

Ч. Ш. Чен^а, Х. Ван^б, Цз. И. Као^а, В. Р. Чен^{в*}

^а*Department of Mechanical Engineering, Lunghwa University of Science and Technology,
Guishan Shiang 33306, Taiwan*

^б*Department of Mechanical Engineering, Ming Chi University of Technology, Tai-Shan 24301, Taiwan*

^в*Department of Mechanical Engineering, Chinese Culture University, Taipei 11114, Taiwan*

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПУЛЬСИРУЮЩИХ НАГРУЗКАХ НА ОСНОВЕ ТЕОРИЙ ПЛАСТИН ВЫСОКОГО ПОРЯДКА¹

*C. S. Chen, H. Wang, J. Y. Kao, and W. R. Chen**

INVESTIGATING THE INSTABILITY OF PARAMETRIC VIBRATIONS OF COMPOSITE PLATES UNDER ARBITRARY PULSATING LOADS BASED ON HIGH-ORDER PLATE THEORIES

Keywords: excitation frequency, dynamic instability index, Mathieu-type motion, Bolotin's method

The instability of composite plates subjected to an arbitrary periodic dynamic loading is investigated based on Lo's high-order shear-deformation plate theory. The differential equations of motion of Mathieu-type are formed by Hamilton's principle and employing the Galerkin method. Using Bolotin's method, the excitation frequencies of composite plates are evaluated to determine their dynamic stability region and dynamic instability index. Omitting the high-order terms of Lo's displacement field, the system equations can be simplified to governing equations in the first-order plate theory. The dynamic instability determined by the present theory is compared with results of the first-order plate theory. Results show that high order terms have a significant impact on the dynamic instability of composite plates.

Ключевые слова: частота возбуждения, индекс неустойчивости динамической, движение типа Матье, метод Болотина

*Автор, с которым следует вести переписку: wrchen@faculty.pccu.edu.tw
Corresponding author: wrchen@faculty.pccu.edu.tw

¹Перевод с англ.

Неустойчивость композитных пластин, подверженных произвольной периодической динамической нагрузке, исследована с помощью теории сдвигового деформирования высокого порядка. Дифференциальные уравнения движения типа Матье получены с применением принципа Гамильтона и метода Галеркина. С помощью метода Болотина оценили частоты возбуждения композитных пластин для определения их области неустойчивости и индекса динамической неустойчивости. Игнорируя члены высокого порядка поля перемещений, систему определяющих уравнений пластин можно упростить до теории первого порядка. Результаты динамической неустойчивости композитных пластин, определенные с помощью предложенной теории, сравнили с рассчитанными по теории пластин первого порядка. Анализ показал, что члены высокого порядка оказывают существенное влияние на динамическую неустойчивость композитных пластин.

Введение

Композитные пластины, способные обеспечить большую удельную прочность и жесткость, чем традиционные металлические пластины, широко используют во многих областях техники. Динамическая нестациональность пластин — явление, требующее особого внимания при проектировании конструктивных элементов. Неустойчивость в виде параметрического резонанса может возникнуть, когда конструкция подвергается периодическому динамическому нагружению. Точное определение области динамической неустойчивости пластин — очень важная проблема для практических приложений. Комплексное исследование задач динамической устойчивости при периодических нагрузках выполнено в [1]. В [2] изучали динамическую неустойчивость тонких цилиндрических оболочек, подверженных действию плоских нагрузок при синусоидальном кинематическом возбуждении. Линейная теория изгиба, использованная в данном анализе, оказалась пригодна для предсказания начала их динамической неустойчивости.

Динамический резонанс — один из важнейших объектов при изучении характеристик динамической неустойчивости конструкций. В [3] представлен широкий обзор работ по динамическому поведению композитных оболочек. В [4], используя два варианта метода конечных полос, исследовали динамическую неустойчивость конструкций из слоистых композитов, подверженных осевым гармоническим нагрузкам. Результаты показали, что представленная модель способна предсказать параметрический резонанс конструкций. В [5] методом конечных полос также исследовали параметрическую неустойчивость композитных криволинейных панелей при неоднородных осевых нагрузках. Статическую и динамическую составляющие нагрузки изменяли согласно параболической функции. Метод Болотина использовали для оценки влияния нагрузки и геометрических параметров

на области неустойчивости. В [6] метод Болотина применили для исследования динамической неустойчивости сэндвич-панелей с пенопластовой сердцевинной при периодическом нагружении. При оценке влияния разных параметров на поведение динамической устойчивости пластины использовали индекс динамической неустойчивости. В [7] с помощью теории первого порядка рассматривали динамическую неустойчивость композитных пластин, подверженных периодическим нагрузкам. Метод Болотина использовали для решения дифференциальных уравнений Матье—Хилла при определении области динамической неустойчивости. В [8] исследовали нелинейную динамическую неустойчивость композитных пластин при гармонических нагрузках. Нелинейные уравнения Матье—Хилла получили с помощью метода Галеркина. Затем методом Болотина определили области динамической неустойчивости и амплитуды неустойчивых колебаний. Динамическую неустойчивость сэндвич-пластин из слоистых композитов исследовали в [9] с помощью теории зигзага, учитывающей нелинейное распределение поперечных касательных напряжений. Для изучения динамической неустойчивости разработали эффективный метод конечных элементов (МКЭ). Границы частот возбуждения основных областей неустойчивости определили методом Болотина. Динамическую неустойчивость композитных пластин переменной жесткости при периодических нагрузках исследовали в [10]. Набор уравнений движения Матье—Хилла получили методом модального преобразования и решили методом кратных масштабов для определения областей динамической неустойчивости, связанных с разными типами резонанса. В [11] с помощью МКЭ, основанного на теории сдвигового деформирования пластин первого порядка, исследовали динамическую неустойчивость расслоившихся композитных пластин при периодических нагрузках. Метод Болотина применили также для оценки границ зон неустойчивости. Результаты показали, что увеличивающееся расслоение сдвигает область неустойчивости в более низкие частоты возбуждения.

Однако классическая теория пластин и теории пластин первого порядка не способны адекватно смоделировать поведение композитных конструкций. Поэтому для повышения точности предложили разные теории пластин высокого порядка. В [12] с помощью теории пластин высокого порядка проанализировали динамическую устойчивость косоугольных пластин из слоистых композитов при периодических нагрузках. Методом Болотина определили режимы динамической неустойчивости и обсудили влияние пульсирующей нагрузки на индекс динамической неустойчивости. В [13] исследовали динамическую неустойчивость сэндвич-пластин с лицевыми слоями, армированными углеродными нанотрубками, под действием периодических сил. Оценили влияние объемного содержания углеродных нанотрубок и толщины слоя сердцевины на область неустойчивости и частоту возбуждения. С помощью теорий первого и высокого порядков в [14] исследовали динамическую неустойчивость композитных пластин при однородных, линейных и параболических динамических нагрузках.

Методом Болотина определили области динамической неустойчивости при разных периодических нагрузках, оценили влияние типов нагрузки, отношение длин сторон и граничных условий. В [15] с помощью теории пластин высокого порядка рассмотрена динамическая неустойчивость расслоившихся косоугольных композитных пластин, подверженных периодическим нагрузкам. Границы неустойчивых областей определены методом Болотина. Оценено влияние углов скашивания и ориентации волокон, длины расслоения, а также факторов статической и динамической нагрузки на характеристики динамической неустойчивости. В [16] динамическую устойчивость косоугольных композитных пластин при параболических и линейных периодических нагрузках изучали с помощью теории пластин высокого порядка. Следуя методу Болотина, динамические неустойчивые области определили с помощью метода аппроксимации высокого порядка. Исследовали влияние разных геометрических параметров, типов нагружения и граничных условий. С помощью полиномиальной теории пластин высокого порядка в [17] исследовали динамическую неустойчивость композитных пластин при периодических нагрузках с разными неоднородными распределениями. Уравнения типа Матье решили методом Болотина для определения областей динамической неустойчивости. Исследовали влияние разных видов неоднородной гармонической нагрузки на параметрическую неустойчивость пластин.

Динамическую неустойчивость композитных пластин изучали многие, но исследований при произвольных периодических нагрузках с изгибными и нормальными напряжениями с применением теории пластин высокого порядка выполнено мало. Поэтому настоящая работа посвящена изучению динамической вибрационной неустойчивости композитных пластин, подверженных произвольной периодической нагрузке, с помощью теории пластин высшего порядка [18]. Принцип Гамильтона использовали для вывода определяющих дифференциальных уравнений движения в частных производных, затем сведенных к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью метода Галеркина. Используя метод Болотина, решили систему обыкновенных дифференциальных уравнений типа Матье—Хилла для определения частот возбуждения композитных пластин, с помощью которых определили область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости композитных пластин. Оценили различие областей и индексов динамической неустойчивости, предсказанных теориями пластин высокого и первого порядка.

1. Основная постановка

Используя принцип Гамильтона, описанный Брюнелем [19], получим определяющее динамическое уравнение композитной пластины при общем состоянии под действием изменяющейся во времени внешней силы:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (U_S - K_t - W_i - W_e) dt = 0, \quad (1)$$

где

$$U_s = \int_{V_0} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV, \quad K_t = \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho \dot{v}_i \dot{v}_i dV, \quad W_i = \int_{V_0} X_i v_i dV, \quad W_e = \int_{S_0} p_i v_i dS;$$

δ — вариация функции; U_s и K_t — потенциальная и кинетическая энергии соответственно; W_i и W_e — внутренняя и внешняя работа соответственно; σ_{ij} и ε_{ij} — поле напряжений и деформаций соответственно; ρ и v_i — массовая плотность и перемещения; X_i — массовая сила на единицу начального объема; p_i — поверхностная сила на единицу площади; V_0 и S_0 — объем и ограничивающая поверхность. Подставив интегральные формы U_s , W_i и W_e в уравнение (1), выполнив вариационные операции и предположив, что δv_i обращается в нуль в моменты времени t_0 и t_1 , получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{V_0} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - X_i \delta v_i - \rho \ddot{v}_i \delta v_i) dV - \int_{S_0} (p_i \delta v_i) dS \right] dt = 0. \quad (2)$$

Согласно теории, описанной в [18], предположим инкрементальные перемещения u , v и w в любом местоположении в виде

$$u(x, y, z, t) = u_x(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) + z^2\xi_x(x, y, t) + z^3\phi_x(x, y, t), \quad (3)$$

$$v(x, y, z, t) = u_y(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) + z^2\xi_y(x, y, t) + z^3\phi_y(x, y, t), \quad (4)$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) + z\varphi_z(x, y, t) + z^2\xi_z(x, y, t). \quad (5)$$

Уравнения (3)—(5) получены путем разложения перемещений u , v и w в ряды Тейлора с учетом переменной z по толщине для учета параболического изменения поперечных сдвиговых и нелинейного изменения поперечных нормальных деформаций по толщине пластины. В теории, предложенной в [18], перемещения в плоскости с помощью рядов Тейлора представили в виде кубических функций от переменной по толщине, а поперечное перемещение — в виде квадратной функции. В поле перемещений учтены 11 неизвестных, включая изгибные деформации высокого порядка. Теории, основанные на аппроксимациях поля перемещений с другой степенью зависимости от координаты по толщине, содержат другое количество неизвестных. Самая простая из них — теория сдвигового деформирования первого порядка с пятью неизвестными [20, 21]. Теории сдвигового деформирования высокого порядка с семью и девятью неизвестными представлены в [22] и [23] соответственно. Кроме того, в [24, 25] разработали теорию сдвигового деформирования третьего порядка с пятью неизвестными, используя требование обращения в нуль поперечных сдвиговых напряжений на верхней и нижней поверхностях пластины, уменьшившее количество неизвестных в поле перемещений с девяти до пяти. Далее теорию высокого порядка с поперечными сдвиговыми и нор-

мальными деформациями, разработанную в [18], обозначим как HSNT. Игнорируя нормальные деформации высокого порядка в уравнениях (3) и (4) и поперечные сдвиговые деформации в уравнении (5), получим поле перемещений в простой теории сдвигового деформирования первого порядка (FSDT). Зависимость между напряжениями и деформациями k -го слоя композитной пластины, изготовленной из моноклинного материала, можно записать, как

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Предположим, что система внешних сил, приложенных к композитной пластине, изменяется со временем как

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^n + \frac{2z}{h} \sigma_{ij}^m = \left(\sigma_{ij}^S + \sigma_{ij}^D \cos \tilde{\omega} t \right) + 2z \left(\sigma_{ij}^{Sm} + \sigma_{ij}^{Dm} \cos \tilde{\omega} t \right) \quad (i, j = x, y, z). \quad (7)$$

Здесь σ_{ij}^n — периодическое нормальное или сдвиговое напряжение; σ_{ij}^S и σ_{ij}^D — соответствующие статические и динамические составляющие; σ_{ij}^m — периодическое напряжение чистого изгиба или кручения; σ_{ij}^{Sm} и σ_{ij}^{Dm} — соответствующие статические и динамические компоненты; $\tilde{\omega}$ — возмущающая частота периодического нагружения. Подставив уравнения (3)—(7) в уравнение (2), выполнив интегрирование по частям, удалив производные от вариации перемещений и сгруппировав члены по вариациям перемещений $\delta u_x, \delta u_y, \delta w, \delta \varphi_x, \delta \varphi_y$, получим определяющие уравнения композитной пластины

$$Q_{1,x} + Q_{2,y} + (R_1 + R_5 + R_{17})_{,x} + (S_1 + S_6 + S_{17})_{,y} + f_x = I_1 \ddot{u}_x + I_3 \ddot{\xi}_x, \quad (8)$$

$$Q_{2,x} + Q_{3,y} + (R_9 + R_{13} + R_{21})_{,x} + (S_9 + S_{13} + S_{21})_{,y} + f_y = I_1 \ddot{u}_y + I_3 \ddot{\xi}_y, \quad (9)$$

$$Q_{4,x} + Q_{5,y} + (R_{30} + R_{33} + R_{25})_{,x} + (S_{30} + S_{33} + S_{25})_{,y} + f_z = I_1 \ddot{w} + I_3 \ddot{\xi}_z, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & Q_{6,x} + Q_{7,y} - Q_4 + (R_2 + R_6 + R_{18})_{,x} + (S_2 + S_6 + S_{18})_{,y} - \\ & - (U_1 + U_5 + W_1) + m_x = I_3 \ddot{\phi}_x + I_5 \ddot{\phi}_x, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & Q_{7,x} + Q_{8,y} - Q_5 + (R_{10} + R_{14} + R_{22})_{,x} + (S_{10} + S_{14} + S_{22})_{,y} - \\ & - (U_9 + U_{13} + W_5) + m_y = I_3 \ddot{\phi}_y + I_5 \ddot{\phi}_y, \end{aligned} \quad (12)$$

$$Q_{9,x} + Q_{10,y} - Q_{11} + (R_{31} + R_{34} + R_{36})_{,x} + (S_{31} + S_{34} + S_{36})_{,y} - \\ - (V_1 + V_4 + W_9) + m_z = I_3 \ddot{\phi}_z, \quad (13)$$

$$Q_{12,x} + Q_{13,y} - 2Q_9 + (R_3 + R_7 + R_{19})_{,x} + (S_3 + S_7 + S_{19})_{,y} - \\ - 2(U_2 + U_6 + W_2) + n_x = I_3 \ddot{u}_x + I_5 \ddot{\xi}_x, \quad (14)$$

$$Q_{13,x} + Q_{14,y} - 2Q_{10} + (R_{11} + R_{15} + R_{23})_{,x} + \\ + (S_{11} + S_{15} + S_{23})_{,y} + n_y = I_3 \ddot{u}_y + I_5 \ddot{\xi}_y, \quad (15)$$

$$Q_{15,x} + Q_{16,y} - 2Q_{17} + (R_{32} + R_{35} + R_{27})_{,x} + (S_{32} + S_{35} + S_{27})_{,y} - \\ - 2(V_2 + V_5 + W_{10}) + n_z = I_3 \ddot{w} + I_5 \ddot{\xi}_z, \quad (16)$$

$$Q_{18,x} + Q_{19,y} - 3Q_{15} + (R_4 + R_8 + R_{20})_{,x} + (S_4 + S_8 + S_{20})_{,y} - \\ - 3(U_3 + U_7 + W_3) + q_x = I_5 \ddot{\phi}_x + I_7 \ddot{\phi}_x, \quad (17)$$

$$Q_{19,x} + Q_{20,y} - 3Q_{16} + (R_{12} + R_{16} + R_{24})_{,x} + (S_{12} + S_{16} + S_{24})_{,y} - \\ - 3(U_{11} + U_{15} + W_7) + q_y = I_5 \ddot{\phi}_y + I_7 \ddot{\phi}_y, \quad (18)$$

где Q связывают деформации и перемещения композитной пластины; члены R, S, U, V, W — произвольные внешние силы, связанные с начальными напряжениями; I — величины, связанные с моментами инерции; $f_x, f_y, f_z, m_x, m_y, m_z, n_x, n_y, n_z, q_x, q_y$ — объемные силы и поперечные нагрузки. Более подробная информация о соответствующих параметрах в уравнениях (8)—(18) дана в Приложении, взятом из [26].

2. Процедура решения

Трудно предоставить результаты для всех возможных случаев, поскольку на динамическое поведение композитной пластины, изучаемой в настоящей работе, влияет слишком много параметров. Исследуем динамику свободно опертой пластины из ортогонально армированного композита, подверженную пространственно однородной периодической системе напряжений в плоскости, включающей пульсирующее одноосное напряжение и напряжения чистого изгиба. Боковую внешнюю нагрузку и силу тяжести не учитываем. Таким образом, система уравнений (7) с периодической системой напряжений принимает вид

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^n + \frac{2z\sigma_{xx}^m}{h} = \sigma_n + 2z\sigma_m / h. \quad (19)$$

Здесь $\sigma_n = \sigma^S + \sigma^D \cos \tilde{\omega} t$ и $\sigma_m = \sigma^{Sm} + \sigma^{Dm} \cos \tilde{\omega} t$ — нормальные и изгибающие напряжения соответственно; σ^S , σ^{Sm} и σ^D , σ^{Dm} — соответствующие статические динамические составляющие, которые считаем постоянными. Ненулевые периодические нагрузки — $N_{xx} = h\sigma_n$, $M_{xx} = Sh^2\sigma_m / 6$, $M_{xx}^* = h^3\sigma_n / 12$, $P_{xx} = Sh^4\sigma_n / 40$, $P_{xx}^* = h^5\sigma_n / 80$, $R_{xx} = Sh^6\sigma_n / 224$ и $R_{xx}^* = h^7\sigma_n / 448$, $S = \sigma_m / \sigma_n$ — отношение периодического изгибающего напряжения к нормальному.

Для композитной пластины со свободно опертыми кромками поле перемещений (20), удовлетворяющее геометрическим граничным условиям, можно записать как

$$\begin{aligned}
 u_x &= \sum \sum h U_{mn} \cos(m\pi x / a) \sin(n\pi y / b), \\
 u_y &= \sum \sum h V_{mn} \sin(m\pi x / a) \cos(n\pi y / b), \\
 w &= \sum \sum h W_{mn} \sin(m\pi x / a) \sin(n\pi y / b), \\
 \varphi_x &= \sum \sum \psi_{xmn} \cos(m\pi x / a) \sin(n\pi y / b), \\
 \varphi_y &= \sum \sum \psi_{ymn} \sin(m\pi x / a) \cos(n\pi y / b), \\
 \varphi_z &= \sum \sum \psi_{zmn} \sin(m\pi x / a) \sin(n\pi y / b), \\
 \xi_x &= \sum \sum (\zeta_{xmn} / h) \cos(m\pi x / a) \sin(n\pi y / b), \\
 \xi_y &= \sum \sum (\zeta_{ymn} / h) \sin(m\pi x / a) \cos(n\pi y / b), \\
 \xi_z &= \sum \sum (\zeta_{zmn} / h) \sin(m\pi x / a) \sin(n\pi y / b), \\
 \phi_x &= \sum \sum (\Phi_{xmn} / h^2) \cos(m\pi x / a) \sin(n\pi y / b), \\
 \phi_y &= \sum \sum (\Phi_{ymn} / h^2) \sin(m\pi x / a) \cos(n\pi y / b).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Подставив поле перемещений и периодические нагрузки в определяющие уравнения (8)—(18), используя метод Галеркина и сгруппировав коэффициенты, получим определяющее матричное уравнение движения в виде

$$[M] \left[\ddot{\Delta} \right] + \{ [C] + [G] \} [\Delta] = 0, \tag{21}$$

$$\{ \Delta \} = \left[U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, \psi_{xmn}, \psi_{ymn}, \psi_{zmn}, \zeta_{xmn}, \zeta_{ymn}, \zeta_{zmn}, \Phi_{xmn}, \Phi_{ymn} \right]^T,$$

где Δ — зависящий от времени вектор перемещений в HSNT. Зависящий от времени вектор перемещений в FSDT — $\left[U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, \psi_{xmn}, \psi_{ymn} \right]^T$; $[M]$,

$[C]$ и $[G]$ — матрицы инерции, упругой и геометрической жесткости соответственно. Матричное уравнение (21) можно использовать для анализа задач на собственные значения свободных колебаний, статической потери устойчивости и динамической неустойчивости.

Пренебрегая внешними нагрузками в плоскости и матрицей $[G]$ и подставив $\Delta(t) = \Delta e^{i\omega t}$ в уравнение (21), сведем его к виду

$$\{[C] - \omega^2 [M]\} [\Delta] = 0, \quad (22)$$

представляющему уравнение на собственные значения, связанные со свободными колебаниями композитной пластины. Условие существования ненулевого решения — равенство нулю определителя матрицы коэффициентов

$$|[C] - \omega^2 [M]| = 0, \quad (23)$$

из которого можно найти собственную частоту ω .

Для анализа статической потери устойчивости матрицу инерционных членов уравнения (21) предположим равной нулю. Уравнение собственных значений для статической нагрузки потери устойчивости N_{xx} имеет вид

$$\{[C] + N_{xx} [G]^*\} [\Delta] = 0. \quad (24)$$

Аналогичным образом нагрузку статической потери устойчивости можно получить, приравняв нулю определитель матрицы коэффициентов уравнения (24). Ненулевую периодическую нагрузку найдем, проинтегрировав уравнение (19):

$$N_{xx} = h\sigma_n = h(\sigma^S + \sigma^D \cos \tilde{\omega}t) = \alpha_S P_{cr} + \alpha_D P_{cr} \cos \tilde{\omega}t, \quad (25)$$

где P_{cr} , α_S и α_D — нагрузка потери устойчивости и параметры статической и динамической нагрузок соответственно. Подстановка уравнения (25) в (21) приводит к соотношению

$$[M] \left[\ddot{\Delta} \right] + \{[C] + \alpha_S P_{cr} [G] + \alpha_D P_{cr} [G] \cos \tilde{\omega}t\} [\Delta] = 0, \quad (26)$$

являющемуся обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка типа Матье—Хилла. Затем методом Болотина определяем границы между устойчивой и неустойчивой областями параметрически возбужденной конструкции, используя периодические решения в рядах Фурье с периодом T и $2T$, где $T = 2p/w$. Периодические решения Δ уравнения (26) с периодом T и $2T$ можно найти, используя следующие ряды Фурье:

$$\Delta = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\tilde{\omega}t}{2} + b_k \cos \frac{k\tilde{\omega}t}{2} \right), \quad (27)$$

$$\Delta = \sum_{k=0,2,4,\dots}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\tilde{\omega}t}{2} + b_k \cos \frac{k\tilde{\omega}t}{2} \right), \quad (28)$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные, не зависящие от времени. Подставив разложения (27) и (28) в уравнение (26) и сгруппировав члены с синусами и косинусами, получим два набора линейных алгебраических уравнений с a_k и b_k . Как правило, первичная область неустойчивости, определяемая решением с периодом $2T$, намного больше вторичной области неустойчивости, определяемой решением с периодом T . Поэтому область первичной неустойчивости с периодом $2T$ имеет наибольшее практическое значение и обеспечивает достаточно точное решение. Поскольку приближение первого порядка для a_1 и b_1 области первичной неустойчивости может быть получено с достаточной точностью, то решение первого порядка для неё можно записать как

$$[C] + \alpha_S P_{cr} [G] \pm \frac{1}{2} \alpha_D P_{cr} [G] - \frac{1}{4} \tilde{\omega}^2 [M] = 0. \quad (29)$$

3. Анализ и обсуждение

С помощью теории пластин высокого порядка исследуем динамическую неустойчивость композитных пластин со следующими свойствами: $E_x / E_y =$ варьируем, $E_y = E_z$, $G_{xy} = G_{xz} = 0,6 E_y$, $G_{yz} = 0,5 E_y$, $\nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu_{yz} = 0,25$. Предложенный вариант теории HSNT можно упростить до FSDT, пренебрегая членами более высокого порядка и введя коэффициент коррекции сдвига в результирующие сдвиговые напряжения. Затем результаты, полученные с помощью HSNT и FSDT, сопоставим для демонстрации различий между двумя теориями. В последующем исследовании используем безразмерный параметр частоты возбуждения $\Omega = \tilde{\omega} b^2 / (h \sqrt{\rho / E_y})$ и индекс динамической неустойчивости $\Omega_{DI} = 100 \Delta \Omega / (\omega_{nf} / P_{cr})$. При этом $\omega_{nf} = \omega b^2 / (h \sqrt{\rho / E_y})$ и $P_{cr} = 10 \sigma_n b^2 / E_y h^4$ — основная собственная частота и критическая нагрузка потери устойчивости соответственно; $\Delta \Omega = \Omega^U - \Omega^L$ — ширина области неустойчивости, ограниченной верхней Ω^U и нижней Ω^L частотой возбуждения. Индекс динамической неустойчивости Ω_{DI} количественно определяет меру неустойчивости посредством области неустойчивости, собственной частоты и нагрузки потери устойчивости.

Для проверки точности предложенной модели проанализировали некоторые репрезентативные примеры. Во-первых, рассмотрели свободные колебания антисимметричных ортогонально армированных пластин с использованием FSDT и HSNT. В табл. 1 представлены значения собственной частоты ортогонально армированных пластин с разным количеством слоев и отношением модулей упругости. Значения частоты, рассчитанные

Табл. 1

Значения собственной частоты квадратных пластин из антисимметричных ортогонально армированных композитов при разном количестве слоев и отношении модулей упругости ($a/b = 1$, $a/h = 5a/b = 1$, $a/h = 5$)

Композит	Теория	E_x/E_y			
		10	20	30	40
$(0^\circ/90^\circ)$	FSDT	6,9301	7,6934	8,3052	8,8142
	[27]	6,9156	7,6922	8,3112	8,8255
	HSNT	6,9802	7,7188	8,2815	8,7305
	[28]	6,9741	7,7140	8,2775	8,7272
$(0^\circ/90^\circ)_2$	FSDT	8,1590	9,6627	10,5857	11,2298
	[27]	8,1363	9,6729	10,6095	11,2635
	HSNT	8,1563	9,4760	10,2819	10,8306
	[28]	8,1482	9,4675	10,2733	10,8221
$(0^\circ/90^\circ)_3$	FSDT	8,4015	9,9148	10,8460	11,4825
	[27]	8,3883	9,9266	10,8723	11,5189
	HSNT	8,3939	9,8430	10,7196	11,3131
	[28]	8,3852	9,8346	10,7113	11,3051

по представленной модели, хорошо согласуются с приведенными в [27, 28]. Из данных табл. 1 видно, что значение частоты возрастает с увеличением отношения E_x / E_y и количества слоев в композите. Во-вторых, изучили динамическую устойчивость пластин из симметричного четырех-

Табл. 2

Значения частот возбуждения четырехслойных пластин из симметричных ортогонально армированных композитов с разными параметрами статической и динамической нагрузки

α_S	α_D	[29]		FSDT [30]		HSNT	
		Ω^U	Ω^L	Ω^U	Ω^L	Ω^U	Ω^L
0	0	144,57	144,57	144,36	144,36	144,97	144,97
0	0,3	155,03	133,29	155,64	133,79	155,45	133,67
0	0,6	164,83	120,95	165,12	121,45	165,27	121,32
0	0,9	174,08	107,21	174,43	107,63	174,53	107,56
0	1,2	182,87	91,43	183,21	91,86	183,33	91,76
0	1,5	191,25	72,28	191,75	72,62	191,73	72,60
0,2	0,06	131,71	126,86	132,12	127,26	132,09	127,23
0,4	0,12	117,45	106,24	117,96	106,82	117,80	106,58
0,6	0,18	101,20	80,49	101,84	81,10	101,53	80,81
0,8	0,24	81,78	40,89	82,31	41,32	82,10	41,27

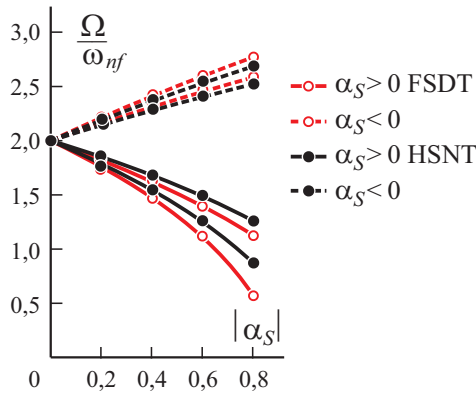


Рис. 1. Влияние статической нагрузки на величину Ω / ω_{nf} : $a/b = 1$, $a/h = 10$, $n = 1$, $\alpha_D / |\alpha_S| = 0,3$, $S = 0$, $\alpha_S < 0$ (растяжение) и $\alpha_S > 0$ (сжатие).

слойного ортогонально армированного композита при разных статических и динамических нагрузках. В табл. 2 приведены значения верхней и нижней частот возбуждения композитной пластины, рассчитанные с помощью HSNT и сопоставленные с полученными в [29] и с помощью FSDT в [30]. Численные значения HSNT хорошо согласуются с рассчитанными посредством FSDT. Как видно из данных табл. 2, с увеличением параметра динамической нагрузки α_D (при $\alpha_S = 0$) значения верхней частоты возбуждения возрастают, а нижней — уменьшаются. Кроме того, значения верхней и нижней частот возбуждения уменьшаются по мере одновременного увеличения статических и динамических нагрузок. Результаты, полученные с помощью предложенного метода, хорошо согласуются с результатами других исследований, что доказывает надежность и точность разработанной компьютерной программы.

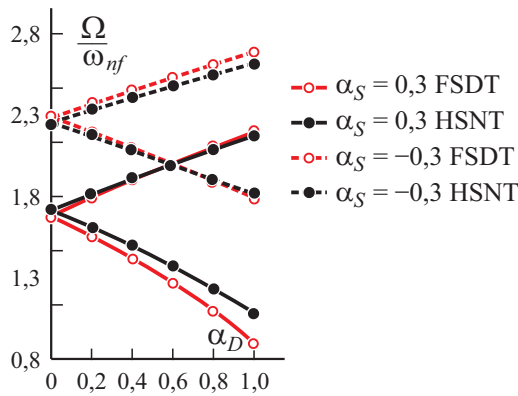


Рис. 2. Влияние динамической нагрузки на величину Ω / ω_{nf} : $a/b = 1$, $a/h = 10$, $n = 1$, $S = 0$, $\alpha_D / |\alpha_S| = 0,3$.

Данные рис. 1 иллюстрируют влияние статической нагрузки на отношение частот возбуждения Ω / ω_{nf} . Из графика следует, что частота возбуждения сначала появляется при $\Omega / \omega_{nf} = 2$ ($\alpha_S = \alpha_D = 0$). Видно, что по мере увеличения сжимающей статической нагрузки ($\alpha_S > 0$) отношение верхней и нижней частот возбуждения уменьшается. Увеличение растягивающей статической нагрузки ($\alpha_S < 0$) приводит к обратному эффекту. Ширина между границами обоих отношений частот возбуждения возрастает с увеличением параметра статической нагрузки. Между тем, статическая сжимающая нагрузка, уменьшающая жесткость пластины, оказывает более значительное влияние на ширину границы, чем статиче-

Табл. 3

Значения частот возбуждения, области неустойчивости и индекса динамической неустойчивости пластин (графа А) из антисимметричных ортогонально армированных композитов с разным количеством слоев и отношением модулей упругости ($a/b = 1$, $a/h = 5$, $\alpha_S = 0,5$, $\alpha_D/\alpha_S = 0,3$)

Композит	А	Теория	E_x/E_y				
			10	20	30	40	
$(0^\circ/90^\circ)$	Ω^U	FSDT	10,5100	11,6677	12,5955	13,3674	
		HSNT	10,8081	12,0573	13,0216	13,7978	
	Ω^L	FSDT	9,0358	10,0310	10,8287	11,4924	
		HSNT	9,4476	10,6102	11,5145	12,2460	
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	1,4743	1,6367	1,7668	1,8751	
		HSNT	1,3605	1,4471	1,5071	1,5518	
	Ω_{DI}	FSDT	1,0929	0,8868	0,7610	0,6756	
		HSNT	1,0471	0,8462	0,7286	0,6512	
	$(0^\circ/90^\circ)_2$	Ω^U	FSDT	12,4496	14,6543	16,0539	17,0309
			HSNT	12,3692	14,3698	15,5911	16,4225
Ω^L		FSDT	10,7032	12,5987	13,8020	14,6419	
		HSNT	10,6338	12,3532	13,4026	14,1169	
$\Delta\Omega^U$		FSDT	1,7464	2,0556	2,2520	2,3890	
		HSNT	1,7354	2,0166	2,1885	2,3057	
Ω_{DI}		FSDT	3,1158	2,2488	1,8737	1,6650	
		HSNT	3,1566	2,3391	1,9872	1,7912	
$(0^\circ/90^\circ)_3$		Ω^U	FSDT	12,7415	15,0365	16,4488	17,4141
			HSNT	12,7296	14,9267	16,2554	17,1548
	Ω^L	FSDT	10,9542	12,9273	14,1415	14,9714	
		HSNT	10,9437	12,8321	13,9740	14,7468	
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	1,7873	2,1092	2,3073	2,4427	
		HSNT	1,7859	2,0945	2,2814	2,4080	
	Ω_{DI}	FSDT	2,9746	2,1359	1,7848	1,5925	
		HSNT	2,9803	2,1677	1,8280	1,6414	

ская растягивающая. Влияние динамических нагрузок на отношение частот возбуждения области неустойчивости показано на рис. 2. При сжимающей статической нагрузке начальное отношение частот возбуждения меньше двух (при $\alpha_D = 0$), а при растягивающей статической нагрузке — больше двух. Увеличение параметра динамической нагрузки α_D увеличивает/уменьшает отношение для верхней/нижней частоты возбуждения и увеличивает ширину области неустойчивости. Параметр динамической нагрузки имеет большее влияние на отношение частот

Табл. 4

Влияние отношения модулей упругости E_x / E_y на частоты возбуждения, области неустойчивости и индекс динамической неустойчивости (графа А) композитных пластин при разных статических нагрузках ($a/b = 1$, $a/h = 5$, $n = 1$, $S = 0$, $\alpha_D/\alpha_S = 0,3$)

E_x/E_y	А	Теория	α_S					Разность*, %	
			0	0,2	0,4	0,6	0,8		
10	Ω^U	FSDT	13,8602	12,6273	11,2601	9,7022	7,8405	6,27	
		HSNT	13,9604	12,7930	11,5078	10,0597	8,3646		
	Ω^L	FSDT	13,8602	12,1623	10,1852	7,7170	3,9202	22,93	
		HSNT	13,9604	12,3547	10,5064	8,2541	5,0868		
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	0,4650	1,0750	1,9851	3,9203	19,60	
		HSNT	0	0,4383	1,0014	1,8057	3,2778		
	Ω_{DI}	FSDT	0	0,3447	0,7969	1,4717	2,9063	15,20	
		HSNT	0	0,3374	0,7708	1,3898	2,5228		
	20	Ω^U	FSDT	15,3869	14,0181	12,5003	10,7708	8,7041	8,05
			HSNT	15,4376	14,1825	12,8050	11,2601	9,4665	
Ω^L		FSDT	15,3869	13,5019	11,3070	8,5670	4,3520	28,58	
		HSNT	15,4376	13,7121	11,7356	9,3503	6,0935		
$\Delta\Omega^U$		FSDT	0	0,5162	1,1934	2,2038	4,3521	29,03	
		HSNT	0	0,4704	1,0693	1,9099	3,3730		
Ω_{DI}		FSDT	0	0,2797	0,6466	1,1941	2,3582	19,57	
		HSNT	0	0,2750	0,6253	1,1168	1,9723		
40		Ω^U	FSDT	17,6284	16,0603	14,3214	12,3399	9,9722	9,60
			HSNT	17,4611	16,0961	14,6042	12,9414	11,0306	
	Ω^L	FSDT	17,6284	15,4689	12,9542	9,8151	4,9862	33,96	
		HSNT	17,4611	15,5859	13,4518	10,9078	7,5506		
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	0,5914	1,3672	2,5248	4,9860	43,27	
		HSNT	0	0,5103	1,1524	2,0335	3,4801		
	Ω_{DI}	FSDT	0	0,2131	0,4926	0,9097	1,7966	23,03	
		HSNT	0	0,2141	0,4836	0,8533	1,4603		

* Абсолютное значение (FSDT-HSNT)/HSNT при $\alpha_S = 0,8$.

возбуждения, чем параметр статической нагрузки. Из данных рис. 1 и 2 видно, что ширина области неустойчивости, предсказываемая с помощью FSDT, больше, чем при использовании HSNT, особенно при сжимающей статической нагрузке.

Влияние количества слоев и отношения модулей упругости на частоты возбуждения, область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости пластин (см. графу А) из антисимметричного ортогонально армированного композита при $\alpha_S = 0,5$ и $\alpha_D/\alpha_S = 0,3$ иллюстрируют данные табл. 3. При увеличении отношения модулей упругости значения частот

Табл. 5

Влияние отношения модулей упругости E_x/E_y на частоты возбуждения, область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости (графа А) композитных пластин при разных динамических нагрузках ($a/b = 1$, $a/h = 5$, $n = 1$, $S = 0$, $\alpha_S = 0,1$)

E_x/E_y	А	Теория	α_D					Разность*, %	
			0	0,4	0,8	1,2	1,6		
10	Ω^U	FSDT	13,1490	14,5368	15,8031	16,9753	18,0716	0,48	
		HSNT	13,2861	14,6036	15,8116	16,9337	17,9859		
	Ω^L	FSDT	13,1490	11,5963	9,8007	7,5916	4,3830	19,37	
		HSNT	13,2861	11,8228	10,1506	8,1420	5,4360		
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	2,9404	6,0025	9,3837	13,6886	9,07	
		HSNT	0	2,7808	5,6610	8,7917	12,5499		
	Ω_{DI}	FSDT	0	2,1799	4,4499	6,9566	10,1480	5,06	
		HSNT	0	2,1403	4,3570	6,7666	9,6592		
	20	Ω^U	FSDT	14,5973	16,1379	17,5438	18,8450	20,0621	1,41
			HSNT	14,7123	16,1304	17,4335	18,6457	19,7838	
Ω^L		FSDT	14,5973	12,8736	10,8801	8,4277	4,8657	24,47	
		HSNT	14,7123	13,1421	11,3568	9,2326	6,4424		
$\Delta\Omega^U$		FSDT	0	3,2643	6,6636	10,4173	15,1964	13,90	
		HSNT	0	2,9883	6,0766	9,4131	13,3414		
Ω_{DI}		FSDT	0	1,7688	3,6107	5,6446	8,2342	5,55	
		HSNT	0	1,7473	3,5532	5,5042	7,8012		
40		Ω^U	FSDT	16,7238	18,4888	20,0995	21,5903	22,9846	3,47
			HSNT	16,6717	18,2163	19,6397	20,9668	22,2147	
	Ω^L	FSDT	16,7238	14,7490	12,4652	9,6555	5,5747	29,43	
		HSNT	16,6717	14,9686	13,0450	10,7836	7,8994		
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	3,7398	7,6343	11,9348	17,4099	21,62	
		HSNT	0	3,2477	6,5947	10,1832	14,3153		
	Ω_{DI}	FSDT	0	1,3628	2,7508	4,5004	6,4732	6,11	
		HSNT	0	1,3458	2,7051	4,3868	6,1005		

* Абсолютное значение (FSDT-HSNT)/HSNT при $\alpha_D = 1,6$.

возбуждения и области неустойчивости возрастают, а индекса динамической неустойчивости — уменьшаются. С увеличением количества слоев значения частоты возбуждения и области неустойчивости также возрастают, а индекса динамической неустойчивости сначала возрастают, а затем уменьшаются. Для пластин с разным количеством слоев и отношением модулей упругости нет очевидной разницы между значениями частоты возбуждения, области неустойчивости и индекса динамической неустойчивости, рассчитанными с помощью HSNT и FSDT, за исключением области неустойчивости двухслойной пластины с большим отношением модулей упругости. Размер области неустойчивости, рассчитанный с помощью FSDT, больше предсказываемого HSNT, и эта разница возрастет с увеличением отношения модулей упругости и уменьшением количества слоев.

Данные табл. 4 и 5 иллюстрируют влияние статических α_S и динамических α_D нагрузок на характеристики динамической неустойчивости пластин из слоистых композитов с разным отношением модулей упругости. Видно, что при увеличении статической или динамической нагрузки увеличиваются как область, так и индекс динамической неустойчивости. Таким образом, композитная пластина, подверженная большой статической или динамической нагрузке, более динамически неустойчива. Увеличение отношения модулей упругости увеличивает жесткость композитной пластины, уменьшает индекс динамической неустойчивости и делает ее более динамически устойчивой. Повышение статической или динамической нагрузки увеличивает разницу между результатами, рассчитанными с помощью FSDT и HSNT, что наиболее очевидно при низких частотах возбуждения. Из данных табл. 4 и 5 видно, что разница результатов, предсказываемых FSDT и HSNT при действии сжимающей статической нагрузки, значительно больше, чем при динамической. Это обусловлено тем, что при изучении влияния динамической нагрузки приложенная статическая нагрузка была относительно небольшой (см. табл. 5). При действии боль-

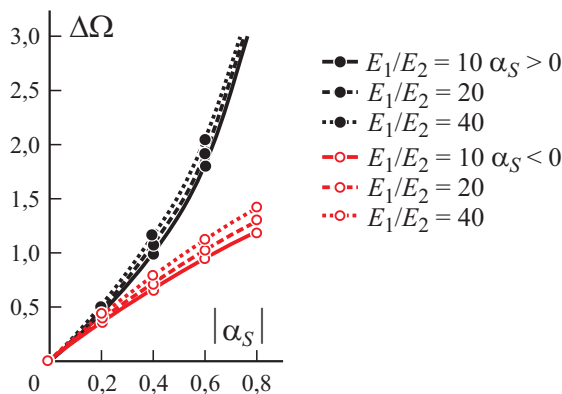


Рис. 3. Влияние отношения E_1 / E_2 на область неустойчивости при разных статических нагрузках: $a / b = 1, a / h = 5, n = 1, S = 0, \alpha_D / |\alpha_S| = 0,3$.

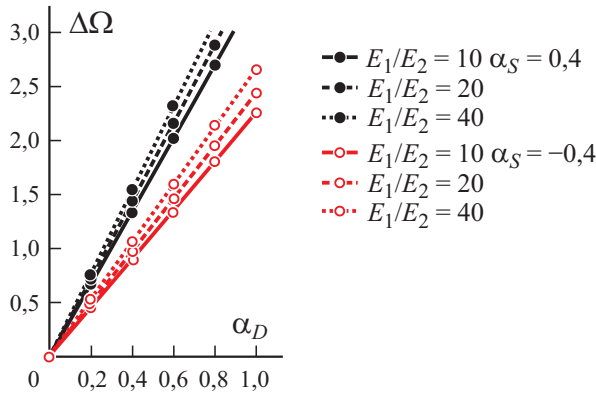


Рис. 4. То же при разных динамических нагрузках: $a/b = 1, a/h = 5, n = 1, S = 0$.

шой статической нагрузки возрастающая динамическая нагрузка также увеличивает разницу между результатами FSDT и HSNT.

Зависимости на рис. 3 и 4 иллюстрируют влияние отношения модулей упругости E_1/E_2 на область неустойчивости композитных пластин при разных статических и динамических нагрузках, рассчитанные с помощью HSNT. Независимо от того, находится ли композитная пластина под действием растягивающей или сжимающей статической нагрузки, увеличение отношения модулей упругости всегда увеличивает область неустойчивости. Область неустойчивости в композитной пластине при действии сжимающей нагрузки больше, чем при растягивающей, и по мере увеличения приложенной нагрузки эта разница возрастает.

Влияние отношения модулей упругости E_1/E_2 на индекс динамической неустойчивости Ω_{DI} иллюстрируют данные рис. 5 и 6. Видно, что увеличение отношения E_1/E_2 снижает значения Ω_{DI} , что противоположно влиянию этого отношения на область неустойчивости. Влияние статиче-

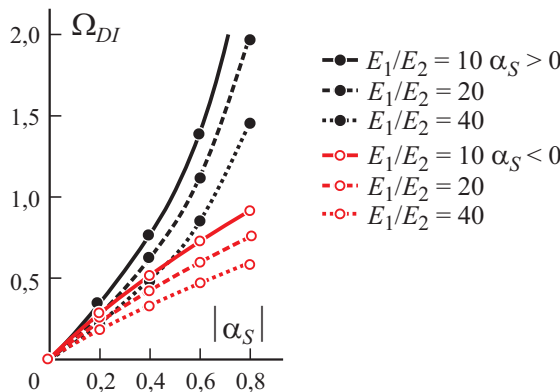


Рис. 5. Влияние отношения E_1/E_2 на величину Ω_{DI} при разных статических нагрузках: $a/b = 1, a/h = 5, n = 1, S = 0, \alpha_D/|\alpha_S| = 0,3$.

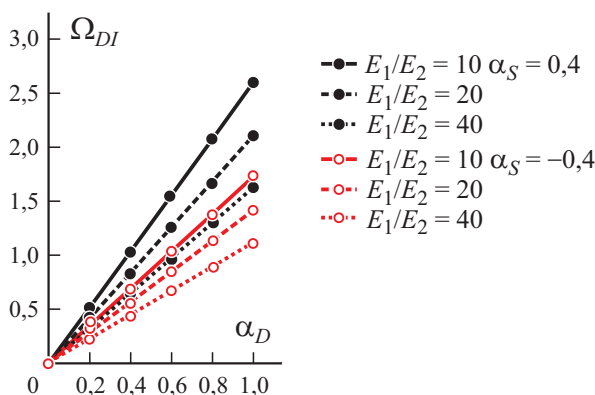


Рис. 6. Влияние отношения E_1/E_2 на величину Ω_{DI} при разных динамических нагрузках: $a/b = 1, a/h = 5, n = 1, S = 0$.

Табл. 6

Влияние параметра нагрузки на частоты возбуждения, области неустойчивости и индекс динамической неустойчивости композитных пластин при разных статических нагрузках ($a/b = 1, a/h = 5, n = 1, S = 0, E_x/E_y = 40$)

α_D/α_S	A	Теория	α_S			
			-0,6	-0,3	0,3	0,6
0,2	Ω^U	FSDT	22,7126	20,3301	15,0617	11,9562
		HSNT	21,9708	19,8444	15,2362	12,6252
	Ω^L	FSDT	21,8763	19,8662	14,4295	10,2791
		HSNT	21,2222	19,4329	14,6961	11,2723
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0,8363	0,4639	0,6322	1,6771
		HSNT	0,7485	0,4116	0,5401	1,3529
Ω_{DI}	FSDT	0,3014	0,1671	0,2278	0,6043	
	HSNT	0,3141	0,1727	0,2266	0,5677	
0,5	Ω^U	FSDT	23,3202	20,6711	15,5190	13,0736
		HSNT	22,5159	20,1476	15,6290	13,5516
	Ω^L	FSDT	21,2274	19,5111	13,9365	8,8143
		HSNT	20,6430	19,1184	14,2777	10,1398
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	2,0928	1,1601	1,5825	4,2593
		HSNT	1,8728	1,0293	1,3514	3,4118
Ω_{DI}	FSDT	0,7541	0,4180	0,5702	1,5347	
	HSNT	0,7859	0,4319	0,5671	1,4317	
1	Ω^U	FSDT	24,2991	21,2274	16,2526	14,7490
		HSNT	23,3961	20,6430	16,2627	14,9686
	Ω^L	FSDT	20,0995	18,9044	13,0736	5,5747
		HSNT	19,6397	18,5824	13,5516	7,8994
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	4,1996	2,3230	3,1790	9,1743
		HSNT	3,7564	2,0606	2,7111	7,0693
Ω_{DI}	FSDT	1,5132	0,8371	1,1455	3,3057	
	HSNT	1,5763	0,8647	1,1377	2,9664	

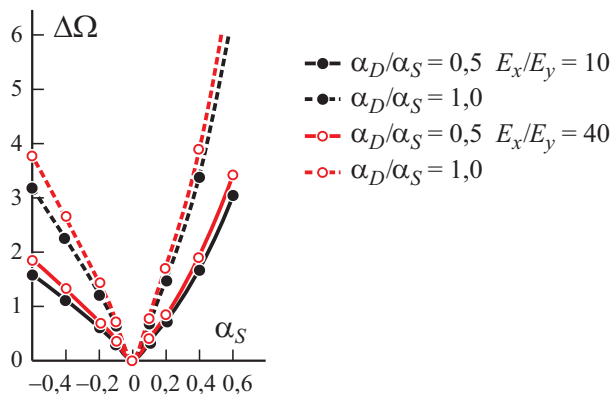


Рис. 7. Влияние параметра нагрузки на область неустойчивости при разных статических нагрузках: $a/b = 1$, $a/h = 5$, $n = 1$, $S = 0$.

ской нагрузки на величину Ω_{DI} аналогично таковому на область неустойчивости (см. рис. 3 и 4). Кроме того, сжимающая статическая нагрузка увеличивает индекс динамической неустойчивости больше, чем растягивающая, т.е. сжимающая нагрузка увеличивает неустойчивость композитной пластины больше, чем растягивающая.

Влияние отношения параметров нагрузки α_D/α_S на частоту возбуждения, область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости пластин из слоистых композитов при разных статических нагрузках иллюстрируют данные табл. 6. По мере увеличения отношения параметров нагрузки верхняя частота возбуждения, область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости увеличиваются, а нижняя частота возбуждения демонстрирует обратную тенденцию. При увеличении сжимающей или растягивающей статической нагрузки область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости увеличиваются. Из данных табл. 6 видно, что разница между результатами FSDT и HSNT возрастает с уве-

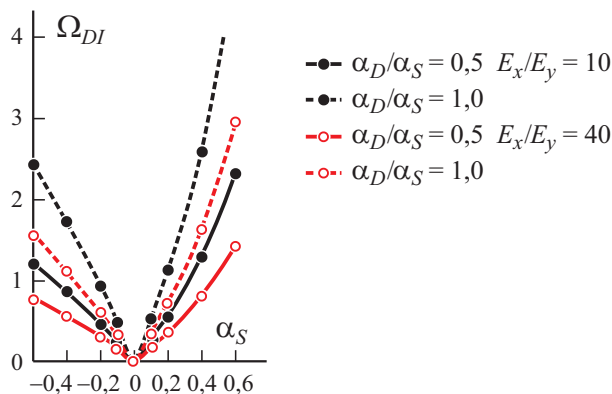


Рис. 8. Влияние параметра нагрузки на величину Ω_{DI} при разных статических нагрузках: $a/b = 1$, $a/h = 5$, $n = 1$, $S = 0$.

Табл. 7

Влияние параметра изгибного напряжения на частоты возбуждения, область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости композитных пластин при разных сжимающих нагрузках ($a/b = 1$, $a/h = 5$, $n = 1$, $E_x/E_y = 40$, $\alpha_D/\alpha_S = 0,3$)

S	A	Теория	α_S					
			0	0,15	0,3	0,45	0,6	
0	Ω^U	FSDT	17,6284	16,4663	15,2157	13,8526	12,3399	
		HSNT	17,4611	16,4480	15,3683	14,2067	12,9414	
	Ω^L	FSDT	17,6284	16,0361	14,2671	12,2451	9,8151	
		HSNT	17,4611	16,0752	14,5580	12,8630	10,9078	
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	0,4303	0,9486	1,6075	2,5248	
		HSNT	0	0,3728	0,8103	1,3437	2,0335	
	Ω_{DI}	FSDT	0	0,1550	0,3418	0,5792	0,9097	
		HSNT	0	0,1564	0,3400	0,5638	0,8533	
	5	Ω^U	FSDT	17,6284	16,4644	15,2075	13,8325	12,2996
			HSNT	17,4611	16,4401	15,3317	14,1153	12,7599
Ω^L		FSDT	17,6284	16,0325	14,2511	12,2033	9,7219	
		HSNT	17,4611	16,0598	14,4858	12,6749	10,5051	
$\Delta\Omega^U$		FSDT	0	0,4319	0,9564	1,6292	2,5777	
		HSNT	0	0,3803	0,8459	1,4404	2,2548	
Ω_{DI}		FSDT	0	0,1556	0,3446	0,5870	0,9288	
		HSNT	0	0,1596	0,3550	0,6044	0,9462	
10		Ω^U	FSDT	17,6284	16,4588	15,1830	13,7715	12,1768
			HSNT	17,4611	16,4138	15,2157	13,8275	12,1843
	Ω^L	FSDT	17,6284	16,0219	14,2031	12,0758	9,4325	
		HSNT	17,4611	16,0099	14,2587	12,0776	9,1641	
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	0,4369	0,9799	1,6957	2,7444	
		HSNT	0	0,4040	0,9570	1,7500	3,0202	
	Ω_{DI}	FSDT	0	0,1574	0,3531	0,6110	0,9889	
		HSNT	0	0,1695	0,4016	0,7343	1,1674	

личением статической нагрузки. При действии большой сжимающей статической нагрузки и большом отношении α_D/α_S расхождение результатов, предсказываемых обеими теориями, становится более явным. Тенденции изменения области неустойчивости и индекса динамической неустойчивости от действия статических нагрузок на композитные пластины с разным отношением параметров нагрузки и модулей упругости, рассчитанных с помощью HSNT, иллюстрируют данные рис. 7 и 8 соответственно. При разном отношении α_D/α_S влияние сжимающей нагрузки на область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости больше, чем растягивающей. Независимо от отношения параметров нагрузки

Табл. 8

Влияние параметра изгибного напряжения на частоты возбуждения, область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости композитных пластин при разных динамических нагрузках ($a/b = 1$, $a/h = 5$, $n = 1$, $E_x/E_y = 40$, $\alpha_S = 0,3$)

S	A	Теория	α_D				
			0	0,2	0,4	0,6	0,8
0	Ω^U	FSDT	14,7490	15,0617	15,3681	15,6685	15,9632
		HSNT	14,9686	15,2362	15,4992	15,7578	16,0122
	Ω^L	FSDT	14,7490	14,4295	14,1028	13,7683	13,4254
		HSNT	14,9686	14,6961	14,4185	14,1354	13,8466
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	0,6322	1,2654	1,9002	2,5378
		HSNT	0	0,5401	1,0807	1,6224	2,1657
Ω_{DI}	FSDT	0	0,2278	0,4559	0,6847	0,9144	
	HSNT	0	0,2266	0,4535	0,6812	0,9088	
5	Ω^U	FSDT	14,7374	15,0525	15,3610	15,6631	15,9593
		HSNT	14,9160	15,1947	15,4673	15,7340	15,9953
	Ω^L	FSDT	14,7374	14,4151	14,0852	13,7471	13,4003
		HSNT	14,9160	14,6309	14,3390	14,0397	13,7328
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	0,6374	1,2758	1,9160	2,5590
		HSNT	0	0,5638	1,1283	1,6943	2,2625
Ω_{DI}	FSDT	0	0,2297	0,4597	0,6904	0,9221	
	HSNT	0	0,2366	0,4735	0,7110	0,9494	
10	Ω^U	FSDT	14,7023	15,0247	15,3394	15,6470	15,9477
		HSNT	14,7501	15,0632	15,3656	15,6579	15,9406
	Ω^L	FSDT	14,7023	14,3716	14,0322	13,6833	13,3243
		HSNT	14,7501	14,4255	14,0887	13,7388	13,3746
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	0,6531	1,3072	1,9636	2,6234
		HSNT	0	0,6377	1,2769	1,9191	2,5660
Ω_{DI}	FSDT	0	0,2353	0,4710	0,7075	0,9453	
	HSNT	0	0,2676	0,5358	0,8053	1,0768	

увеличение отношения E_1/E_2 увеличивает область неустойчивости, но уменьшает индекс динамической неустойчивости.

Данные табл. 7 и 8 иллюстрируют влияние отношения $S = \sigma_m / \sigma_n$ (изгибающего напряжения к нормальному) на динамическую неустойчивость композитных пластин, подверженных разным статическим и динамическим нагрузкам. С увеличением значения S частота возбуждения уменьшается, а область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости возрастают. Влияние отношения S невелико. Видно, что с увеличением значения S разница между результатами, рассчитанными с помощью FSDT

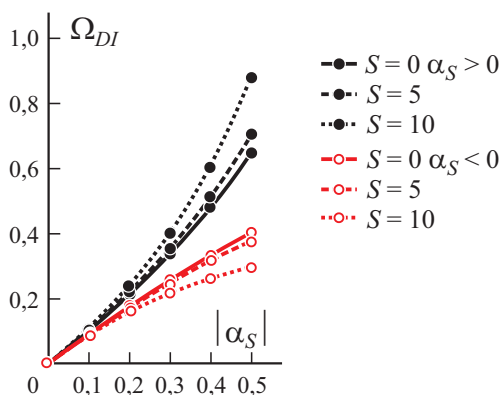


Рис. 9. Влияние параметра изгибного напряжения на величину Ω_{DI} при разных статических нагрузках: $a/b = 1, a/h = 5, E_x/E_y = 40, n = 1, \alpha_D/|\alpha_S| = 0,3$.

и HSNT, уменьшается для частоты возбуждения и области неустойчивости и возрастает для индекса динамической неустойчивости. При этом, чем больше значение S , тем очевиднее разница между результатами FSDT и HSNT для индекса динамической неустойчивости. Например, для композитных пластин с отношением $S=10$ при $\alpha_D/\alpha_S=0,3$ и $\alpha_S \geq 0,3$ или $\alpha_S=0,3$ и $\alpha_D \geq 0,2$ разница между индексами динамической неустойчивости, рассчитанными с помощью FSDT и HSNT, превышает 10%. Зависимости индекса динамической неустойчивости Ω_{DI} композитных пластин от параметра статической $|\alpha_S|$ и динамической α_D нагрузки при разном значении параметра S , рассчитанные с помощью HSNT, приведены на рис. 9 и 10 соответственно. Результаты свидетельствуют о том, что сжимающая статическая нагрузка на композитную пластину с большим значением параметра S оказывает большее упрочняющее влияние на индекс динамической неустойчивости; растягивающая статическая нагрузка

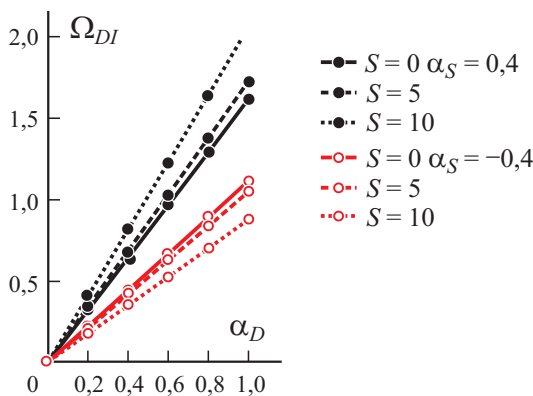


Рис. 10. То же при разных динамических нагрузках: $a/b = 1, a/h = 5, E_x/E_y = 40, n = 1, \alpha_S = 0,1$.

имеет обратный эффект. Кроме того, установлено, что разница между результатами, рассчитанными при одинаковой по модулю растягивающей и сжимающей статической нагрузке, возрастает с увеличением значения параметра S . Композитная плита, подверженная растягивающей нагрузке с большим значением параметра изгиба S , динамически более устойчива.

Заключение

С помощью теории пластин высокого порядка исследовано и описано динамическое поведение пластин из слоистых композитов, подверженных периодической нагрузке. Из полученных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Статические и динамические нагрузки и отношение модулей упругости оказывают значительное влияние на частоту возбуждения, область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости. Напряжение изгиба оказывает на них незначительное влияние.

2. По мере уменьшения отношения модулей упругости область неустойчивости при действии статической растягивающей или сжимающей нагрузки увеличивается, а индекс динамической неустойчивости уменьшается. При действии статической сжимающей нагрузки изгибающее напряжение увеличивает область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости; статическая растягивающая нагрузка оказывает противоположный эффект.

3. При увеличении статической и динамической нагрузки, а также отношения модулей упругости разница между результатами, рассчитанными с помощью FSDT и HSNT, становится более заметной. Это особенно важно для пластин из слоистых композитов, подверженных сжимающей статической нагрузке. Применение теории HSNT, учитывающей члены высокого порядка поля перемещений, обеспечивает надежную оценку области неустойчивости и динамической неустойчивости композитных пластин, особенно при большом отношении модулей упругости, параметре изгиба, а также больших статических и динамических нагрузках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bolotin V. V.* The Dynamic Stability of Elastic Systems. — San Francisco: Holden-Day, 1964.
2. *Vijayaraghavan A. and Evan-Iwanowski R. M.* Parametric instability of circular cylindrical shells // J. Appl. Mech. — 1967. — Vol. 34. — P. 985—990.
3. *Mohamad S., Rani Q., Sullivan W., and Wang W.* Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000-2009 // Compos. Struct. — 2010. — Vol. 93. — P. 14—31.
4. *Fazilati J. and Ovesy H. R.* Dynamic instability analysis of composite laminated thin-walled structures using two versions of FSM // Compos. Struct. — 2010. — Vol. 92. — P. 2060—2065.

5. *Ovesy H. R. and Fazilati J.* Parametric instability analysis of laminated composite curved shells subjected to non-uniform in-plane load // *Compos. Struct.* — 2014. — Vol. 108. — P. 449—455.
6. *Kao J. Y., Chen C. S., and Chen W. R.* Parametric vibration response of foam-filled sandwich plates under periodic loads // *Mech. Compos. Mater.* — 2012. — Vol. 48. — P. 525—538.
7. *Chen W. R., Chen C. S., and Shyu J. H.* Stability of parametric vibrations of laminated composite plates // *Appl. Math. Comput.* — 2013. — Vol. 223. — P. 127—138.
8. *Darabi M. and Ganesan R.* Nonlinear dynamic instability analysis of laminated composite thin plates subjected to periodic in-plane loads // *Nonlinear Dynamics.* — 2018. — Vol. 91. — P. 187—215.
9. *Sahoo R. and Singh B. N.* Assessment of dynamic instability of laminated composite-sandwich plates // *Aerospace Sci. Technol.* — 2018. — Vol. 81. — P. 41—52.
10. *Rasool M. and Singha M. K.* Stability behavior of variable stiffness composite panels under periodic in-plane shear and compression // *Composites: Part B.* — 2019. — Vol. 172. — P. 472—484.
11. *Mohanty J., Sahu S. K., and Parhi P. K.* Parametric instability of delaminated composite plates subjected to periodic in-plane loading // *J. Vib. Control.* — 2015. — Vol. 21. — P. 419—434.
12. *Lee S. Y.* Finite element dynamic stability analysis of laminated composite skew plates containing cutouts based on HSDT // *Compos. Sci. Technol.* — 2010. — Vol. 70. — P. 1249—1257.
13. *Sankar A., Natarajan S., and Ganapathi M.* Dynamic instability analysis of sandwich plates with CNT reinforced facesheets // *Compos. Struct.* — 2016. — Vol. 146. — P. 187—200.
14. *Ramachandra L. S. and Panda S. K.* Dynamic instability of composite plates subjected to non-uniform in-plane loads // *J. Sound Vib.* — 2012. — Vol. 331. — P. 53—65.
15. *Noh M. H. and Lee S. Y.* Dynamic instability of delaminated composite skew plates subjected to combined static and dynamic loads based on HSDT // *Composites: Part B.* — 2014. — Vol. 58. — P. 113—121.
16. *Kumar R. A. and Panda S. K.* Parametric resonance of composite skew plate under non-uniform in-plane loading // *Struct. Eng. Mech.* — 2015. — Vol. 55. — P. 435—459.
17. *Adhikari B. and Singh B. N.* Parametric instability analysis of laminated composite plate subject to various types of non-uniform harmonic in-plane edge load // *Appl. Math. Comput.* — 2020. — Vol. 373. — P. 125026.
18. *Lo K. H., Christensen R. M., and Wu E. M.* A high-order theory of plate deformation, part 2: Laminated plates // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* — 1977. — Vol. 44. — P. 669—676.
19. *Brunell E. J. and Robertson S. R.* Vibrations of an initially stressed thick plate // *J. Sound Vib.* — 1976. — Vol. 45. — P. 405—416.
20. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* — 1945. — Vol. 12, No. 2. — P. 69—77.
21. *Mindlin R. D.* Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* — 1951. — Vol. 18, No. 1. — P. 31—38.
22. *Essenbuge F.* On the significance of the inclusion of the effect of transverse normal strain in problem involving beams with surface constrains // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* — 1975. — Vol. 42. — P. 127—132.

23. *Pandya B. N. and Kant T.* Finite element stress analysis of laminated composite plates using higher order displacement model // *Compos. Sci. Technol.* — 1988. — Vol. 32. — P. 137—155.

24. *Levinson M.* An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates // *Mech. Res. Commun.* — 1980. — Vol. 7, No. 6. — P. 343—350.

25. *Reddy J. N.* A simple high-order theory for laminated composite plates // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* — 1984. — Vol. 51, No. 4. — P. 745—752.

26. *Chen C. S., Hsu C. Y., and Tzou G. J.* Vibration and stability of functionally graded plates based on a high-order deformation theory // *J. Reinf. Plast. Compos.* — 2009. — Vol. 28. — P. 1215—1234.

27. *Whitney J. M. and Pagano N. J.* Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* — 1970. — Vol. 37, No. 4. — P. 1031—1036.

28. *Kant T. and Swaminathan K.* Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a high-order refined theory // *Compos. Struct.* — 2001. — Vol. 53. — P. 73—85.

29. *Wang S. and Dawe D. J.* Dynamic instability of composite laminated rectangular plates and prismatic plate structures // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* — 2002. — Vol. 191. — P. 1791—1826.

30. *Chen W. R., Chen C. S., and Shyu J. H.* Stability of parametric vibrations of laminated composite plates // *Appl. Math. Comput.* — 2013. — Vol. 223. — P. 127—138.

Приложение

Выражения для Q

$$\begin{bmatrix} [X_1] \\ [X_2] \\ Q_{11} \\ [X_3] \\ Q_{17} \\ [X_4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_1] [B_1] [A_2] [D_1] 2[B_2] [E_1] \\ [B_1] [D_1] [B_2] [E_1] 2[D_2] [F_1] \\ [A_3] [B_3] A_{33} [D_3] 2B_{33} [E_3] \\ [D_1] [E_1] [D_2] [F_1] 2[E_2] [G_1] \\ [B_3] [D_3] B_{33} [E_3] 2D_{33} [F_3] \\ [E_1] [F_1] [E_2] [G_1] 2[F_2] [H_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T_1] \\ [T_2] \\ [\varphi_z] \\ [T_3] \\ [\xi_z] \\ [T_4] \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} [X_5] \\ [X_6] \\ [X_7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_4] [A_4] [B_4] 2[B_4] [D_4] 3[D_4] \\ [B_4] [B_4] [D_4] 2[D_4] [E_4] 3[E_4] \\ [D_4] [D_4] [E_4] 2[E_4] [F_4] 3[F_4] \end{bmatrix} [[X_8]],$$

где

$$\begin{aligned} [X_1] &= [Q_1 Q_2 Q_3]^T, [X_2] = [Q_6 Q_7 Q_8]^T, [X_3] = [Q_{12} Q_{13} Q_{14}]^T, \\ [X_4] &= [Q_{18} Q_{19} Q_{20}]^T, [X_5] = [Q_4 Q_5]^T, [X_6] = [Q_9 Q_{10}]^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [X_7] &= [Q_{15} Q_{16}]^T, \quad [[X_8]] = [[T_5][T_6][T_7][T_8][T_9][T_{10}]]^T, \\
 [T_1] &= [u_{x,x} \ u_{x,y} \ u_{y,x} \ u_{y,y}]^T, \quad [T_2] = [\varphi_{x,x} \ \varphi_{x,y} \ \varphi_{y,x} \ \varphi_{y,y}]^T, \\
 [T_3] &= [\xi_{x,x} \ \xi_{x,y} \ \xi_{y,x} \ \xi_{y,y}]^T, \quad [T_4] = [\phi_{x,x} \ \phi_{x,y} \ \phi_{y,x} \ \phi_{y,y}]^T, \\
 [T_5] &= [w_{,x} \ w_{,y}]^T, \quad [T_6] = [\varphi_x \ \varphi_y]^T, \quad [T_7] = [\varphi_{z,x} \ \varphi_{z,y}]^T, \\
 [T_8] &= [\xi_x \ \xi_y]^T, \quad [T_9] = [\xi_{z,x} \ \xi_{z,y}]^T, \quad [T_{10}] = [\phi_x \ \phi_y]^T.
 \end{aligned}$$

Матрицы $[A_i]$, $[B_i]$, $[D_i]$, $[E_i]$, $[F_i]$, $[G_i]$ и $[H_i]$ можно получить с помощью выражений

$$\begin{aligned}
 [\Gamma_1] &= \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{16} & \Gamma_{16} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{16} & \Gamma_{66} & \Gamma_{66} & \Gamma_{26} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{26} & \Gamma_{26} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = A, B, D, E, F, G^*, H, \\
 [\Gamma_2] &= [\Gamma_{13} \ \Gamma_{36} \ \Gamma_{23}]^T, \quad \Gamma = A, B, D, E, F, \\
 [\Gamma_3] &= [\Gamma_{13} \ \Gamma_{36} \ \Gamma_{36} \ \Gamma_{23}], \quad \Gamma = A, B, D, E, F, \\
 [\Gamma_4] &= \begin{bmatrix} \Gamma_{55} & \Gamma_{45} \\ \Gamma_{45} & \Gamma_{55} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = A, B, D, E, F,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}) &= \int C_{ij} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) dz \\
 (i, j &= 1, 2, 3, 4, 5, 6).
 \end{aligned}$$

Здесь C_{ij} — компоненты матрицы жесткости; $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}$ — разные матрицы жесткости слоистого композита. Выражения для членов R, S, U, V, W имеют вид

$$\begin{aligned}
 \{O_1\} &= [\Sigma_{xx}] \{\Delta_{xx}\}, \{O_2\} = [\Sigma_{xy}] \{\Delta_{xy}\}, \{O_3\} = [\Sigma_{xx}] \{\Delta_{yx}\}, \\
 \{O_4\} &= [\Sigma_{xy}] \{\Delta_{yy}\}, \{O_5\} = [\Sigma_{yy}] \{\Delta_{xy}\}, \{O_6\} = [\Sigma_{xy}] \{\Delta_{xx}\}, \\
 \{O_7\} &= [\Sigma_{yy}] \{\Delta_{yy}\}, \{O_8\} = [\Sigma_{xy}] \{\Delta_{yx}\}, \{O_9\} = [\Sigma_{xz}] \{\Delta_{zx}\}, \\
 \{O_{10}\} &= [\Sigma_{yz}] \{\Delta_{zx}\}, \{O_{11}\} = [\Sigma_{xz}] \{\Delta_{zy}\}, \{O_{12}\} = [\Sigma_{yz}] \{\Delta_{zy}\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{O_{13}\} &= [\gamma_{xx}] \{\Delta_x\}, \{O_{14}\} = [\gamma_{xy}] \{\Delta_y\}, \{O_{15}\} = [\gamma_{xy}] \{\Delta_x\}, \\ \{O_{16}\} &= [\gamma_{yy}] \{\Delta_y\}, \{O_{17}\} = [\Omega_{xz}] \{\pi_z\}, \{O_{18}\} = [\Omega_{yz}] \{\pi_z\}, \\ \{O_{19}\} &= [\Sigma_{zx}] \{\Delta_{xx}\}, \{O_{20}\} = [\Sigma_{zy}] \{\Delta_{xy}\}, \{O_{21}\} = [\Sigma_{zz}] \{\Delta_{zx}\}, \\ \{O_{22}\} &= [\Sigma_{zx}] \{\Delta_{yx}\}, \{O_{23}\} = [\Sigma_{zy}] \{\Delta_{yy}\}, \{O_{24}\} = [\Sigma_{zz}] \{\Delta_{zy}\}, \\ \{O_{25}\} &= [\gamma_{zx}] \{\Delta_x\}, \{O_{26}\} = [\gamma_{zy}] \{\Delta_y\}, \{O_{27}\} = [\Omega_{zz}] \{\pi_z\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \{O_1\} &= \{R_1, R_2, R_3, R_4\}, \{O_2\} = \{R_5, R_6, R_7, R_8\}, \{O_3\} = \{R_9, R_{10}, R_{11}, R_{12}\}, \\ \{O_4\} &= \{R_{13}, R_{14}, R_{15}, R_{16}\}, \{O_5\} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}, \{O_6\} = \{S_5, S_6, S_7, S_8\}, \\ \{O_7\} &= \{S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}\}, \{O_8\} = \{S_{13}, S_{14}, S_{15}, S_{16}\}, \\ \{O_9\} &= \{R_{17}, R_{18}, R_{19}, R_{20}\}, \{O_{10}\} = \{S_{17}, S_{18}, S_{19}, S_{20}\}, \\ \{O_{11}\} &= \{R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24}\}, \{O_{12}\} = \{S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24}\}, \\ \{O_{13}\} &= \{R_{30}, R_{31}, R_{32}\}, \{O_{14}\} = \{R_{33}, R_{34}, R_{35}\}, \{O_{15}\} = \{S_{30}, S_{31}, S_{32}\}, \\ \{O_{16}\} &= \{S_{33}, S_{34}, S_{35}\}, \{O_{17}\} = \{R_{25}, R_{26}, R_{27}\}, \{O_{18}\} = \{S_{25}, S_{26}, S_{27}\}, \\ \{O_{19}\} &= \{U_1, U_2, U_3, U_4\}, \{O_{20}\} = \{U_5, U_6, U_7, U_8\}, \\ \{O_{21}\} &= \{W_1, W_2, W_3, W_4\}, \{O_{22}\} = \{U_9, U_{10}, U_{11}, U_{12}\}, \\ \{O_{23}\} &= \{U_{13}, U_{14}, U_{15}, U_{16}\}, \{O_{24}\} = \{W_5, W_6, W_7, W_8\}, \\ \{O_{25}\} &= \{V_1, V_2, V_3\}, \{O_{26}\} = \{V_4, V_5, V_6\}, \{O_{27}\} = \{W_9, W_{10}, W_{11}\}, \\ \{\Delta_{ij}\} &= \{u_{i,j} \ \varphi_{i,j} \ \xi_{i,j} \ \phi_{i,j}\}^T, (i, j = x, y), \{\Delta_{zi}\} = \{\varphi_i \ 2\xi_i \ 3\phi_i\}^T, (i = x, y), \\ \{\pi_i\} &= \{\varphi_i \ 2\xi_i\}^T, (i = x, y), \{\Delta_i\} = \{w_{,i} \ \varphi_{z,i} \ \xi_{z,i}\}^T, (i = x, y), \end{aligned}$$

$$[\Sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} N_{ij} & M_{ij} & M_{ij}^* & P_{ij} \\ M_{ij} & M_{ij}^* & P_{ij} & P_{ij}^* \\ M_{ij}^* & P_{ij} & P_{ij}^* & R_{ij} \\ P_{ij} & P_{ij}^* & R_{ij} & R_{ij}^* \end{bmatrix} \quad (i = x, y, z; j = x, y),$$

$$[\Sigma_{iz}] = \begin{bmatrix} N_{iz} & M_{iz} & M_{iz}^* \\ M_{iz} & M_{iz}^* & P_{iz} \\ M_{iz}^* & P_{iz} & P_{iz}^* \\ P_{iz} & P_{iz}^* & R_{iz} \end{bmatrix} \quad (i = x, y, z),$$

$$[\gamma_{ij}] = \begin{bmatrix} N_{ij} & M_{ij} & M_{ij}^* \\ M_{ij} & M_{ij}^* & P_{ij} \\ M_{ij}^* & P_{ij} & P_{ij}^* \end{bmatrix} \quad (i = x, y, z; j = x, y),$$

$$[\Omega_{iz}] = \begin{bmatrix} N_{iz} & M_{iz} \\ M_{iz} & M_{iz}^* \\ M_{iz}^* & P_{iz} \end{bmatrix} \quad (i = x, y, z).$$

Здесь N_{ij} , M_{ij} и M_{ij}^* , P_{ij} , P_{ij}^* , R_{ij} , R_{ij}^* — результирующие напряжения, связанные с произвольными периодическими напряжениями, определяемые как

$$(N_{ij}, M_{ij}, M_{ij}^*, P_{ij}, P_{ij}^*, R_{ij}, R_{ij}^*) = \int \sigma_{ij} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) dz \quad (i, j = x, y, z),$$

где результирующие высокого порядка означают моменты и сдвиговые силы высокого порядка. Следует отметить, что результирующие высокого порядка — чисто математические термины и не могут быть заданы на физических границах. Величины $f_x, f_y, f_z, m_x, m_y, m_z, n_x, n_y, n_z, q_x, q_y$ — нагрузки, включающие боковые нагрузки на верхней и нижней поверхностях пластины и силу тяжести, определенные далее. Верхние индексы + и – относятся к напряжениям, вычисляемым на верхней и нижней поверхностях пластины соответственно:

$$f_x = \int_{-h/2}^{h/2} (\overline{X_x} + \Delta X_x) dz + \sigma_{zx}^+ - \sigma_{zx}^-,$$

$$\begin{aligned}
 f_y &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_y + \Delta X_y) dz + \sigma_{zy}^+ - \sigma_{zy}^-, \\
 f_z &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_z + \Delta X_z) dz + (\sigma_{zx}^+ - \sigma_{zx}^-) (w_{,x} + z\varphi_{z,x} + z^2\xi_{z,x}) + \\
 &\quad + (w_{,y} + z\varphi_{z,y} + z^2\xi_{z,y}) (\sigma_{zy}^+ - \sigma_{zy}^-) + \sigma_{zz}^+ - \sigma_{zz}^-, \\
 m_x &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_x + \Delta X_x) z dz + h(\sigma_{zx}^+ - \sigma_{zx}^-) / 2, \\
 m_y &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_y + \Delta X_y) z dz + h(\sigma_{zy}^+ - \sigma_{zy}^-) / 2, \\
 m_z &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_z + \Delta X_z) z dz + (\sigma_{zx}^+ + \sigma_{zx}^-) (hw_{,x} + z^3\xi_{z,x} / 8) + \\
 &\quad + (h^2 / 4) \varphi_{z,x} (\sigma_{zx}^+ - \sigma_{zx}^-) + (hw_{,y} + z^3\xi_{z,y} / 8) (\sigma_{zy}^+ + \sigma_{zy}^-) + \\
 &\quad + (h^2 / 4) \varphi_{z,y} (\sigma_{zy}^+ - \sigma_{zy}^-) + z(\sigma_{zz}^+ - \sigma_{zz}^-) / 2, \\
 n_x &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_x + \Delta X_x) z^2 dz + h^2(\sigma_{zx}^+ - \sigma_{zx}^-) / 4, \\
 n_y &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_y + \Delta X_y) z^2 dz + h^2(\sigma_{zy}^+ - \sigma_{zy}^-) / 4, \\
 n_z &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_z + \Delta X_z) z^2 dz + (\sigma_{zx}^+ + \sigma_{zx}^-) (h^2 w_{,x} / 4 + z^4 \xi_{z,x} / 16) + \\
 &\quad + (h^3 / 8) \varphi_{z,x} (\sigma_{zx}^+ - \sigma_{zx}^-) + (h^2 w_{,y} / 4 + z^4 \xi_{z,y} / 16) (\sigma_{zy}^+ + \sigma_{zy}^-) + \\
 &\quad + (h^3 / 8) \varphi_{z,y} (\sigma_{zy}^+ + \sigma_{zy}^-) + z^2 (\sigma_{zz}^+ - \sigma_{zz}^-) / 4, \\
 q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_x + \Delta X_x) z^3 dz + h^3(\sigma_{zx}^+ - \sigma_{zx}^-) / 8,
 \end{aligned}$$

$$q_y = \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_y + \Delta X_y) z^3 dz + h^3 (\sigma_{zy}^+ - \sigma_{zy}^-) / 8 .$$

Термины, связанные с инерцией, определены как

$$(I_1, I_3, I_5, I_7) = \int \rho (1, z^2, z^4, z^6) dz .$$

Поступила в редакцию 02.02.2021

Окончательный вариант поступил 27.08.2021

Received Feb.2, 2021 (Aug. 27, 2021)
