

В. Н. Паймушин^{а,б}, Р. К. Газизуллин^{а,б}, С. А. Холмогоров^{а,б}, М. А. Шишов^а*

*^аКазанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева,
420111 Россия*

^бКазанский (Приволжский) федеральный университет, 420008 Россия

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕСТ-ОБРАЗЦОВ ИЗ СЛОИСТЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ СО СТРУКТУРОЙ [±45°] ПРИ ИСПЫТАНИЯХ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ ВНУТРЕННИХ ФОРМ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ¹

V. N. Paimushin, R. K. Gazizullin, S. A. Kholmogorov, and M. A. Shishov*

DEFORMATION MECHANICS OF FIBER-REINFORCED PLASTIC SPECIMENS WITH A [±45°] LAY-UP IN TENSILE AND COMPRESSION TESTS

2. INVESTIGATION OF FLAT INTERNAL BUCKLING MODES

Keywords: fiber-reinforced plastic, specimen, cross-ply lay-up, tension, compression, linearized equations, buckling modes, ultimate stress

A refined statement of linearized problems on flat internal multiscale buckling modes of a rigid lamina with either fibers or a fiber bundle is presented, taking into account their interaction with an epoxy matrix. In the prebuckling (unperturbed) state, these constituent elements are under the influence of not only shear stresses, but also tensile (compression) ones in the direction of the fibers. This prebuckling stress state is formed in fibers and fiber bundles during the tension and compression of flat test specimens from cross-ply reinforced composites with straight fibers. For statement of the problem, equations were constructed by reducing a consistent version of the geometrically nonlinear equations of elasticity theory to one-dimensional equations of the theory of straight rods. The refined Timoshenko shear model was used, taking into account the

*Автор, с которым следует вести переписку: vpajmushin@mail.ru
Corresponding author: vpajmushin@mail.ru

¹Сообщение 1 см. [36].

transverse tensile and compression strains in a rigid lamina. For epoxy layers, models of a transversely soft layer with fixed boundary planes in the perturbed state were used. They differ from the previously constructed equations by taking into account the formation of additional prebuckling tensile (compression) forces in the fiber direction in the rigid lamina of the composite. It is shown theoretically that, in $[\pm 45]_{2s}$ specimens, the most intense and continuous rearrangement of the composite structure, due to the implementation and continuous change of the studied internal buckling modes with a continuous change in the wave formation parameter, has to be observed in compression. In tension, such phenomena are possible only owing to the formation of initial shear stresses.

Ключевые слова: композит волокнистый, тест-образец, армирование косоугольное, растяжение, сжатие, уравнения линеаризованные, формы потери устойчивости, напряжение критическое

Дана уточненная постановка линеаризованных задач о плоских внутренних разномасштабных формах потери устойчивости жесткого монослоя, состоящего или из волокон, или из пучков волокон (нитей) с учетом их взаимодействия с окружающей матрицей. Они являются составными структурными элементами волокнистых композитов и находятся в докритическом (невозмущенном) состоянии под действием не только напряжений сдвига, но и растяжения (сжатия) в направлении волокон. Такое начальное напряженное состояние, как установлено в первой части статьи на основе анализа результатов теоретических и экспериментальных исследований, формируется в волокнах и пучках волокон при испытаниях на растяжение и сжатие плоских тест-образцов из косоугольно армированных композитов с прямолинейными волокнами. Для постановки задачи использованы уравнения, построенные редукцией непротиворечивого варианта геометрически нелинейных уравнений теории упругости к одномерным уравнениям теории прямых стержней на основе уточненной сдвиговой модели Тимошенко с учетом деформаций растяжения—сжатия в поперечном направлении для жесткого монослоя, для слоев связующего — модели трансверсально-мягкого слоя с неподвижными граничными плоскостями в возмущенном состоянии. Они отличаются от ранее построенных учетом формирования в жестком монослое композита дополнительных докритических усилий растяжения (сжатия) в направлении волокон. Теоретически показано, что в тест-образцах со структурой $[\pm 45]_{2s}$ наиболее интенсивная и непрерывная перестройка структуры композита из-за реализации и непрерывной смены исследуемых внутренних форм потери устойчивости при непрерывном изменении параметра волнообразования должна наблюдаться

в условиях сжатия образцов, а в условиях растяжения такие явления возможны лишь из-за формирования начальных напряжений сдвига.

Введение

Однонаправленные волокнистые композитные материалы (ВКМ) нашли широкое применение при изготовлении высоконагруженных элементов конструкций аэрокосмической техники благодаря высокой удельной прочности. Обладая сравнительно высокими прочностными характеристиками при растяжении, они характеризуются значительно меньшими значениями прочностных свойств при сжатии. Круг задач и достаточно простые для понимания их решения, связанные с испытаниями на сжатие тест-образцов из таких композитов и анализом видов разрушения при сжатии, в доступной форме освещены в монографии [1]. Известно, что при испытаниях тест-образцов поведение волокнистого композитного материала при сжатии в направлении волокон принципиально отличается от поведения при растяжении: при растяжении как образец, так и структура материала самоориентируются вдоль направления нагрузки, в то время как при сжатии материал (образец) стремится “уйти” из-под нагрузки [1]. Механизмы такого “ухода” различны и связаны с разными видами разрушения, в частности, для ВКМ со структурой $[0^\circ]_s$ (рис.1): смятие по торцу; потеря устойчивости; расслоение и/или расщепление с выщелкиванием слоев; “бочкообразование”, или расслоение посередине; образование полосы сдвига.

В сравнении с экспериментами на растяжение экспериментальное определение механических свойств волокнистых композитов при сжатии представляет собой гораздо более сложную задачу. Связано это с особенностями передачи нагрузки на рабочую часть образца. В настоящий

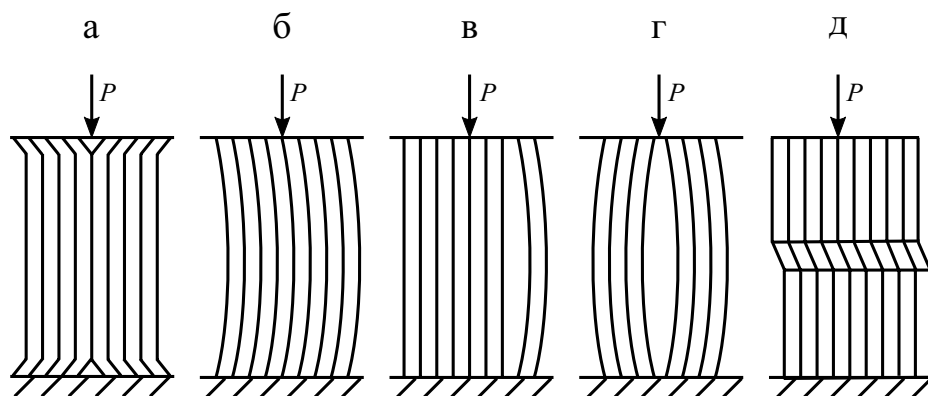


Рис. 1. Возможные виды разрушения при сжатии композитных образцов: а — смятие по торцам; б — макровыпучивание; в — выщелкивание полоски; г — расслоение посередине; д — образование полосы сдвига.

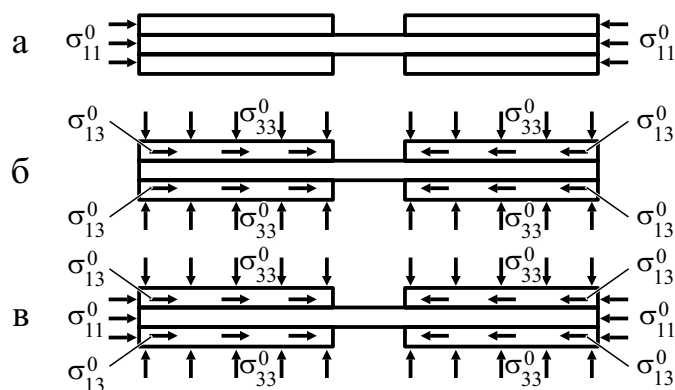


Рис. 2. Схемы нагружения образцов при испытаниях на сжатие: а — $\sigma_{11}^0 \neq 0, \sigma_{33}^0 = 0, \sigma_{13}^0 = 0$ (торцевое нагружение); б — $\sigma_{33}^0 \neq 0, \sigma_{13}^0 \neq 0, \sigma_{11}^0 = 0$ (касательное нагружение); в — $\sigma_{11}^0 \neq 0, \sigma_{33}^0 \neq 0, \sigma_{13}^0 \neq 0$ (комбинированное нагружение).

момент существует три наиболее используемых стандарта испытаний, в соответствии с которыми обеспечивается торцевое, касательное или комбинированное приложение нагрузки на тест-образец (рис. 2).

Торцевое нагружение тест-образца осуществляется, например, в соответствии со стандартом ГОСТ 4651-82 (ASTM D695), согласно которому образец с подкреплённой металлическими пластинами рабочей частью длиной около 40 мм нагружают жёсткими плитами через торцы. Такие испытания являются относительно простыми в реализации, однако для высокопрочных однонаправленных волокнистых композитов вероятность разрушения торцов тест-образца от действия контактных напряжений высока. Поэтому такую технологию испытаний можно применять только для волокнистых композитов, имеющих небольшое значение отношения предела прочности к модулю поперечного сдвига.

Нагружение тест-образцов касательными усилиями ($\sigma_{33}^0 \neq 0, \sigma_{13}^0 \neq 0, \sigma_{11}^0 = 0$) осуществляется, например, согласно стандарту ГОСТ 25.602-80 (ASTM D3410). Для передачи нагрузки на образец используется сравнительно сложное приспособление, представляющее два жёстких блока с интегрированными клиновыми зажимами. От клиновых захватов на тест-образец касательное усилие передаётся через достаточно мягкие накладки. Данный вид испытаний применим для многих видов композитных материалов, включая однонаправленные высокопрочные композиты на основе углеволокон. Преимущество метода заключается в значительно большей площади передачи нагрузки на образец, так как длину и ширину захватной части можно варьировать в широком диапазоне. Однако, как показывают многочисленные исследования (см., например [2]), имеет место концентрация касательных и поперечных нормальных напряжений в зоне перехода от мягких накладок к рабочей части образца. Такое явление

ние приводит к уменьшению замеряемого предела прочности композитного материала по сравнению с его реальным значением.

Схема испытаний с комбинированным нагружением тест-образца описана в стандарте ASTM D6641. Приспособление для таких испытаний технически проще приспособления ГОСТ 25.602-80 (ASTM D3410) ввиду отсутствия клиновых захватов. Усилие, передаваемое на тест-образец, распределяется между торцами и лицевой поверхностью тест-образца, что приводит к уменьшению концентрации напряжений. Очевидным недостатком метода является невозможность точного распределения торцевых и касательных усилий на тест-образец, вследствие чего может возрасти разброс экспериментальных данных.

В связи со сложностью и иногда противоречивостью получаемых механических характеристик с помощью трёх описанных схем нагружения значительное количество работ [2—9] было посвящено изучению влияния схем нагружения, типоразмеров тест-образцов и используемых накладок на величину предельных напряжений, определяемых в эксперименте.

Исследованиям механических характеристик при динамическом нагружении также уделяется большое внимание ввиду действия на некоторые конструкции в аэрокосмической отрасли ударных нагрузок. В рамках данного обзора невозможно охватить весь объём работ по этой тематике. В качестве примера можно отметить работы [10—12].

Большая работа по выбору оптимальной схемы эксперимента на сжатие однонаправленных волокнистых композитов была описана в [13, 14]. Авторами сделан вывод о том, что определение механических характеристик при сжатии с использованием перекрёстно армированных тест-образцов является более надёжным способом, чем однонаправленных тест-образцов.

Разрушение волокнистых композитов при сложнонапряжённом состоянии, как и для металлических материалов, может быть описано какой-либо теорией прочности. Разработанные на сегодняшний момент критерии прочности хорошо описывают разрушение при двухосном растяжении или растяжении со сдвигом, тогда как при сжатии результаты оказываются менее удовлетворительными. Специфика разрушения волокнистых композитов заключается в реализации различных механизмов разрушения матрицы, связующего или их комбинации. В [15] уделяется внимание разрушению слоистого композита при сжатии с учётом нелинейного поведения связующего. В критерии разрушения предусмотрена возможность реализации сдвиговой формы потери устойчивости за счет учёта отклонения волокон композита от прямолинейного направления. В [16] авторы, наряду с критерием разрушения волокон, ввели критерий, учитывающий разрушение связующего между волокнами. Это позволило более точно описать момент начала разрушения композита, которое не является исчерпанием несущей способности.

Оригинальный способ описания разрушения плоских пластин в рамках среды Коссера с использованием шестипараметрической теории

оболочек [17] предложен в работе [18]. Предполагали, что разрушение возможно ввиду реализации внутренней крутильной неустойчивости полубесконечной среды, модель которой основана на введении в нее чередующихся осевых и крутильных упругих элементов. Численные результаты, иллюстрирующие возможности предложенной теории, получены методом конечных элементов. Расчёты проведены для стержня полосы с отверстием посередине — инициатором возмущения при нагружении.

Следует отметить, что в механике композитных материалов уже более 50 лет существует направление исследований, связанное с постановкой и решением задач о так называемых внутренних и поверхностных (периферийных) формах потери устойчивости (ФПУ) слоистых волокнистых композитов, армированных прямолинейными или криволинейными волокнами и находящихся в тех или иных условиях нагружения. Большой цикл исследований в этом направлении был проведен во второй половине прошлого столетия, результаты которых нашли отражение во многих научных статьях и монографиях. Укажем некоторые из них: монография [19], в которой теория устойчивости волокнистых и слоистых армированных сред строится на основе строгих трехмерных уравнений теории упругости, для регулярных слоистых структур введены в рассмотрение формы потери устойчивости первого, второго, третьего и четвертого родов; монография [20], в которой для многослойных структур, состоящих из чередующихся жестких и мягких (мало жестких) слоев, на основе введения гипотез для каждого слоя получены двухмерные уравнения, порядок которых зависит от количества слоев, развита теория слоистых композитных материалов, полученная в результате перехода к системам мелкослоистой структуры, для слоистых систем регулярного строения введены в рассмотрение синфазные, антифазные и поверхностные изгибные ФПУ.

Отметим также справочник [21], в котором на основании результатов работы [22] описан один из видов разрушения композитов, являющийся следствием потери устойчивости периферийных слоев, ориентированных параллельно приложенной нагрузке, приведены простейшие формулы для определения напряжений потери устойчивости волокон, рассматриваемых как стержни на упругом основании.

В теории прочности ВКМ одно из направлений — исследование устойчивости фаз композита, так как при сжатии вдоль волокон наиболее возможным является разрушение по причине реализации сдвиговой потери устойчивости с образованием полосы сдвига. Теоретическим и экспериментальным исследованиям этого явления на настоящий момент посвящено большое количество работ (см., например, [23—30]). Общими в них являются вопросы разработки моделей, описывающих образование полосы сдвига с определением соответствующего уровня нормальных напряжений сжатия. В соответствии с [23—30] они считаются равными осредненному значению модуля поперечного сдвига волокнистого композита. Например, работа [24], носящая обзорный характер, развивает мо-

дель образования полосы сдвига путём учёта пластичности и упрочнения матрицы композита. Обзор моделей разрушения, связанных со сдвиговой ФПУ, содержится в [25], где рассматривали особенности разработанных моделей и отмечены возможности развития каждой из них.

С распространением исследовательской оптической техники стало возможным изучение структуры композита и вида разрушения фаз. Результаты таких исследований содержатся в работе [26], где изучена поверхность излома волокон в месте разрушения тест-образца после испытаний на сжатие, а также приведены значения разрушающего сжимающего напряжения по разным моделям и дано их сравнение с экспериментальными результатами.

В работе [27] для описания формирования полосы сдвига использована модель Тимошенко. Введя пластический шарнир и используя метод разделения жесткостей, показали, что влияние на критическое сжимающее напряжение может оказать не только учёт отклонения волокон композита от осевого направления, но и учёт отклонения нагрузки.

Новый подход к описанию процесса потери устойчивости волокнистого композита по сдвиговой форме предложен в [28]. В описываемом подходе, так же как и в [24, 27], учитываются пластические свойства эпоксидного связующего. Авторы показали, что величина критического сжимающего напряжения не обязательно зависит от начала текучести связующего, а может также зависеть и от сочетания напряжения текучести связующего и отклонения волокон от осевого направления. Здесь построена закритическая ветвь диаграммы деформирования при сжатии после потери устойчивости композита по сдвиговой форме.

В работе экспериментального характера [29] для исследования сдвиговой ФПУ использован специальный тест-образец с надрезом. В процессе разрушения выявили три области деформирования: упругого деформирования, упрочнения и область, в которой происходит реализация сдвиговой формы потери устойчивости.

В практических прочностных расчётах конструкций удобнее всего пользоваться механическими характеристиками монослоя, а не волокон на микроуровне. Это связано с тем, что экспериментальными способами наиболее достоверно определяются именно характеристики монослоя композита. Подход, предлагающий переход от микромасштабной (отдельного волокна) модели к мезомасштабной (минимасштабной монослоя композита), при построении теории устойчивости среды волокнистого композита описан в [30]. Этот подход основан на энергетическом принципе и приводит к осреднению параметров ячейки периодичности композита на микроуровне с помощью вероятностных подходов, например, осреднение такого параметра, как отклонение волокон композита от осевого направления. Метод гомогенизации верифицирован на примере однонаправленного композита.

Учёт влияния вязкоупругих свойств связующего композита на величину критических сжимающих напряжений в модели устойчивости развили

авторы [31]. Здесь применён критерий прочности, связывающий предел текучести по нормальным и касательным напряжениям в виде квадратичной зависимости. Проведены эксперименты по построению диаграммы сдвига при разных отрицательных и повышенных температурах. Экспериментально показано, что наибольшее критическое напряжение при сжатии однонаправленного композита достигается при окружающей температуре $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$, что объясняется минимальным влиянием вязких свойств матрицы композита на реализацию сдвиговой формы потери устойчивости.

В работе [32] предложен экспериментально-вычислительный метод определения критических сжимающих напряжений волокнистого однонаправленного композита на микроуровне в разных климатических условиях. Методика заключается в экспериментальном определении механических характеристик связующего и контактной области волокна со связующим, а также использовании этих параметров в конечно-элементном расчёте. Связующее представлено упругопластической моделью, которая может учесть разрушение при растяжении.

В развитие описанных направлений исследований в [33] для выявления внутренних и поверхностных ФПУ монослоя, находящегося внутри или на периферии слоистого композита, построены уточненные геометрически нелинейные уравнения. Они основаны на моделировании монослоя тонкой пластиной, взаимодействующей в точках граничных плоскостей со слоями связующего, моделируемого трансверсально-мягкими основаниями. Механика деформирования пластины при ее среднем изгибе описывается геометрически нелинейными соотношениями классической теории пластин, основанной на гипотезах Кирхгофа—Лява (первый вариант) и уточненной модели Тимошенко с учетом поперечных сдвигов и обжатия (второй вариант), а оснований — линеаризованными уравнениями трехмерной теории упругости, упрощенными в рамках модели трансверсально-мягкого слоя.

На основе уравнений работы [33] в [34] рассмотрены одномерные линеаризованные задачи о возможных ФПУ монослоя однонаправленных композитов с прямолинейными волокнами при сжатии в направлении волокон, находящегося или на периферии, или внутри слоистого композита. Найдены точные аналитические решения сформулированных задач и проведены расчеты, результаты которых сравнивали с ранее полученными экспериментальными данными. Сформулирован вывод о том, что для исследуемого композита при равномерном осевом сжатии образцов в направлении волокон потеря устойчивости монослоев по изгибным формам невозможна, а механизмом разрушения межслойным расслоением является потеря устойчивости монослоя по чисто сдвиговой форме, реализующаяся (в виду малого значения осредненного модуля поперечного сдвига) при значении предельного сжимающего осредненного напряжения, равного значению осредненного модуля поперечного сдвига. Показано, что такая сдвиговая ФПУ выявляется лишь на основе уравнений, построенных с использованием сдвиговой модели Тимошенко для описания процесса деформирования монослоя композита.

В завершение обзора, не претендующего на исчерпывающую полноту, следует отметить, что, несмотря на огромное количество работ по описанной тематике, многие вопросы остаются еще неисследованными. Предметом рассмотрения данной работы являются линеаризованные задачи о внутренних плоских микро- и минимасштабных ФПУ структурных элементов косоугольно армированных тест-образцов из ВКМ со схемой укладки монослоев $[\pm 45^\circ]_{2s}$ при их испытаниях на растяжение и сжатие в направлении продольной оси образца. Реализация таких ФПУ не является причиной разрушения тест-образцов при испытаниях, а ими может быть обусловлено, главным образом, физически нелинейное поведение образцов в процессе их нагружения, значительно различающееся, как установлено в первой части статьи, в условиях растяжения и сжатия. Работа представляет собой дальнейшее развитие результатов проведенных ранее исследований [35]. При постановке задачи, в отличие от [35], здесь учитывается формирование в монослое более сложного докритического напряженно-деформированного состояния (НДС), детально исследованного в первой части работы [36]. Теоретически показано, что в тест-образцах со структурой $[\pm 45^\circ]_{2s}$ наиболее интенсивная и непрерывная перестройка структуры композита из-за реализации и непрерывной смены исследуемых внутренних ФПУ при непрерывном изменении параметра волнообразования должна наблюдаться в условиях сжатия образцов, а в условиях растяжения такие явления возможны лишь из-за формирования начальных напряжений сдвига.

1. Уточненная постановка задачи о плоских ФПУ монослоя композита с учетом взаимодействия со слоями связующего

В первой части [36] было показано, что при растяжении и сжатии тест-образцов из ВКМ со структурой $[\pm 45^\circ]_{2s}$ в направлении оси Ox образца (рис.1 [36]) напряжением $\sigma_x = p$ в монослоях композита формируется сложное напряженное состояние, характеризующееся в осях ортотропии усредненными компонентами напряжений (\varkappa — величина, мало отличающаяся от единицы):

$$\sigma_{11}^0 \approx \varkappa p, \quad \sigma_{22}^0 \approx (1 - \varkappa)p, \quad \sigma_{12}^0 = p/2, \quad (1)$$

где σ_{11}^0 — нормальное напряжение в направлении волокон; σ_{22}^0 — нормальное напряжение в поперечном направлении волокон; σ_{12}^0 — касательное напряжение.

Исходя из анализа описанных в [33—35] результатов, в дополнение к предложенным в них схемам взаимодействия выделенного из композита пучка волокон (или отдельного волокна) целесообразно также рассмотреть схему [35] взаимодействия выделенного из структуры композита жесткого слоя толщиной t (рис. 3) с расположенными с двух сторон слоями связующего.

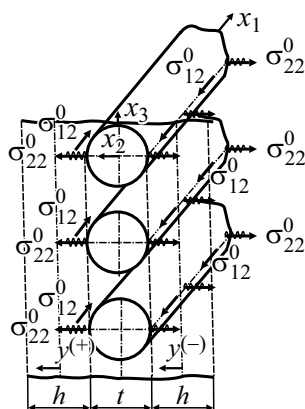


Рис. 3. Расчетная схема для постановки задачи о плоских внутренних ФПУ структурных элементов ВКМ.

На рис. 3 показаны два слоя связующего толщиной h и фрагмент монослоя, состоящего, к примеру, из трех пучков волокон (или отдельных волокон), а также выбранные оси прямоугольной декартовой системы координат, совпадающие с осями ортотропии монослоя ВКМ. Будем считать, что материал последнего в пределах представительного размера t характеризуется эффективными значениями модулей упругости первого рода $E_1, E_2 \approx E_3$, причем $E_1 \gg E_2, E_3$, и секущих модулей сдвига $\hat{G}_{12} \sim \hat{G}_{13} \sim \hat{G}_c$. Заметим, что выбор расчетной схемы в виде рис. 3 позволяет провести качественный анализ механизмов локальной структурной перестройки монослоя, обусловленной реализацией возможных изгибных, изгибно-сдвиговых или чисто сдвиговых ФПУ жесткого слоя толщиной t и маложестких слоев связующего, расположенных с двух сторон монослоя, из-за их потери устойчивости по чисто сдвиговой форме.

Известно [20], что при некоторых видах нагружения в элементах конструкции слоистой регулярной структуры возможна реализация как синфазных, так и антифазных ФПУ. Такие ФПУ возможны и в мелкослоистых волокнистых композитах, в которых модуль упругости связующего, упрощенно представляемого в виде отдельных слоев толщиной h в направлении осей $y^{(\pm)}$, на два порядка меньше эффективного модуля упругости монослоев в направлении волокон толщиной t в направлении оси x_2 и шириной c в направлении оси x_3 . Заметим, что величина последней абсолютно не влияет на результаты решения рассматриваемой далее задачи.

Как следует из анализа полученных ранее результатов [33–35], при формировании в стержне начальных напряжений $\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{12}^0$ для исследования возможных ФПУ необходимо использовать предложенные ранее [37, 38] кинематические соотношения в полном квадратичном приближении вида

$$\varepsilon_1 = e_{11} + (e_{12}^2 + e_{13}^2)/2, \dots, \quad \gamma_{12} = e_{12}(1 + e_{22}) + e_{21}(1 + e_{11}) + e_{13}e_{23}, \dots, \quad (2)$$

где $e_{\alpha\beta} = \partial u_\alpha / \partial x_\beta$; $\alpha = \overline{1,3}$; $\beta = \overline{1,3}$; u_α — компоненты вектора перемещений $\mathbf{U} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ в выбранной системе координат x_1, x_2, x_3 с единичными векторами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

С целью упрощения задачи и исследования возможных ФПУ структурных элементов слоистого композита будем считать, что при переходе из начального невозмущенного состояния в возмущенное состояние примыкающие к мягким слоям жесткие слои остаются неподвижными, что позволяет при построении математической модели процесса возмущенного деформирования отдельно взятого монослоя композита принять расчетную схему, показанную на рис. 3. Принятое упрощающее предположение, как показали результаты исследования, имеет достаточную степень точности в тех случаях, когда в объеме ВКМ имеются локальные зоны с микро- и минимасштабными размерами с ослабленными физико-механическими характеристиками E_3 и $\hat{G}_{12}, \hat{G}_{13}, \hat{G}_{23}$.

В соответствии с принятой расчетной схемой в приближении плоской задачи теории упругости (полагая $\sigma_z = 0$) для вектора перемещений рассматриваемого жесткого слоя толщиной t примем представление [35]

$$\mathbf{U} = (u + x_2\chi)\mathbf{i} + (v + x_2\theta_2)\mathbf{j}, \quad -t/2 \leq x_2 \leq t/2, \quad (3)$$

а для мягких слоев связующего, у которых точки плоскостей $y^{(\pm)} = \pm h_0$ имеют нулевые перемещения, представления [35]

$$\mathbf{U}^{(\pm)} = \left(\frac{1}{2} \mp \frac{y^{(\pm)}}{h} \right) \left[\left(u \pm \frac{t}{2}\chi \right) \mathbf{i} + \left(v \pm \frac{t}{2}\theta_2 \right) \mathbf{j} \right], \quad -h_0 \leq y^{(\pm)} \leq h_0, \quad (4)$$

где $h_0 = h/2$, причем значения $y^{(\pm)} = 0$ соответствуют срединным плоскостям мягких слоев.

В соответствии с соотношениями (2), представлением (3) и полученными ранее [35] результатами вариация приращения потенциальной энергии деформации жесткого слоя композита в возмущенном состоянии, в котором в невозмущенном (начальном) состоянии сформированы осевая сила $T_x^0 = \sigma_{11}^0 F$ (в отличие от [35], где принято $T_x^0 = 0$), перерезывающая сила $Q_y^0 = F\sigma_{12}^0$ и усилие $T_y^0 = \sigma_{22}^0 F$, связанное с напряжением поперечного обжатия σ_{22}^0 , в приближении $\sigma_z^{(\pm)} = 0$ будет равна

$$\delta\Pi = \int_0^L \left(Q_x^* \delta u' + M_z \delta \chi' + Q_y^* \delta v' + M_{xy} \delta \theta_2' + N_y^* \delta \chi + T_y^* \delta \theta_2 \right) dx_1. \quad (5)$$

Здесь для внутренних усилий и моментов приняты обозначения

$$Q_x^* = B_x (u' + v_{21}\theta_2) + Q_y^0 \chi, \quad Q_y^* = B_{xy} (v' + \chi) + Q_y^0 \theta_2 + \underline{Q_x^0 v'}, \quad (6)$$

$$N_y^* = B_{xy}(v' + \chi) + Q_y^0 u' + T_y^0 \chi, \quad T_y^* = B_y(v_{12}u' + \theta_2) + Q_y^0 v', \quad (6)$$

$$M_z = D_z \chi', \quad M_{xy} = D_{xy} \theta_2',$$

отличающиеся от результатов работы [35] наличием подчеркнутого слагаемого во втором выражении зависимостей (6). В них введены в рассмотрение жесткостные и геометрические характеристики жесткого слоя

$$B_x = \frac{E_1 F}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad B_{xy} = \tilde{G}_{12} F, \quad B_y = \frac{E_2 F}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})},$$

$$D_z = \frac{E_1 J_z}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_{xy} = \tilde{G}_{12} J_z, \quad F = tc, \quad J_z = ct^3/12.$$

Здесь c — ширина жёсткого слоя композита в направлении оси x_3 (см. рис.3), не влияющая на результаты решения рассматриваемой задачи о плоских внутренних ФПУ в структурных элементах композита; \tilde{G}_{12} — касательный модуль сдвига, использованный в работах [33—35] и вводимый в рассмотрение в соответствии с известной концепцией Шенли [39] при постановке линеаризованных задач. Методика теоретико-экспериментального определения зависимостей видов $\hat{G}_{12} = \hat{G}_{12}(\gamma_{12})$, $\tilde{G}_{12} = \tilde{G}_{12}(\gamma_{12})$ изложена в [36], а целесообразность и применимость физического соотношения вида $\sigma_{12} = \tilde{G}_{12} \gamma_{12}$, составляемого для приращений напряжения σ_{12} и деформации γ_{12} , при постановке линеаризованных задач рассматриваемого класса изучали в [40].

В соответствии с результатами [35] в мягких слоях сдвиговые $\gamma_{12}^{(\pm)}$ и осевые $\varepsilon_2^{(\pm)}$ деформации необходимо определять на основе использования геометрически нелинейных соотношений (2). В рамках представлений (4) деформации имеют вид

$$\gamma_{12}^{(-)} = \frac{1}{h} \left(u - \frac{t}{2} \chi \right) + \frac{1}{2} \left(v' - \frac{t}{2} \theta_2' \right) + \frac{1}{2h} \left[\left(u' - \frac{t}{2} \chi' \right) \left(u - \frac{t}{2} \chi \right) + \left(v' - \frac{t}{2} \theta_2' \right) \left(v - \frac{t}{2} \theta_2 \right) \right], \quad \gamma_{12}^{(+)} = -\frac{1}{h} \left(u + \frac{t}{2} \chi \right) + \frac{1}{2} \left(v' + \frac{t}{2} \theta_2' \right) - \frac{1}{2h} \left[\left(u' + \frac{t}{2} \chi' \right) \left(u + \frac{t}{2} \chi \right) + \left(v' + \frac{t}{2} \theta_2' \right) \left(v + \frac{t}{2} \theta_2 \right) \right], \quad (7)$$

$$\varepsilon_2^{(-)} = \frac{1}{h} \left(v - \frac{t}{2} \theta_2 \right) + \frac{1}{2h^2} \left(u - \frac{t}{2} \chi \right)^2, \quad \varepsilon_2^{(+)} = -\frac{1}{h} \left(v + \frac{t}{2} \theta_2 \right) + \frac{1}{2h^2} \left(u + \frac{t}{2} \chi \right)^2.$$

Будем считать формирующиеся в мягких слоях напряжения

$$\sigma_{12}^{(\pm)} = G_{12}^0 \gamma_{12}^{(\pm)}, \sigma_2^{(\pm)} = E_2^0 \varepsilon_2^{(\pm)} \quad (8)$$

постоянными в направлении осей $y^{(\pm)}$. Тогда в силу того, что в трансверсально-мягких слоях в невозмущенном состоянии сформированы только начальные напряжения $\sigma_{12}^{(\pm)0} = \sigma_{12}^0, \sigma_{22}^{(\pm)0} = \sigma_{22}^0$, сумма вариаций потенциальной энергии их деформаций будет равна [35]

$$\begin{aligned} \delta\Pi^{(+)} + \delta\Pi^{(-)} = & \int_0^L \left[\left(S_x - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 \chi' + \frac{2c}{h} \sigma_{22}^0 u \right) \delta u + \right. \\ & + \left(\hat{N}_y - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 u' + \frac{t^2 c}{2h} \sigma_{22}^0 \chi \right) \delta \chi + \left(\hat{Q}_y - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 \theta_2 \right) \delta v' + \\ & + \left(\hat{M}_{xy} - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 v \right) \delta \theta_2' + \left(S_y - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 \theta_2' \right) \delta v + \\ & \left. + \left(\hat{T}_y - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 v' \right) \delta \theta_2 - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 \chi \delta u' - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 u \delta \chi' \right] dx_1, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} S_x = G_{12}^0 c \left(\frac{2}{h} u - \frac{t}{2} \theta_2' \right), \quad \hat{N}_y = \frac{ctG_{12}^0}{2} \left(\frac{t}{h} \chi - v' \right), \\ \hat{Q}_y = \frac{G_{12}^0 c}{2} (hv' - t\chi), \quad S_y = \frac{2E_2^0 c}{h} v, \quad \hat{T}_y = \frac{E_2^0 t^2 c}{2h} \theta_2, \\ \hat{M}_{xy} = \frac{ctG_{12}^0}{4} \left(\frac{th}{2} \theta_2' - 2u \right). \end{aligned} \quad (10)$$

В соответствии с принципом возможных перемещений параметры возмущенного напряженно-деформированного состояния должны удовлетворять вариационному уравнению

$$\delta\Pi + \delta\Pi^{(+)} + \delta\Pi^{(-)} = 0,$$

из которого при подстановке выражений (5) и (9) следует система однородных дифференциальных уравнений нейтрального равновесия

$$\begin{aligned} Q_{x,1}^* - S_x - \frac{2c}{h} \sigma_{22}^0 u = 0, \quad (Q_y^* + \hat{Q}_y)_{,1} - S_y = 0, \\ M_{z,1} - N_y^* - \hat{N}_y - \frac{t^2 c}{2h} \sigma_{22}^0 \chi = 0, \quad (M_{xy} + \hat{M}_{xy})_{,1} - T_y^* - \hat{T}_y = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

которым при $x_1 = 0$, $x_1 = L$ соответствуют граничные условия

$$Q_x^* - \frac{tc}{2}\sigma_{12}^0\chi = 0 \text{ при } \delta u \neq 0, \quad Q_y^* + \widehat{Q}_y - \frac{tc}{2}\sigma_{12}^0\theta_2 = 0 \text{ при } \delta v \neq 0, \quad (12)$$

$$M_z - \frac{tc}{2}\sigma_{12}^0u = 0 \text{ при } \delta\chi \neq 0, \quad M_{xy} + \widehat{M}_{xy} - \frac{tc}{2}\sigma_{12}^0v = 0 \text{ при } \delta\theta_2 \neq 0.$$

При подстановке соотношений (6), (10) уравнения (11) приводим к виду

$$B_x(u'' + v_{21}\theta_2') + Q_y^0\chi' - cG_{12}^0\left(\frac{2}{h}u - \frac{t}{2}\theta_2'\right) - \frac{2c}{h}\sigma_{22}^0u = 0,$$

$$D_{xy}\theta_2'' + \frac{ctG_{12}^0}{4}\left(\frac{th}{2}\theta_2'' - 2u'\right) - B_{22}(v_{12}u' + \theta_2) - Q_y^0v' - \frac{ct^2E_2^0}{2h}\theta_2 = 0, \quad (13)$$

$$B_{xy}(v'' + \chi') + Q_x^0v'' + Q_y^0\theta_2' + \frac{cG_{12}^0}{2}(hv'' - t\chi') - \frac{2cE_2^0}{h}v = 0,$$

$$D_z\chi'' - B_{xy}(v' + \chi) - T_y^0\chi - Q_y^0u' + \frac{ct}{2h}G_{12}^0(hv' - t\chi) - \frac{t^2c}{2h}\sigma_{22}^0\chi = 0,$$

где подчеркнутые слагаемые, как и в уравнениях (11), обусловлены сохранением в кинематических соотношениях (7) геометрически нелинейных слагаемых.

Граничные условия (12) для уравнений (13) в силу $F = ct$ принимают вид

$$B_x(u' + v_{21}\theta_2) + \frac{Q_y^0}{2}\chi = 0 \text{ при } \delta u \neq 0,$$

$$D_{xy}\theta_2' + \frac{ctG_{12}^0}{4}\left(\frac{th}{2}\theta_2' - 2u\right) - \frac{Q_y^0}{2}v = 0 \text{ при } \delta\theta_2 \neq 0,$$

$$B_{xy}(v' + \chi) + Q_x^0v' + \frac{Q_y^0}{2}\theta_2 + \frac{cG_{12}^0}{2}(hv' - t\chi) = 0 \text{ при } \delta v \neq 0,$$

$$D_z\chi' - \frac{Q_y^0}{2}u = 0 \text{ при } \delta\chi \neq 0.$$

2. Решения задачи о плоских ФПУ элементов структуры волокнистого композита. Результаты расчетов и их анализ

Для определения возможных ФПУ структурных элементов композита решения уравнений (13), как и в [35], будем искать в виде

$$u = \tilde{u} \cos \lambda x_1, \quad v = \tilde{v} \cos \lambda x_1, \quad \chi = \tilde{\chi} \sin \lambda x_1, \quad \theta_2 = \tilde{\theta}_2 \sin \lambda x_1, \quad (14)$$

принимая для начальных усилий Q_x^0, Q_y^0, T_y^0 в жестком слое и начальных напряжений $\sigma_{22}^0, \sigma_{12}^0$ в мягких слоях представления

$$\begin{aligned} Q_x^0 &= F\sigma_{11}^0 = ct k_{11} p, \quad Q_y^0 = F\sigma_{12}^0 = ct k_{12} p, \\ T_y^0 &= F\sigma_{22}^0 = ct k_{22} p, \quad \sigma_{12}^0 = k_{12} p, \quad \sigma_{22}^0 = k_{22} p. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь в соответствии с результатами [36] и формулами (1) $k_{11} \approx 1, k_{12} = 1/2, k_{22} \approx 0 \div 0,1$; λ — параметр волнообразования.

При подстановке функций (14) и представлений (15) в уравнения (13) приходим к задаче на собственные значения системы однородных алгебраических уравнений вида

$$([A] - p[B])\{X\} = 0, \quad (16)$$

где $\{X\} = \{\tilde{u}, \tilde{\theta}_2, \tilde{v}, \tilde{\chi}\}$ — вектор амплитудных значений искомых функций; $[A], [B]$ — квадратные матрицы

$$[A] = \begin{bmatrix} -a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{12} & -a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{12} & -b_{22} \end{bmatrix},$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 2\delta k_{22}/h & 0 & 0 & -tk_{12}\lambda \\ 0 & 0 & -tk_{12}\lambda & 0 \\ 0 & -tk_{12}\lambda & \delta tk_{11}\lambda^2 & 0 \\ -tk_{12}\lambda & 0 & 0 & \delta tk_{22}\alpha \end{bmatrix}.$$

Здесь $\delta = 1$ соответствует растяжению образца, $\delta = -1$ — его сжатию; элементы матрицы $[A]$ вычисляем по формулам, приведенным в [35].

Для композитных тест-образцов, изготовленных методом холодного отверждения из углеленты ЭЛУР-П и связующего ХТ-118 (эпоксидной смолы), на основе найденных решений проведены расчеты по определению минимальных значений критических напряжений p_+^* (при растяжении $\delta = 1$), p_-^* (при сжатии $\delta = -1$), а также соответствующих им критических длин полуволн выпучивания $l_* = 1/\lambda_*$. Для указанного композита в [41] были найдены эффективные физико-механические характеристики: модули упругости при растяжении и сжатии вдоль волокон $E_1^+ \approx E_1^- \approx 100$ ГПа, пределы прочности при растяжении $\sigma_1^{\max} \approx 477$ МПа и сжатии $\sigma_1^{\max} \approx 529$ МПа;

Результаты расчётов для волокон и пучков волокон

Параметр	$k_{11} = 1, k_{12} = 1/2, k_{22} = 0$	$k_{11} = 0,9, k_{12} = 1/2, k_{22} = 0,1$	$k_{11} = 0, k_{12} = 1/2, k_{22} = 1/2$
Волокно			
p_+^* ($\delta = 1$)	22,51 МПа при $l_* = 1,15$ мкм	22,89 МПа при $l_* = 1,11$ мкм	22,70 МПа при $l_* = 1,07$ мкм
p_-^* ($\delta = -1$)	16,75 МПа при $l_* = 1,37$ мкм	16,5 МПа при $l_* = 1,39$ мкм	16,71 МПа при $l_* = 1,47$ мкм
Пучок волокон			
p_+^* ($\delta = 1$)	66 МПа при $l_* = 0,26$ мм	76,5 МПа при $l_* = 0,23$ мм	96,31 МПа при $l_* = 0,29$ мм
p_-^* ($\delta = -1$)	36,27 МПа при $l_* = 0,14$ мм	38,62 МПа при $l_* = 0,18$ мм	33,52 МПа при $l_* = 0,38$ мм

коэффициент Пуассона $\nu_{12} = 0,34$; модуль упругости при растяжении поперек волокон $E_2^+ \approx 5,7$ ГПа и предел прочности $\sigma_2^{\max} \approx 16,6$ МПа; предел прочности $\sigma_{45^\circ}^{\max} \approx 90,5$ МПа при растяжении тест-образцов с волокнами, расположенными под углами $\pm 45^\circ$ к направлению растяжения, модуль упругости и предел прочности связующего $E = 2,7$ ГПа, $\sigma^{\max} \approx 27,6$ МПа. Заметим, что в силу приведенных характеристик композита представляет интерес изучение только тех форм потери устойчивости отдельного волокна или пучка волокон, которые реализуются при значениях p^* , ограниченных неравенствами $0 \leq p^* \leq 90$ МПа.

На основе решения уравнений (16) были проведены расчеты по определению величины p^* при параметрах $t = 5$ мкм, $h = 5$ мкм, $E_1 = 200$ ГПа, $E_2 = 20$ ГПа, $\tilde{G}_{12} = 77$ ГПа, $\nu_{12} = 0,34$, $G_{12}^0 = 25$ МПа, $E_2^0 = 50$ МПа, соответствующих исследованию ФПУ на микроуровне отдельного волокна с ослабленными механическими характеристиками связующего, и параметрах $t = 0,2$ мм, $h = 0,2$ мм, $E_1 = 100$ ГПа, $E_2 = 50$ МПа, $\tilde{G}_{12} = 25$ МПа, $\nu_{12} = 0,34$, $G_{12}^0 = 25$ МПа, $E_2^0 = 50$ МПа, соответствующих исследованию устойчивости на миниуровне (мезоуровне) пучка волокон с эффективным модулем упругости E_1 и ослабленными механическими характеристиками $E_2, E_2^0, G_{12}, G_{12}^0$, одинаковыми как для пучка волокон, так и для слоев связующего.

Следует отметить, что главными характеристиками ВКМ, от которых зависит величина p^* , являются модуль упругости волокна E_1 , осреднённые модули упругости связующего E_2^0 и G_{12}^0 , а при варьировании модулем упругости волокна E_2 значения p^* практически не изменяются. Если принять $E_2^0 \neq 0$, $G_{12}^0 = 0$, то предлагаемые соотношения практически полностью соответствуют использованию известной модели винклеров-

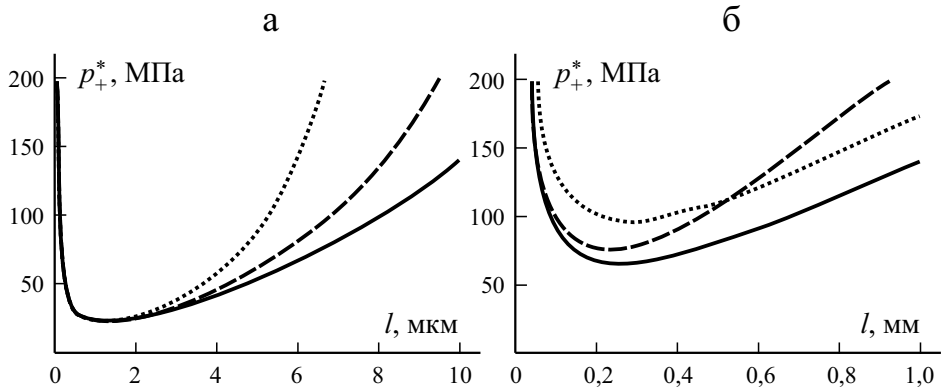


Рис. 4. Зависимости критических значений p_+^* от параметра волнообразования l при $\delta = 1$ и $k_{11} = 1, k_{12} = 1/2, k_{22} = 0$ (—); $k_{11} = 0,9, k_{12} = 1/2, k_{22} = 0,1$ (- - -); $k_{11} = 0, k_{12} = 1/2, k_{22} = 1/2$ (····).

ского основания, а дополнительный учёт $G_{12}^0 \neq 0$ соответствует использованию более содержательной модели основания, в роли которого выступает связующее.

Полученные результаты расчетов приведены в таблице, а также на рис. 4, 5 в виде зависимостей $p_{\pm}^* = p_{\pm}^*(l)$ при разных значениях $\delta, k_{11}, k_{12}, k_{22}$. Результаты, полученные при $k_{11} = 0, k_{12} = 1/2, k_{22} = 1/2$, соответствуют найденному ранее решению [35]. Анализ результатов показывает, что потеря устойчивости волокна на миниуровне практически полностью обусловлена формированием начального напряжения σ_{12}^0 как в волокне, так и в пучке волокон. Несколько иная картина наблюдается при сравнении

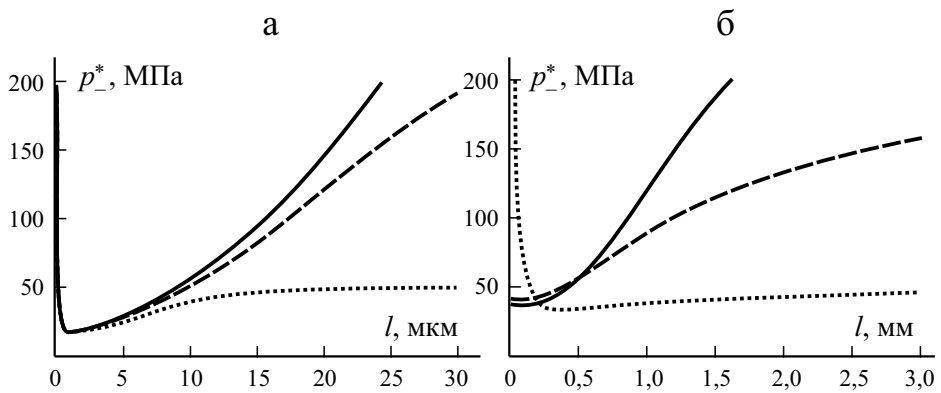


Рис. 5. Зависимости критических значений p_-^* от величины l при $\delta = -1$. Остальные обозначения те же, что на рис. 4.

значений p_+^* и p_-^* , соответствующих минимасштабным (мезомасштабным) ФПУ пучка волокон. Как и следовало ожидать, при $k_{11} = 0, k_{12} = 1/2, k_{22} = 1/2$ значение p_+^* оказалось наибольшим, а p_-^* — наименьшим.

Таким образом, в построенных уравнениях (13) главными являются параметрические слагаемые, содержащие усилия Q_x^0, Q_y^0 , которые формируются в волокне (или пучке волокон), и касательное напряжение σ_{12}^0 , формирующееся в слоях связующего. Как определяемые критические значения p_+^*, p_-^* , так и соответствующие им параметры волнообразования l , оказались зависящими от знака усилия Q_x^0 , входящего в уравнения (13). Этим (в отличие от выводов работы [35]) частично можно объяснить различие зависимостей $\sigma_x^+ = \sigma_x^+(\varepsilon_x)$, $\sigma_x^- = \sigma_x^-(\varepsilon_x)$, приведенных в [36] для случаев растяжения и сжатия образцов при однократном нагружении.

Судя по приведенным зависимостям, исследуемая плоская ФПУ отдельного волокна может реализоваться в условиях сжатия при $p_-^* \sim 20$ МПа, а в условиях растяжения — при $p_+^* \sim 25$ МПа, а ФПУ пучков волокон в составе монослоя — в условиях сжатия при $p_-^* \sim 50$ МПа, а в условиях растяжения — $p_+^* \sim 75$ МПа.

Заключение

Полученные результаты показывают, что в процессе деформирования элементов конструкции из слоистых волокнистых композитов в монослоях, в которых формируется сложное напряженно-деформированное состояние с начальными напряжениями (1), происходят структурные изменения в композите и его деградация как при нагружении, так и разгрузке конструкции, обусловленные, в частности, реализацией внутренних разномасштабных ФПУ структурных элементов композита и приводящие к формированию остаточных деформаций. Как следствие, в волокнистых композитах физически нелинейная зависимость вида $\sigma_{12} = \hat{G}_{12}(\gamma_{12})\gamma_{12}$ обусловлена и потерей устойчивости или армирующих волокон на микроуровне, или пучков волокон (монослоя) на миниуровне, зачастую сопровождающейся расслоением структуры композита в момент окончательной потери прочности. Данный эффект, как правило, визуально наблюдается в экспериментах как при сжатии тест-образцов, так и при их трехточечном изгибе [40]. Такие виды испытаний в настоящее время регламентированы стандартами испытаний. Особенности деформирования, обусловленные описанными явлениями потери устойчивости, в механике композитных материалов и изготовленных из них конструкций недостаточно полно учитываются при моделировании и анализе их прочности. Поэтому акту-

альной является проблема создания уточненных моделей деформирования и разрушения многослойных композитов с учетом возможности реализации неклассических форм потери устойчивости волокон на микроуровне (в масштабах размера поперечного сечения волокна), пучка волокон на миниуровне (в масштабах толщины одного монослоя) при учете взаимодействия волокон и пучка волокон с окружающей их матрицей, а также сдвиговых и изгибно-сдвиговых форм потери устойчивости на макроуровне (в масштабах толщины элементов конструкций в виде пластин и оболочек и размеров поперечного сечения элементов конструкций в виде стержней), теоретического моделирования испытаний тест-образцов из волокнистых композитов на однократное и многократное растяжение, сжатие, растяжение—сжатие и трехточечный изгиб с соответствующими экспериментальными исследованиями, а также уточнения стандартов испытаний волокнистых композитов с экспериментальным подтверждением результатов теоретических исследований.

Работа выполнена за счет средств Российского научного фонда (проект № 19-79-10018, раздел 1, 2) и за счёт средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета (“ПРИОРИТЕТ-2030”) (введение).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полилов А. Н.* Этюды по механике композитов. — М.: Физматлит, 2015. — 320 с.
2. *Xie M., Adams D.F.* Effect of loading method on compression testing of composite materials // *J. Compos. Mater.* — 1995. — Vol. 29, No. 12. — P. 1581—1600.
3. *Lee J., Soutis C.* A study on the compressive strength of thick carbon fibre-epoxy laminates // *Compos. Sci. Technol.* — 2007. — Vol. 67. — P. 2015—2026. doi:10.1016/j.compscitech.2006.12.001
4. *Lee J., Soutis C.* Thickness effect on the compressive strength of T800/924C carbon fibre-epoxy laminates // *Composites: Part A.* — 2005. — Vol. 36. — P. 213—227. doi:10.1016/j.compositesa.2004.06.010
5. *Adams D. F., Odom E. M.* Influence of specimen tabs of the compressive strength of a unidirectional composite material // *J. Compos. Mater.* — 1991. — Vol. 25. — P. 774—786.
6. *Adams D. F., Lewis E. Q.* Influence of specimen gage length and loading method on the axial compressive strength of a unidirectional composite material // *Exp. Mech.* — 1991. — Vol. 3. — P. 14—20.
8. *Xie M., Adams D. F.* A plasticity model for unidirectional composite materials and its applications in modeling composites testing // *Compos. Sci. Technol.* — 1995. — Vol. 54. — P. 11—21.
9. *Odom E.M., Adams D.F.* Failure modes of unidirectional carbon/epoxy composite compression specimens // *Compos.* — 1990. — Vol. 21, No. 4. — P. 289—296.
10. *Thomson D., Quino G., Cui H., Pellegrino A., Erice B., Petrinic N.* Strain-rate and off-axis loading effects on the fibre compression strength of CFRP laminates: experiments

and constitutive modelling // *Compos. Sci. Technol.* — 2020. — Vol. 195. art. No. 108210
<https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2020.108210>

11. *Ploeckl M., Kuhn P., Grosser J., Wolfahrt M., Koerber H.* A dynamic test methodology for analyzing the strain-rate effect on the longitudinal compressive behavior of fiber-reinforced composites // *Compos. Struct.* — 2017. — Vol. 180. — P. 429—438. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.08.048>

12. *Cui H., Thomson D., Pellegrino A., Wiegand J., Petrinic N.* Effect of strain rate and fibre rotation on the in-plane shear response of $\pm 45^\circ$ laminates in tension and compression test // *Compos. Sci. Technol.* — 2016. — Vol. 135. — P. 106—115. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2016.09.016>

13. *Laurin F., Paulmier P., Irisarri F. X.* Determination of the longitudinal compressive strength of a CFRP ply through a tensile test on a laminate // *Composites: Part A.* — 2018. — Vol. 113. — P. 209—219. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2018.07.026>

14. *Thomson D., Cui H., Erice B., Petrinic N.* A Study on the longitudinal compression strength of fibre reinforced composites under uniaxial of off-axis loads using cross-ply laminate specimens // *Composites: Part A.* — 2019. — Vol. 121. — P. 213—222. <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2019.03.034>

15. *Pinho S. T., Iannucci L., Robinson P.* Physically-based failure models and criteria for laminated fibre-reinforced composites with emphasis on fibre kinking: Part I: Development // *Composites: Part A.* — 2005. — Vol. 37. — P. 63—73. doi: 10.1016/j.compositesa.2005.04.016.

16. *Puck A., Shurmann H.* Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models // *Compos. Sci. Technol.* — 1998. — Vol. 58. — P. 1045—1067.

17. *Chroscielewski J., Sabik A., Sobczyk B., Witkowski W.* Nonlinear FEM 2D failure onset prediction of composite shells based on 6-parameter shell theory // *Thin-Walled Struct.* — 2016. — Vol. 105. — P. 207—219. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2016.03.024>

18. *Chroscielewski J., Francesco dell'Isola, Eremeyev V., Sabik A.* On rotational instability within the nonlinear six-parameter shell theory // *Int. J. Solids Struct.* — 2020. — Vol. 196—197. — P. 179—189. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.04.030>

19. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. — Киев: Наук. думка, 1973. — 270 с.

20. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. — М.: Машиностроение, 1980. — 375 с.

21. Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Кн.2 / Под ред. Дж. Любина; Пер. с англ. А.Б. Геллера и др; Под ред Б.Э. Геллера. — М.: Машиностроение, 1988. — 584 с.

22. *Suarez J. A., Whiteside J. B., Hadcock R. N.* The influence of local failure modes on the compressive strength of boron/epoxy composites // *ASTM Special Techn. Publ.*, 1972. — 497 p.

23. *Rosen B. W.* Mechanics of composite strengthening // *Fiber composite materials: papers presented at a seminar of the American Society for Metals, October 17 and 18, Metals Park, Ohio: American Society for Metals.* — 1965. — P. 37—75.

24. *Budiansky B., Fleck N. A.* Compressive failure of fibre composites // *J. Mech. Phys. Solids.* — 1993. — Vol. 41, No. 1. — P. 183—211.

25. *Jumahat A., Soutis C., Jones F. R., Hodzic A.* Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading // *Compos. Struct.* — 2010. — Vol. 92. — P. 295—305.

26. *Naik N. K., Kumar R. S.* Compressive strength of unidirectional composites: evaluation and comparison of prediction models // *Compos. Struct.* — 1999. — Vol. 46. — P. 299—308.

27. *Niu K., Talreja R.* Modeling of compressive failure in fiber reinforced composites // *Int. J. Solids Struct.* — 2000. — Vol. 37, No. 17. — P. 2405—2428.

28. *Davidson P., Waas A. M.* Mechanics of kinking in fiber-reinforced composites under compressive loading // *Math. Mech. Solids.* — 2016. — Vol. 21, No. 6. — P. 667—684.

29. *Pimenta S., Gutkin R., Pinho S. T., Robinson P.* A micromechanical model for kink-band formation: Part I — Experimental study and numerical modelling // *Compos. Sci. Technol.* — 2009. — Vol. 69. — Nos. 7—8. — P. 948-955.

30. *Zhang G., Latour Jr. R. A.* An analytical and numerical study of fiber microbuckling // *Compos. Sci. Technol.* — 1994. — Vol. 51, No. 1. — P. 95—109.

31. *Matsuo T., Kageyama K.* Compressive failure mechanism and strength of unidirectional thermoplastic composites based on modified kink band model // *Composites: Part A.* — 2017. — Vol. 93. — P. 117—125. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesa.2016.11.018>

32. *Naya F., Herraes M., Lopez C. S., Gonzalez C., Van der Veen S., Pons F.* Computational micromechanics of fiber kinking in unidirectional FRP under different environmental conditions // *Compos. Sci. Technol.* — 2017. — Vol. 144. — P. 26—35. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2017.03.014>

33. *Paimushin V. N.* Refined Models for an analysis of internal and external buckling modes of a monolayer in a layered composite // *Mech. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 53, No. 5. — P. 613—630.

34. *Paimushin V. N., Kholmogorov S. A., Gazizullin R. K.* Mechanics of unidirectional fiber-reinforced composites: buckling modes and failure under compression along fibers // *Mech. Compos. Mater.* — 2018. — Vol. 53, No. 6. — P. 737—752.

35. *Paimushin V. N., Gazizullin R. K., Shishov M. A.* Flat internal buckling modes of fibrous composite elements under tension and compression at the mini- and microscale // *J. App. Mech. Technical Phys.* — 2019. — Vol. 60, No. 3. — P. 548—559.

36. *Паймушин В. Н., Газизуллин Р. К., Холмогоров С. А., Шишов М. А.* Механика деформирования тест-образцов из слоистых волокнистых композитов со структурой $[\pm 45^\circ]$ при испытаниях на растяжение и сжатие. 1. Теоретико-экспериментальные методы определения механических характеристик и параметров напряженно-деформированного состояния // *Мех. композ. матер.* — 2022. — Т. 58, № 3. — С. 581—608.

37. *Паймушин В. Н., Шалашилин В. И.* Непротиворечивый вариант теории деформаций сплошных сред в квадратичном приближении // *Докл. РАН.* — 2004. — Т. 396, № 4. — С. 492—495.

38. *Паймушин В. Н., Шалашилин В. И.* О соотношениях теории деформаций в квадратичном приближении и проблемы построения уточненных вариантов геометрически нелинейной теории слоистых элементов конструкций // *Прикл. математика и механика.* — 2005. — Т. 69, № 5. — С. 861—881.

39. *Shanley F. R.* The column paradox // *J. Aeronaut. Sci.* — 1946. — Vol. 13. — No. 6. — P. 678.

40. *Paimushin V. N., Kholmogorov S. A., Makarov M. V., Tarlakovskii D. V., Lukaszewicz A.* Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests// *Z. Angew. Math. Mech.* 2019;99:e201800063.

41. *Paimushin V. N., Kholmogorov S. A.* Physical-Mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder // *Mech. Compos. Mater.*— 2018.— Vol. 54, No. 1. — P. 2—12.

Поступила в редакцию 16.07.2020

Окончательный вариант поступил 05.01.2022

Received July 16, 2020 (Jan. 5, 2022)
