

М. Дж. Хошгофтар^{а}, М. Карими^а, С. Сейфури^б*

^аDepartment of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Arak University, Arak 38156-88349, Iran

^бDepartment of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Iran

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ИЗГИБА ПЛАСТИН ИЗ СЛОИСТОГО КОМПОЗИТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УТОЧНЕННОЙ ЗИГЗАГООБРАЗНОЙ ТЕОРИИ¹

M. J. Khoshgoftar^{}, M. Karimi, and S. Seifoori*

NONLINEAR BENDING ANALYSIS OF A LAMINATED COMPOSITE PLATE USING A REFINED ZIG-ZAG THEORY

Keywords: zig-zag theory, laminated composites, nonlinear analysis, shear-deformation theory

A modified zig-zag theory was used to investigate the bending behavior of composite plates and sandwich structures. The theory is based on the first-order shear-deformation theory on some piecewise linear functions for in-plane displacements. This theory does not depend on the shear correction factor and can be applied to various engineering problems associated with the structural dynamics. The nonlinear strain terms in the von Kármán compatibility equation were taken into account to calculate accurate results at large deformation. The governing equations and associated boundary conditions were derived using the principle of virtual work. The calculated numerical results are compared with those of other theories, and an excellent agreement between them was found. The figures and tables presented illustrate the superiority of the model considered in predicting the stress and displacement fields. The model proposed is applicable to nonlinear problems with large deflections.

Ключевые слова: теория зигзагообразная, композиты слоистые, анализ нелинейный, теория деформирования сдвигового

*Автор, с которым следует вести переписку: mj.khoshgoftar@gmail.com, m-khoshgoftar@araku.ac.ir
Corresponding author: mj.khoshgoftar@gmail.com, m-khoshgoftar@araku.ac.ir

¹Перевод с англ.

Для исследования изгибного поведения композитных пластин и сэндвич-конструкций использована модифицированная зигзагообразная теория, основанная на теории сдвигового деформирования первого порядка для некоторых кусочно-линейных функций перемещений в плоскости. Эта теория не зависит от коэффициента коррекции на сдвиг и может быть применена к разным инженерным задачам, связанным с динамикой конструкций. Для получения точных результатов при больших деформациях в уравнении совместности фон Кармана учтены члены нелинейной деформации. Определяющие уравнения и связанные с ними граничные условия получены с помощью принципа виртуальной работы. Численные результаты сопоставлены с результатами других теорий и установлено их превосходное согласование. Результаты, представленные графически и таблично, иллюстрируют превосходство рассмотренной модели при предсказании полей напряжений и перемещений. Предложенная модель применима к нелинейным задачам с большими прогибами.

Введение

В последнее время значительно расширилось использование многослойных композитов и сэндвич-материалов в разных отраслях промышленности. Некоторые преимущества этих материалов — высокая коррозионная стойкость и удельная жесткость и прочность.

Для моделирования их механического поведения разработаны разные теории. Модели, основанные на гипотезе Кирхгофа, теории сдвигового деформирования, послойные теории, моделирование методом конечных элементов (МКЭ), нелинейные и смешанные теории — некоторые их примеры. В [1] представили смешанную вариационную теорию, основанную на методе снижения размерности многослойной анизотропной пластины, и продемонстрировали возможности формулировки посредством поля перемещений. В [2] описали модифицированную смешанную вариационную формулировку уточненной нелинейной зигзагообразной теории для многослойной композитной пластины.

Существуют разные численные методы анализа конструкций, например, МКЭ, бессеточный и изогометрические методы. Последние разработаны путем объединения компьютерного и конечно-элементного анализов, что значительно снижает погрешность представления расчетной области [3]. В [4] предложили изогометрическую формулировку для линейного анализа статического изгиба многослойных композитных пластин. В [5] сформулировали конечно-элементную нелинейную зигзагообразную теорию слоистой анизотропной оболочки в предположении её поперечной нерастяжимости и обращении в нуль нормальных поперечных деформаций. Для решения определяющих уравнений толстого цилиндра конечной длины также применяли метод возмущений [6, 7].

В [8] представлен геометрически нелинейный анализ балок, пластин и оболочек в рамках теории сдвигового деформирования первого порядка (ТСДПП). В [9] описан динамический геометрически нелинейный анализ композитных и многослойных пластин, основанный на теории высокого порядка, учитывающей реалистичное изменение плоскостных и поперечных перемещений по толщине. Представлен нелинейный динамический анализ и учтена геометрическая нелинейность. В [10, 11] разработали нелинейную электромеханически связанную зигзагообразную теорию для гибридных пьезоэлектрических пластин с учетом геометрической нелинейности фон Кармана и определили потери устойчивости пластин из симметричных слоистых композитов.

Классические теории оболочек пренебрегают эффектами вращательной инерции и сдвиговой деформацией и переоценивают собственные частоты слоистых анизотропных и умеренно толстых пластин и оболочек. В них используют три параметра для учета деформации оболочек. В соответствии с геометрически нелинейными членами эти теории можно разделить на две группы: учитывающие только нелинейные члены типа фон Кармана (включая только нормальное перемещение) и учитывающие также нелинейные члены для двух перемещений в плоскости. Теории, учитывающие только нелинейные члены типа фон Кармана, точны только при малых перемещениях. Разработано несколько нелинейных теорий сдвигового деформирования высокого порядка для разных слоистых оболочек и пластин с учетом деформаций по толщине [12—14].

В [15] представлен нелинейный анализ изгиба свободно опертой пластины из симметричного слоистого композита, основанный на теории перемещений более высокого порядка. Для решения нелинейных определяющих уравнений использовали одномодальный подход Галеркина и метод Ньютона–Рафсона.

В [16] для анализа балок умеренной толщины из слоистых композитов представили зигзагообразную теорию первого порядка и связанную с ней конечно-элементную модель. Точность новой дискретно-слоистой конечно-элементной модели исследовали при статическом и вибрационном анализе тонких и умеренно толстых балок с расслоениями и повреждениями слоев. В [17] данную теорию модифицировали до зигзагообразной теории более высокого порядка. В [18] рассмотрели многослойную анизотропную композитную пластину с кусочно-кубическим полем перемещений и нелинейными соотношениями деформация–перемещение фон Кармана. В [19] представили нелинейную теорию третьего порядка многослойных анизотропных пологих оболочек с поврежденными поверхностями раздела, допускающую скачки перемещений в плоскости при наличии межслойного проскальзывания. В [20] для композитных и сэндвич-балок представили уточненную зигзагообразную теорию, основанную на балочной теории Тимошенко, и развили её для слоистых композитных и сэндвич-пластин [21]. В [22] описали нелинейную усовершенствованную зигзагообразную теорию, основанную на поле деформаций фон Кармана и ТСДПП. Для балок

с малым коэффициентом гибкости и толстыми лицевыми слоями, особенно в случае большого отношения жесткости лицевых слоев и сердцевины, эта теория является более точной, чем теория балок Тимошенко.

В литературе также можно найти размерно-зависимые теории [23, 24], нелокальные теории [25], модифицированные градиентные теории деформирования [26, 27] и решения теории упругости [28] для сэндвич-панелей из разных материалов, например, с мягкой сердцевиной [29, 30] и пьезоэлектрическими слоями [31, 32], а также нанопластинками типа графеновых [33].

В настоящей работе для статического анализа многослойных композитов использовали нелинейную модифицированную зигзагообразную теорию. Прикладную теорию сформулировали на основе ТСДПП и некоторых кусочно-линейных функций для перемещений в плоскости. В отличие от ТСДПП предложенная теория не зависит от коэффициента коррекции на сдвиг и применима к разным инженерным задачам, связанным с динамикой конструкций. Для получения точных результатов при больших деформациях в уравнении совместности фон Кармана учли члены нелинейной деформации. Одно из основных преимуществ, вытекающих из аналитической формы этой новой теории, — ее идеальная пригодность для конечно-элементного моделирования, где кинематические аппроксимации не должны выходить за пределы непрерывности $C0$. Более точные результаты при меньшем времени решения — основное преимущество настоящей теории.

1. Формулировка

Рассмотрим композитную пластину с N слоями. Область Ω пластины представлена на рис. 1, а ее аналитическое выражение имеет вид

$$\Omega = \{(x, y, z); -h \leq z \leq h\}. \tag{1}$$

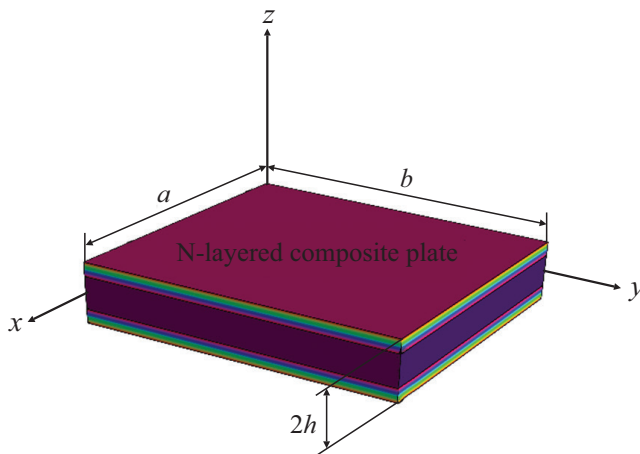


Рис. 1. Композитная пластина.

Поле перемещений пластины можно выразить с помощью модифицированной зигзагообразной теории [21], используя параметры ее срединной поверхности в виде

$$\begin{aligned} u^{(k)}(x, y, z) &\equiv u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) + \phi_x^{(k)}(z)\psi_x(x, y), \\ v^{(k)}(x, y, z) &\equiv v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) + \phi_y^{(k)}(z)\psi_y(x, y), \\ w^{(k)}(x, y, z) &\equiv w_0(x, y), \end{aligned} \quad (2)$$

где $u^{(k)}$, $v^{(k)}$, $w^{(k)}$ — перемещения произвольной точки в направлении осей x, y, z ; $u_0(x, y)$ и $v_0(x, y)$ — равномерные перемещения в плоскости в направлении осей x и y соответственно; $w_0(x, y)$ — перемещение из срединной плоскости в направлении оси z ; $\theta_x(x, y)$ и $\theta_y(x, y)$ — углы поворота поперечного сечения пластины в плоскостях xz и yz соответственно; $\phi_x^k(z)$ и $\phi_y^k(z)$ — зигзагообразные функции в k -м слое, кусочно-линейные по толщине композитной пластины. Функции $\psi_x(x, y)$ и $\psi_y(x, y)$ — пространственные амплитуды зигзагообразных перемещений, являющиеся неизвестными при анализе и вместе с остальными пятью кинематическими переменными. Теории сдвигового деформирования первого порядка (ТСДПП) соответствуют нулевые зигзагообразные функции, которые можно определить как [21]

$$\begin{aligned} \phi_x^{(k)} &\equiv \frac{1}{2}(1 - \xi^{(k)})u_{(k-1)} + \frac{1}{2}(1 + \xi^{(k)})u_{(k)}, \\ \phi_y^{(k)} &\equiv \frac{1}{2}(1 - \xi^{(k)})v_{(k-1)} + \frac{1}{2}(1 + \xi^{(k)})v_{(k)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\xi^{(k)}$ — локальная безразмерная система координат в k -м слое, определяемая как

$$\xi^{(k)} = \frac{z - z^{(k-1)}}{h^{(k)}} - 1, \quad -1 < \xi^{(k)} < 1. \quad (4)$$

Межслойные перемещения обозначены символом s_i ($s = u, v; i = k, k - 1$) и нулевым индексом для верхнего и нижнего слоев:

$$u_{(0)} = u_{(N)} = v_{(0)} = v_{(N)} = 0. \quad (5)$$

Другие поля межслойных перемещений получим, используя частичную непрерывность касательного напряжения в направлении толщины композитной пластины [20]. Деформации фон Кармана [18], учитывающие умеренно большие прогибы и малые деформации в k -м слое, связанные

с полем перемещений, определяемым модифицированными зигзагообразными функциями, можно выразить как

$$\varepsilon^{(k)} = A + zB + \phi^{(k)}D + \chi, \quad \gamma^{(k)} = R + F^{(k)}\psi, \quad (6)$$

где

$$\varepsilon^{(k)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(k)} \\ \varepsilon_{yy}^{(k)} \\ \gamma_{xy}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{x,y} \\ \psi_{y,x} \end{bmatrix},$$

$$\phi^{(k)} = \begin{bmatrix} \phi_x^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_y^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_x^k & \phi_y^k \end{bmatrix}, \quad \chi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}w_{0,x}^2 \\ \frac{1}{2}w_{0,y}^2 \\ w_{0,x}w_{0,y} \end{bmatrix}, \quad \gamma^{(k)} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^{(k)} \\ \gamma_{yz}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$R = \begin{bmatrix} w_{0,x} + \theta_x \\ w_{0,y} + \theta_y \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{bmatrix}, \quad F^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x^{(k)}(z)}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_y^{(k)}(z)}{\partial z} \end{bmatrix},$$

$(\odot)_{,\alpha} \equiv \frac{\partial(\odot)}{\partial \alpha} (\alpha = x, y)$ — частная производная относительно координаты срединной плоскости. В уравнении (6) χ — нелинейный член. Поскольку зигзагообразные функции ϕ являются линейными по координате z каждого слоя (т.е. $\frac{\partial \phi_x^{(k)}(z)}{\partial z} = cte$) и обращаются в нуль в верхнем ($z = h$) и нижнем ($z = -h$) лицевых слоях, запишем

$$\int_{-h}^h \left\{ \frac{\partial \phi_x^{(k)}(z)}{\partial z}, \frac{\partial \phi_y^{(k)}(z)}{\partial z} \right\} dz = \sum_{k=1}^N 2h^{(k)} \left\{ \frac{\partial \phi_x^{(k)}(z)}{\partial z}, \frac{\partial \phi_y^{(k)}(z)}{\partial z} \right\} = 0. \quad (8)$$

Проинтегрировав уравнение (6) по толщине пластины и используя уравнение (8), получим

$$R = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \gamma^{(k)} dz. \quad (9)$$

Уравнение (9) указывает на то, что сдвиговые деформации состоят из двух частей: одна представляет собой средний угол сдвига, совпадающий со

сдвиговой деформацией в ТСДПП, а другая включает межслойные эффекты, выраженные зигзагообразными членами. Согласно уравнениям состояния

$$\sigma^{(k)} = C^{(k)} \varepsilon^{(k)}, \quad \tau^{(k)} = Q^{(k)} \gamma^{(k)}, \quad (10)$$

где $\sigma^{(k)}$ и $\tau^{(k)}$ — напряжения; $C^{(k)}$ и $Q^{(k)}$ — компоненты матриц жесткости и приведенной жесткости:

$$\sigma^{(k)} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}^{(k)}, \quad \tau^{(k)} = \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}^{(k)}, \quad (11)$$

$$C^{(k)} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{pmatrix}^{(k)}, \quad Q^{(k)} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{pmatrix}^{(k)}.$$

В [21] определили такие зигзагообразные функции, чтобы частичная непрерывность поперечных касательных напряжений удовлетворяла следующим зигзагообразным функциям:

$$\begin{aligned} \phi_x^{(1)} &= (z+h) \left(\frac{G_1}{Q_{11}^{(1)}} - 1 \right), \\ \phi_y^{(1)} &= (z+h) \left(\frac{G_2}{Q_{22}^{(1)}} - 1 \right), \\ \phi_x^{(k)} &= (z+h) \left(\frac{G_1}{Q_{11}^{(k)}} - 1 \right) + \sum_{i=2}^k 2h^{(i-1)} \left(\frac{G_1}{Q_{11}^{(i-1)}} - \frac{G_1}{Q_{11}^{(k)}} \right) \quad (k=2,3,\dots,N), \\ \phi_y^{(k)} &= (z+h) \left(\frac{G_2}{Q_{22}^{(k)}} - 1 \right) + \sum_{i=2}^k 2h^{(i-1)} \left(\frac{G_2}{Q_{22}^{(i-1)}} - \frac{G_2}{Q_{22}^{(k)}} \right) \quad (k=2,3,\dots,N). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь G_1 и G_2 — средневзвешенные коэффициенты поперечного сдвига, вычисляемые путем наложения ограничивающих условий на зигзагообразные функции:

$$\begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \frac{h^{(k)}}{Q_{11}^{(k)}} \right)^{-1} \\ \left(\frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \frac{h^{(k)}}{Q_{22}^{(k)}} \right)^{-1} \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Из уравнений (12) и (13) следует, что зигзагообразные функции не зависят от деформированного состояния и определяются только межслойными свойствами.

2. Определяющие уравнения

Выведем определяющие уравнения для расчета напряжений композитных пластин. Согласно принципу виртуальной работы, если частица находится в равновесии, то полная виртуальная работа сил, действующих на частицу, равна нулю при любом виртуальном перемещении. Используя этот принцип, получим определяющие уравнения. Рассмотрим композитную пластину, на которую действует поперечная сила $q(x, y)$, т. е.

$$\int_{A-h}^h (\sigma^{(k)T} \delta \varepsilon^{(k)} + \tau^{(k)T} \delta \gamma^{(k)}) dz dA - \int_A q \delta w dA = 0, \quad (14)$$

где $A(z=0)$ — площадь срединной плоскости композитной пластины; δ — оператор вариации. Поперечная сила остается перпендикулярной срединной поверхности пластины, а локальное направление, нормальное к срединной поверхности, — направлению z . Подставив уравнения (6) и (10) в (14), получим, что

$$\begin{aligned} & \int_A \{ (N_x \delta u_{0,x} + M_x \delta \theta_{x,x} + M_x^\phi \delta \psi_{x,x} + w_{,x} \delta w_{,x} N_x) + \\ & + (N_y \delta v_{0,y} + M_y \delta \theta_{y,y} + M_y^\phi \delta \psi_{y,y} + w_{0,y} \delta w_{0,y} N_y) + \\ & + [N_{xy} (\delta u_{0,y} + \delta v_{0,x}) + M_{xy} (\delta \theta_{x,y} + \delta \theta_{y,x}) + M_{xy}^\phi \delta \psi_{x,y} + \\ & + M_{yx}^\phi \delta \psi_{y,x} + \delta w_{0,x} w_{0,y} N_{xy} + w_{0,x} \delta w_{0,y} N_{xy}] \}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$Q_x (\delta w_{0,x} + \delta \theta_x) + Q_x^\phi \delta \psi_x + Q_y (\delta w_{0,y} + \delta \theta_y) + Q_y^\phi \delta \psi_y - q \delta w \} dA = 0,$$

где N и M — результирующие мембранные и изгибные напряжения соответственно; Q — результирующие напряжения поперечного сдвига:

$$\begin{aligned} N_m^T & \equiv \{N_x, N_y, N_{xy}\} = \int_{-h}^h \{ \sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{yy}^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)} \} dz, \\ M_m^T & \equiv \{M_x, M_x^\phi, M_y, M_y^\phi, M_{xy}, M_{xy}^\phi, M_{yx}^\phi\} = \\ & = \int_{-h}^h \{ z \sigma_{xx}^{(k)}, \phi_x^{(k)} \sigma_{xx}^{(k)}, z \sigma_{yy}^{(k)}, \phi_y^{(k)} \sigma_{yy}^{(k)}, z \tau_{xy}^{(k)}, \phi_x^{(k)} \tau_{xy}^{(k)}, \phi_y^{(k)} \tau_{xy}^{(k)} \} dz, \end{aligned} \quad (16)$$

$$Q_s^T \equiv \{Q_y, Q_y^\phi, Q_x, Q_x^\phi\} = \int_{-h}^h \left\{ \tau_{yz}^{(k)}, \frac{\partial \phi_y^{(k)}(z)}{\partial z} \tau_{yz}^{(k)}, \tau_{xz}^{(k)}, \frac{\partial \phi_x^{(k)}(z)}{\partial z} \tau_{xz}^{(k)} \right\} dz. \quad (16)$$

Проинтегрировав уравнение (14) по частям, получим

$$\begin{aligned} & -\int_A N_{x,x} \delta u_0 dA - \int_A M_{x,x} \delta \theta_x dA - \int_A M_{x,x}^\phi \delta \psi_x dA + \int_A (N_x w_{0,x})_{,x} \delta w_0 dA - \\ & -\int_A N_{y,y} \delta v_0 dA - \int_A M_{y,y} \delta \theta_y dA - \int_A M_{y,y}^\phi \delta \psi_y dA - \int_A (N_y w_{0,y})_{,y} \delta w_0 dA - \\ & -\int_A N_{xy,y} \delta u_0 dA + \int_A N_{xy,x} \delta v_0 dA - \int_A M_{xy,y} \delta \theta_x dA - \int_A M_{xy,x} \delta \theta_y dA - \\ & -\int_A M_{xy,y}^\phi \delta \psi_x dA - \int_A M_{yx,x}^\phi \delta \psi_y dA - \int_A (N_{xy} w_{0,y})_{,x} \delta w_0 dA - \\ & -\int_A (N_{xy} w_{0,x})_{,y} \delta w_0 dA - \int_A Q_{x,x} \delta w_0 dA + \int_A Q_x \delta \theta_x dA + \int_A Q_x^\phi \delta \psi_x dA - \\ & -\int_A Q_{y,y} \delta w_0 dA + \int_A Q_y \delta \theta_y dA + \int_A Q_y^\phi \delta \psi_y dA - \int_A q \delta w_0 dA + B.C. \} dA = 0, \quad (17) \end{aligned}$$

где *B.C.* — члены, обусловленные граничным условием пластины. Упростив уравнение (17), получим определяющие уравнения (расширенная форма этих уравнений в терминах перемещений приведена в приложении А)

$$\begin{aligned} \delta u_0 : N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0, \\ \delta v_0 : N_{y,y} + N_{xy,x} &= 0, \\ \delta w_0 : Q_{x,x} + Q_{y,y} + q - N(w) &= 0, \\ \delta \theta_x : M_{x,x} + M_{xy,y} &= Q_x, \\ \delta \theta_y : M_{y,y} + M_{xy,x} &= Q_y, \\ \delta \psi_x : M_{x,x}^\phi + M_{xy,y}^\phi &= Q_x^\phi, \\ \delta \psi_y : M_{y,y}^\phi + M_{yx,x}^\phi &= Q_y^\phi, \end{aligned} \quad (18)$$

где $N(w)$ — нелинейный член, входящий в уравнение (18) для учета нелинейной деформации и определяемый как

$$N(w) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w_0}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right). \quad (19)$$

3. Процедура решения

Рассмотрим прямоугольную композитную пластину длиной a , шириной b и толщиной $2h$, состоящую из N слоев (рис. 2). Пластина свободно опирается:

$$\begin{cases} y = 0, b, 0 < x < a \rightarrow v_0 = w_0 = \theta_y = \psi_y = N_x = M_x = M_x^\phi = 0, \\ x = 0, a, 0 < y < b \rightarrow u_0 = w_0 = \theta_x = \psi_x = N_y = M_y = M_y^\phi = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Используя подход Галеркина, кинематические неизвестные, удовлетворяющие граничным условиям (20), запишем как

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\ \theta_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{xmn} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\ \psi_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{xmn} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\ v_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}, \\ \theta_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{ymn} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}, \\ \psi_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{ymn} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}, \\ w_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (21)$$

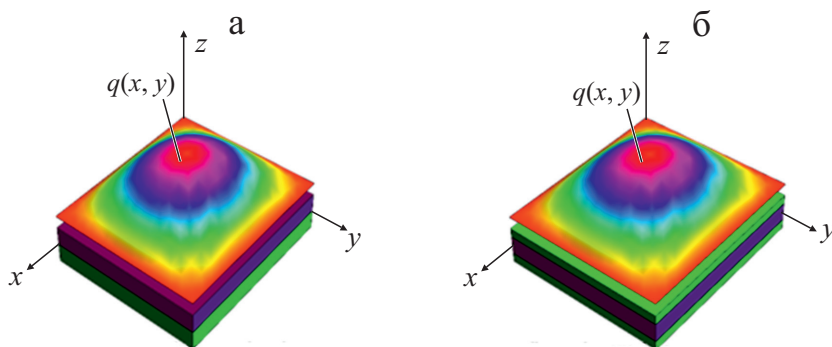


Рис. 2. Двух- (а) и трехслойная (б) композитные пластины.

где $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, \Theta_{xmn}, \Theta_{ymn}, \psi_{ymn}, \psi_{xmn}$ — неизвестные коэффициенты, вычисляемые посредством определяющих уравнений (18). Система дифференциальных уравнений (18) сводится к системе алгебраических уравнений, при решении которой находим неизвестный коэффициент уравнения (21). Распределение поперечных нагрузок $q(x, y)$ предполагаем синусоидальным:

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (22)$$

4. Результаты и обсуждение

Как показано в предыдущем разделе, исследование двух- и трехслойных композитных пластин выполняется с учетом их геометрической нелинейности. Механические свойства слоев приведены в табл. 1, а данные об укладке пластины — в табл. 2 и на рис. 2. Полученные численные результаты сравнивали с имеющимися в литературе, включая результаты уточненной зигзагообразной теории (УЗТ) [21], точное решение Пэйгано [34] и результаты ТСДПП. Достаточное количество членов ($n = m = 30$) определили путем анализа сходимости уравнений (21) с учетом максимального поперечного перемещения. Результаты ТСДПП получили с учетом влияния нелинейности, а результаты УЗТ и решения Пэйгано — без него. Поэтому результаты НУЗТ (нелинейной уточненной зигзагообразной теории) сравнили с результатами УЗТ и нелинейной ТСДПП. Для демонстрации возможности УЗТ результаты, полученные с ее помощью, также сравнили с решением Пэйгано. Основное отличие УЗТ от ЗТ (зигзагообразной теории Ди Скьювы) заключается в том, что в первой зигзагообразная функция обращается в нуль только на наружных поверхностях балки из слоистого композита, а не внутри слоев. Это важное отличие обеспечивает физически более реалистичное распределение зигзагообразной функции — она отлична от нуля по толщине пластины и, как

Табл. 1

Механические свойства материала слоев

Свойство	Ортотропный слой (эпоксидный углепластик)	Изотропный слой (полимер)
E_1	157,9 ГПа	0,1040 ГПа
$E_2 = E_3$	9,584 ГПа	0,1040 ГПа
ν_{23}	0,49	0,3
$\nu_{13} = \nu_{12}$	0,32	0,3
G_{23}	3,227 ГПа	0,04 ГПа
$G_{13} = G_{12}$	5,930 ГПа	0,04 ГПа

Структура композитных пластин

Пластина	Двухслойная	Сандвич
Структура	C–C	C–P–C
Ориентация волокон	0/90	0/0/0
Относительная толщина слоев	0,5–0,5	0,1–0,8–0,1

следствие, новая зигзагообразная функция обеспечивает вклад каждого слоя в общую деформацию. Безразмерные механические параметры определяем следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{u} &\equiv \frac{10^4 D_{11}}{q_0 a^4} u^{(k)}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \\ \bar{\sigma}_{xx} &\equiv \frac{(2h)^2}{q_0 a^2} \sigma_{xx}^{(k)}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \\ \bar{\tau}_{xz} &\equiv \frac{(2h)}{q_0 a} \tau_{xz}^{(k)}\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \\ \bar{w} &= \frac{100 D_{11}}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Проведено систематическое исследование с целью оценки надежности и точности представленной модели. На рис. 3 представлены безразмерные плоскостные перемещения двух- и трехслойных композитных пластин в

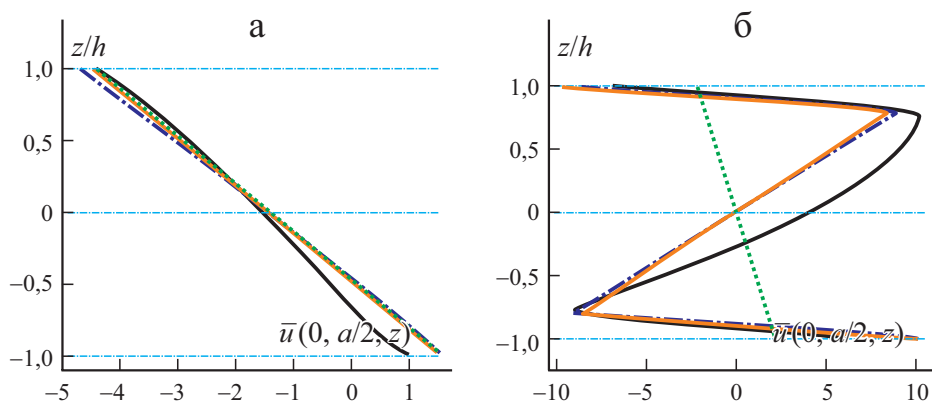


Рис. 3. Эпюры безразмерного перемещения $\bar{u}(0, a/2, z)$ по толщине z/h двух- (а) и трехслойных (б) пластин, рассчитанные согласно ТСДПП (.....), УЗТ (—), НУЗТ (— · —) и точной 3D теории упругости (—).

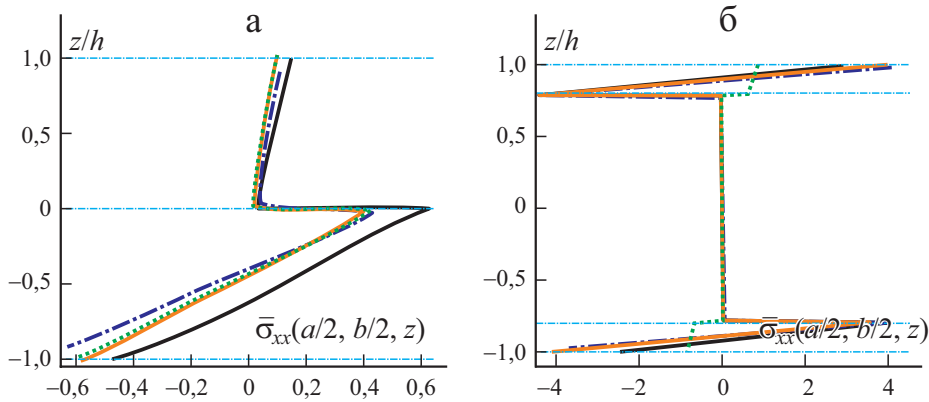


Рис. 4. Эпюры безразмерного нормального напряжения $\bar{\sigma}_x(a/2, b/2, z)$ по толщине z/h двух- (а) и трехслойных (б) пластин, рассчитанные по ТСДПП, УЗТ, НУЗТ и точной трехмерной теории упругости. Обозначения те же, что на рис. 3.

направлении x , рассчитанные по разным моделям. Модели НУЗТ и УЗТ близки друг к другу, особенно в линейных областях. Различие результатов возрастает с увеличением нагрузки в нелинейных задачах. Получаемые результаты могли бы приблизиться к точному решению, если в качестве зигзагообразной функции выбрать функции более высокого порядка. Данные рис. 3—б отчетливо демонстрирует превосходство предложенной модели НУЗТ над моделью ТСДПП. Видно, что ТСДПП оценивает все поле перемещений только с помощью одной непрерывной функции, а модель НУЗТ использует непрерывную функцию для каждого слоя. Это различие в прогнозировании функций перемещений обуславливает большую разницу численных результатов, особенно для композитных пластин с большим количеством слоев.

Данные рис. 4 иллюстрируют эпюры напряжения σ_x по координате z в центре двух- и трехслойных композитных пластин, рассчитанные по разным теориям. Видно, что предложенная модель обеспечивает лучшую точность, чем ТСДПП. Расчет согласно ТСДПП занижает плоскостное напряжение, особенно на наружных поверхностях, где имеют место наибольшие растягивающее и сжимающее напряжения, даже если использован коэффициент коррекции на сдвиг. В ТСДПП применяют линейное распределение поперечных касательных напряжений по толщине конструкции. В предложенной НУЗТ учтены кусочно-постоянные напряжения, уменьшающие погрешность в общем отклике сэндвич-конструкции. Более того, из данных рисунков следует, что учет геометрических нелинейностей предсказывает меньшие нормальные напряжения, особенно в лицевых слоях.

Эпюры поперечного сдвигового напряжения τ_{xz} по координате z в центре двух- и трехслойных композитных пластин, рассчитанные по раз-

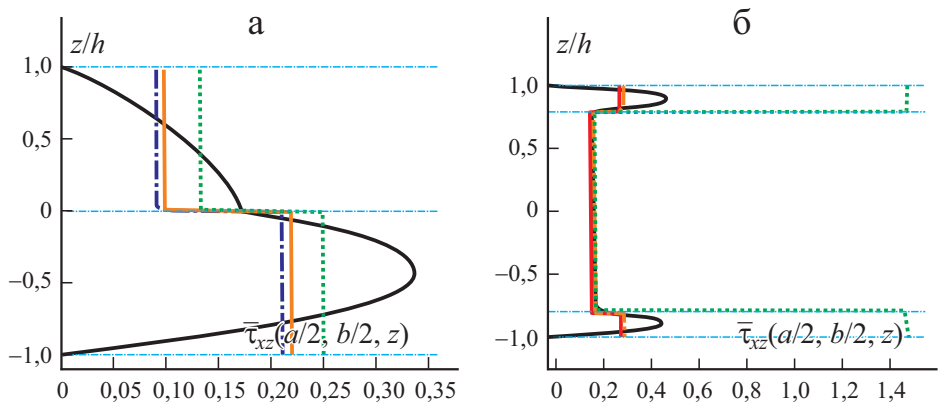


Рис. 5. Эпюры безразмерного сдвигового напряжения $\bar{\tau}_{xz}(a/2, b/2, z)$ по толщине z/h двух- (а) и трехслойных (б) пластин, рассчитанные по ТСДПП (.....); УЗТ (—); НУЗТ (— · —); точной трехмерной теории упругости (—).

ным теориям, приведены на рис. 5. Видно, что представленная модель предсказывает постоянную сдвиговую деформацию для каждого слоя и численные результаты лучше согласуются с данными точного решения. В предложенной модифицированной зигзагообразной теории в отличие от ТСДПП отсутствует непрерывность касательных напряжений, но учитывается послойная функция для каждого слоя, что обеспечивает результаты, более близкие к точному решению. Этот факт гораздо более заметен в лицевых слоях, поскольку ТСДПП предсказывает поперечное сдвиговое напряжение с ошибкой более 60%, в то время как модель НУЗТ дает лучшую оценку напряжений в сравнении с трехмерным решением теории упругости. Кроме того, видно, что неучет нелинейных деформаций приводит к большим сдвиговым деформациям. Распределение сдвиговых напряжений можно изменить, выбрав зигзагообразную функцию более высокого порядка.

Табл. 3

Безразмерные перемещения из плоскости в разных теориях сэндвич-пластин

$a/2h$	Точная	ТСДПП	ЗГ	УЗТ	НУЗТ
4	42,420	3,739	42,124	42,189	42,480
10	9,734	1,321	9,738	9,739	9,737
20	3,487	0,948	3,489	3,490	3,488
50	1,305	0,841	1,305	1,305	1,305
100	0,945	0,826	0,945	0,945	0,945
200	0,852	0,822	0,852	0,852	0,852

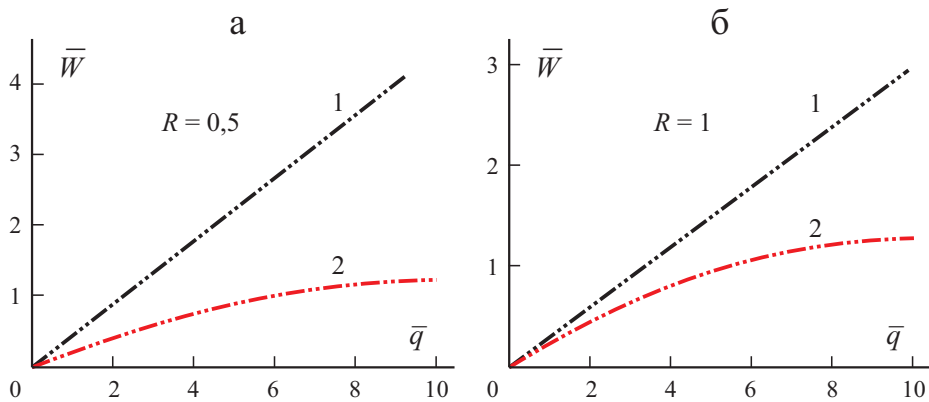


Рис. 6. Зависимость безразмерного прогиба \bar{w} от интенсивности нагрузки \bar{q} в центре прямоугольной ($R = 0,5$) (а) и квадратной ($R = 1$) (б) пластин, рассчитанные по УЗТ (1) и НУЗТ (2).

Значения безразмерных перемещений из плоскости в центре рассматриваемой сандвич-пластины, вычисленные по разным теориям, приведены в табл. 3. При увеличении отношения $a/2h$ все модели стремятся к одинаковой точности. Это связано с тем, что влияние сдвиговой деформации можно игнорировать для конструкций с малым отношением толщины пластины к длине пролета. Кроме того, видно, что нелинейные эффекты увеличили жесткость сандвич-пластины и, как следствие, значения прогиба, вычисленные с учетом нелинейности, меньше, чем при использовании других моделей.

На рис. 6 приведены зависимости безразмерного прогиба в центре прямоугольной и квадратной сандвич-пластин от интенсивности нагрузки. Видно, что учет геометрических нелинейностей более заметен при больших значениях интенсивности нагрузки, что обусловлено большей деформацией. Кроме того, наблюдали, что разница между результатами линейной и нелинейной теорий в случае прямоугольной пластины ($R = 0,5$) больше, чем квадратной ($R = 1$), т.е. учет геометрической нелинейности делает деформацию сандвич-пластины более чувствительной к отношению размеров.

Заключение

В настоящей работе выполнен статический анализ изгиба композитных пластин с использованием зигзагообразной теории. Для учета больших деформаций рассмотрены нелинейные деформации фон Кармана. Поле перемещений оценили с помощью теории сдвигового деформирования первого порядка. Для уточнения сдвиговых напряжений и межслойного поведения пластин использовали модифицированные линейные зигзагообразные функции, зависящие от свойств каждого слоя. В отличие от ТСДПП

предложенная НУЗТ не нуждается в коэффициенте коррекции на сдвиг. Определяющие и кинематические уравнения не зависят от количества слоев. Это упрощает постановку и сокращает время вычислений. Для демонстрации влияния геометрической нелинейности представлены численные результаты для свободно опертой пластины из слоистых композитов, сопоставленные с результатами ТСДПП и точного трехмерного решения теории упругости. Сравнение показало высокую точность предложенного подхода. ТСДПП оценивает все поле перемещений с использованием только одной непрерывной функции, тогда как в предложенной модели используется непрерывная функция для каждого слоя. При увеличении отношения толщины пластины к длине пролета все модели стремятся к одинаковой точности. Это обусловлено тем, что для конструкций с малым отношением толщины к пролету влияние сдвиговой деформации можно не учитывать. Выбрав зигзагообразную функцию большего порядка, можно получить более точные результаты. Предложенная модель обеспечивает высокоточные результаты при решении нелинейных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Auricchio F., Balduzzi G., Khoshgoftar M. J., Rahimi G., and Sacco E.* Enhanced modeling approach for multilayer anisotropic plates based on dimension reduction method and Hellinger–Reissner principle // *Compos. Struct.* — 2014. — Vol. 118. — P. 622—633.
2. *Fares M. and Elmarghany M. K.* A refined zig-zag nonlinear first-order shear deformation theory of composite laminated plate // *Compos. Struct.* — 2008. — Vol. 82. — P. 71—83.
3. *Gupta A. and Ghosh A.* Bending analysis of laminated and sandwich composite reissner-mindlin plates using nurbs-based isogeometric approach // *Procedia Eng.* — 2017. — Vol. 173. — P. 1334—1341.
4. *Pavan G. and Rao K. N.* Bending analysis of laminated composite plates using isogeometric collocation method // *Compos. Struct.* — 2017. — Vol. 176. — P. 715—728.
5. *Chaudhuri R. A.* A nonlinear zig-zag theory for finite element analysis of highly shear-deformable laminated anisotropic shells // *Compos. Struct.* — 2008. — Vol. 85. — P. 350—359.
6. *Khoshgoftar M. J., Mirzaali M., and Rahimi G.* Thermoelastic analysis of non-uniform pressurized functionally graded cylinder with variable thickness using first order shear deformation theory (FSDT) and perturbation method // *Chinese J. Mech. Eng.* — 2015. — Vol. 28. — P. 1149—1156.
7. *Khoshgoftar M. J., Rahimi G., and Arefi M.* Exact solution of functionally graded thick cylinder with finite length under longitudinally non-uniform pressure // *Mech. Res. Comm.* — 2013. — Vol. 51. — P. 61—66.
8. *Kreja I. and Schmidt R.* Large rotations in first-order shear deformation FE analysis of laminated shells // *Int. J. Nonlinear Mech.* — 2006. — Vol. 41. — P. 101—123.
9. *Ganapathi M., Patel B., and Makhecha D.* Nonlinear dynamic analysis of thick composite/sandwich laminates using an accurate higher-order theory // *Composites: Part B.* — 2004. — Vol. 35. — P. 345—355.
10. *Kapurja S. and Achary G.* Nonlinear zig-zag theory for electrothermomechanical buckling of piezoelectric composite and sandwich plates // *Acta Mech.* — 2006. — Vol. 184. — P. 61—76.

11. *Kapurja S. and Achary G.* Nonlinear coupled zig-zag theory for buckling of hybrid piezoelectric plates // *Compos. Struct.* — 2006. — Vol. 74. — P. 253—264.
12. *Amabili M.* A new nonlinear higher-order shear deformation theory with thickness variation for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells // *J. Sound Vibr.* — 2013. — Vol. 332. — P. 4620—4640.
13. *Amabili M.* A nonlinear higher-order thickness stretching and shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells // *Int. J. Nonlinear Mech.* — 2014. — Vol. 58. — P. 57—75.
14. *Amabili M.* Non-linearities in rotation and thickness deformation in a new third-order thickness deformation theory for static and dynamic analysis of isotropic and laminated doubly curved shells // *Int. J. Nonlinear Mech.* — 2015. — Vol. 69. — P. 109—128.
15. *Savithri S. and Varadan T.* Large deflection analysis of laminated composite plates // *Int. J. Nonlinear Mech.* — 1993. — Vol. 28. — P. 1—12.
16. *Averill R. C.* Static and dynamic response of moderately thick laminated beams with damage // *Compos. Eng.* — 1994. — Vol. 4. — P. 381—395.
17. *Averill R. and Yip Y. C.* Development of simple, robust finite elements based on refined theories for thick laminated beams // *Comput. Struct.* — 1996. — Vol. 59. — P. 529—546.
18. *Di Sciuva M.* Multilayered anisotropic plate models with continuous interlaminar stresses // *Compos. Struct.* — 1992. — Vol. 22. — P. 149—167.
19. *Di Sciuva M., Gherlone M., and Librescu L.* Implications of damaged interfaces and of other non-classical effects on the load carrying capacity of multilayered composite shallow shells // *Int. J. Nonlinear Mech.* — 2002. — Vol. 37. — P. 851—867.
20. *Tessler A., Di Sciuva M., and Gherlone M.* Refinement of Timoshenko beam theory for composite and sandwich beams using zig-zag kinematics. — NASA-TP-2007-215086, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C., 2007.
21. *Tessler A., Di Sciuva M., and Gherlone M.* Refined zig-zag theory for laminated composite and sandwich plates. — NASA/TP-2009-215561, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C., 2009.
22. *Ascione A. and Gherlone M.* Nonlinear static response analysis of sandwich beams using the refined zig-zag theory // *J. Sandwich Struct. Mater.* — 2020. — Vol. 22, No. 7. — P. 2250—2286.
23. *Shaban M. and Mazaheri H.* Size-dependent electro-static analysis of smart micro-sandwich panels with functionally graded core // *Acta Mech.* — 2021. — Vol. 232, No. 1. — P. 111—133.
24. *Arefi M., Mohammad-Rezaei Bidgoli E., and Rabczuk T.* Effect of various characteristics of graphene nanoplatelets on thermal buckling behavior of FGRC micro plate based on MCST // *Eur. J. Mech.-A/Solids.* — 2019. — Vol. 77. — P. 103802.
25. *Arefi M. and Amabili M.* A comprehensive electro-magneto-elastic buckling and bending analyses of three-layered doubly curved nanoshell, based on nonlocal three-dimensional theory // *Compos. Struct.* — 2021. — Vol. 257. — P. 113100.
26. *Arefi M., Mohammad-Rezaei Bidgoli E., and Rabczuk T.* Thermo-mechanical buckling behavior of FG GNP reinforced micro plate based on MSGT // *Thin-Walled Struct.* — 2019. — Vol. 142. — P. 444—459.
27. *Mohammad-Rezaei Bidgoli E., and Arefi M.* Free vibration analysis of micro plate reinforced with functionally graded graphene nanoplatelets based on modified strain-gradient formulation // *J. Sandwich Struct. Mater.* — 2021. — Vol. 23, No. 2. — P. 436—472.

28. *Alipour M. M., and Shaban M.* Natural frequency and bending analysis of heterogeneous polar orthotropic-faced sandwich panels in the existence of in-plane pre-stress // Archives Civil Mech. Eng. — 2020. — Vol. 20, No. 4. — P. 1—24.

29. *Shaban M., and Mazaheri H.* Closed-form elasticity solution for smart curved sandwich panels with soft core // Appl. Math. Modelling. — 2019. — Vol. 76. — P. 50—70.

30. *Arefi M. and Najafitabar F.* Buckling and free vibration analyses of a sandwich beam made of a soft core with FG-GNPs reinforced composite face-sheets using Ritz method // Thin-Walled Struct. — 2021. — Vol. 158. — P. 107200.

31. *Shaban M. and Alibeigloo A.* Global bending analysis of corrugated sandwich panels with integrated piezoelectric layers // J. Sandwich Struct. Mater. — 2020. — Vol. 22, No. 4. — P. 1055—1073.

32. *Arefi M.* Electro-mechanical vibration characteristics of piezoelectric nano shells // Thin-Walled Struct. — 2020. — Vol. 155. — P. 106912.

33. *Arefi M., Kiani Moghaddam S., Mohammad-Rezaei Bidgoli E., Kiani M., and Civalek O.* Analysis of graphene nanoplatelet reinforced cylindrical shell subjected to thermo-mechanical loads // Compos. Struct. — 2021. — Vol. 255. — P. 112924.

34. *Pagano N.* Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending // J. Compos. Mater. — 1969. — Vol. 3. — P. 398—411.

Поступила в редакцию 11.08.2021

Окончательный вариант поступил 01.03.2022

Received Aug. 11, 2021 (March 1, 2022)

Приложение А: Определяющие уравнения в перемещениях

Уравнения (18) можно разложить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 &T_{11}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + T_{12}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right) + T_{16}\left(2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + \\
 &+ 2T_{16}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right) + T_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + T_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + \\
 &+ S_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + S_{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y \partial x} + S_{16}\left(2\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2}\right) + S_{26} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + S_{66}\left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y}\right) + \\
 &+ L_{11x} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + L_{12y} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial x} + 2L_{16x} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + L_{16y} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \\
 &+ L_{26y} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + L_{66x} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + L_{66y} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} = 0, \tag{A-1}
 \end{aligned}$$

$$T_{22}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + T_{12}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right) + T_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) +$$

$$\begin{aligned}
 &+T_{26}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + T_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + \\
 &+T_{66}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y\partial x}\right) + S_{12}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x\partial y} + S_{22}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + S_{26}\left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x\partial y}\right) + S_{16}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + S_{66}\left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2}\right) + \\
 &+L_{12x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x\partial y} + L_{16x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + L_{22y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + L_{26x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + 2L_{26y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x\partial y} + L_{66x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y\partial x} + L_{66y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} = 0, \quad (\text{A-2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &F_{12}\left(2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y}\right) + F_{11}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right) + F_{22}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right) + \\
 &+E_{11x}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + E_{22y}\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + E_{12x}\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + E_{12y}\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + q - N(w) = 0, \quad (\text{A-3})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &S_{11}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + S_{12}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y\partial x}\right) + S_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) + \\
 &+S_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y\partial x}\right) + S_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + \\
 &+S_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + J_{11}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + J_{12}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y\partial x} + J_{16}\left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2}\right) + J_{26}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + J_{16}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x\partial y} + \\
 &+J_{66}\left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x\partial y}\right) + K_{16x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y\partial x} + K_{16y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + K_{11x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + K_{12y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y\partial x} + K_{16x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x\partial y} + K_{26y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \\
 &+K_{66x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + K_{66y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x\partial y} = F_{12}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y\right) + E_{12y}\psi_y + F_{11}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x\right) + E_{11x}\psi_x = 0, \quad (\text{A-4})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &S_{12}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right) + S_{22}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + S_{26}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) + \\
 &+S_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + S_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y\partial x}\right) + \\
 &+S_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + J_{12}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x\partial y} + J_{22}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + J_{26}\left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x\partial y}\right) + J_{16}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + J_{26}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y\partial x} + \\
 &+J_{66}\left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2}\right) + K_{26x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + K_{26y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x\partial y} + K_{12x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x\partial y} + K_{22y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + K_{16x}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + K_{26y}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y\partial x} +
 \end{aligned}$$

$$+K_{66x} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial x} + K_{66y} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} = F_{22} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \right) + E_{22y} \psi_y + F_{12} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \right) + E_{12x} \psi_x = 0, \quad (\text{A-5})$$

$$\begin{aligned} &L_{11x} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + K_{11x} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + H_{11xx} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + L_{12x} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + K_{12x} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y \partial x} + \\ &+ H_{12yx} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial x} + L_{16x} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + K_{16x} \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right) + H_{16xx} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial x} + \\ &+ H_{16yx} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + L_{16x} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + K_{16x} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + H_{16xx} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + L_{26x} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\ &+ K_{26x} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + H_{26xy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + L_{66x} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + K_{66x} \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) + \\ &+ H_{66xx} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + H_{66xy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} = E_{12x} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \right) + F_{12yx} \psi_y + E_{11x} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \right) + F_{11xx} \psi_x = 0, \quad (\text{A-6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &L_{12y} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + K_{12y} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + H_{12yx} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + L_{22y} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + K_{22y} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + \\ &+ H_{22yy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + L_{26y} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + K_{26y} \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) + L_{26x} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \\ &+ H_{26xy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + L_{16y} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + K_{16y} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + H_{16yx} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + L_{26y} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\ &+ K_{26y} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y \partial x} + H_{26yy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial x} + L_{66y} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + K_{66y} \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right) + \\ &+ H_{66xy} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial x} + H_{66yy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} = E_{22y} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \right) + F_{22yy} \psi_y + E_{12y} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \right) + F_{12yx} \psi_x = 0. \quad (\text{A-7}) \end{aligned}$$

Приложение В: Коэффициенты определяющих уравнений

Коэффициенты, используемые в Приложении А, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \int_{-h}^h C_{11}^{(k)} dz, T_{66} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} dz, T_{12} = \int_{-h}^h C_{12}^{(k)} dz, \\ T_{22} &= \int_{-h}^h C_{22}^{(k)} dz, T_{16} = \int_{-h}^h C_{16}^{(k)} dz, T_{26} = \int_{-h}^h C_{26}^{(k)} dz, \end{aligned} \quad (\text{B-1})$$

$$S_{11} = \int_{-h}^h C_{11}^{(k)} z dz, S_{66} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} z dz, S_{16} = \int_{-h}^h C_{16}^{(k)} z dz,$$

$$S_{12} = \int_{-h}^h C_{12}^{(k)} z dz, S_{22} = \int_{-h}^h C_{22}^{(k)} z dz, S_{26} = \int_{-h}^h C_{26}^{(k)} z dz, \quad (B-2)$$

$$J_{11} = \int_{-h}^h C_{11}^{(k)} z^2 dz, J_{66} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} z^2 dz, J_{12} = \int_{-h}^h C_{12}^{(k)} z^2 dz,$$

$$J_{22} = \int_{-h}^h C_{22}^{(k)} z^2 dz, J_{16} = \int_{-h}^h C_{16}^{(k)} z^2 dz, J_{26} = \int_{-h}^h C_{26}^{(k)} z^2 dz, \quad (B-3)$$

$$L_{11x} = \int_{-h}^h C_{11}^{(k)} \phi_x^{(k)} dz, L_{66x} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} \phi_x^{(k)} dz, L_{12x} = \int_{-h}^h C_{12}^{(k)} \phi_x^{(k)} dz,$$

$$L_{22x} = \int_{-h}^h C_{22}^{(k)} \phi_x^{(k)} dz, L_{26x} = \int_{-h}^h C_{26}^{(k)} \phi_x^{(k)} dz, L_{16x} = \int_{-h}^h C_{16}^{(k)} \phi_x^{(k)} dz,$$

$$L_{22y} = \int_{-h}^h C_{22}^{(k)} \phi_y^{(k)} dz, L_{66y} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} \phi_y^{(k)} dz, L_{26y} = \int_{-h}^h C_{26}^{(k)} \phi_y^{(k)} dz,$$

$$L_{16y} = \int_{-h}^h C_{16}^{(k)} \phi_y^{(k)} dz, L_{12y} = \int_{-h}^h C_{12}^{(k)} \phi_y^{(k)} dz, \quad (B-4)$$

$$H_{66xy} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} \phi_y^{(k)} \phi_x^{(k)} dz, H_{66yy} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} \phi_y^{(k)2} dz, H_{66xx} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} \phi_x^{(k)2} dz,$$

$$H_{26xy} = \int_{-h}^h C_{26}^{(k)} \phi_x^{(k)} \phi_y^{(k)} dz, H_{11xx} = \int_{-h}^h C_{11}^{(k)} \phi_x^{(k)2} dz, H_{22yy} = \int_{-h}^h C_{22}^{(k)} \phi_y^{(k)2} dz,$$

$$H_{12yx} = \int_{-h}^h C_{12}^{(k)} \phi_y^{(k)} \phi_x^{(k)} dz, H_{16xx} = \int_{-h}^h C_{16}^{(k)} \phi_x^{(k)2} dz, H_{26yy} = \int_{-h}^h C_{26}^{(k)} \phi_y^{(k)2} dz,$$

$$H_{16yx} = \int_{-h}^h C_{16}^{(k)} \phi_y^{(k)} \phi_x^{(k)} dz, \quad (B-5)$$

$$K_{11x} = \int_{-h}^h C_{11}^{(k)} \phi_x^{(k)} z dz, K_{66x} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} \phi_x^{(k)} z dz, K_{16y} = \int_{-h}^h C_{16}^{(k)} \phi_y^{(k)} z dz,$$

$$K_{66y} = \int_{-h}^h C_{66}^{(k)} \phi_y^{(k)} z dz, K_{12x} = \int_{-h}^h C_{12}^{(k)} \phi_x^{(k)} z dz, K_{22y} = \int_{-h}^h C_{22}^{(k)} \phi_y^{(k)} z dz,$$

$$K_{22x} = \int_{-h}^h C_{22}^{(k)} \phi_x^{(k)} z dz, K_{12y} = \int_{-h}^h C_{12}^{(k)} \phi_y^{(k)} z dz, K_{26x} = \int_{-h}^h C_{26}^{(k)} \phi_x^{(k)} z dz,$$

$$K_{16x} = \int_{-h}^h C_{16}^{(k)} \phi_x^{(k)} z dz, K_{26y} = \int_{-h}^h C_{26}^{(k)} \phi_y^{(k)} z dz, \quad (B-6)$$

$$E_{22y} = \int_{-h}^h Q_{22}^{(k)} \frac{\partial \phi_y^{(k)}}{\partial z} dz, E_{12y} = \int_{-h}^h Q_{12}^{(k)} \frac{\partial \phi_y^{(k)}}{\partial z} dz,$$

$$E_{12x} = \int_{-h}^h Q_{12}^{(k)} \frac{\partial \phi_x^{(k)}}{\partial z} dz, E_{11x} = \int_{-h}^h Q_{11}^{(k)} \frac{\partial \phi_x^{(k)}}{\partial z} dz, \quad (B-7)$$

$$F_{12} = \int_{-h}^h Q_{12}^{(k)} dz, F_{11} = \int_{-h}^h Q_{11}^{(k)} dz, F_{22} = \int_{-h}^h Q_{22}^{(k)} dz, \quad (B-8)$$

$$P_{12,yx} = \int_{-h}^h Q_{12}^{(k)} \frac{\partial \phi_y^{(k)}}{\partial z} \frac{\partial \phi_x^{(k)}}{\partial z} dz, P_{11,xx} = \int_{-h}^h Q_{11}^{(k)} \left(\frac{\partial \phi_x^{(k)}}{\partial z} \right)^2 dz, P_{22,yy} = \int_{-h}^h Q_{22}^{(k)} \left(\frac{\partial \phi_y^{(k)}}{\partial z} \right)^2 dz \quad (B-9)$$