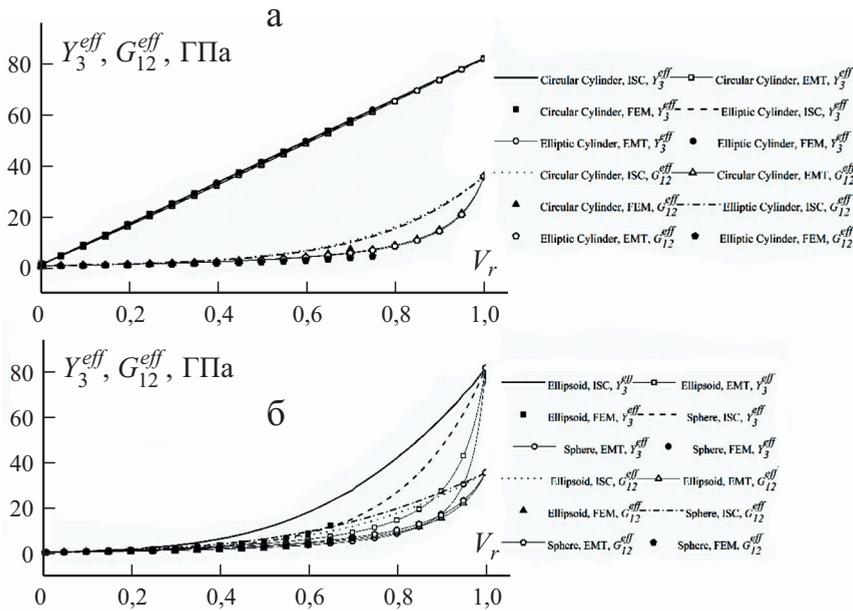


Рис. 3. Зависимость эффективного модуля Юнга  $Y_3^{eff}$  и модуля сдвига  $G_{12}^{eff}$  композитных систем 1—3 (а) и 0—3 (б) из PZT-7A/PVDF от объемного содержания PZT-7A  $V_r$ .

объемного содержания PZT-7A (рис. 4—а). Модель EMT предсказала несколько большие значения  $d_{33}^{eff}$  в том же диапазоне объемного содержания PZT-7A. Результаты, предсказанные моделями ISC и EMT для пьезоэлектрической постоянной деформации  $d_{31}^{eff}$ , близки к рассчитанным МКЭ.

Для композитов с эллипсоидальными включениями (см. рис. 4—б) пьезоэлектрические деформации, предсказанные моделями EMT и ISC, очень близки к рассчитанным МКЭ, вплоть до объемного содержания PZT-7A  $\sim 0,10$ . При большем объемном содержании модель ISC завышала значения, а модель EMT занижала их. При этом значения, предсказанные моделью EMT, ближе к конечно-элементным. Для композитов со сферическими включениями наблюдали аналогичную тенденцию.

**3.3. Диэлектрические свойства.** На рис. 5 приведены зависимости эффективных диэлектрических постоянных  $k_{33}^{eff} / k_0$  и  $k_{22}^{eff} / k_0$  композитных системы 1—3 с круглыми и эллиптическими цилиндрическими волокнами и системы 0—3 с эллипсоидальными и сферическими включениями от объемного содержания PZT-7A. Значения  $k_{33}^{eff} / k_0$  для композитов 1—3, предсказанные моделями EMT и ISC, близки к рассчитанным МКЭ во всем диапазоне объемного содержания PZT-7A. В случае  $k_{22}^{eff} / k_0$  результаты EMT лучше совпадают с конечно-элементными.

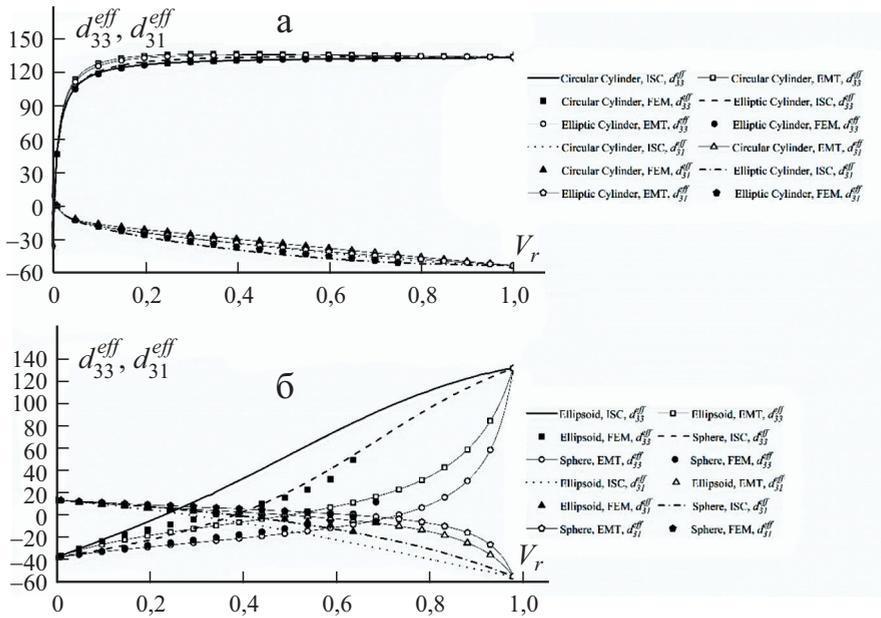


Рис. 4. Зависимость пьезоэлектрических постоянных  $d_{33}^{eff}$  и  $d_{31}^{eff}$  композитных систем 1—3 (а) и 0—3 (б) из PZT-7A/PVDF от объемного содержания PZT-7A  $V_r$ .

В случае композитной системы 0—3 с эллипсоидальными включениями (см. рис. 5—б) значения  $k_{33}^{eff} / k_0$ , предсказанные обеими моделями вплоть до объемного содержания PZT-7A 0,25, близки к рассчитанным МКЭ. При большем объемном содержании модель ISC завышает, а модель ЕМТ занижает значения  $k_{33}^{eff} / k_0$ . Аналогичную тенденцию наблюдали для композитов со сферическими включениями. Результаты, предсказанные моделью ISC, близки к результатам МКЭ вплоть до объемного содержания  $\sim 0,25$ . При большем содержании PZT-7A модель ISC завышает значения  $k_{33}^{eff} / k_0$ . Значения, предсказанные моделью ЕМТ, очень близки к результатам МКЭ вплоть до объемного содержания  $\sim 0,6$ . Аналогичную тенденцию также наблюдали при расчете  $k_{22}^{eff} / k_0$ .

Влияние формы включений и их объемного содержания на эффективный модуль Юнга и коэффициент добротности (коэффициент пьезоэлектрического заряда), определенный как  $d_h^{eff} = d_{31}^{eff} + d_{32}^{eff} + d_{33}^{eff}$ , предсказанное с помощью модели ISC для композитных систем 1—3 и 0—3, иллюстрируют данные рис. 6. Видно (см. рис. 6—а), что круглые или эллиптические цилиндрические волокна обеспечили одинаковые эффективные упругие и диэлектрические свойства композита в продольном направлении. В обоих случаях эффективный осевой модуль Юнга композитов 1—3 был линейной функцией объемного содержания волокон. Данные рис. 6—б свидетельствуют о том, что коэффициент добротности зависит не только от длины

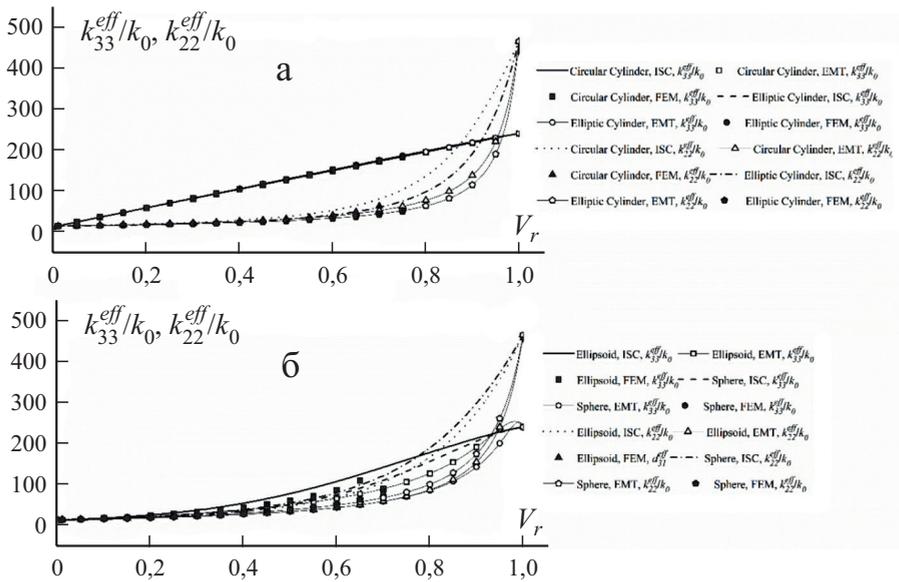


Рис. 5. Зависимость диэлектрических постоянных  $k_{33}^{eff} / k_0$  и  $k_{22}^{eff} / k_0$  композитных систем 1—3 (а) и 0—3 (б) из PZT-7A/PVDF от объемного содержания PZT-7A  $V_r$ .

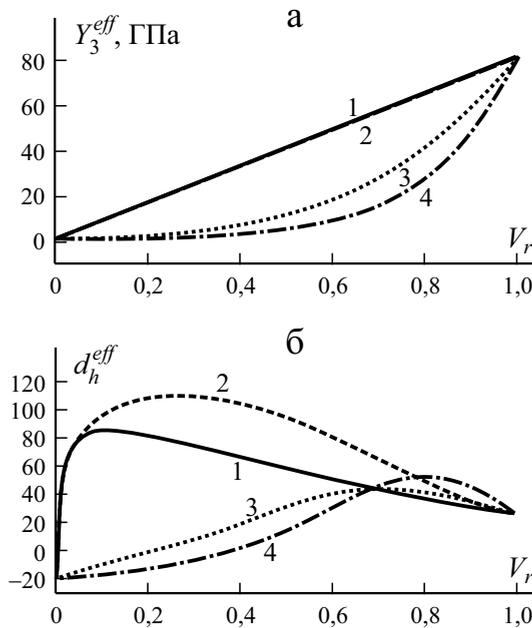


Рис. 6. Зависимость эффективного модуля Юнга  $Y_3^{eff}$  (а) и коэффициента добротности  $d_h^{eff}$  (б) композитных систем с круговыми (1); эллиптическими (2); эллипсоидальными (3); сферическими (4) включениями от объемного содержания PZT-7A  $V_r$ , рассчитанная по модели ISC.

включений в направлении поляризации, но и от их формы (поперечного сечения).

Некоторые исследователи использовали метод ISC для определения эффективных свойств композитов с изотропной либо трансверсально-изотропной матрицей и наблюдали результаты, аналогичные приведенным в настоящей работе для композитов с ортотропными матрицами. Например, в [33] для композита  $\text{CoFe}_2\text{O}_4/\text{BaTiO}_3$  (трансверсально-изотропный/трансверсально-изотропный) со сферическими включениями с помощью моделей ISC и EMT определили эффективные свойства  $e_{33}^{eff}$ ,  $e_{31}^{eff}$ ,  $k_{33}^{eff}$ , а с эллипсоидальными включениями — характеристику  $e_{33}^{eff}$ . При этом наблюдали, что в случае композита со сферическими включениями модели ISC и EMT предсказывают одинаковые значения коэффициента пьезоэлектрического напряжения  $e_{33}^{eff}$  при объемном содержании включений от 0,35 и больше. Модель ISC завышала результаты. Для коэффициента пьезоэлектрического напряжения  $e_{31}^{eff}$  модели ISC и EMT предсказали одинаковые результаты при объемном содержании от 0,3 и выше. Модель ISC занижала результаты. Для диэлектрического модуля  $k_{33}^{eff} / k_0$  модели ISC и EMT предсказали одинаковые результаты при объемном содержании от 0,3 и выше. Модель ISC завышала результаты по сравнению с моделью EMT. Результаты, полученные в настоящей работе для композитов со сферическими и эллипсоидальными включениями, следовали тенденции, наблюдаемой в [33].

Аналогичное исследование выполнили в [34], где эффективные свойства композитов эпоксид/PZT4 (изотропный/трансверсально-изотропный) определили с использованием модели EMT. Установили, что для композитов со сферическими включениями модели EMT и ISC предсказывают близкие значения  $e_{15}^{eff}$  и  $k_{33}^{eff} / k_0$  вплоть до объемного содержания PZT-7A ~ 0,3. В случае композитов с круглыми цилиндрическими волокнами модели ISC и EMT предсказали аналогичные значения компоненты жесткости  $C_{11}^{eff}$  вплоть до объемного содержания PZT-7A ~ 0,35 [34]. В настоящей работе аналогичные результаты получили вплоть до объемного содержания PZT-7A ~ 0,45, а также при вычислении характеристик  $e_{31}^{eff}$  и  $k_{33}^{eff} / k_0$ .

В [25] с помощью модели ISC определили эффективные свойства композитов эпоксид/ $\text{BaTiO}_3$  (изотропный/трансверсально-изотропный) с разным отношением сторон включений от 1 до 1000 и сравнили с результатами, полученными с помощью модели EMT. В отношении коэффициента добротности  $d_h^{eff}$  результаты, полученные в настоящей работе, следовали тенденции, наблюдаемой в [25].

Из приведенного обсуждения следует, что эффективные свойства композитов с изотропными или трансверсально-изотропными матрицами, предсказанные с помощью моделей ISC и EMT, близки при малом объемном содержании армирующих включений вплоть до ~ 0,2—0,3. При большем содержании включений модель ISC обычно предсказывала большие значения эффективных свойств, чем модель EMT. В случае композитов с

ортотропной матрицей, как в настоящей работе, этот диапазон объемного содержания шире — вплоть до 0,4, особенно в случае предсказания эффективных диэлектрических и пьезоэлектрических свойств. Наконец, можно сделать вывод о том, что почти для всех рассмотренных типов композитов эффективные свойства, предсказанные с помощью модели ЕМТ, ближе к рассчитанным МКЭ. Модель ISC в большинстве случаев завышала результаты. Основное различие модифицированной модели ЕМТ и модели ISC заключается в разных методах обработки исходной среды, в которой приложенные деформационное и электрическое поля передаются на арматуру. Модифицированная модель ЕМТ рассматривает матрицу в качестве исходной среды, а модель ISC — композит с содержанием арматуры, немного меньшим, чем в рассматриваемом композите. Математически разное обращение с исходной средой в этих моделях приводит к разным выражениям для тензора концентрации. В модифицированной модели ЕМТ тензор концентрации рассчитывается за один шаг, в то время как в модели ISC вычисляется при каждом приращении объемного содержания в ходе итерационного процесса, что обуславливает различие предсказываемых эффективных свойств. Однако нельзя окончательно утверждать, что модель ЕМТ лучше предсказывает эффективные электроупругие свойства пьезоэлектрических полимерных композитов, чем более сложная и требующая большего вычислительного ресурса модель ISC. Нужно отметить, что для большинства эффективных свойств модель ЕМТ обеспечила предсказание более близкое к результатам МКЭ, чем модель ISC, особенно при большом объемном содержании включений.

### Заключение

Инкрементальный самосогласованный метод Эшелби—Мори—Танака и метод конечных элементов использовали для оценки эффективных электроупругих свойств четырех однонаправленных композитных систем с ортотропной полимерной матрицей и четырьмя типами включений — бесконечно длинными круглыми и эллиптическими цилиндрами, эллипсоидами и сферами. В качестве примера для анализа рассматривали композитную систему PZT-7A/PVDF. Результаты, полученные с помощью аналитических моделей, сравнили с полученными с помощью конечно-элементной модели, основанной на кинематических однородных граничных условиях. Значения продольных эффективных характеристик  $Y_3^{eff}$ ,  $d_{33}^{eff}$  и  $k_{33}^{eff}$  для композитных систем 1—3, предсказанные с помощью моделей ISC и ЕМТ, очень близки к рассчитанным с помощью МКЭ во всем рассмотренном диапазоне объемного содержания арматуры. В случае некоторых поперечных свойств, таких как  $G_{12}^{eff}$ ,  $d_{31}^{eff}$  и  $k_{22}^{eff}$ , модель ЕМТ продемонстрировала лучшее предсказание для обеих композитных систем, чем модель ISC. Для композитной системы 0—3 с большим объемным содержанием арматуры модель ЕМТ предсказала лучшие свойства в однонаправленном и попереч-

ном направлениях, чем модель ISC. Сравнение результатов настоящей работы с данными других исследователей, в том числе для композитов с изотропной или трансверсально-изотропной матрицей, выявило аналогичные тенденции. Установлено, что в случае композитов с ортотропной матрицей модель ЭМТ даже при большом объемном содержании включений обеспечивает лучшие результаты, чем модель ISC.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ramadan K. S., Sameoto D., and Evoy S.* A review of piezoelectric polymers as functional materials for electromechanical transducers // *Smart Mater. Struct.* — 2014. — Vol. 23, No. 3. — P. 033001.
2. *El Kacimi A., Pauliac-Vaujour E., and Eymery J.* Flexible capacitive piezoelectric sensor with vertically aligned ultralong GaN wires // *ACS Appl. Mater. Interfaces.* — 2018. — Vol. 10, No. 5. — P. 4794—4800.
3. *Nafari A., Bowland C. C., and Sodano H. A.* Ultra-long vertically aligned lead titanate nanowire arrays for energy harvesting in extreme environments // *Nano Energy.* — 2017. — Vol. 31. — P. 168—173.
4. *Nafari A. and H. Sodano A.* Electromechanical modeling and experimental verification of a direct write nanocomposite // *Smart Mater. Struct.* — 2019. — Vol. 2, No. 4. — P. 045014.
5. *Krishna B., Chaturvedi A., Mishra N., and Das K.* Nanomechanical characterization of SU8/ZnO nanocomposite films for applications in energy-harvesting microsystems // *J. Micromech. Microeng.* — 2018. — Vol. 28, No. 11. — P. 115013.
6. *Xu S., Yeh Y., Poirier G., McAlpine M. C., Register R. A., and Yao N.* Flexible piezoelectric PMN-PT nanowire-based nanocomposite and device // *Nano Lett.* — 2013. — Vol. 13, No. 6. — P. 2393—2398.
7. *Levassort F., Hladky-Hennion A. C., Khanh H. L., Tran-Huu-Hue P., Lethiecq M., and Thi M. P.* 0-3 and 1-3 piezocomposites based on single crystal PMN-PT for transducer applications // *Adv. Appl. Ceram.* — 2010. — Vol. 109, No. 3. — P. 162—168.
8. *Deeg W. F. J.* The Analysis of Dislocation, Crack, and Inclusion Problems in Piezoelectric Solids. — Stanford Univ., 1980.
9. *Eshelby J. D. and Peierls R. E.* The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems // *Proc. R. Soc. London, Ser. Math. Phys. Sci.* — 1957. — Vol. 241, No. 1226. — P. 376—396.
10. *Mori T. and Tanaka K.* Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // *Acta Metall.* — 1973. — Vol. 21, No. 5. — P. 571—574.
11. *Dunn M. L. and Taya M.* Micromechanics predictions of the effective electroelastic moduli of piezoelectric composites // *Int. J. Solids Struct.* — 1993. — Vol. 30, No. 2. — P. 161—175.
12. *Huang J. H. and Yu J. S.* Electroelastic Eshelby tensors for an ellipsoidal piezoelectric inclusion // *Compos. Eng.* — 1994. — Vol. 4, No. 11. — P. 1169—1182.
13. *Michelitsch T. and Levin V. M.* Inclusions and inhomogeneities in electroelastic media with hexagonal symmetry // *Eur. Phys. J. B - Condens. Matter Complex Syst.* — 2000. — Vol. 14, No. 3. — P. 527—533.
14. *Mikata Y.* Determination of piezoelectric Eshelby tensor in transversely isotropic piezoelectric solids // *Int. J. Eng. Sci.* — 2000. — Vol. 38, No. 6. — P. 605—641.

15. *Mikata Y.* Explicit determination of piezoelectric Eshelby tensors for a spheroidal inclusion // *Int. J. Solids Struct.* — 2001. — Vol. 38, Nos. 40-41. — P. 7045—7063.
16. *Guinovart-Diaz R., Bravo-Castillero J., Rodriguez-Ramos R., Sabina F. J., and Martinez-Rosado R.* Overall properties of piezocomposite materials 1-3 // *Mater. Lett.* — 2001. — Vol. 48, No. 2. — P. 93—98.
17. *Berger H. et al.* Unit cell models of piezoelectric fiber composites for numerical and analytical calculation of effective properties // *Smart Mater. Struct.* — 2006. — Vol. 15, No. 2. — P. 4.
18. *Aimmanee S. and Asanuma H.* Micromechanics-based predictions of effective properties of a 1-3 piezocomposite reinforced with hollow piezoelectric fibers // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2020. — Vol. 27, No. 22. — P. 1873—1887.
19. *Tize Mha P., Maréchal P., Ntack G. E., and Charif d'Ouazzane S.* Homogenized electromechanical coefficients and effective parameters of 1-3 piezocomposites for ultrasound imaging transducers // *Phys. Lett. A.* — 2021. — Vol. 408. — P. 127492.
20. *Khan K. A., Hajeri F. A., and Khan M. A.* Micromechanical modeling approach with simplified boundary conditions to compute electromechanical properties of architected piezoelectric composites // *Smart Mater. Struct.* — 2021. — Vol. 30, No. 3. — P. 035013.
21. *Huang J. H.* An ellipsoidal inclusion or crack in orthotropic piezoelectric media // *J. Appl. Phys.* — 1995. — Vol. 78, No. 11. — P. 6491—6503.
22. *Mishra N. and Das K.* A Mori-Tanaka based micromechanical model for predicting the effective electroelastic properties of orthotropic piezoelectric composites with spherical inclusions // *SN Appl. Sci.* — 2020. — Vol. 2, No. 7. — P. 1206.
23. *Bruggeman D. A. G.* Calculation of various physical constants of heterogeneous substances. I. Dielectric constants and conductivities of mixed bodies made of isotropic substances. // *Ann. Phys.* — 1935. — Vol. 416, No. 7. — P. 636—664).
24. *Broohm A., Zattarin P., and Lipinski P.* Prediction of mechanical behaviour of inhomogeneous and anisotropic materials using an incremental scheme // *Arc. Mech.* — 2000. — Vol. 52, No. 6. — P. 949—967.
25. *Fakri N. and Azrar L.* Thermal and electroelastic behavior of piezocomposites and inhomogeneous piezoelectric materials with voids // *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* — 2010. — Vol. 21, No. 2. — P. 161—174.
26. *Vieville P., Bonnet A. S., and Lipiński P.* Modelling effective properties of composite materials using the inclusion concept. General considerations // *Arc. Mech.* — 2006. — Vol. 58, No. 3. — P. 207—239.
27. *Prest W. M. and Luca D. J.* The formation of the  $\gamma$  phase from the  $\alpha$  and  $\beta$  polymorphs of polyvinylidene fluoride // *J. Appl. Phys.* — 1978. — Vol. 49, No. 10. — P. 5042—5047.
28. *Ruan L., Yao X., Chang Y., Zhou L., Qin G., and Zhang X.* Properties and Applications of the  $\beta$  Phase Poly(vinylidene fluoride) // *Polymers.* — 2018. — Vol. 10, No. 3. — P. 228.
29. *Izyumskaya N., Alivov Y.-I., Cho S.-J., Morkoç H., Lee H., and Kang Y.-S.* Processing, structure, properties, and applications of PZT thin films // *Crit. Rev. Solid State Mater. Sci.* — 2007. — Vol. 32, Nos. 3—4. — P. 111—202.
30. *Jain A., Kumar S. J., Kumar M. R., Ganesh A. S., and Srikanth S.* PVDF-PZT composite films for transducer applications // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2014. — Vol. 21, No. 3. — P. 181—186.
31. *Odegard G. M.* Constitutive modeling of piezoelectric polymer composites // *Acta Mater.* — 2004. — Vol. 52, No. 18. — P. 5315—5330.
32. *Barnett D. M. and Lothe J.* Dislocations and line charges in anisotropic piezoelectric insulators // *Phys. Status Solidi B.* — 1975. — Vol. 67, No. 1. — P. 105—111.

33. *Bakkali and Abderrahmane*. Modélisation micromécanique des matériaux composites multifonctionnels. — Université Abdelmalek Essadi, 2013.

34. *Elouafi J., Azrar L., and Aljinaidi A. A.* Closed-form expressions for the effective moduli of heterogeneous piezoelectric materials // *Int. J. Solids Struct.* — 2015. — Vol. 52. — P. 19—32.

Поступила в редакцию 14.04.2021

Окончательный вариант поступил 20.09.2021

Received Apr. 14, 2021 (Sept. 20, 2021)

---