

С. Д. Акбаров^{а,в}, М. Й. Анвар^б, З. Кутюг^б*

^аFaculty of Mechanical Engineering, Yildiz Technical University, 34349, Istanbul, Turkey

^бDepartment of Civil Engineering, Yildiz Technical University, 34220, Istanbul, Turkey

^вInstitute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan

ТРЕХМЕРНАЯ НЕОСЕССИМЕТРИЧНАЯ ЛОКАЛЬНАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ИЗ АНИЗОТРОПНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА¹

S. D. Akbarov, M. Y. Anwar, and Z. Kutüg*

3D NONAXISYMMETRIC LOCAL STABILITY LOSS OF A HOLLOW CYLINDER MADE OF AN ANISOTROPIC VISCOELASTIC MATERIAL

Keywords: viscoelasticity, cylindrical shell, nonaxisymmetric stability, buckling

The 3D nonaxisymmetric local stability loss problem is studied for a hollow cylinder, made of a viscoelastic composite material, under the axial compression. The criterion of an infinitesimal initial imperfection is employed, and the evolution of this imperfection is investigated by 3D geometrically nonlinear exact equations of viscoelasticity theory. The corresponding nonlinear problem is solved by the boundary perturbation method. The material of the cylinder is modeled as a viscoelastic transversely isotropic medium. Numerical results for the critical time and critical compressive forces are presented, discussed, and compared with those obtained by approximate shell theories.

Ключевые слова: вязкоупругость, оболочка цилиндрическая, устойчивость неосесимметричная, потеря устойчивости

Изучена трехмерная неосесимметричная задача локальной потери устойчивости полого цилиндра из вязкоупругого композитного материала при осевом сжатии. Использован критерий бесконечно малого начального несовершенства, эволюцию которого исследовали с помощью трехмерных геометрически

*Автор, с которым следует вести переписку: akbarov@yildiz.edu.tr
Corresponding author: akbarov@yildiz.edu.tr

¹Перевод с англ.

нелинейных точных уравнений теории вязкоупругости. Соответствующую нелинейную задачу решали методом краевых возмущений. Материал цилиндра моделировали как вязкоупругую трансверсально-изотропную среду. Численные результаты для критического времени и критических сжимающих сил обсуждены и сопоставлены с полученными с помощью приближенных теорий оболочек.

Введение

Во многих случаях анализ проблем потери устойчивости конструктивных элементов из композитных материалов требует применения трехмерной линеаризованной теории устойчивости (ТЛТУ), для получения уравнений и соотношений которой нелинейные уравнения механики деформируемого твердого тела подвергают процедуре линеаризации [1—3]. Термин “общая теория устойчивости”, используемый в [2, 4, 5], — другое обозначение ТЛТУ. Основные вклады в разработку и применение ТЛТУ при решении разных задач устойчивости конструктивных элементов из композитных материалов описаны в [6, 7].

Из научной литературы следует, что в течение XX века ТЛТУ использовали в основном при решении задач потери устойчивости элементов, изготовленных из материалов со свойствами, не зависящими от времени. В этих исследованиях применяли бифуркационный (Эйлеров) подход. Однако было установлено, что подход Эйлера не пригоден для решения этих задач при действии статических нагрузок на конструктивные элементы, изготовленные из материалов со свойствами, зависящими от времени. Поэтому в работах, перечисленных в [6, 7], предложили использовать метод критической деформации [8] для изучения подобных задач в рамках ТЛТУ.

В этом методе предполагают, что критические деформации чисто упругого и соответствующего вязкоупругого элементов идентичны. Поэтому, исходя из результатов задачи чисто упругой устойчивости, критическое время вычисляют по соответствующим уравнениям состояния для вязкоупругого случая. Ограничение метода заключается в том, что этот метод — грубый и его можно применять в случаях с однородным докритическим напряженным состоянием. Наиболее часто используемый и надежный подход к решению задач потери устойчивости для материалов со свойствами, зависящими от времени, основан на оценке незначительных начальных несовершенств [9] в элементах конструкции, растущих со временем под действием фиксированных приложенных извне статических сжимающих сил.

До последнего десятилетия XX века подход, учитывающий рост начальных бесконечно малых несовершенств, не изучали в рамках ТЛТУ. Этот подход предложен и развит в [10] для исследования не только потери устойчивости конструктивных элементов, но и потери устойчивости конструкций из композитных вязкоупругих материалов. Позже этот метод

применяли при решении задач потери устойчивости элементов конструкций и потери внутренней устойчивости однонаправленных волокнисто-армированных и слоистых вязкоупругих композитов. Обзоры этих исследований приведены в [11, 12], а также в монографии [13].

В настоящей работе представлен более подробный обзор применения ТЛТУ для исследования потери устойчивости цилиндров из вязкоупругого трансверсально-изотропного материала. Первую попытку в этой области для полых и сплошных цилиндров из вязкоупругих трансверсально-изотропных материалов предприняли в [14] и [15] соответственно. Осесимметричную локальную потерю устойчивости полого цилиндра из трансверсально-изотропного материала изучали в [16], где получили численные результаты для цилиндров, состоящих из упругих волокон в вязкоупругой матрице, ориентированных в направлении оси цилиндра. На основе подхода сплошной среды материал цилиндра моделировали как вязкоупругую трансверсально-изотропную среду.

Из приведенного краткого обзора литературы следует, что, насколько известно авторам, исследования неосесимметричной локальной потери устойчивости полых цилиндров (или цилиндрических оболочек) из вязкоупругого композитного материала в рамках подхода ТЛТУ не проводили. Результаты таких исследований имели бы не только теоретическое, но и практическое значение, и их можно было бы использовать в качестве ориентиров для результатов, полученных в рамках разных приближенных теорий оболочек.

В настоящей работе рассмотрена трехмерная неосесимметричная локальная потеря устойчивости полого цилиндра (или цилиндрической оболочки) из вязкоупругих композитных материалов. Подходы, предложенные в [14—16], развиваются и применяются к рассматриваемым случаям. Численные результаты для критического времени обсуждены и сопоставлены с полученными не только в рамках трехмерного подхода, но и теории Кирхгофа—Лява и уточненных теорий оболочек третьего порядка.

Отметим, что в целом соответствующие исследования представляют не только большой теоретический, но и практический интерес. В настоящее время их интенсивно развивают в рамках разных приближенных теорий оболочек (см., например, [17, 18]).

1. Постановка задачи

Рассмотрим полый цилиндр длиной ℓ (рис. 1), связанный с декартовой $Ox_1x_2x_3$ и цилиндрической $O\theta z$ системами координат. Местоположения точек этого цилиндра определяют координаты Лагранжа. Срединная поверхность цилиндра имеет начальное бесконечно малое неосесимметричное несовершенство, а толщина стенок цилиндра постоянна. Под термином “толщина” стенки цилиндра понимаем расстояние между точками внутренней и внешней поверхностей цилиндра, расположенных на одной

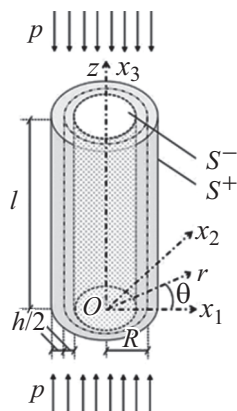


Рис. 1. Геометрия рассматриваемого полого цилиндра.

нормали к его срединной поверхности. Согласно этим предположениям срединную поверхность цилиндра можно описать уравнением

$$r = R + \varepsilon F(\theta, z), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq \ell, \quad (1)$$

где $\varepsilon \ll 1$ — бесконечно малый параметр начального несовершенства; $F(\theta, z)$ — гладкая функция координат θ и z .

Предположим, что материал цилиндра — наследственно-вязкоупругий и трансверсально-изотропный с осью симметрии Oz ; на концах цилиндра $z=0$ и $z=\ell$ действуют равномерно распределенные сжимающие силы интенсивностью p .

Учитывая эти предположения, попытаемся исследовать эволюцию во времени бесконечно малого несовершенства цилиндра. Время, по достижении которого это несовершенство начнет бесконечно возрастать, будем считать критическим. Исследуем квазистатическое равновесие цилиндра под действием сжимающих сил на его концах в рамках трехмерных геометрических нелинейных точных уравнений и соотношений теории линейной вязкоупругости для анизотропных тел. Искомые величины разложим в степенной ряд по малому параметру ε и соответствующие уравнения и граничные условия найдем отдельно для каждого приближения. Для получения граничных условий на боковых внутренней и внешней поверхностях цилиндра применим метод краевых возмущений, используя ряды для искомых величин.

Таким образом, как показано в монографии [13] и перечисленных там источниках, для определения критического времени или критической силы для соответствующей задачи потери устойчивости достаточно знать только величины, относящиеся к нулевому и первому приближениям. Таким образом, исследование неосесимметричной локальной потери устойчивости полого цилиндра сводится к решению следующих краевых задач.

Уравнения равновесия для первого приближения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(1)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}) + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(1)}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(1)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения состояния имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)} &= A_{11}^* \varepsilon_{rr}^{(1)} + A_{12}^* \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} + A_{13}^* \varepsilon_{zz}^{(1)}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} &= A_{12}^* \varepsilon_{rr}^{(1)} + A_{11}^* \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} + A_{13}^* \varepsilon_{zz}^{(1)}, \quad \sigma_{\theta z}^{(1)} = 2G^* \varepsilon_{\theta z}^{(1)}, \\ \sigma_{zz}^{(1)} &= A_{13}^* \varepsilon_{rr}^{(1)} + A_{13}^* \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} + A_{33}^* \varepsilon_{zz}^{(1)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = (A_{11}^* - A_{12}^*) \varepsilon_{r\theta}^{(1)}, \quad \sigma_{rz}^{(1)} = 2G^* \varepsilon_{rz}^{(1)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где A_{ij}^* и G^* — операторы:

$$\begin{Bmatrix} A_{ij}^* \\ G^* \end{Bmatrix} \phi(t) = \begin{Bmatrix} A_{ij0} \\ G_0 \end{Bmatrix} \phi(t) + \int_0^t \begin{Bmatrix} A_{ij1}(t-\tau) \\ G_1(t-\tau) \end{Bmatrix} \phi(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Соотношения между деформациями и перемещениями имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(1)} = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(1)}}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta^{(1)}}{r} \right), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{\theta z}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{r \partial \theta} + \frac{u_r^{(1)}}{r}, \quad \varepsilon_{zz}^{(1)} = \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно методу краевых возмущений дополним эту систему уравнений граничными условиями на боковой поверхности цилиндра

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)}(R \pm h/2, \theta, t_3, t) = 0, \quad \sigma_{rz}^{(1)}(R \pm h/2, \theta, t_3, t) = \mp \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial F}{\partial t_3}, \\ \sigma_{r\theta}^{(1)}(R \pm h/2, \theta, t_3, t) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

и его концах

$$u_r^{(1)}(r, \theta, t_3, t) \Big|_{t_3=0; \ell} = 0, \left(\sigma_{zz}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} \right) \Big|_{t_3=0; \ell} = 0, \quad (7)$$

$$u_\theta^{(1)}(r, \theta, t_3, t) \Big|_{t_3=0; \ell} = 0.$$

Напряжение $\sigma_{zz}^{(0)}$ в уравнениях (2) и соотношениях (6) и (7) относится к нулевому приближению и определяется как $\sigma_{zz}^{(0)} = -p$. Это завершает постановку задачи о неосесимметричной потере устойчивости полого цилиндра из вязкоупругих композитных материалов.

2. Метод решения

Для решения поставленной задачи сначала применим преобразование Лапласа

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad (8)$$

с $s > 0$ к уравнениям (2), (3), (5) и граничным условиям (6) и (7). Используя операторы (4) и теорему о свертке, изображение Лапласа для уравнений состояния (3) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{-(1)} &= A_{11}^* \bar{\varepsilon}_{rr}^{-(1)} + A_{12}^* \varepsilon_{\theta\theta}^{-(1)} + A_{13}^* \varepsilon_{zz}^{-(1)}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{-(1)} = A_{12}^* \varepsilon_{rr}^{-(1)} + A_{11}^* \varepsilon_{\theta\theta}^{-(1)} + A_{13}^* \varepsilon_{zz}^{-(1)}, \\ \sigma_{\theta z}^{-(1)} &= 2\bar{G}^* \varepsilon_{\theta z}^{-(1)}, \quad \sigma_{zz}^{-(1)} = A_{13}^* \varepsilon_{rr}^{-(1)} + A_{13}^* \varepsilon_{\theta\theta}^{-(1)} + A_{33}^* \varepsilon_{zz}^{-(1)}, \\ \sigma_{r\theta}^{-(1)} &= (A_{11}^* - A_{12}^*) \varepsilon_{r\theta}^{-(1)}, \quad \sigma_{rz}^{-(1)} = 2\bar{G}^* \varepsilon_{rz}^{-(1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения (2), граничные условия (6) и (7) и соотношения (5) для соответствующих величин изображений Лапласа остаются в силе.

Таким образом, получаем полную систему уравнений (2), (5), (9) и граничные условия (6) и (7) в пространстве параметра s преобразования Лапласа для определения изображений Лапласа искомых величин. При применении преобразования Лапласа к уравнениям (2) и граничным условиям (5) и (6) $\sigma_{zz}^{(0)} = \text{const}$ благодаря постоянной интенсивности внешней нагрузки p .

Теперь рассмотрим процедуру решения указанной краевой задачи, сформулированную для изображений Лапласа искомых величин. Поскольку определяющие полевые уравнения данной задачи совпадают с соответствующими уравнениями ГЛТУ, воспользуемся представлением,

разработанным ранее [3] для общего решения этих уравнений, которое можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \chi, \quad \bar{u}_\theta = -\frac{1}{r} \psi - \frac{\partial^2}{r \partial \theta \partial z} \chi, \\ \bar{u}_z &= (\bar{A}_{13}^* + \bar{G}^*)^{-1} \left[\bar{A}_{11}^* \Delta_1 + (\bar{G}^* + \sigma_{zz}^{(0)}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \chi, \\ \Delta_1 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где функции ψ и χ в (10) удовлетворяют уравнениям

$$\left(\Delta_1 + \xi_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0, \quad \left(\Delta_1 + \xi_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\Delta_1 + \xi_3^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi = 0. \quad (11)$$

В уравнениях (10) и (11)

$$\begin{aligned} \xi_1^2 &= \frac{2\bar{G}^*}{\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*}, \quad \xi_{2,3}^2 = c \pm \left(c^2 - \frac{(\bar{A}_{33}^* + \sigma_{zz}^{(0)})(\bar{G}^* + \sigma_{zz}^{(0)})}{\bar{A}_{11}^* \bar{G}^*} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ 2\bar{A}_{11}^* \bar{G}^* c &= \bar{A}_{11}^* (\bar{A}_{33}^* + \sigma_{zz}^{(0)}) + \bar{G}^{*2} - (\bar{A}_{13}^* + \bar{G}^*)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Для продолжения процедуры решения необходимо выбрать начальную форму несовершенства, т.е. функцию $F(\theta, t_3)$ в уравнении (1), также присутствующую в граничных условиях (6). В соответствии с условиями (6), (7) и неосесимметричной модой локальной потери устойчивости полого цилиндра эту функцию примем в виде

$$F(\theta, t_3) = \ell \sin n\theta \sin \frac{m\pi t_3}{\ell}, \quad (13)$$

где ℓ — полудлина периода начального несовершенства. Предположим в (1) для начального несовершенства (13) $\varepsilon F(\theta, t_3) = F(\theta, t_3) = \varepsilon \ell \sin n\theta \sin(m\pi t_3/\ell) = L \sin n\theta \sin(m\pi t_3/\ell)$, $L \ll \ell$ и $\varepsilon = L/\ell$. Отметим, что выбор функции (13) основан на неосесимметричных модах потери устойчивости круговых оболочек, наблюдаемых в чисто упругих случаях, а смысл геометрических параметров n и m (или чисел n и m) совпадает с таковыми в чисто упругих случаях.

Таким образом, согласно формуле (13) и условиям (6) функции ψ и χ можно представить в виде

$$\psi = \psi_1(s, r) \sin(n\theta) \sin(m\alpha_1 z), \quad \chi = \chi_1(s, r) \cos(n\theta) \cos(m\alpha_1 z), \quad \alpha_1 = \pi/\ell. \quad (14)$$

Подставив (14) в (12), получим уравнения для функций $\psi_1(s, r)$ и $\chi_1(s, r)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi_1}{dr_1^2} + \frac{d\psi_1}{r_1 dr_1} - \left(1 + \frac{n^2}{r_1^2}\right) \psi_1 = 0, \quad \frac{d^2\chi_{11}}{dr_2^2} + \frac{d\chi_{11}}{r_2 dr_2} - \left(1 + \frac{n^2}{r_2^2}\right) \chi_{11} = 0, \\ \frac{d^2\chi_{12}}{dr_3^2} + \frac{d\chi_{12}}{r_3 dr_3} - \left(1 + \frac{n^2}{r_3^2}\right) \chi_{12} = 0, \quad \chi_1 = \chi_{11} + \chi_{12}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $r_i = \xi_i m \alpha_1$, $i = 1, 2, 3$. Решение уравнений (15) имеет вид

$$\psi_1 = B_1 I_n(\xi_1 m \alpha r) + B_4 K_n(\xi_1 m \alpha r), \quad (16)$$

$$\chi_1 = B_2 I_n(\xi_2 m \alpha r) + B_3 I_n(\xi_3 m \alpha r) + B_5 K_n(\xi_2 m \alpha r) + B_6 K_n(\xi_3 m \alpha r),$$

где $I_n(x)$ — функция Бесселя n -го порядка чисто мнимого аргумента; $K_n(x)$ — функция Макдональда n -го порядка; B_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) — неизвестные постоянные.

Подставив решения (16) и (14) в уравнения (10), получим выражения для изображений Лапласа для перемещений, подставив которые в преобразованные по Лапласу уравнения (5), получим изображения Лапласа для деформаций. Наконец, подставив эти выражения в соотношения (9), найдем выражения изображений Лапласа для напряжений. Для сокращения объема настоящей работы эти выражения здесь не приводим.

Отметим, что эти выражения при $n = 1$ и $m = 1$ совпадают с полученными в [15] для глобальной устойчивости круглого полого цилиндра из вязкоупругих материалов. Аналогично эти выражения при $n = 0$ совпадают с полученными в [16] для осесимметричной локальной потери устойчивости полого цилиндра из вязкоупругого композитного материала.

Согласно уравнениям (14) и (10) изображения Лапласа для условий (7) удовлетворяются автоматически благодаря члену $\sin(m\alpha_1 z)$ в выражениях $\bar{u}_r^{(1)}$, $\bar{u}_\theta^{(1)}$ и члену $\cos(m\alpha_1 z)$ в выражении $\bar{u}_z^{(1)}$. Поэтому остается выполнить только условия (6), согласно которым получаем шесть неоднородных линейных уравнений для неизвестных B_1, B_2, \dots, B_6 из изображений Лапласа для этих условий. Для сокращения объема работы эти уравнения здесь также не приводим. После определения неизвестных B_1, B_2, \dots, B_6 из этой линейной неоднородной алгебраической системы уравнений получим изображения Лапласа для искомых величин.

Для определения оригиналов искомых величин применим метод обратного преобразования [19], согласно которому, например, перемещение $u_r^{(1)}(r, \theta, z, t)$ вычисляем как

$$u_r^{(1)}(r, \theta, z, t) \approx \bar{u}_r^{(1)}(r, \theta, z, s) \Big|_{s=1/(2t)}. \quad (17)$$

Аналогичным образом можно определить оригиналы для других перемещений и напряжений. Наконец, в качестве критерия потери устойчивости используем критерий начального несовершенства [9], который для рассматриваемого случая можно сформулировать следующим образом: для вязкоупругих материалов

$$\max_{\substack{t_3 \in (0, \ell) \\ r \in [R^-, R^+] \\ \theta \in [0, 2\pi]}} \left| u_r^{(1)}(r, \theta, z, t) \right| \rightarrow \infty, \text{ так как } t \rightarrow t_{cr}, \quad (18)$$

для упругих материалов

$$\max_{\substack{t_3 \in (0, \ell) \\ r \in [R^-, R^+] \\ \theta \in [0, 2\pi]}} \left| u_r^{(1)}(r, \theta, z) \right| \rightarrow \infty, \text{ так как } p \rightarrow p_{cr}. \quad (19)$$

На этом рассмотрение процедуры решения для полого цилиндра из анизотропного вязкоупругого материала с помощью теории ТЛТУ завершено.

Для иллюстрации значимости используемого трехмерного подхода по сравнению с теориями Кирхгофа—Лява и уточненными теориями оболочек третьего порядка также получили соответствующие полевые уравнения для этих теорий с применением процедуры усреднение—интегрирование применительно к уравнениям (2)—(7). В теории оболочек Кирхгофа—Лява перемещения имеют вид

$$u_r^{(1)} = w(\theta, z), \quad u_r^{(1)} = v(\theta, z) - r' \frac{\partial w}{R \partial \theta}, \quad u_z^{(1)} = u(\theta, z) - r' \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (20)$$

где $w(\theta, z)$, $v(\theta, z)$, $u(\theta, z)$ — перемещения срединной поверхности оболочки в радиальном, окружном и осевом направлениях соответственно; $r' = r - R$.

В уточненной теории оболочек третьего порядка перемещения имеют вид

$$u_r^{(1)} = w(\theta, z), \quad u_r^{(1)} = v(\theta, z) - r' \frac{\partial w}{R \partial \theta} + \left(\frac{h^2}{4} r' - \frac{1}{3} r'^3 \right) \varphi_\theta, \\ u_r^{(1)} = u(\theta, z) - r' \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{h^2}{4} r' - \frac{1}{3} r'^3 \right) \varphi_z. \quad (21)$$

3. Численные результаты и обсуждение

Рассмотрим численные результаты, полученные для вязкоупругого цилиндра не только методом ТЛТУ, но и с помощью приближенных теорий оболочек, рассмотренных ранее.

Предположим, что материал цилиндра представляет собой вязкоупругий однонаправленный композит с волокнами, ориентированными вдоль оси Oz . Известно, что в континуальном подходе такой материал можно рассматривать как трансверсально-изотропный с осью симметрии Oz . Кроме того, предположим, что материал волокон чисто упругий, а матрица линейно-вязкоупругая. Далее величины, относящиеся к матрице и волокнам, обозначим верхними индексами (1) и (2) соответственно.

Модуль Юнга $E^{(i)}$, коэффициент Пуассона $\nu^{(i)}$ и модуль сдвига $\mu^{(i)}$ равны

$$\begin{aligned}
 E^{*(1)}\varphi &= E_0^{(1)} \left[\varphi(t) - \omega_0 \Pi_\alpha^* (-\omega_0 - \omega_\infty) \varphi \right], \\
 \nu^{*(1)}\varphi &= \nu_0^{(1)} \left[\varphi(t) + \frac{1 - 2\nu_0^{(1)}}{2\nu_0^{(1)}} \omega_0 \Pi_\alpha^* (-\omega_0 - \omega_\infty) \varphi \right], \\
 \mu^{*(1)}\varphi &= \mu_0^{(1)} \left[\varphi(t) - \frac{3}{2(1 + \nu_0^{(1)})} \omega_0 \Pi_\alpha^* \left(-\frac{3}{2(1 + \nu_0^{(1)})} \omega_0 - \omega_\infty \right) \varphi \right].
 \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь $E_0^{(1)}$, $\nu_0^{(1)}$, $\mu_0^{(1)}$ — мгновенные значения модуля Юнга, коэффициента Пуассона и модуля сдвига матрицы соответственно; α , ω_0 , ω_∞ — реологические параметры вязкоупругого материала матрицы; Π_α^* — дробно-экспоненциальный оператор Работнова [20], определяемый как

$$\begin{aligned}
 \Pi_\alpha^*(x, t)\varphi &= \int_0^t \Pi_\alpha(x, t - \tau)\varphi(\tau) d\tau, \\
 \Pi_\alpha(x, t) &= t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma((1+n)(1+\alpha))}, \quad -1 < \alpha < 0,
 \end{aligned} \tag{23}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Для расчета эффективных механических свойств указанного композитного материала использовали известные выражения, представленные, например, в монографии [21] для композитных материалов. Напомним, что если составляющие композитного материала — вязкоупругие, то для получения изображений Лапласа эффективных операторов этого материала вместо механических постоянных в выражениях используют изображение Лапласа соответствующих операторов составляющих. Тогда полу-

чаем следующие выражения для изображений Лапласа \bar{A}_{11}^* , \bar{A}_{12}^* , \bar{A}_{13}^* , \bar{A}_{33}^* и \bar{G}^* :

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ij}^* &= \bar{A}_{ij}^*(\bar{\mu}^{(1)}, \bar{\mu}^{(2)}, \bar{\nu}^{(1)}, \bar{\nu}^{(2)}, \eta^{(2)}), \\ \bar{G}_{ij}^* &= \bar{G}_{ij}^*(\bar{\mu}^{(1)}, \bar{\mu}^{(2)}, \bar{\nu}^{(1)}, \bar{\nu}^{(2)}, \eta^{(2)}), \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{K}^{*(1)} &= \frac{\bar{E}^{*(1)}}{3(1-2\bar{\nu}^{*(1)})}, \quad \bar{K}^{(2)} = \frac{\bar{E}^{(2)}}{3(1-2\bar{\nu}^{(2)})}, \quad \bar{\mu}^{(2)} = \frac{\bar{E}^{(2)}}{2(1+\bar{\nu}^{(2)})}, \\ \bar{E}^{(2)} &= \frac{1}{s} E^{(2)}, \quad \bar{\nu}^{(2)} = \frac{1}{s} \nu^{(2)}, \quad \bar{E}^{*(1)} = E_0^{(1)} \left[\frac{1}{s} - \bar{\Pi}_\alpha(-\omega) \right], \\ \bar{\nu}^{*(1)} &= \nu_0^{(1)} \left[\frac{1}{s} - \frac{1-2\nu_0^{(1)}}{2\nu_0^{(1)}} \bar{\Pi}_\alpha(-\omega) \right], \\ \bar{\mu}^{*(1)} &= \mu_0^{(1)} \left[\frac{1}{s} - \frac{3}{2(1+\nu_0^{(1)})} \bar{\Pi}_\alpha \left(-\frac{3}{2(1+\nu_0^{(1)})} - \omega \right) \right], \quad \bar{\Pi}_\alpha(-\omega) = \frac{1}{s(s^{1+\alpha} + \omega)}, \end{aligned} \tag{25}$$

$\omega = \omega_\infty / \omega_0$. Введем безразмерное время $t' (= \omega_0^{1/(1+\alpha)} t)$ и примем, что $\nu^{(2)} = \nu_0^{(1)} = 0,3$ и $\eta^{(2)} = 0,5$, где $\eta^{(2)}$ — объемное содержание волокон в рассматриваемом композите. Явные выражения формул (24) здесь опущены для уменьшения объема настоящей работы. Они приведены во многих монографиях, например, в [21].

Для проверки правильности модели, предложенной в настоящей работе, локальные неосесимметричные критические напряжения потери устойчивости, полученные в рамках ТЛТУ, сравнили с классическими неосесимметричными напряжениями потери устойчивости, полученными в [22], где $h/R = 0,0025$, $R/l = 0,1252$, и предполагали, что модуль упругости и коэффициент Пуассона материала цилиндра равны $E = 207$ ГПа и $\nu = 0,3$. Неосесимметричные критические напряжения потери устойчивости, минимизированные согласно m для каждого значения n , приведены в табл. 1. Видно, что модель, разработанная в рамках ТЛТУ, хорошо согласуется с литературными данными и даже предсказывает в рассматриваемом случае меньшее значение критического напряжения потери устойчивости.

Отметим, что результаты потери устойчивости, полученные в рамках ТЛТУ, основаны на критерии (19), который использовали после решения системы уравнений для неизвестных констант B_1, B_2, \dots, B_6 в (16). Однако результаты, приведенные в [22], получены с использованием теории оболочек Кирхгофа—Лява с применением подхода собственных значений Эйлера.

Проверка достоверности предложенной модели

n	$\sigma_{cr,3D}$, ГПа, настоящая работа	σ_{cr} , ГПа, [22]
2	1,467 ($m=1$)	1,478 ($m=1$)
3	0,372 ($m=1$)	0,388 ($m=1$)
4	0,269 ($m=1$)	0,281 ($m=1$)
5	0,290 ($m=2$)	0,298 ($m=2$)
6	0,290 ($m=3$)	0,309 ($m=3$)
7	0,289 ($m=4$)	0,308 ($m=4$)
8	0,290 ($m=5$)	0,305 ($m=5$)
9	0,289 ($m=6$)	0,305 ($m=6$)
10	0,290 ($m=8$)	0,305 ($m=8$)

Кроме того, при расчете результатов настоящей работы в уравнениях (24) и (25) предполагали, что $t = 0$, $E^{(1)*} = E_0^{(1)}$, $\nu^{(1)*} = \nu_0^{(1)}$, $E^{(2)} = E_0^{(1)}$, $\nu^{(2)} = \nu_0^{(1)}$.

Из данных табл. 1 следует, что при $h/R = 0,0025$ и $R/l = 0,1252$, соответствующих очень тонкой изотропной оболочке, результаты, полученные с помощью ТЛТУ с использованием критерия начального несовершенства и теории Кирхгофа—Лява с подходом собственных значений Эйлера, очень близки. Тем не менее результаты, полученные в рамках ТЛТУ, меньше, хотя и незначительно, чем полученные в рамках теории оболочек Кирхгофа—Лява. Такая ситуация согласуется с известными механическими и инженерными соображениями и дает определенную гарантию обоснованности применяемого метода решения и алгоритма расчета.

Обсуждаемые далее численные результаты при $n=1$ и $m=1$ совпадают с найденными для глобальной потери устойчивости кругового полого вязкоупругого цилиндра [15]. Аналогично при $n=0$ численные результаты совпадают с полученными для осесимметричной локальной потери устойчивости полого вязкоупругого цилиндра [16]. На этом проверка алгоритма расчета и вычислительных программ, использованных в настоящем исследовании, завершена.

Теперь проанализируем численные результаты, полученные с помощью настоящего трехмерного подхода. Рассмотрели два случая получения результатов при безразмерном времени $t' = 0$ и $t' = \infty$. Критические силы, связанные с ними, обозначили нижними индексами 0 и ∞ . Отметим, что при вычислении критических сил при $t' = 0$ использовали постоянные $E_0^{(1)}$ и $\nu_0^{(1)}$, а при $t' = \infty$ в формуле (26) — постоянные $E^{(1)*}$ и $\nu^{(1)*}$ вместо изображений Лапласа $\bar{E}^{(1)*}$ и $\bar{\nu}^{(1)*}$ соответственно, и константы $E^{(2)}$ и $\nu^{(2)}$ вместо изображений Лапласа в уравнениях (24) и (25):

$$E_{\infty}^{(1)} = E_0^{(1)}(1 - 1/\omega) \text{ и } v_{\infty}^{(1)} = v_0^{(1)} \left[1 - (1 - 2v_0^{(1)}) / (2v_0^{(1)}\omega) \right]. \quad (26)$$

Здесь рассмотрели не только численные результаты, полученные с помощью ТЛТУ, но и с помощью теории Кирхгофа—Лява и уточненной теории оболочек третьего порядка. С помощью соотношений

$$p'_{3D.c.0} = p_{3D.c.0} / E_0^{(1)}, \quad p'_{Rf.c.0} = p_{Rf.c.0} / E_0^{(1)}, \quad p'_{K.c.0} = p_{K.c.0} / E_0^{(1)}, \quad (27)$$

$$p'_{3D.c.\infty} = p_{3D.c.\infty} / E_0^{(1)}, \quad p'_{Rf.c.\infty} = p_{Rf.c.\infty} / E_0^{(1)}, \quad p'_{K.c.\infty} = p_{K.c.\infty} / E_0^{(1)} \quad (28)$$

обозначили безразмерные критические силы, определенные в рамках ТЛТУ, уточненной теории оболочек третьего порядка и теории оболочек Кирхгофа—Лява соответственно при $t' = 0$ (27) и $t' = \infty$ (28). Согласно выражениям (26), критические силы при $t' = \infty$ должны зависеть от безразмерного реологического параметра ω . Для анализа численных результатов также ввели параметр $\lambda = m\alpha_1 R$, характеризующий количество полуволн моды потери устойчивости вдоль оси цилиндра.

Таким образом, определили параметры задачи h/R , $E^{(2)}/E_0^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v_0^{(1)}$, n , $\lambda = m\alpha_1 R$ и ω . Как уже было отмечено, предположили, что $v^{(2)} = v_0^{(1)} = 0,3$ и $\omega = 0,5$, и представленные результаты минимизировали по отношению к параметру λ .

Таким образом, рассмотрели и проанализировали численные результаты, относящиеся к критическим силам в (27) и (28) и полученные в

Табл. 2

Значения критических сил при разных значениях n ($E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$,
 $\omega = 0,5$, $\alpha = -0,5$, $h/R = 0,01$)

n	$p'_{3D.c.0} \cdot 10^2$	$p'_{Rf.c.0} \cdot 10^2$	$p'_{K.c.0} \cdot 10^2$
0	1,2810 (15,8)	1,5411 (16,3)	1,1551 (16,1)
1	1,2803 (15,7)	1,5394 (16,1)	1,5500 (15,9)
2	1,2766 (15,6)	1,5339 (15,8)	1,5451 (15,8)
3	1,2704 (15,2)	1,5247 (15,5)	1,5370 (15,5)
4	1,2616 (14,8)	1,5119 (15,0)	1,5258 (15,0)
5	1,2503 (14,2)	1,4952 (14,4)	1,5115 (14,3)
6	1,2364 (13,4)	1,4748 (13,4)	1,4942 (13,5)
7	1,2197 (12,2)	1,4503 (12,1)	1,4746 (12,4)
8	1,1996 (10,5)	1,4207 (9,80)	1,4543 (10,7)
9	1,1739 (6,70)	1,3987 (7,60)	1,4457 (9,00)
10	1,1960 (8,20)	1,4422 (8,70)	1,4847 (9,30)
11	1,2605 (9,20)	1,5356 (9,70)	1,5759 (10,0)

Табл. 3

Минимизированные значения критических сил при $t = 0$ ($\omega = 0,5, \alpha = -0,5$)

$E^{(2)}/E_0^{(1)}$	$p'_{3D.c.0} \cdot 10^2$	$p'_{Rf.c.0} \cdot 10^2$	$p'_{K.c.0} \cdot 10^2$
$h/R = 0,01$			
1	0,5917 (9, 6,9)	0,6902 (9, 7,7)	—
5	1,1739 (9, 6,7)	1,3987 (9, 7,6)	1,4457 (9, 9,0)
10	1,4750 (9, 6,4)	1,7524 (9, 7,0)	1,8156 (9, 7,7)
$h/R = 0,05$			
1	2,6776 (4, 2,7)	3,1759 (4, 2,9)	—
5	5,3637 (4, 2,4)	6,4882 (4, 2,8)	7,4973 (3, 5,9)
10	6,7914 (4, 2,4)	8,1525 (4, 2,7)	9,5435 (4, 4,0)
$h/R = 0,10$			
1	4,8733 (3, 2,1)	5,8913 (3, 2,1)	—
5	9,7918 (3, 1,8)	12,026 (3, 2,2)	15,133 (2, 4,4)
10	12,467 (3, 1,7)	15,166 (3, 2,1)	19,985 (3, 3,2)

рамках сделанных предположений. Результаты, приведенные в табл. 2, иллюстрируют критические (минимальные) сжимающие силы и параметр λ для каждого выбранного значения n . Видно, что критическая сила минимальна при $n = 9$. В табл. 3 и 4 приведены только значения критических сил, минимизированные в соответствии со значениями n и λ .

Табл. 4

Минимизированные значения критических сил при $t = \infty$ ($\omega = 0,5, \alpha = -0,5$)

$E^{(2)}/E_0^{(1)}$	$p'_{3D.c.\infty} \cdot 10^2$	$p_{Rf.c.\infty} \cdot 10^2$	$p'_{K.c.\infty} \cdot 10^2$
$h/R = 0,01$			
1	0,1653 (9, 6,4)	0,3140 (7, 6,3)	0,3344 (7, 7,2)
5	0,2463 (8, 4,2)	0,4829 (6, 4,8)	0,5192 (7, 5,8)
10	0,2889 (8, 3,6)	0,5473 (6, 4,3)	0,6012 (6, 4,4)
$h/R = 0,05$			
1	0,7612 (4, 2,5)	1,3964 (3, 2,1)	1,8428 (3, 4,1)
5	1,1328 (4, 2,1)	2,0804 (3, 2,5)	2,9358 (3, 2,8)
10	1,3508 (4, 1,7)	2,3821 (3, 2,1)	3,4546 (3, 2,4)
$h/R = 0,10$			
1	1,1759 (2, 0,5)	2,3451 (2, 1,2)	4,0681 (2, 3,4)
5	1,0774 (1, 0,1)	2,4058 (1, 0,2)	6,9603 (2, 2,3)
10	1,7775 (1, 0,1)	3,3347 (1, 0,2)	8,3660 (2, 1,9)

В табл. 3 и 4 указаны значения критических сил в (27) и (28) соответственно. Первое число в скобках указывает значение n , а второе — значение λ , при котором критические силы становятся минимальными. В табл. 2 в скобках указано только значение λ , при котором критические силы становятся минимальными для выбранного числа n . Критические силы определили при разных значениях h/R и $E^{(2)}/E_0^{(1)}$, анализ которых позволил сделать следующие выводы.

1. Во всех случаях, рассмотренных в табл. 2—4, справедливы неравенства

$$p'_{3D.c.0} < p'_{Rf.c.0} < p'_{K.c.0}, \quad p'_{3D.c.\infty} < p'_{Rf.c.\infty} < p'_{K.c.\infty}, \quad (29)$$

$$p'_{3D.c.\infty} < p'_{3D.c.0}, \quad p'_{Rf.c.\infty} < p'_{Rf.c.0}, \quad p'_{K.c.\infty} < p'_{K.c.0}. \quad (29)$$

2. Увеличение отношений h/R и $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ увеличивает критические силы $p'_{3D.c.0}$, $p'_{Rf.c.0}$ и $p'_{K.c.0}$, найденные при $t'=0$ (критические силы $p'_{3D.c.\infty}$, $p'_{Rf.c.\infty}$ и $p'_{K.c.\infty}$, определенные при $t'=\infty$), а также увеличивают разности $p'_{Rf.c.0} - p'_{3D.c.0}$, $p'_{K.c.0} - p'_{3D.c.0}$, $p'_{K.c.0} - p'_{Rf.c.0}$, $p'_{Rf.c.\infty} - p'_{3D.c.\infty}$, $p'_{K.c.\infty} - p'_{3D.c.\infty}$ и $p'_{K.c.\infty} - p'_{Rf.c.\infty}$.

3. За исключением значений $p'_{K.c.0}$, полученных при $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 1$, во всех случаях, рассмотренных в табл. 3 и 4, критические силы минимальны при n , обозначенном как n^* .

4. Соотношения между $n^*_{3D.0}$, $n^*_{Rf.0}$ и $n^*_{K.0}$, при которых критические силы $p_{3D.c.0}$, $p_{Rf.c.0}$ и $p_{K.c.0}$ минимальны, —

$$n^*_{3D.0} = n^*_{Rf.0} > n^*_{K.0}. \quad (30)$$

5. Игнорируя некоторые исключения, возникающие при $h/R = 0,01$, отношения между $n^*_{3D.\infty}$, $n^*_{Rf.\infty}$ и $n^*_{K.\infty}$ имеют место в случае, когда критические силы $p_{3D.c.\infty}$, $p_{Rf.c.\infty}$ и $p_{K.c.\infty}$ минимальны:

$$n^*_{3D.\infty} \geq n^*_{Rf.\infty} = n^*_{K.\infty}. \quad (31)$$

6. Значения n^* убывают с h/R и практически не зависят от отношения $E^{(2)}/E_0^{(1)}$.

7. Из анализа численных результатов можно вывести следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (\min(p'_{Rf.c.\infty}) / \min(p'_{3D.c.\infty})) &> (\min(p'_{Rf.c.0}) / \min(p'_{3D.c.0})), \\ (\min(p'_{Rf.c.0}) - \min(p'_{3D.c.0})) &> (\min(p'_{K.c.0}) - \min(p'_{Rf.c.0})), \end{aligned} \quad (32)$$

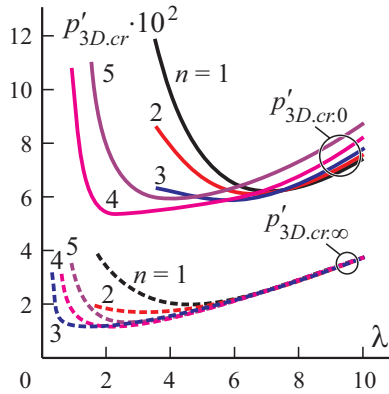


Рис. 2. Зависимости величин $p'_{3D.c.0}$ и $p'_{3D.c.\infty}$ от параметров λ и n при $h/R = 0,05$, $\omega = 0,5$, $\alpha = -0,5$, $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$.

$$\begin{aligned}
 &(\min(p'_{Rf.c.\infty}) - \min(p'_{3D.c.\infty})) > (\min(p'_{K.c.\infty}) - \min(p'_{Rf.c.\infty})), \\
 &(\min(p'_{Rf.c.\infty}) - \min(p'_{3D.c.\infty})) > (\min(p'_{Rf.c.0}) - \min(p'_{3D.c.0})), \quad (32) \\
 &(\min(p'_{K.c.\infty}) - \min(p'_{Rf.c.\infty})) > (\min(p'_{K.c.0}) - \min(p'_{Rf.c.0})).
 \end{aligned}$$

Таковы основные выводы, вытекающие из численных результатов, представленных в табл. 3 и 4. Эти результаты получены с помощью зависимостей между критической сжимающей силой и параметром λ для каждого выбранного значения n . Графики на рис. 2 иллюстрируют отношения между $p'_{3D.c.0}$ и λ и между $p'_{3D.c.\infty}$ и λ в случае, когда $h/R = 0,05$, $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $\alpha = -0,5$ и $\omega = 0,5$.

Напомним, что все значения $p'_{3D.c.\infty}$, $p'_{Rf.c.\infty}$ и $p'_{K.c.\infty}$, приведенные в табл. 3 и 4, получены при $\omega = 0,5$. Для иллюстрации влияния реологического параметра ω на значения $p'_{3D.c.\infty}$, $p'_{Rf.c.\infty}$ и $p'_{K.c.\infty}$, полученные для соответствующих значений $n^*_{3D.\infty}$, $n^*_{Rf.\infty}$, $n^*_{K.\infty}$ и $\lambda^*_{3D.\infty}$, $\lambda^*_{Rf.\infty}$, $\lambda^*_{K.\infty}$, приведены в табл. 5 ($E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ и $\alpha = -0,5$). Из данных таблицы следует, что увеличение реологического параметра ω увеличивает значения $p'_{3D.c.\infty}$, $p'_{Rf.c.\infty}$ и $p'_{K.c.\infty}$.

На этом рассмотрение численных результатов, полученных для критических сил в чисто упругом случае, завершено. Отметим, что для определения критического времени потери устойчивости вязкоупругого цилиндра необходимо знать критические силы, определенные при $t' = 0$ и $t' = \infty$. Полученные численные результаты использовали для оценки критического времени потери устойчивости вязкоупругого цилиндра.

Теперь рассмотрим численные результаты для вязкоупругого случая. Для этого необходимо выбрать такую интенсивность внешних

Табл. 5

Минимизированные значения критических сил при $t = \infty$ и разных значениях ω

ω	$p'_{3D.c.\infty} \cdot 10^2$	$p'_{Rf.c.\infty} \cdot 10^2$	$p'_{K.c.\infty} \cdot 10^2$
$h/R = 0,01$			
0,5	0,2463 (8, 4,2)	0,4829 (6, 4,8)	0,5192 (7, 5,8)
1,0	0,4530 (9, 5,6)	0,7258 (8, 6,4)	0,7629 (8, 6,7)
2,0	0,6864 (9, 6,3)	0,9550 (8, 6,3)	0,9990 (8, 7,2)
$h/R = 0,05$			
0,5	1,1328 (4, 2,1)	2,0804 (3, 2,5)	2,9358 (3, 2,8)
1,0	2,0917 (4, 2,4)	3,2557 (3, 2,2)	4,2303 (4, 3,5)
2,0	3,1248 (3, 1,0)	4,4589 (4, 3,2)	5,3316 (4, 3,9)
$h/R = 0,10$			
0,5	2,0066 (2, 0,5)	3,4857 (2, 1,4)	6,9603 (2, 2,3)
1,0	3,8558 (3, 1,6)	5,7754 (2, 1,0)	9,2334 (3, 2,8)
2,0	5,8066 (3, 1,8)	8,2603 (3, 2,3)	11,379 (3, 3,0)

сжимающих сил $p' = p / E_0^{(1)}$, чтобы неравенства $p'_{3D.c.0} > p' > p'_{3D.c.\infty}$, $p'_{3D.c.0} > p' > p'_{3D.c.\infty}$ и $p'_{K.c.0} > p' > p'_{K.c.\infty}$ выполнялись в ТЛТУ, теории уточненных оболочек третьего порядка и теории оболочек Кирхгофа соответственно.

Для сравнения полученных результатов должно удовлетворяться условие

$$p' \in \left\{ [p'_{3D.c.\infty}, p'_{3D.c.0}] \cap [p'_{Rf.c.\infty}, p'_{Rf.c.0}] \cap [p'_{K.c.\infty}, p'_{K.c.0}] \right\}. \quad (33)$$

Однако согласно данным, приведенным в табл. 2—4, во многих случаях для тех же n^* и λ^*

$$\left\{ [p'_{3D.c.\infty}, p'_{3D.c.0}] \cap [p'_{Rf.c.\infty}, p'_{Rf.c.0}] \right\} \cap [p'_{K.c.\infty}, p'_{K.c.0}] = \emptyset. \quad (34)$$

Поэтому далее рассмотрим случаи, когда выполняется условие (35), и сравним критические времена $t'_{3D.cr}$ и $t'_{Rf.cr}$, определенные с помощью ТЛТУ и уточненной теории оболочек третьего порядка, а именно:

$$p' \in \left\{ [p'_{3D.c.\infty}, p'_{3D.c.0}] \cap [p'_{Rf.c.\infty}, p'_{Rf.c.0}] \right\}. \quad (35)$$

В табл. 6—8 приведены значения критических времен $t'_{3D.cr}$ (числитель) и $t'_{Rf.cr}$ (знаменатель) для разных значений p' , n и λ в случаях $h/R = 0,01, 0,05$ и $0,10$ соответственно при $E^{(2)} / E_0^{(1)} = 5$, $\omega = 0,5$,

Табл. 6

Значения $t'_{3D.cr}$ (числитель) и $t'_{Rf.cr}$ (знаменатель) при $h/R = 0,01$
($\omega = 0,5$, $\alpha = -0,5$) и $n = 8$

λ	$p' \cdot 10^2$					
	0,60	0,65	0,80	0,85	1,00	1,05
	$t'_{3D.cr}/t'_{Rf.cr}$					
6,8	<u>0,528</u>	<u>0,345</u>	<u>0,102</u>	<u>0,067</u>	<u>0,015</u>	<u>0,008</u>
	17,80	5,985	0,895	0,556	0,152	0,098
8,0	<u>0,569</u>	<u>0,365</u>	<u>0,104</u>	<u>0,068</u>	<u>0,015</u>	<u>0,008</u>
	29,28	7,945	1,007	0,614	0,161	0,103
9,5	<u>0,695</u>	<u>0,426</u>	<u>0,105</u>	<u>0,060</u>	<u>0,014</u>	<u>0,005</u>
	$> 10^3$	22,55	1,473	0,838	0,195	0,122

$\alpha = -0,5$. Из данных таблиц следует, что критические времена уменьшались по мере приближения p' к критической силе, определенной при $t' = 0$. Точно так же критические времена увеличивались по мере приближения p' к критической силе при $t' = \infty$. Кроме того, из данных таблиц следует, что при увеличении $|n - n^*|$ или $|\lambda - \lambda^*|$ критическое время также возрастает.

На основании данных, приведенных в табл. 6—8, трудно сделать какие-либо выводы о влиянии отношения h/R на критическое время, поскольку они получены при разных значениях p' , n , λ и h/R .

Сравнение значений $t'_{3D.cr}$ и $t'_{Rf.cr}$ показывает, что разность между ними может составлять более одного-двух порядков, особенно в случаях, когда

Табл. 7

Значения $t'_{3D.cr}$ (числитель) и $t'_{Rf.cr}$ (знаменатель) при $h/R = 0,05$
($\omega = 0,5$, $\alpha = -0,5$) и $n = 3$

λ	$p' \cdot 10^2$					
	2,40	3,00	3,30	3,90	4,20	4,50
	$t'_{3D.cr}/t'_{Rf.cr}$					
2,5	<u>1,910</u>	<u>0,629</u>	<u>0,391</u>	<u>0,159</u>	<u>0,101</u>	<u>0,063</u>
	40,61	4,014	2,038	0,700	0,440	0,282
4,0	<u>2,334</u>	<u>0,627</u>	<u>0,367</u>	<u>0,136</u>	<u>0,083</u>	<u>0,049</u>
	9095	9,335	3,725	1,010	0,591	0,358
5,5	<u>8,599</u>	<u>1,113</u>	<u>0,550</u>	<u>0,161</u>	<u>0,088</u>	<u>0,047</u>
	$> 10^4$	421,5	25,27	2,794	1,326	0,685

Табл. 8

Значения $t'_{3D.cr}$ (числитель) и $t'_{Rf.cr}$ (знаменатель) для $h/R = 0,10$
($\omega = 0,5, \alpha = -0,5$) при $n = 3$

λ	$p' \cdot 10^2$					
	5,00	5,50	7,50	8,00	8,50	9,00
	$t'_{3D.cr}/t'_{Rf.cr}$					
1,8	0,505	0,302	0,036	0,019	0,008	0,002
	475,4	24,80	0,738	0,418	0,242	0,140
2,1	0,532	0,316	0,039	0,020	0,009	0,003
	52,27	10,46	0,536	0,312	0,184	0,107
2,4	0,595	0,350	0,044	0,023	0,011	
	33,11	8,249	0,494	0,292	0,174	

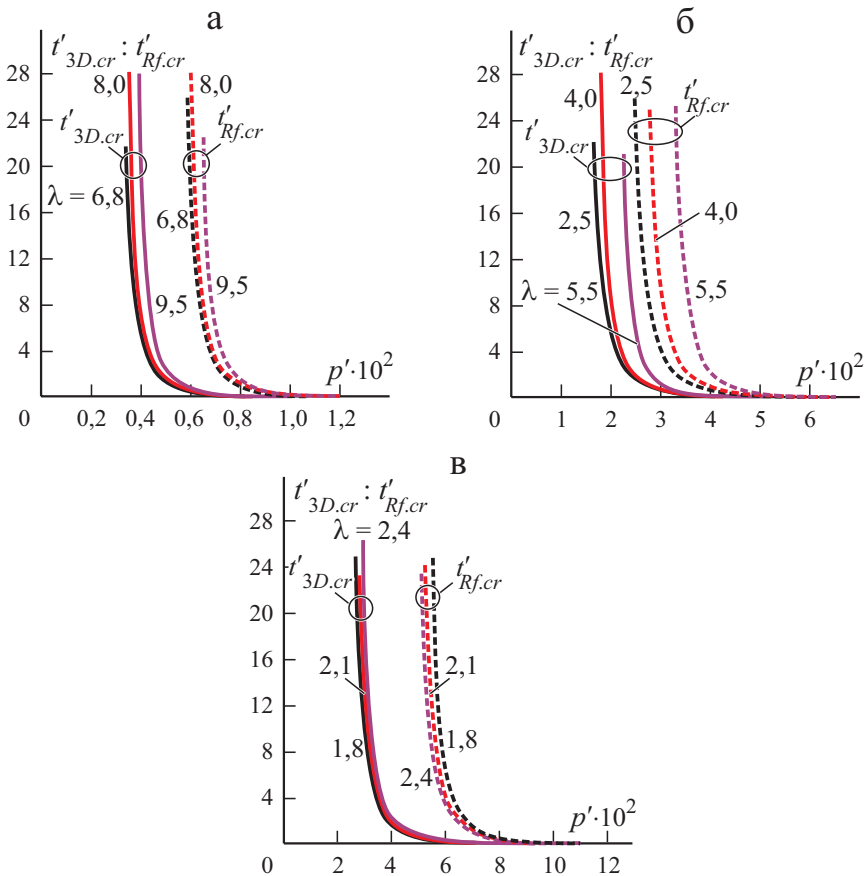


Рис. 3. Зависимости величин $t'_{3D.cr}$ и $t'_{Rf.cr}$ от интенсивности сжимающей силы p' при $h/R = 0,01$ и $n = 8$ (а); $h/R = 0,05$ и $n = 3$ (б); $h/R = 0,10$ и $n = 3$ (в) и $\omega = 0,5, \alpha = -0,5, E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$.

значения силы p' близки к критическим, определенным при $t' = 0$ и $t' = \infty$. Это различие также проиллюстрировано на рис. 3, где приведена зависимость критических времен $t'_{3D.cr}$ и $t'_{Rf.cr}$ от интенсивности p' сжимающей силы при $h/R = 0,01, 0,05$ и $0,10$ соответственно. Отметим, что графики построены при $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $\omega = 0,5$ и $\alpha = -0,5$ и разных значениях λ . Из этих графиков следует, что при $p'_{3D.c.\infty} < p' < p'_{Rf.c.\infty}$ потеря устойчивости вязкоупругого цилиндра не может происходить в рамках уточненной теории оболочек третьего порядка. Однако такая потеря устойчивости происходит согласно ГЛТУ. Следовательно, приближенные теории оболочек не могут описать потерю устойчивости цилиндра из вязкоупругих композитных материалов ни количественно, ни качественно.

Теперь рассмотрим графические представления влияния безразмерных реологических параметров α и ω на зависимости между безразмерным критическим временем $t'_{3D.cr}$ и безразмерной интенсивностью сжимающих сил. Влияние параметра α на эти зависимости при $\omega = 0,5$ и $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ иллюстрируют графики рис. 4, а влияние параметра ω при $\omega = 0,5$ и $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ — графики рис. 5.

Из данных рис. 4 следует, что до достижения определенного значения интенсивности p' сжимающей силы (обозначим его как p'^*) увеличение абсолютного значения параметра α уменьшает критическое время $t'_{3D.cr}$. После этого значения p' (т. е. при $p' > p'^*$) увеличение абсолютного значения параметра α приводит к увеличению значений $t'_{3D.cr}$. Кроме того, видно, что при $p' = p'^*$ влияние безразмерного реологического параметра α на значения $t'_{3D.cr}$ исчезает.

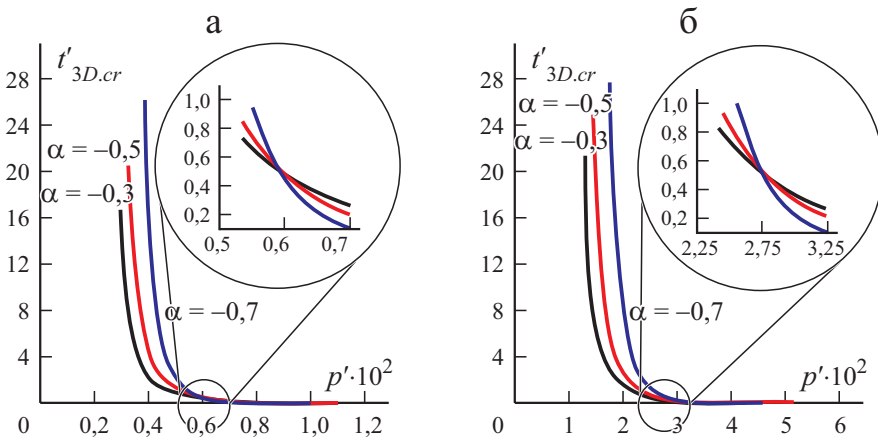


Рис. 4. Влияние реологического параметра α на зависимости $t'_{3D.cr}$ от величины p' при $h/R = 0,01$, $\lambda = 5,5$, $n = 9$ (а) и $h/R = 0,05$, $\lambda = 2,0$, $n = 4$ (б) и $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $\omega = 0,5$.

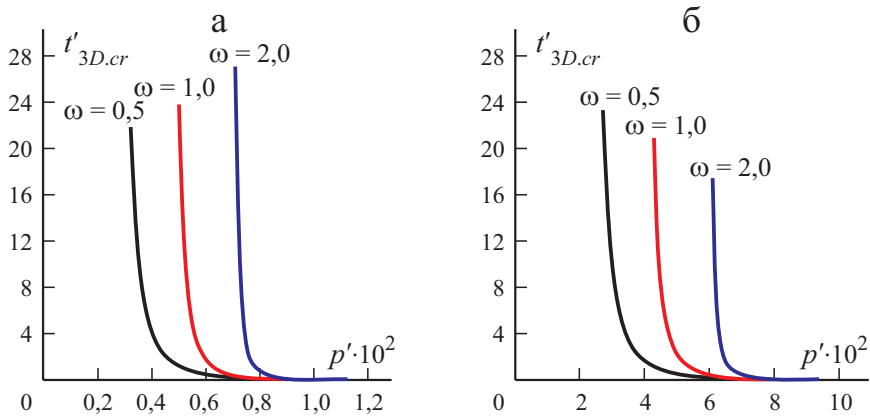


Рис. 5. Влияние реологического параметра E на зависимости $t'_{3D.cr}$ от величины p' при $h/R = 0,01$, $\lambda = 5,5$, $n = 9$ (а) и $h/R = 0,10$, $\lambda = 1,5$, $n = 3$ (б) и $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$, $\alpha = -0,5$.

Из данных рис. 5 следует, что увеличение значений безразмерного реологического параметра ω увеличивает критическое время $t'_{3D.cr}$. Однако напомним, что увеличение параметра ω приводит к уменьшению значения $p'_{3D.c.\infty}$. Поэтому сделанный ранее вывод о характере влияния параметра ω на значения параметра $t'_{3D.cr}$ относится к случаям, когда $p' < p'_{3D.c.\infty}|_{\omega=2,0}$ и $p' < p'_{3D.c.\infty}|_{\omega=1,0}$.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе рассмотрена трехмерная неосесимметричная задача локальной потери устойчивости полого цилиндра из вязкоупругого композитного материала. В предположении о том, что срединная поверхность цилиндра имеет бесконечно малое начальное несовершенство, в рамках трехмерных геометрически нелинейных уравнений и соотношений теории вязкоупругости изучали эволюцию этого несовершенства во времени. Соответствующую нелинейную задачу решали с помощью метода краевых возмущений, согласно которому ввели малый параметр, характеризующий начальное несовершенство, а все искомые величины представили в виде степенных рядов по этому параметру. Для исследования задач потери устойчивости используют только нулевое и первое приближения, которых достаточно для определения критического времени или критической силы.

Для выполнения численных исследований предположили, что материал цилиндра состоит из вязкоупругой матрицы и чисто упругих волокон, ориентированных в направлении оси цилиндра. Вязкоупругость материала цилиндра описывали дробно-экспоненциальными операторами. В

рамках континуального подхода материал цилиндра считали трансверсально-изотропным.

Основные выводы, основанные на численных результатах, можно сформулировать следующим образом.

1. Во многих случаях рассматриваемые приближенные теории оболочек достаточно хорошо описывают локальную неосесимметричную потерю устойчивости полого цилиндра из вязкоупругих композитных материалов.

2. В упомянутых случаях для исследования локальной неосесимметричной потери устойчивости цилиндра из вязкоупругого композитного материала более целесообразно использование ТЛТУ.

3. В некоторых случаях разность значений критического времени, определенных с помощью ТЛТУ и уточненной теории оболочек третьего порядка, может составлять один или два порядка, особенно когда значения интенсивности p' сжимающей силы близки к критическим, полученным при $t' = 0$ и $t' = \infty$.

Наконец, следует отметить следующее. В настоящей работе использовали вторую версию теории малых начальных деформаций ТЛТУ. В то же время было бы интересно исследовать аналогичные задачи, применив процедуру линеаризации в более упрощенных геометрически нелинейных теориях упругости, рассмотренных в [23—26]. В этих работах использовали “последовательный” вариант геометрических соотношений, предложенный Доннеллом [27] для малых деформаций, и показали, что некоторые “абсурдные” результаты по устойчивости конструктивных элементов в классических нелинейных геометрических соотношениях исчезают. Было бы интересно сравнить результаты, полученные в рамках подхода, развитого в [23—26], с результатами настоящей работы.

Настоящая работа представлена как частичное выполнение требований для получения PhD степени в Йылдызском техническом университете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biot M. A.* Mechanics of Incremental Deformations. — N. Y.: John Wiley and Sons, 1965.
2. *Green A. E., Rivlin R. S., and Shield R. T.* General theory of small elastic deformations superimposed on finite elastic deformations // Proc. R. Soc. A 211. — 1952. — No. 1104. — P. 128—154.
3. *Guz A. N.* Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. — Berlin: Springer-Verlag, Berlin, 1999.
4. *Biezeno C. B. and Hencky H.* On the general theory of elastic stability // Proc. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. — 1929. — Vol. 32, No. 4. — P. 444—456.
5. *Southwell R. V.* On the general theory of elastic stability // Phil. Trans. R. Soc. A. — 1914. — No. 213. — P. 187—244.

6. Babich I. Y. and Guz A. N. Stability of composite structural members (three-dimensional formulation) // *Int. Appl. Mech.* — 2002. — Vol. 38, No. 9. — P. 1048—1075.

7. Babich I. Y., Guz A. N., and Chechov V. N. The three-dimensional theory stability of fibrous and laminated materials // *Int. Appl. Mech.* — 2001. — Vol. 37, No. 9. — P. 103—1141.

8. Gerard F. and Gilbert A. A. Critical strain approach to creep buckling of plates and shells // *J. Aeronaut. Sci.* — 1958. — Vol. 25, No. 7. — P. 429—438.

9. Hoff N. J. Buckling and stability // *J. Roy. Aeronaut. Soc.* — 1954. — Vol. 58, No. 1.

10. Akbarov S. D. On the three-dimensional stability loss problems of elements of constructions fabricated from viscoelastic composite materials // *Mech. Compos. Mater.* — 1998. — Vol. 34, No. 6. — P. 537—544.

11. Akbarov S. D. Buckling delamination of elastic and viscoelastic composite plates with cracks. Survey I: solution method and problems related to the plane strain state // *Mech. Compos. Mater.* — 2012. — Vol. 48, No. 6. — P. 681—692.

12. Akbarov S. D. Buckling delamination of elastic and viscoelastic composite plates with cracks. Survey II: axisymmetric and 3D problems // *Mech. Compos. Mater.* — 2013. — Vol. 49, No. 1. — P. 97—106.

13. Akbarov S. D. Stability Loss and Buckling Delamination: Three-Dimensional Linearized Approach for Elastic and Viscoelastic Composites. — Berlin: Springer, 2013.

14. Akbarov S. D. and Karakaya S. 3D analyses of the stability loss of the circular solid cylinder made from viscoelastic composite material // *Comput., Mater. & Continua.* — 2011. — Vol. 22, No. 1. — P. 1—38.

15. Akbarov S. D. and Karakaya S. 3D analyses of the global stability loss of the circular hollow cylinder made from viscoelastic composite material // *Eur. J. Mech. A - Solids.* — 2012. — Vol. 33. — P. 48—66.

16. Akbarov S. D. and Karakaya S. 3D analyses of the symmetric local stability loss of the circular hollow cylinder made from viscoelastic composite material // *Appl. Math. Model.* — 2012. — Vol. 36. — P. 4241—4260.

17. Abrosimov N. A., Elesin A. V., and Igumnov L. A. Numerical simulation of the process of loss of stability of composite cylindrical shells under combined quasi-static and dynamic actions // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 55, No. 1. — P. 41—52.

18. Bochkarev S. A. and Lekomtsev S. V. Stability of functionally graded circular cylindrical shells under combined loading // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 55, No. 3. — P. 349—362.

19. Schapery R. A. Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analyses // *Proc. 4th US Nat. Cong. Appl. Mech. ASME*, 1962. — P. 1075—1086.

20. Rabotnov Yu. N. Elements of Hereditary Mechanics of Solid Bodies. — M.: Nauka, 1977 [in Russian].

21. Christensen R. M. *Mechanics of Composite Materials.* — N. Y.: Wiley, 1979.

22. ABAQUS-MIT, Buckling of a cylindrical shell under uniform axial pressure. Massachusetts Institute of Technology web resources, 2017. <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/> [Accessed: 2021 May 07]

23. Paimushin V. N. and Shalashilin V. I. Consistent variant of continuum deformation theory in the quadratic approximation // *Dokl. Fisics.* — 2004. — Vol. 49, No 6. — P. 374—377.

24. Paimushin V. N. and Shalashilin V. I. The relations of deformation theory in the quadratic approximation and the problems of constructing improved versions of the geometrically nonlinear theory of laminated structures // *J. Appl. Math. Mech.* — 2005. — Vol. 69, No 5. — P. 773—791.

25. *Paimushin V. N. and Shalashilin V. I.* Geometrically nonlinear equations in the theory of momentless shells with applications to problems on the non-classical forms of loss of stability of a cylinder // *J. Appl. Math. Mech.* — 2006. — Vol. 70, No 1. — P. 91—101.

26. *Berezhnoy D. V., Paimushin V. N., and Shalashilin V. I.* Investigations of the quality of the equations of the geometrically nonlinear theory of elasticity at small deformations and arbitrary displacements // *Solid Mech.* — 2009. — No. 6. — P. 31—47.

27. *Donnell L. H.* Beams, Plates, and Shells. — N. Y.: McGraw-Hill, 1972.

Поступила в редакцию 02.06.2021

Окончательный вариант поступил 12.10.2021

Received June 2, 2021 (Oct. 12, 2021)
