

*Д. Д. Захаров**

Российский университет транспорта (РУТ—МИИТ), Москва, 127994 Россия

**ТОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТОТ СРЕЗА
ПРИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИН
ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

*D. D. Zakharov**

**EXACT EQUATIONS AND FINDING THE CUT-OFF FREQUENCIES
IN FREE VIBRATIONS OF FUNCTIONALLY GRADED PLATES**

Keywords: functionally graded materials, plates, free vibrations, cut-off frequencies

Frequency equations for free vibrations of plate, where its mass density and elastic moduli depend on the transverse coordinate in an explicit form. Plate faces are supposed stress-free or rigidly clamped or are subjected to combined boundary conditions. It is shown that the respective left-hand sides of final equations can be represented by power series for entire function as a particular case of Peano series and their respective mathematical estimates are presented. Finally, it is shown that the method suggested is effective and all integration stages can be easily realized by the present-day program packages of numerical and symbolic computations. The method is efficient for calculating cut-off frequencies and is verified on numerical examples and by comparing them with results of the Wentzel–Kramer–Brillouin (WKB) method allowing one to find the asymptotics of high vibrations

Ключевые слова: материалы функционально-градиентные, пластины, колебания свободные, частоты среза

Рассмотрены в явном виде уравнения для нахождения частот среза при свободных колебаниях пластин, чья плотность и упругие модули зависят от поперечной координаты. Проанализированы случаи свободных или жестко заземленных лицевых

*Автор, с которым следует вести переписку: dd_zakh@mail.ru
Corresponding author: dd_zakh@mail.ru

поверхностей пластины и комбинации подобных условий. Показано, что соответствующие левые части частотных уравнений есть целые функции и представимы степенными рядами как частный случай рядов Пеано, приведены необходимые математические оценки. Показано, что предложенный метод эффективен и все этапы интегрирования легко реализуются современными математическими пакетами программ численных и символьных вычислений. Итоговый новый метод расчета частот среза проверен на численных примерах и в сравнении с результатами метода Вентцеля—Крамера—Бриллюэна, позволяющего находить асимптотики высоких частот.

Введение

Интенсивное изучение поверхностных волн в функционально-градиентных средах в последние десятилетия постоянно стимулируется появлением новых материалов, вопросами контроля их качества и исследованиями повреждаемости и/или несущей способности различных изделий и элементов конструкций из таких композитных материалов. В контексте задач неразрушающего контроля ультразвуковыми методами обобщенные волны Лэмба [1] — поверхностные волны в упругом слое со свободными границами, жестко заземленными границами или комбинацией таких условий на поверхностях, — оказываются крайне удобным “инструментом”. Для моделирования таких волн в слое с изменяющимися по толщине упругими и инерционными свойствами используют различные математические техники: разложения по ортогональным полиномам Лежандра [2, 3], степенные ряды [4, 5], матрицы-пропагаторы и формализмы Стро [6—8] или Коши [9], матричные ряды Пеано [8, 10] и т.д. Для получения дисперсионных кривых крайне важно знать “стартовые” частоты (частоты среза), начиная с которых появляются очередные распространяющиеся моды, а сам слой резонирует по толщине за счет процессов растяжения—сжатия или сдвига. Частоты среза можно найти, используя перечисленные методы, но возможно это сделать независимо, прямыми методами интегрирования и построением скалярных рядов Пеано [11]. Современные пакеты программ для численных и символьных вычислений (Mathcad, Mathematica, Maple и др.) позволяют это сделать быстро и эффективно. Цель работы — использование такой методики для получения “явного” вида частотных уравнений и их решений при различных однородных краевых условиях на лицевых поверхностях слоя, нахождение частот среза с любой заданной точностью и для анализа асимптотического поведения решения в области высоких частот и его численной проверки.

1. Уравнения колебаний функционально-градиентной пластины, собственные функции и частотные уравнения

1.1. Математическая постановка. Рассмотрим линейно-упругий изотропный слой, занимающий в декартовых координатах x_α ($\alpha = 1, 2, 3$) область $-\infty < x_{1,2} < +\infty$, $x_3 \in [0, H]$. Предположим зависимость материальных параметров слоя от поперечной координаты в виде заданной функции плотности $\rho(x_3)$ и параметров Ламе $\lambda(x_3)$, $\mu(x_3)$. Следуя классической постановке, также предположим, что упругие модули удовлетворяют условию положительной определенности матрицы жесткостей и непрерывно дифференцируемы по поперечной координате, а функция плотности $\rho(x_3)$ интегрируема по x_3 .

Зависимость процессов от времени примем в виде $\exp(-i\omega t)$ и в очевидных случаях этот множитель опускаем. Исследуемое поле перемещений \mathbf{u} связано с тензором напряжений $\underline{\underline{\sigma}}$ законом Гука ($\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера)

$$\sigma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) \quad (1)$$

и удовлетворяет уравнениям движения Ламе в тензорной форме

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

Краевые условия на лицевых поверхностях $x_3 = 0$ или $x_3 = H$ предполагаем в виде заданных перемещений или напряжений, не зависящих от продольной координаты. Тогда равенства (1) и (2) принимают вид ($x_1 \leftrightarrow x_2$, штрих означает дифференцирование по x_3)

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= (\lambda + 2\mu) u_3', \quad \sigma_{13} = \mu u_1', \\ \sigma_{33}' &= -\rho \omega^2 u_3, \quad \sigma_{13}' = -\rho \omega^2 u_1 \end{aligned} \quad (3)$$

с интегральными тождествами для собственных функций (перемещений), поляризованных в направлении x_3

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(x_3) &= \sigma_{33}|_{x_3=0} - \omega^2 \int_0^{x_3} \rho(\tilde{x}_3) u_3(\tilde{x}_3) d\tilde{x}_3, \\ u_3(x_3) &= u_3|_{x_3=0} + \sigma_{33}|_{x_3=0} \times \int_0^{x_3} \frac{d\tilde{x}_3}{\lambda(\tilde{x}_3) + 2\mu(\tilde{x}_3)} - \\ &- \omega^2 \int_0^{x_3} \frac{1}{\lambda(\tilde{x}_3) + 2\mu(\tilde{x}_3)} \left\{ \int_0^{\tilde{x}_3} \rho(\tilde{x}_3) u_3(\tilde{x}_3) d\tilde{x}_3 \right\} d\tilde{x}_3, \end{aligned} \quad (4)$$

или в направлении x_1 ($x_1 \leftrightarrow x_2$)

$$\sigma_{13}(x_3) = \sigma_{13}|_{x_3=0} - \omega^2 \int_0^{x_3} \rho(\tilde{x}_3) u_1(\tilde{x}_3) d\tilde{x}_3, \quad (5)$$

$$u_1(x_3) = u_1|_{x_3=0} + \sigma_{13}|_{x_3=0} \times \int_0^{x_3} \frac{d\tilde{x}_3}{\mu(\tilde{x}_3)} - \omega^2 \int_0^{x_3} \frac{1}{\mu(\tilde{x}_3)} \left\{ \int_0^{\tilde{x}_3} \rho(\tilde{x}_3) u_1(\tilde{x}_3) d\tilde{x}_3 \right\} d\tilde{x}_3.$$

Подставив значение $x_3 = H$ и соответствующие краевые условия на лицевых поверхностях в равенства (4) или (5), получаем уравнения для определения собственных частот слоя — условие обращения в нуль соответствующих коэффициентов.

1.2. Масштабирование и унификация. Введем в рассмотрение характерное значение масштаба упругого модуля E_0 и масштаба плотности ρ_0 с соответствующей характерной скоростью $c_0 = \sqrt{E_0/\rho_0}$. Далее полагаем, что все рассматриваемые величины и функции обезразмерены по следующим правилам:

$$z = \frac{x_3}{H}, \quad r = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad s = \frac{E_0}{\lambda + 2\mu} \quad (\text{или } s = \frac{E_0}{\mu}), \quad v = \frac{u_\alpha}{H}, \quad \tau = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{E_0}, \quad \Omega = \frac{\omega H}{c_0}. \quad (6)$$

Таким образом, используя соответствующую безразмерную функцию податливости $s(z) = \frac{E_0}{\lambda(z) + 2\mu(z)}$ или $s(z) = \frac{E_0}{\mu(z)}$, можно рассматривать унифицированное представление поля

$$\tau(z) = \tau_0 - \Omega^2 \int_0^z r(z_1) v(z_1) dz_1, \quad \tau(0) = \tau_0, \quad (7)$$

$$v(z) = v_0 + \tau_0 \int_0^z s(z_1) dz_1 - \Omega^2 \int_0^z s(z_1) \left\{ \int_0^{z_1} r(z_2) v(z_2) dz_2 \right\} dz_1, \quad v(0) = v_0,$$

где $v = \frac{u_3}{H}$, $\tau = \frac{\sigma_{33}}{E_0}$ или $v = \frac{u_1}{H}$, $\tau = \frac{\sigma_{13}}{E_0}$ соответственно. Здесь и далее v_0

и τ_0 — значения функций $v(z)$ и $\tau(z)$ при $z = 0$.

1.3. Представление основных функций, их свойства и математические оценки. Интегрируя равенства (7), получаем выражения для собственных функций

$$\tau(z) = v_0 F_1(z, \Omega) + \tau_0 F_2(z, \Omega), \quad v(z) = v_0 G_1(z, \Omega) + \tau_0 G_2(z, \Omega), \quad (8)$$

где

$$F_1(z, \Omega) = -\Omega \times \left\{ \Omega I_{r, sr}^{(0)} - \Omega^3 I_{r, sr}^{(1)} + \Omega^5 I_{r, sr}^{(2)} - \Omega^7 I_{r, sr}^{(3)} + \dots \right\}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 F_2(z, \Omega) &= 1 - \Omega^2 I_{rs}^{(1)} + \Omega^4 I_{rs}^{(2)} - \Omega^6 I_{rs}^{(3)} + \Omega^8 I_{rs}^{(4)} + \dots, \\
 G_1(z, \Omega) &= 1 - \Omega^2 I_{sr}^{(1)} + \Omega^4 I_{sr}^{(2)} - \Omega^6 I_{sr}^{(3)} + \Omega^8 I_{sr}^{(4)} + \dots, \\
 G_2(z, \Omega) &= I_{s,rs}^{(0)} - \Omega^2 I_{s,rs}^{(1)} + \Omega^4 I_{s,rs}^{(2)} - \Omega^6 I_{s,rs}^{(3)} + \Omega^8 I_{s,rs}^{(4)} - \dots,
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

а соответствующие компоненты рядов находим как

$$\begin{aligned}
 I_{r,sr}^{(0)}(z) &= \int_0^z r(z_1) dz_1, \quad I_{r,sr}^{(k)}(z) = \int_0^z r(z_1) I_{sr}^{(k)}(z_1) dz_1, \\
 I_{s,rs}^{(0)}(z) &= \int_0^z s(z_1) dz_1, \quad I_{s,rs}^{(k)}(z) = \int_0^z s(z_1) I_{rs}^{(k)}(z_1) dz_1, \\
 I_{sr}^{(1)}(z) &= \int_0^z s(z_1) \left\{ \int_0^{z_1} r(z_2) dz_2 \right\} dz_1, \\
 I_{sr}^{(k+1)}(z) &= \int_0^z s(z_1) \left\{ \int_0^{z_1} r(z_2) I_{sr}^{(k)}(z_2) dz_2 \right\} dz_1, \\
 I_{rs}^{(1)}(z) &= \int_0^z r(z_1) \left\{ \int_0^{z_1} s(z_2) dz_2 \right\} dz_1, \\
 I_{rs}^{(k+1)}(z) &= \int_0^z r(z_1) \left\{ \int_0^{z_1} s(z_2) I_{rs}^{(k)}(z_2) dz_2 \right\} dz_1.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Равенства (9), (10) задают ряды Пеано в наиболее простом, скалярном, их варианте, когда интегрируются отдельные функции, а не матрицы, и эти ряды обладают типичными свойствами [12, 13].

Очевидно, что безразмерная плотность и соответствующая податливость есть функции непрерывные и ограниченные:

$$0 < r(z) \leq r_*, \quad 0 < s(z) \leq s_*, \tag{11}$$

откуда для величин (10) сразу же следуют оценки вида

$$\begin{aligned}
 \left| I_{sr}^{(k)}(z) \right|, \left| I_{rs}^{(k)}(z) \right| &\leq \frac{(z \sqrt{r_* s_*})^{2n}}{(2n)!}, \quad \left| I_{s,rs}^{(k)}(z) \right| \leq \sqrt{\frac{s_*}{r_*}} \frac{(|z| \sqrt{r_* s_*})^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\
 \left| I_{r,sr}^{(k)}(z) \right| &\leq \sqrt{\frac{r_*}{s_*}} \frac{(|z| \sqrt{r_* s_*})^{2n+1}}{(2n+1)!}.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Это означает, что для рядов (9) остаточные суммы n -го порядка $F_{2n}(z)$, $G_{1n}(z)$ для рядов функций $F_2(z, \Omega)$, $G_1(z, \Omega)$ удовлетворяют неравенствам

$$|F_{2n}(z)|, |G_{1n}(z)| \leq \operatorname{ch}(\Omega z \sqrt{r_* s_*}) \frac{(\Omega z \sqrt{r_* s_*})^{2n+2}}{(2n+2)!}, \quad (13)$$

а остаточные суммы $F_{1n}(z)$, $G_{2n}(z)$ для рядов функций $F_1(z, \Omega)$, $G_2(z, \Omega)$ — неравенствам

$$|F_{1n}(z)| \leq \sqrt{\frac{r_*}{s_*}} \left| \Omega \times \operatorname{sh}(\Omega z \sqrt{r_* s_*}) \right| \frac{(|\Omega z| \sqrt{r_* s_*})^{2n+3}}{(2n+3)!}, \quad (14)$$

$$|G_{2n}(z)| \leq \sqrt{\frac{s_*}{r_*}} \left| \frac{\operatorname{sh}(\Omega z \sqrt{r_* s_*})}{\Omega} \right| \frac{(|\Omega z| \sqrt{r_* s_*})^{2n+3}}{(2n+3)!}. \quad (15)$$

Заметим, что оценки (13)—(15) приведены “с избытком”, поскольку ряды (9) — знакопередающиеся. Из неравенств (12)—(15) сразу же вытекает, что ряды (9) имеют бесконечный радиус сходимости ($-\infty < z < +\infty$) и при бесконечно гладких функциях плотностей и податливостей являются бесконечно дифференцируемыми. В этом случае $F_\alpha(z, \Omega)$ и $G_\alpha(z, \Omega)$ — целые функции, и для их производных также выполняются оценки, аналогичные (13)—(15).

2. Частотные уравнения для разных краевых условий и оценки точности

Предположим сначала, что лицевые поверхности пластины свободны от напряжений, т.е. $\tau_0 = 0$, $\tau(1) = \tau_1 = 0$ (но $\nu_0 \neq 0$). Отсюда получаем $\tau(z) = \nu_0 F_1(z, \Omega)$ и уравнение для нахождения частот среза в виде

$$F_1(1, \Omega) = 0. \quad (16)$$

Аналогично для случая жестко защемленных поверхностей имеем $\nu_0 = 0$, $\nu(1) = \nu_1 = 0$ (но $\tau_0 \neq 0$), откуда следует $\nu(z) = \tau_0 G_2(z, \Omega)$ и частотное уравнение

$$G_2(1, \Omega) = 0. \quad (17)$$

Если верхняя лицевая поверхность свободна, а нижняя поверхность жестко защемлена, то $\tau_1 = 0$, $\nu_0 = 0$ и $\tau(z) = \tau_0 F_2(z, \Omega)$ с частотным уравнением вида

$$F_2(1, \Omega) = 0. \quad (18)$$

Для противоположной комбинации условий имеем $\nu_1 = 0$, $\tau_0 = 0$ и $\nu(z) = \nu_0 G_1(z, \Omega)$, а частотное уравнение примет вид

$$G_1(1, \Omega) = 0. \quad (19)$$

Поскольку $0 \leq z \leq 1$ и оценки (13)—(15) содержат быстро убывающие правые части, то для любого частотного интервала $0 \leq \Omega \leq \Omega_*$ оценки позволяют найти нужное число членов в рядах (9) для вычисления функций $F_\alpha(z, \Omega)$ и $G_\alpha(z, \Omega)$ с заданной абсолютной погрешностью η . Процедура интегрирования для интегралов (10) также может быть численной и использовать для подынтегральных функций как степенные ряды, так и разложения по ортогональным полиномам (например, полиномам Чебышева) или тригонометрические ряды Фурье (возможное нарушение непрерывности периодического продолжения в отдельных точках не повлияет на значение интеграла). Все эти варианты легко реализуемы в готовом виде в большинстве математических пакетов-”решателей” (Maple, Mathematica и т.д.) и позволяют легко находить корни частотных уравнений (16)—(19) с той же погрешностью η , т.е. находить частоты среза пластины, попадающие в рассматриваемый диапазон $0 \leq \Omega \leq \Omega_*$.

3. Предельные случаи

В тривиальных случаях для материала с постоянными значениями плотности и податливости и в соответствующем масштабировании $r = s = 1$ получаем для левых частей частотных уравнений (16)—(19) равенства

$$F_1(1, \Omega) = -\Omega \times \left\{ \Omega - \frac{\Omega^3}{3!} + \frac{\Omega^5}{5!} - \dots \right\} = -\Omega \times \sin \Omega,$$

$$G_2(1, \Omega) = 1 - \frac{\Omega^2}{3!} + \frac{\Omega^4}{5!} - \dots = \frac{\sin \Omega}{\Omega}, \quad (20)$$

$$F_2(1, \Omega) = G_1(1, \Omega) = 1 - \frac{\Omega^2}{2!} + \frac{\Omega^4}{4!} - \dots = \cos \Omega.$$

Таким образом, уравнения (16)—(19) для частот среза и вид соответствующих собственных функций при этом совпадают с известными классическими случаями [1].

4. Процедура расчета частот среза, асимптотики частот и примеры численного анализа

Рассмотрим пример расчета частот среза. Выберем один из типичных вариантов построения функционально-градиентного материала из двух компонентов, плотность и упругие модули которого изменяются по законам смесей

$$\rho(x_3) = \rho_1 f_1(z) + \rho_2 f_2(z) \quad (\rho(x_3), \rho_1, \rho_2 \leftrightarrow \lambda(x_3), \lambda_1, \lambda_2; \mu(x_3), \mu_1, \mu_2), \quad (21)$$

где функция наращивания $f_1(z)$ задается, например, по степенному закону

$$f_1(z) = z^p, \quad f_2(z) = 1 - f_1(z), \quad p > 0. \quad (22)$$

В качестве базовых материалов примем по одной из разновидностей металла Ni ($\rho_1 = 8902 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_1 = 135,11 \text{ ГПа}$, $\mu_1 = 76 \text{ ГПа}$) и керамики Се

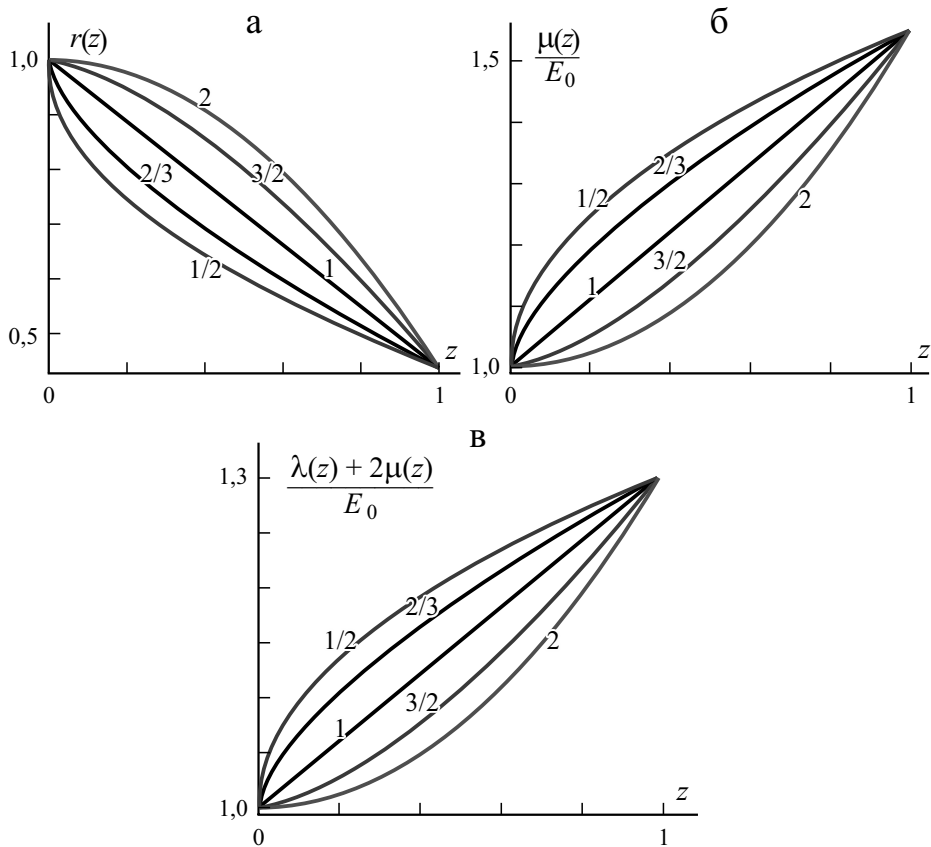


Рис. 1. Зависимость безразмерных плотностей (а) и жесткостей (б, в) от толщиной координаты при разных значениях p (цифры у кривых).

($\rho_2 = 3900$ кг/м³, $\lambda_2 = 138$ ГПа, $\mu_2 = 118$ ГПа). Для параметра p примем возможные значения $p = 1/2, 2/3, 1, 3/2, 2$.

4.1. Алгоритм расчета. Процедура расчета следует из результатов п. 1.3.

1) Задаем интервал частот. Для иллюстрации метода достаточно найти 10—12 первых резонансных частот.

2) Задавая погрешность η (далее полагаем $\eta = 10^{-10}$), находим значение номера n_0 , начиная с которого правые части в неравенствах (13)—(15) меньше η .

3) Находим интегралы вида $I_{sr}^{(k)}(z)$, $I_{r,sr}^{(k)}(z)$, $I_{rs}^{(k)}(z)$, $I_{s,rs}^{(k)}(z)$ в выражениях (10) для $k = 1, 2, \dots, n_0$ в разложениях (9). Для функций (22) удобно интегрировать степенные ряды для функций податливости.

4) Получаем правые части частотных уравнений (16)—(19) и находим численные значения частот среза.

4.2. Примеры численного анализа. Безразмерные плотности и жесткости в зависимости от координаты z для полученных функционально-градиентных материалов показаны на рис. 1, где приняты масштабные значения $\rho_0 = \rho_1$, $E_P = E_0 = \lambda_1 + 2\mu_1$, $E_S = E_0 = \mu_1$.

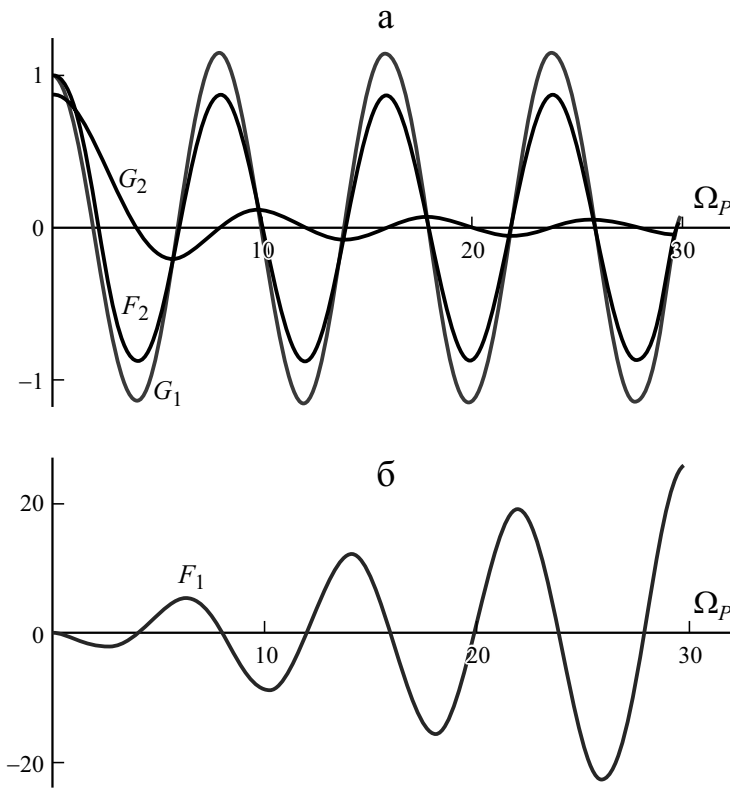


Рис. 2. Графики функций в правой части уравнений (17)—(19) (а) и уравнения (16) (б) для толщинных колебаний.

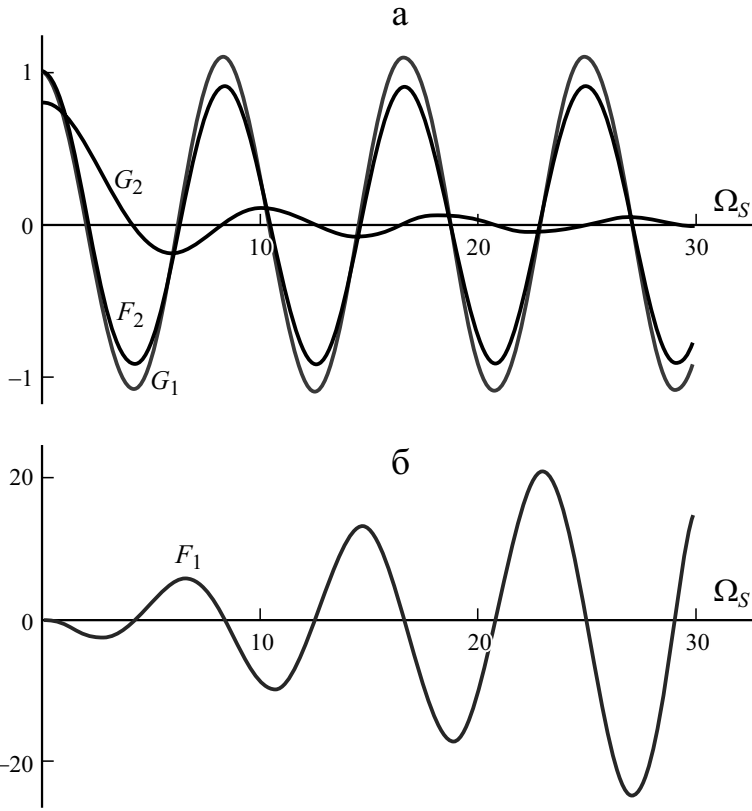


Рис. 3. Графики функций в правой части уравнений (17)—(19) (а) и уравнения (16) (б) для сдвиговых колебаний.

Поведение функций (16)—(19) для промежуточного значения параметра $p = 1$ в выражениях (22) для случая толщинных колебаний (4) проиллюстрировано на рис. 2. Значение безразмерного частотного параметра выбрано в виде $\Omega = \Omega_p = \omega H / c_p$, $c_0 = c_p = \sqrt{E_p / \rho_1}$. На рис. 3 аналогичные графики приведены для сдвиговых колебаний (5) в масштабе $\Omega = \Omega_S = \omega H / c_S$, $c_0 = c_S = \sqrt{E_S / \rho_1}$. Соответствующие безразмерные значения первых ненулевых корней уравнений (16)—(19) приведены в таблице, малозначащие цифры для краткости опущены.

Первые три безразмерные частоты среза

| Тип уравнения | 1 | | 2 | | 3 | |
|---------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| | Ω_p | Ω_S | Ω_p | Ω_S | Ω_p | Ω_S |
| (16) FF | 4,02654 | 4,21266 | 7,98231 | 8,35043 | 11,9493 | 12,4998 |
| (17) CC | 3,93171 | 4,10795 | 7,92623 | 8,28814 | 11,9101 | 12,4561 |
| (18) CF | 2,09202 | 2,14981 | 6,01532 | 6,27925 | 9,97317 | 10,4245 |
| (19) FC | 1,88551 | 2,00919 | 5,91772 | 6,20059 | 9,91066 | 10,2727 |

Несколько большее значение первого полупериода для функции $G_2(1, \Omega)$ на рис. 2— a и рис. 3— a объясняется отсутствием нуля у этой функции при $\Omega = 0$, что следует как из непосредственного разложения (9), так и из предельной формулы (20).

Как нетрудно видеть по этим результатам, поведение функций для уравнений одного типа мало отличается друг от друга качественно и масштаб однотипных значений частот среза одинаков. Аналогичное поведение наблюдается и при других значениях параметра $p = 1/2, 2/3, 1, 3/2, 2$.

4.3. Асимптотическое поведение частот среза. Сравним поведение расчетных значений с приближенными значениями частот, получаемых методом Вентцеля—Крамера—Бриллюэна [14, 15]. Для этого решение исходного дифференциального уравнения движения

$$\left(s^{-1} v' \right)' + r \Omega^2 v = 0 \tag{23}$$

ищем в виде

$$v = w(z) e^{i\Omega \xi(z)}, \quad \xi(z) = \int_0^z \sqrt{r(z_1) s(z_1)} dz_1. \tag{24}$$

Подстановка (24) в (23) приводит к равенству

$$\frac{1}{i\Omega} \left(s^{-1} w' \right)' + \left[w \left(s^{-1} \xi' \right)' + 2 \left(s^{-1} \xi' \right) w' \right] = 0, \tag{25}$$

и пренебрегая в уравнении (25) членами порядка $O(\Omega^{-1})$ при $\Omega \rightarrow \infty$, получаем

$$w = A \cdot \left(s^{-1} r \right)^{-1/4}, \quad A = \text{const}, \tag{26}$$

откуда в силу знаковой симметрии

$$v(z) = \left[s^{-1}(z) r(z) \right]^{-1/4} \left[A_1 e^{i\Omega \xi(z)} + A_2 e^{-i\Omega \xi(z)} \right], \quad A_{1,2} = \text{const}. \tag{27}$$

Подставив приближенное решение (27) в краевое условие свободных от напряжений лицевых поверхностей $v'(0) = v'(1) = 0$, получим асимптотически точный аналог частотного уравнения (16) при $\Omega \rightarrow \infty$:

$$\text{tg}(\Omega \xi(1)) = O(\Omega^{-1}) \approx 0, \quad \Omega \xi(1) \approx \pi n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{28}$$

Аналогично для случая жестко зашумленных поверхностей $v(0) = v(1) = 0$ получаем асимптотически точный аналог уравнения (17)

$$\sin(\Omega \xi(1)) = 0, \quad \Omega \xi(1) \approx \pi n \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{29}$$

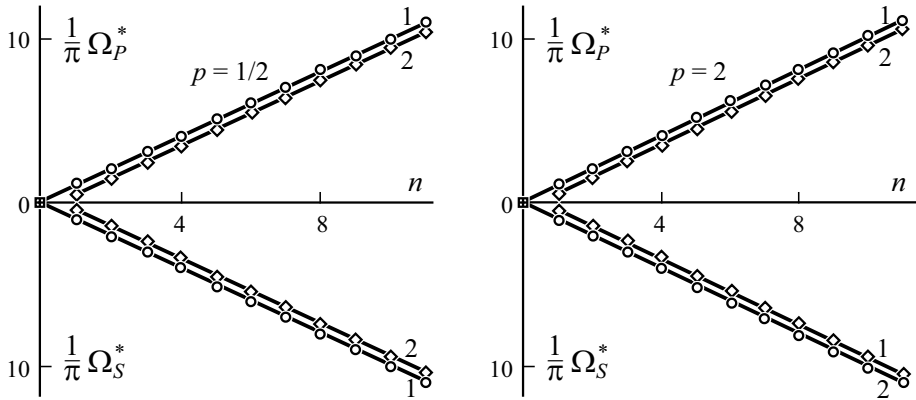


Рис. 4. Точные значения частот среза толщинных колебаний в масштабе Ω_P^* и изгибных колебаний в масштабе Ω_S^* и их асимптотики при разных краевых условиях. Пояснения в тексте.

Соответственно, если верхняя лицевая поверхность свободна, а нижняя поверхность жестко защемлена, то $v(0) = v'(1) = 0$ и для уравнения (18) получаем асимптотику

$$\text{ctg}(\Omega\xi(1)) = O(\Omega^{-1}) \approx 0, \quad \Omega\xi(1) \approx \pi/2 + \pi n \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (30)$$

Если же свободна нижняя лицевая поверхность, а жестко защемлена верхняя поверхность, то $v'(0) = v(1) = 0$ и асимптотика для уравнения (19) также примет вид (30).

Сопоставление корней частотных уравнений (16)—(19) с их асимптотиками (28)—(30) проведено на рис. 4 для толщинных и сдвиговых колебаний в масштабах частот

$$\Omega_P^* = \omega \int_0^H \sqrt{\frac{\rho(z)}{\lambda(z) + 2\mu(z)}} dz, \quad \Omega_S^* = \omega \int_0^H \sqrt{\frac{\rho(z)}{\mu(z)}} dz \quad (31)$$

для верхнего и нижнего графиков соответственно. Результаты даны для крайних значений параметров $p = 1/2$ и $p = 2$ в зависимости от номера n . Сплошные линии — асимптотики вида (28) и (29) (кривая 1) и (30) (кривая 2); квадрат — частота для случая обоих свободных поверхностей и для случая жестко закрепленной нижней поверхности и свободной верхней поверхности; кружок — частота для случая обоих жестко закрепленных поверхностей и для случая жестко закрепленной верхней поверхности и свободной нижней поверхности. Как легко видеть, в данных масштабах различие между точными и асимптотиче-

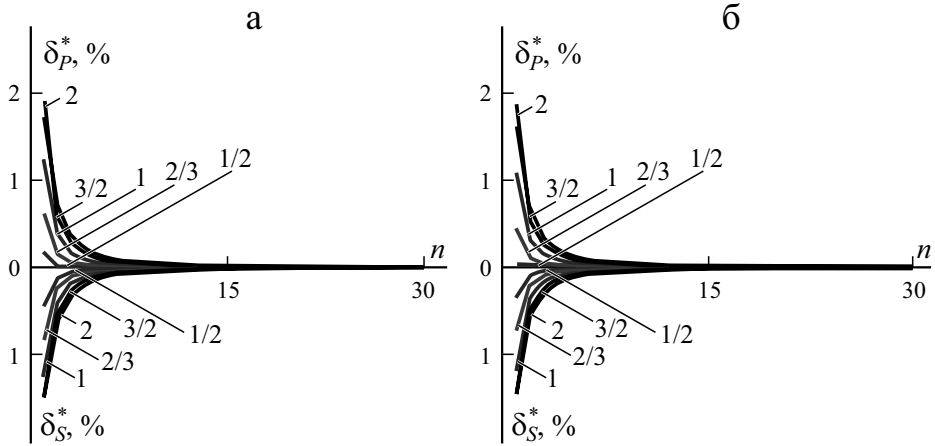


Рис. 5. Относительные погрешности δ_p^* и δ_s^* частот среза для случая свободных (а) и жестко защемленных (б) поверхностей при разных значениях p (цифры у кривых).

скими значениями невелико. Такое же качественное поведение частот среза наблюдается при $p = 2/3, 1, 3/2$ и разных краевых условиях на лицевых поверхностях.

Более детальная информация о точности асимптотик (28)—(30) приведена на графиках относительных погрешностей рис. 5, 6

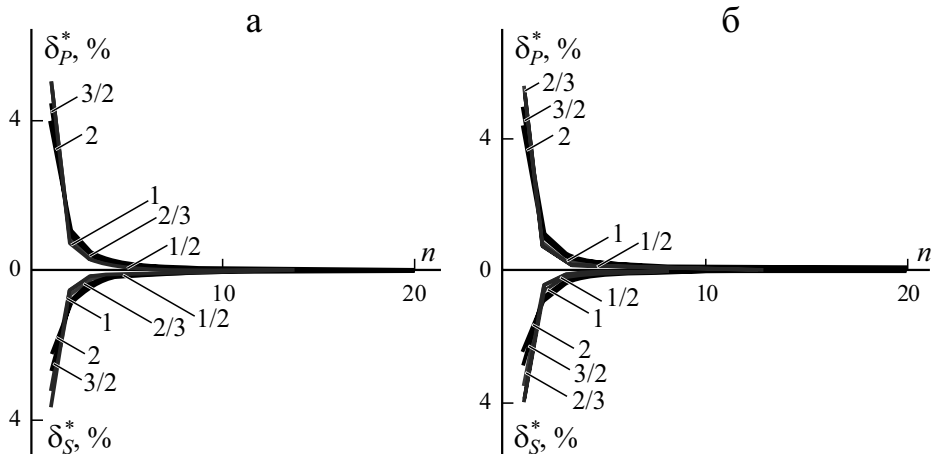


Рис. 6. То же для случая жестко защемленной нижней поверхности и свободной верхней поверхности (а) и обратного сочетания условий (б).

$$\delta_{P,S}^* = \left| 1 - \frac{\Omega_{P,S}^{as}}{\Omega_{P,S}^*} \right| \cdot 100\% \quad (32)$$

в зависимости от номера n , начиная с первой ненулевой частоты. Для большей наглядности графики даны в виде ломаных с узлами $(n, \delta_{P,S}^*(n))$.

Поведение асимптотик частот среза сходно для случая свободных и жестко заземленных поверхностей. Наибольшая погрешность (1,9 и 1,5%) имеет место для первой частоты при $p = 2$ и погрешность в доли процента при $p = 1/2$ с промежуточным расположением погрешности при $p = 1/2, 2/3, 1, 3/2, 2$. Далее погрешность быстро убывает до сотых и тысячных долей процента при $n > 3$ и $n > 8$ соответственно.

В случае, когда одна из поверхностей жестко заземлена, поведение погрешности несколько иное. Наименьшую погрешность первая частота имеет при $p = 2$, а наибольшую — при $p = 1/2$ (различие в несколько раз). Обе погрешности существенно выше, чем для свободных или жестко заземленных поверхностей (4—5%). При этом более быстрое убывание погрешностей с ростом номера n происходит при меньших значениях параметра p . В целом же соблюдается аналогичный диапазон от нескольких процентов при начальных номерах до тысячных долей процента и менее, когда номер частоты исчисляется десятками.

5. Обсуждение результатов и выводы

С помощью непосредственного применения скалярных рядов Пеано получены частотные уравнения для нахождения частот толщинных резонансов бесконечных пластин из функционально-градиентных материалов. Для каждой из рассмотренных комбинаций краевых условий на лицевых поверхностях пластины (свободные поверхности, жестко заземленные поверхности, комбинированные условия) частоты делятся на два семейства по механизму возбуждения — за счет деформаций растяжения—сжатия или деформаций сдвига. Алгоритм анализа применяется одинаково. Показано, что стандартные пакеты программ позволяют выполнять эффективное интегрирование для компонент рядов Пеано и реализовать точный расчет частот. Соответствующие ряды отвечают целым осциллирующим функциям и имеют достаточно простой вид, легко мажорируются и являются быстро сходящимися, т.е. по сути обладают всеми достоинствами явных формул для левой части уравнений частот.

Приближенные результаты, получаемые методом Вентцеля—Крамера—Бриллюэна [14], позволяют находить асимптотики для высоких частот. Асимптотики отвечают тем частотам, на которых по толщине пластины укладывается целое число полувольт с эффективными зна-

чениями медленностей (величин, обратных к скоростям), задаваемых интегралами от параметров среды:

$$\left(c_P^*\right)^{-1} = \frac{1}{H} \int_0^H \sqrt{\frac{\rho(z)}{\lambda(z)+2\mu(z)}} dz, \quad \left(c_S^*\right)^{-1} = \frac{1}{H} \int_0^H \sqrt{\frac{\rho(z)}{\mu(z)}} dz. \quad (33)$$

Сравнение численных результатов с асимптотиками в каждом из частотных семейств для эффективных скоростей c_P^* и c_S^* (33) показывает хорошее согласование с 4—5-й частоты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Graff K. F.* Wave motion in elastic solids. — NY.: Dover publ., 1975. — 682 p.
2. *Lefebvre J. E., Zhang, V., Gzalet J., Gryba T. Sadaune, V.* Acoustic wave propagation in continuous functionally graded plates: An extension of the Legendre polynomial approach // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. — 2001. — Vol. 48. — P. 1332—1340.
3. *Yan Lyu, Jianbo Zhang, Guorong Song, Mingkun Liu, Bin Wu, Cunfu He.* The dispersion curves and wave structures of lamb waves in functionally graded plate: Theoretical and simulation analysis // AIP Conf. Proc. 2102. — 2019. — 050020.
4. *Cao X., Jin F., Jeon I., Lu T. J.* Propagation of Love waves in a functionally graded piezoelectric material (FGPM) layered composite system // Int. J. Solids Struct. — 2009. — Vol. 46. — P. 4123—4132.
5. *Cao X. S., Jin F., Jeon I.* Calculation of propagation properties of Lamb waves in a functionally graded material (FGM) plate by power series technique // NDT&E Int. — 2011. — Vol. 44. — P. 84—92.
6. *Vlasie V., Rousseau M.* Guided modes in a plane elastic layer with gradually continuous acoustic properties // NDT&E Int. — 2004. — Vol. 37. — P. 633—644.
7. *Kieczynski P., Szalewski M., Balcerzak A., Wieja K.* Propagation of ultrasonic Love waves in nonhomogeneous elastic functionally graded materials // Ultrasonics. — 2016. — Vol. 65. — P. 220—227.
8. *Shuvalov A. L., LeClezio E., Feuillard G.* The state-vector formalism and the Peano-series solution for modelling guided waves in functionally graded anisotropic piezoelectric plates // Int. J. Eng. Sci. — 2008 — Vol. 46. — P. 929—947.
9. *Kuznetsov S. V.* Closed form analytical solution for dispersion of Lamb waves in FG plates // Wave Motion. — 2019. — Vol. 84. — P. 1—7.
10. *Amor M. B., Ghozlen M. H. B.* Lamb waves propagation in functionally graded piezoelectric materials by Peano-series method // Ultrasonics. — 2015. — Vol. 55. — P. 10—14.
11. *Peano G.* Integration par series des equations differentielles lineaires // Math. Ann. — 1888. — Vol. 32. — P. 450—456.
12. *Гантмахер Ф. П.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 575 с.
13. *Улитин В. В.* Ряд Пеано и матрицанты при решении прикладных задач. — СПб.: Изд-во “Парк Ком”, 2012. — 164 с.

14. *Olver F. W. J.* Asymptotics and Special Functions, — N.Y.: Academic Press, 1974. — 584 p.

15. *Cao X, Jin F, Jeon I.* Characterization of the variation of the material properties in a freestanding inhomogeneous thin film // *Phys. Lett. A.* — 2010. — Vol. 375. — P. 220—224.

Поступила в редакцию 02.02.2022

Окончательный вариант поступил 20.06.2022

Received Feb. 2, 2022 (June 20, 2022)
