

А. Н. Соловьёв^{а,б}, До Тхань Бинь^а, В. А. Чебаненко^{в}, И. А. Паринов^а*

^аДонской государственной технической университет, Ростов-на-Дону, Россия

^бЮжный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

^вФедеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОМПОЗИТНОГО ПЬЕЗОАКТИВНОГО БИМОРФА В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ: ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ¹

A. N. Soloviev, B. T. Do, V. A. Chebanenko, I. A. Parinov*

FLEXURAL VIBRATIONS OF A COMPOSITE PIEZOACTIVE BIMORPH IN AN ALTERNATING MAGNETIC FIELD: APPLIED THEORY AND FINITE-ELEMENT SIMULATION

Keywords: smart materials, electroelasticity, boundary-value problems, forced vibrations, fixation

An applied theory describing the transverse vibrations of a cantilever bimorph in an alternating magnetic field is presented. The bimorph is made of piezoactive materials, which is a multilayer composite with alternating piezoelectric and piezomagnetic layers. The mechanical and physical properties of such a composite are specified by their effective constants. This theory can serve as a model for energy harvesting devices under the action of an external alternating magnetic field. Within the framework of the theory, quadratic distributions of electric and magnetic potentials over the cantilever thickness are assumed inhomogeneous in its longitudinal direction. The stress-strain state of the bimorph, the distribution of electric and magnetic fields, and its natural frequencies are calculated. In addition, the case where the potential at one of electrodes is unknown is examined. The results of calculations in the low-frequency region are compared with those found by a finite-element model based on a system of partial differential equations built in the COMSOL Multiphysics package. A

*Автор, с которым следует вести переписку: chebanenko.va@gmail.com
Corresponding author: chebanenko.va@gmail.com

¹Перевод с англ.

comparison showed a good agreement between the calculated field characteristics and the data of finite-element modeling in the entire area of the bimorph, except in the vicinity of the beam fixation and its free end.

Ключевые слова: материалы умные, электроупругость, задачи краевые, колебания вынужденные, закрепление

Представлена прикладная теория, описывающая поперечные колебания кантилеверного биморфа в переменном магнитном поле. Биморф изготовлен из пьезоактивного материала, представляющего собой многослойный композит с чередующимися пьезоэлектрическими и пьезомагнитными слоями. Механические и физические свойства такого композита задаются эффективными константами. Подобная конструкция может служить моделью устройства накопления энергии, находящегося под действием внешнего переменного магнитного поля. В рамках теории приняты квадратичные распределения электрического и магнитного потенциалов по толщине, а также учтены неоднородности в продольном направлении. Проведены расчеты напряженно-деформированного состояния биморфа, распределения электрического и магнитного полей, а также собственных частот. Рассмотрен случай, когда потенциал на одном из электродов неизвестен. Проведено сравнение результатов расчетов в области низких частот с результатами конечно-элементной модели на основе системы уравнений в частных производных, решенной в пакете COMSOL Multiphysics. Сравнение показало хорошее совпадение результатов расчета характеристик поля с данными конечно-элементного моделирования во всей области биморфа, за исключением окрестности заделки и свободного конца.

Введение

Известно, что пьезоэлектрические материалы широко используют в качестве актуаторов, датчиков и генераторов в машиностроении и аэрокосмической промышленности для контроля конструкций, аккумулирования энергии, активного подавления паразитных колебаний, шумоподавления и т. д. Эти материалы обладают хорошими электромеханическими свойствами, гибкостью в процессе проектирования, простотой изготовления и высокой эффективностью преобразования электрической энергии в механическую и наоборот. При использовании пьезоэлектрических материалов в качестве актуаторов их деформациями можно управлять, изменяя величину приложенного к ним электрического потенциала. В датчиках деформацию измеряют с помощью наведенного потенциала. В области аккумулирования энергии с помощью пьезоэлектрических материалов свободную механическую энергию в конструкциях преобразуют в электри-

ческую энергию, пригодную для питания маломощных устройств. Более подробный обзор приведен в [1, 2].

Типичные актуаторы, датчики и генераторы, подвергаемые изгибу, представляют собой структуру, состоящую из нескольких слоев с разными механическими и электрическими свойствами. Все перечисленные качества позволили создать датчики, встраиваемые в композитные конструкции [3], и актуаторы [4, 5].

Существуют материалы с пьезомагнитными свойствами. Пьезомагнетизм — явление, наблюдаемое в некоторых антиферромагнитных и ферромагнитных кристаллах и характеризующееся линейной зависимостью между магнитной поляризацией системы и механическими деформациями. В пьезомагнитном материале самопроизвольный магнитный момент может быть обусловлен физическим напряжением или физической деформацией, приложенной магнитным полем. Один из наиболее распространенных пьезомагнитных материалов — CoFe_2O_4 [6, 7]. Сосуществование пьезоэлектрического и пьезомагнитного эффектов, связанных упругим полем, приводит к возникновению магнитоэлектрического взаимодействия [8]. В связи с этим большой интерес представляет исследование композита на основе CoFe_2O_4 и BaTiO_3 , обладающего одновременно пьезоэлектрическими и пьезомагнитными свойствами [9, 10].

В [11, 12] классические решения задач электроупругости приведены наряду с решениями задач магнитоупругости. В [13] развита прикладная теория колебаний пьезоэлектрических пластин, учитывающая особенности распределения электрического потенциала по толщине конструкции и разрезного электрода. В [14] развита прикладная теория колебаний пьезопреобразователей с неоднородной поляризацией.

В [15] представлены уравнения для трехмерной, ортотропной и магнитоэлектроупругой сред, полученные на основе смешанной постановки задач механики твердого тела, в которой в качестве основных неизвестных приняты не только перемещения, электрический и магнитный потенциалы, но и некоторые напряжения, электрические перемещения и магнитная индукция. В [16] получили точные решения для трехмерных анизотропных линейно-магнитоупругих свободно опертых многослойных прямоугольных пластин при статических нагрузках. В [17] на основе теории балки Тимошенко получено общее аналитическое решение для переходных процессов магнитоэлектроупругого биморфа. В [18] рассмотрены динамические связанные задачи о гармонических колебаниях магнитоэлектроупругого слоя и полупространства под действием вибрационной нагрузки при разных электрических и магнитных условиях на его поверхностях, а также о предварительных напряжениях и их влиянии на дисперсионные свойства. В [19] получены аналитические решения для свободных колебаний трехмерных линейных анизотропных магнитоэлектроупругих многослойных прямоугольных пластин, а также дисперсионные уравнения. На основе полученных уравнений показано, что формы колебаний зависят не только от упругих характеристик материалов, но и от их пьезоэлектрических и

пьезомагнитных свойств. Два последних сильно зависят от характеристик материалов и последовательности их укладки.

Существуют также подходы к исследованию магнитоэластичных пластин, основанные на методах конечных (МКЭ) [20] и граничных элементов [21].

Ранее авторами была предложена прикладная теория, учитывающая нелинейность распределения электрического потенциала в продольном и поперечном направлениях: исследовали напряженно-деформированное и электрическое состояние шарнирно опертого биморфа [22]. Эта теория продемонстрировала хорошее согласование с результатами конечно-элементного моделирования. Также использовали прикладную теорию колебаний биморфа, состоящего из электроупругого и магнитоупругого слоев, хорошо согласующуюся с результатами конечно-элементного анализа [23].

В настоящей работе рассмотрены изгибные колебания консольного биморфа из пьезомагнитоэлектрического композита в рамках плоской деформации. В данном подходе использованы квадратичные распределения электрического и магнитного потенциалов по толщине консоли в предположении наличия неоднородности в продольном направлении. На основе полученных уравнений вычислены распределения механического, электрического и магнитного полей, определены собственные частоты колебаний. Результаты расчета сравнены с полученными с помощью конечно-элементной модели на основе системы дифференциальных уравнений в частных производных, построенной посредством программного обеспечения COMSOL Multiphysics.

1. Постановка задачи

Рассмотрим плоскую задачу об установившихся изгибных колебаниях биморфной консольной пластины бесконечной ширины (рис. 1). Пластина состоит из двух одинаковых слоев с пьезомагнитоэлектрическими свойствами. Большие поверхности слоев снабжены электродами, а слои поляризованы по толщине. Предполагаем, что слои биморфа имеют идеальное механическое, электрическое и магнитное взаимодействие. Биморф консольно закреплен на левом конце, а остальные поверхности свободны от механических напряжений. На верхней и нижней поверхностях биморфа

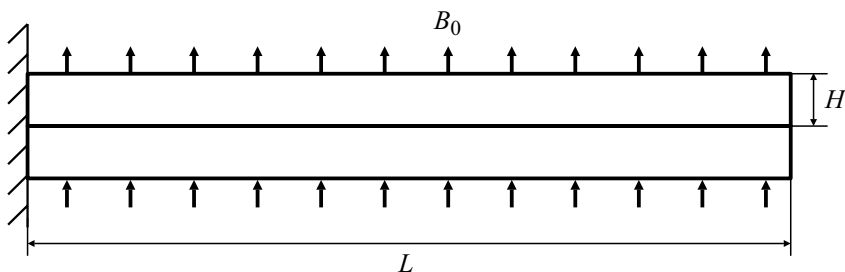


Рис. 1. Пьезоактивный биморф в переменном магнитном поле.

действует магнитный поток B_0 , а на поверхности раздела слоев магнитный потенциал равен нулю. Электрический потенциал на всех электродах равен нулю. Боковые поверхности считаем изолированными от магнитных и электрических полей.

Для описания колебаний данной пластины использовали общие уравнения и уравнения состояния пьезомагнитоупругого тела [24]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \sigma_{\Omega}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= 1/2(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \\ \mathbf{E} &= -\nabla \varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\nabla \xi, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E} - \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{H}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{e} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{h} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H},$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензоры механических напряжений и деформаций соответственно; \mathbf{D} и \mathbf{E} — векторы электрической индукции и напряженности электрического поля соответственно; \mathbf{B} и \mathbf{H} — векторы магнитной индукции и напряженности магнитного поля соответственно; ρ — плотность материала; \mathbf{c} — тензор модулей упругости; \mathbf{e} — тензор пьезоэлектрических модулей; \mathbf{h} — тензор пьезомагнитных модулей; $\boldsymbol{\epsilon}$ — тензор диэлектрических проницаемостей; $\boldsymbol{\alpha}$ — тензор магнитоэлектрических модулей; $\boldsymbol{\mu}$ — тензор магнитных проницаемостей; \mathbf{f} — вектор плотности массовых сил; σ_{Ω} — объемная плотность электрических зарядов; \mathbf{u} — вектор перемещений; φ и ξ — электрический и магнитный потенциал соответственно.

Следует отметить, что электрическое и магнитное поля можно считать стационарными, поскольку предполагаем, что упругие волны распространяются очень медленно по сравнению с электромагнитными.

Для завершения постановки задачи к этим уравнениям также необходимо добавить граничные и начальные условия. Полное описание общей постановки задачи для пьезомагнитоупругого тела приведено в [24].

2. Прикладная теория

Для построения прикладной теории использовали уравнение в вариациях для случая установившихся колебаний [12], обобщенный принцип Гамильтона в теории электроупругости и рассматривали магнитные со-

ставляющие. Для случая плоских деформаций при отсутствии поверхностных и объемных нагрузок, зарядов и наличии магнитного потока \tilde{B} уравнение в вариациях имеет вид

$$\iint_S \delta \tilde{H} dS - \rho \omega^2 \iint_S u_i \delta u_i dS + \iint_{\partial S} \tilde{B} \delta \xi dl = 0, \quad (4)$$

где $\delta \tilde{H} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i - B_i \delta H_i$; S — площадь биморфа.

Для дальнейших упрощений приняли гипотезу Кирхгофа, в соответствии с которой $\sigma_{33} = 0$; распределение перемещений по толщине принимает вид

$$u_1(x_1, x_3) = -x_3 w_1, \quad u_3(x_1, x_3) = w(x_1), \quad (5)$$

где $w(x_1)$ — функция, описывающая прогиб нейтральной оси.

В частности, для механического поля приняли гипотезу единой нормали. Поскольку в задаче электрический потенциал на электродах считали нулевым, его распределение по толщине для первых мод колебаний описывали нелинейной функцией. Конечно-элементный анализ показал [22], что для распределения этого поля по толщине можно использовать квадратичное соотношение

$$\varphi(x_1, \tilde{x}_3) = V_0(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{H} \left(\frac{2\tilde{x}_3}{H} - 1 \right) + V_1(x_1) \left(1 - \frac{4\tilde{x}_3^2}{H^2} \right) + V_2(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{H} \left(\frac{2\tilde{x}_3}{H} + 1 \right), \quad (6)$$

где $\tilde{x}_3 = x_3 - H/2$. Здесь функции V_0 , V_1 и V_2 отвечают за электрические потенциалы на внутреннем электроде, срединной поверхности и на внешнем электроде соответственно. Функции V_0 и V_2 постоянны, так как задают потенциалы на электродах, а функция V_1 зависит от продольной координаты и учитывает неоднородность потенциала по длине. Для выполнения условий задачи запишем эти функции в виде

$$V_0(x_1) = V_0 = \text{const}, \quad V_1(x_1) = \Phi(x_1), \quad V_2(x_1) = V_2 = \text{const},$$

где $\Phi(x_1)$ — неизвестная функция.

Магнитный потенциал на внутренней поверхности пьезомагнитного слоя считаем нулевым, а его распределение на внешней поверхности неизвестным. Поэтому удобно использовать распределение магнитного потенциала также в аналогичной форме:

$$\xi(x_1, \tilde{x}_3) = M_0(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{H} \left(\frac{2\tilde{x}_3}{H} - 1 \right) + M_1(x_1) \left(1 - \frac{4\tilde{x}_3^2}{H^2} \right) + M_2(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{H} \left(\frac{2\tilde{x}_3}{H} + 1 \right),$$

где $\tilde{x}_3 = x_3 - H/2$. Здесь функции M_0 , M_1 и M_2 ответственны за магнитные потенциалы на внутренней, срединной и внешней поверхностях соответственно. Для выполнения условий задачи эти функции приняли в виде

$$M_0(x_1) = M_0 = \text{const}, \quad M_1(x_1) = \Xi_2(x_1), \quad M_2(x_1) = \Xi_3(x_1),$$

где $\Xi_2(x_1)$ и $\Xi_3(x_1)$ — неизвестные функции.

После варьирования уравнения (4) и интегрирования по толщине биморфа коэффициенты при независимых вариациях δw , $\delta\Phi$, $\delta\Xi_2$ и $\delta\Xi_3$ приравнивали к нулю. Это привело к системе четырех дифференциальных уравнений и пяти граничных условий с четырьмя неизвестными функциями, зависящими от x_1 . Далее будем опускать x_1 для упрощения записи.

На основе коэффициента для независимой вариации δw получили уравнение

$$\frac{4\tilde{\epsilon}_{31}H}{3}\Phi'' + \frac{\tilde{h}_{31}H}{3}(4\Xi_2'' - \Xi_3'') - \frac{2\rho\omega^2 H^3}{3}w'' + 2\omega^2\rho Hw + \frac{2H^3\tilde{c}_{11}}{3}w^{(4)} = 0.$$

Также из условия равенства нулю внеинтегральных членов в вариационном уравнении вывели два естественных краевых условия:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\epsilon}_{31}H}{3}(V_0 - 5V_2 + 4\Phi) + \frac{\tilde{h}_{31}H}{3}(4\Xi_2 - 5\Xi_3 + M_0) + \frac{2H^3\tilde{c}_{11}}{3}w'' = 0, \\ -\frac{4\tilde{\epsilon}_{31}}{3}\Phi' - \frac{\tilde{h}_{31}H}{3}(4\Xi_2' - 5\Xi_3') - \frac{2H^3\tilde{c}_{11}}{3}w''' + \frac{2\rho\omega^2 H^3}{3}w' = 0. \end{aligned}$$

Первое условие описывает случай, когда изгибающий момент равен нулю, а второе — поперечную силу. Эти условия наложили на правый свободный конец биморфа. На левом конце использовали условия закрепления: перемещение $w = 0$ и угол поворота $w' = 0$.

Уравнение, возникающее при вариации $\delta\Phi$, приняло вид

$$\begin{aligned} \frac{16\tilde{\epsilon}_{33}}{3H}(V_0 + V_2 - 2\Phi) + \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H}(-2\Xi_2 + \Xi_3 + M_0) - \\ - \frac{16\epsilon_{11}H}{15}\Phi'' - \frac{2\alpha_{11}H}{15}(8\Xi_2'' + \Xi_3'') - \frac{4\tilde{\epsilon}_{31}H}{3}w'' = 0. \end{aligned}$$

Оно имеет одно естественное граничное условие, наложенное на оба конца балки:

$$\frac{16\epsilon_{11}H}{15}\Phi' + \frac{16\alpha_{11}H}{15}\Xi_2' + \frac{2\alpha_{11}H}{15}\Xi_3' = 0. \quad (7)$$

Магнитный потенциал зависит от двух неизвестных функций; поэтому после их варьирования получили два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H}(V_0 + V_2 - 2\Phi) + \frac{16\tilde{\mu}_{33}}{3H}(-2\Xi_2 + \Xi_3 + M_0) - \\ - \frac{16\alpha_{11}H}{15}\Phi'' - \frac{2\mu_{11}H}{15}(8\Xi_2'' + \Xi_3'') - \frac{4\tilde{h}_{31}H}{3}w'' = 0, \end{aligned}$$

$$-\frac{2\tilde{\alpha}_{33}}{3H}(V_0 + 7V_2 - 8\Phi) + \frac{2\tilde{\mu}_{33}}{3H}(8\Xi_2 - 7\Xi_3 - M_0) -$$

$$-\frac{2\alpha_{11}H}{15}\Phi'' - \frac{2\mu_{11}H}{15}(\Xi_2'' + 2\Xi_3'') + \frac{5\tilde{h}_{31}H}{3}w'' - 2B_0 = 0.$$

Для неизвестных $\Xi_2(x_1)$ и $\Xi_3(x_1)$ получили два естественных краевых условия:

$$\frac{16\alpha_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Phi(x) + \frac{16\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_2(x) + \frac{2\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_3(x) = 0,$$

$$\frac{2\alpha_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Phi(x) + \frac{2\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_2(x) + \frac{4\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_3(x) = 0,$$

которые также наложили на оба конца биморфа.

В приведенных уравнениях и граничных условиях ввели следующие обозначения:

$$\tilde{c}_{11} = c_{11} - c_{13}^2 / c_{33}, \quad \tilde{e}_{31} = e_{31} - c_{13}e_{33} / c_{33}, \quad \tilde{h}_{31} = h_{31} - c_{13}h_{33} / c_{33},$$

$$\tilde{\alpha}_{33} = -\alpha_{33} - e_{33}h_{33} / c_{33}, \quad \tilde{\epsilon}_{33} = -\epsilon_{33} - e_{33}^2 / c_{33}.$$

Они возникли, когда для принятой гипотезы Кирхгофа выполнили условие $\sigma_{33} = 0$ и исключили компоненту деформации ϵ_{33} .

3. Численный эксперимент

Для проверки полученной теории использовали конечно-элементное программное обеспечение COMSOL Multiphysics. В COMSOL нет модуля магнитоэластичности, но оно позволяет решать уравнения в частных производных общего вида. Для этого общие уравнения (1) и уравнения состояния (2) преобразовали путем подстановки в них вектора перемещений в виде

$$\mathbf{u} = (u(x, z), 0, w(x, z)).$$

Здесь $u(x, z)$ и $w(x, z)$ — компоненты вектора перемещений вдоль осей x и z соответственно. Таким образом, осуществили переход к плоской задаче. Затем основные уравнения и уравнения состояния преобразовали к виду

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} = -\rho\omega^2 u,$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = -\rho\omega^2 w,$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_3}{\partial z} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_3}{\partial z} = 0, \\
 & \sigma_{11} = C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial w}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + h_{31} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \\
 & \sigma_{13} = \frac{C_{44}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + h_{15} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\
 & \sigma_{33} = C_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial w}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + h_{33} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \\
 & D_1 = \frac{e_{15}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \epsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \alpha_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\
 & D_3 = e_{31} \frac{\partial u}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial w}{\partial z} - \epsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \alpha_{33} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \\
 & B_1 = h_{15} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \alpha_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mu_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\
 & B_3 = h_{31} \frac{\partial u}{\partial x} + h_{33} \frac{\partial w}{\partial z} - \alpha_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu_{33} \frac{\partial \xi}{\partial z},
 \end{aligned} \tag{8}$$

где ω — круговая частота.

Для сравнения согласованности результатов, получаемых с помощью предлагаемой прикладной теории и конечно-элементной модели, рассмотрели биморф длиной $L = 10$ мм с толщиной одного слоя $H = 0,6$ мм. Пьезоактивные слои представляли собой композиты с чередующимися пьезоэлектрическими и пьезомагнитными слоями. Механические и физические свойства этого композита задали эффективными постоянными, значения которых взяты из [10]. В качестве основного материала выбрали композит, состоящий из 20% CoFe_2O_4 и 80% BaTiO_3 , постоянные кото-

Табл. 1

Свойства материала

Постоянная	Значение	Постоянная	Значение	Постоянная	Значение
ρ , кг/м ³	5847	e_{31} , К/м ²	-0,2	α_{33} , нН·с/(В·К)	235
c_{11}^E , ГПа	185	e_{33} , К/м ²	0,5	h_{31} , Н/(А·м)	15
c_{12}^E , ГПа	90	e_{15} , К/м ²	8,8	h_{33} , Н/(А·м)	-6
c_{13}^E , ГПа	72	ϵ_{11} , нФ/м	9,4	μ_{11} , мН·с ² /К ²	12,5
c_{33}^E , ГПа	200	ϵ_{33} , нФ/м	30	μ_{33} , мН·с ² /К ²	200
c_{44}^E , ГПа	39	α_{11} , нН·с/(В·К)	-0,23		

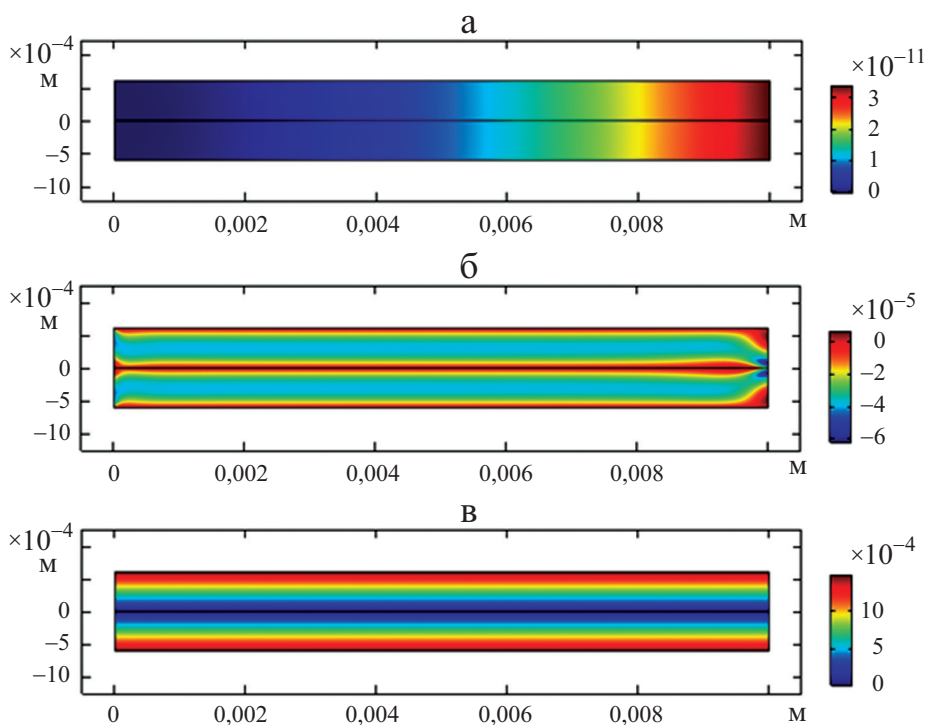


Рис. 2. Результаты, полученные МКЭ: распределения перемещения w (а), электрического φ (б) и магнитного ξ (в) потенциалов в биморфе.

рого приведены в табл. 1. Биморф возбуждали магнитным потоком $B_0 = 5$ мкВб с частотой $f = 1$ кГц.

На рис. 2 представлены двухмерные распределения перемещения w , электрического φ и магнитного ξ потенциалов. Из данных рис. 2—б видно, что распределение электрического потенциала по толщине слоя нелинейное, а по длине практически постоянное, за исключением областей вблизи закрепления консоли и её свободного конца. Данные рис. 2—в свидетельствуют о том, что распределение магнитного потенциала биморфа линейное по толщине и постоянное по длине.

Теперь сравним результаты расчетов, полученных с помощью используемой теории и конечно-элементного анализа. Краевую задачу, основанную на прикладной теории, решали численными методами. На рис. 3—5 представлены распределения перемещения w , электрического φ и магнитного ξ потенциалов по толщине и длине биморфа.

На основании распределения перемещения на рис. 3 можно сделать вывод о том, что представленная прикладная теория достаточно точно описывает прогиб исследуемого биморфа.

На рис. 4—а показано распределение электрического потенциала по середине верхнего слоя ($z = H/2$) биморфа. Распределение, рассчитанное по прикладной теории, имеет линейный характер, а посредством конеч-

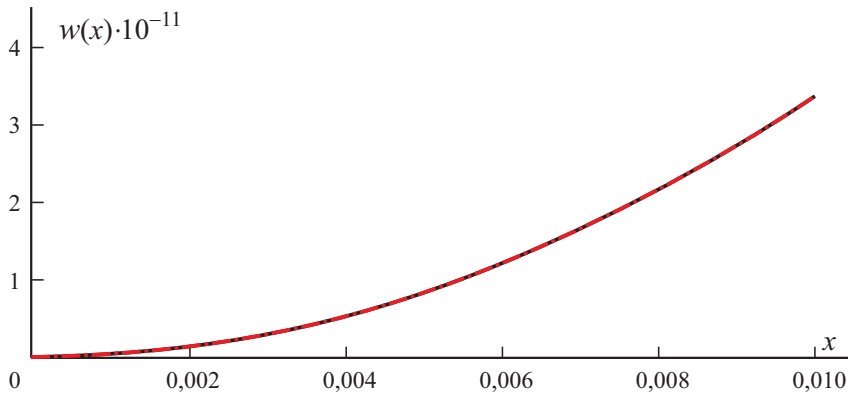


Рис. 3. Сравнение распределений прогиба по длине биморфа, рассчитанных по прикладной теории (—) и МКЭ (- · -).

но-элементного анализа — ярко выраженный нелинейный характер в области закрепления биморфа балки и его свободного конца (см. также рис. 2—б). В средней части биморфа прикладная теория с достаточной степенью точности описывает поведение электрического потенциала. В области закрепления погрешность достигает 5%, а на свободном конце — 25%. Это несоответствие, скорее всего, обусловлено формулировкой граничных условий в прикладной теории, поскольку в силу введенной гипотезы Кирхгофа (5) компоненты, связанные со сдвигом (6), исчезают из граничных условий, при том что в программе COMSOL при формировании условий нулевого потока эти составляющие сохраняются. Анализ размера области этого несоответствия в зависимости от относительной толщины биморфа показал, что его размер порядка толщины биморфа. Следует отметить, что упомянутое различие значений электрического потенциала на концах биморфа становилось незначительным, если на внешнем элект-

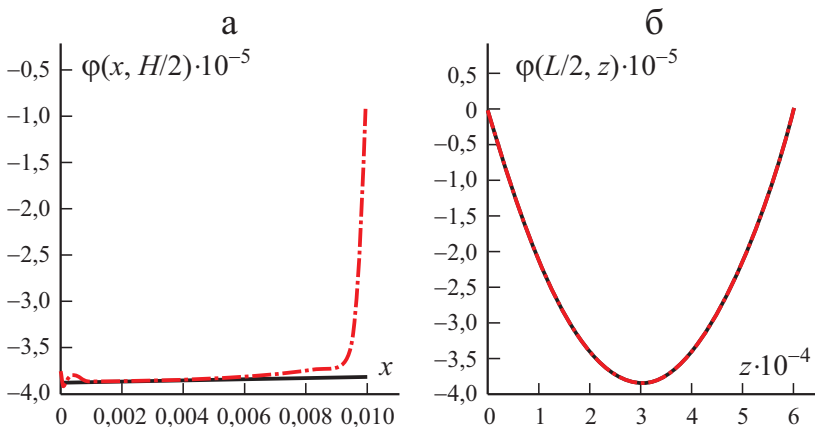


Рис. 4. Распределение электрического потенциала по длине (а) и толщине (б) в середине верхнего слоя биморфа по прикладной теории (—) и МКЭ (- · -).

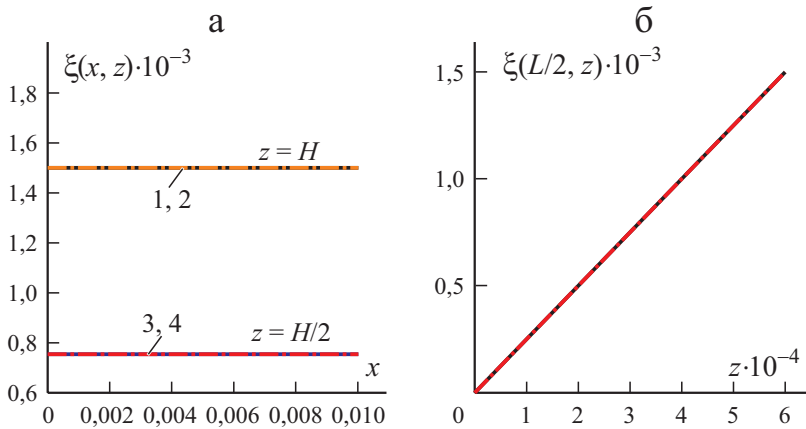


Рис. 5. То же для магнитного потенциала: 1, 3 — теория; 2, 4 — МКЭ.

роде задавали ненулевой электрический потенциал, величина которого заметно влияла на напряженно-деформированное состояние биморфа.

Из данных рис. 4—б следует, что распределение потенциала в середине биморфа ($x = L/2$) как функция толщины верхнего слоя квадратично, что хорошо описывается предложенной теорией.

На основании данных рис. 5 можно сделать вывод о линейном распределении магнитного потенциала по толщине биморфа и его постоянном значении по длине слоя с магнитным потоком, не зависящим от продольной координаты. На рис. 5—а показаны распределения потенциала вдоль срединного слоя ($z = H/2$) и верхней границы ($z = H$), соответствующие функциям $\Xi_2(x)$ и $\Xi_3(x)$. Анализ данных рис. 5—а и 5—б позволяет сделать вывод о том, что магнитный потенциал с достаточной степенью точности описывается предложенной теорией.

Далее рассмотрим случай, когда электрический потенциал V_2 на внешних электродах неизвестен. Такие задачи типичны для пьезоэлектрических элементов, действующих как датчики или пьезоэлектрические генераторы для аккумулирования энергии. Для решения такой задачи необходимо ввести дополнительное условие

$$\iint_{\partial S} D_3 dl = I,$$

из которого можно определить значение электрического потенциала. Здесь I — электрический ток во внешней электрической цепи, ∂S — площадь электрода. Если электрод свободен, то $I = 0$.

В результате оказалось, что по данным конечно-элементного расчета электрический потенциал равен 0,113 мВ, а по прикладной теории — 0,111 мВ, что соответствует погрешности 1,7%.

Анализ данных рис. 6—а показывает, что характер продольного распределения электрического потенциала аналогичен показанному на рис. 4—а, а прикладная теория описывает поведение электрического потенциала с

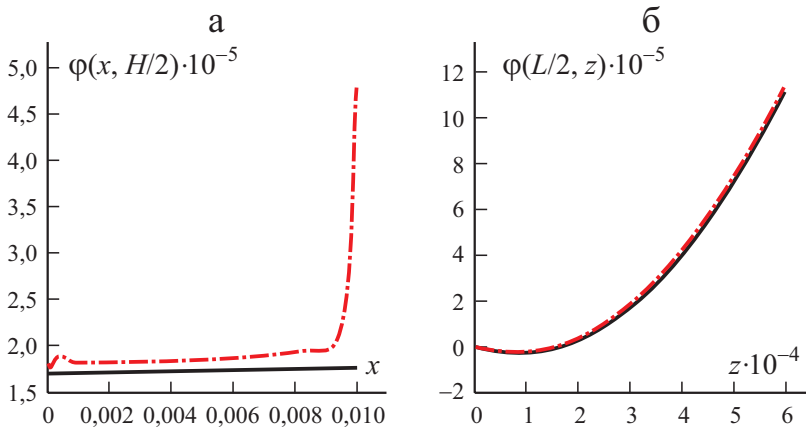


Рис. 6. Распределение электрического потенциала по длине (а) и толщине (б) в середине верхнего слоя биморфа по прикладной теории (—) и МКЭ (- · -).

некоторой погрешностью. Из данных рис. 6—б следует, что поперечное распределение электрического потенциала имеет ярко выраженный нелинейный характер, адекватно описываемый принятой в прикладной теории квадратичной формой электрического потенциала (б).

В заключение сравним собственные частоты, определенные посредством прикладной теории и МКЭ. Результаты для первых трех форм изгибных колебаний, представленные в табл. 2, свидетельствуют об их хорошем согласовании.

Проведенные численные исследования позволяют сделать вывод о том, что расчет основных характеристик композитного пьезомагнитоэлектрического биморфа по предложенной прикладной теории дает достаточно точные результаты, хорошо согласующиеся с данными конечно-элементного анализа. Погрешность не превышает 1%. Исключением является распределение электрического потенциала при нулевых значениях на электродах в районе закрепления консоли и её свободного конца.

Табл. 2

Собственные частоты, кГц

Мода	Прикладная теория	МКЭ	Ошибка, %
1	10,06	9,96	1
2	62,04	57,63	7,6
3	169,39	146,2	15,8

Заключение

Предложена прикладная теория расчета поперечных колебаний биморфа, состоящего из двух слоев композита на основе CoFe_2O_4 и BaTiO_3 , обладающего одновременно пьезоэлектрическими и пьезомагнитными свойствами в переменном магнитном поле. Эта теория может служить моделью для пьезоэлектрического устройства аккумулирования энергии под действием внешнего магнитного поля. Определены напряженно-деформированное состояние биморфа, распределения электрического и магнитного полей и собственные частоты. Для проверки прикладной теории на основе системы уравнений в частных производных построили двухмерную конечно-элементную модель с помощью программного обеспечения COMSOL Multiphysics. Сравнение результатов расчетов биморфа по предложенной теории и МКЭ показало, что ошибки определения характеристик механического и магнитного полей — менее 1%. Однако при определении потенциала электрического поля различие составило ~ 5% в области закрепления консоли и 25% — на её свободном конце. Расчеты собственных частот показали, что первые три формы изгибных колебаний можно определить с приемлемой точностью.

Принятое в настоящей работе квадратичное распределение электрического и магнитного потенциалов по толщине композита продемонстрировало хорошее согласование результатов, полученных посредством прикладной теории и МКЭ, во всей области биморфа, кроме области его закрепления и свободного конца. Анализ показал, что размер области этого несоответствия в зависимости от относительной толщины биморфа порядка его толщины. Значения выходного потенциала, рассчитанные по предложенной теории и МКЭ, отличались на 1,7%. Таким образом, предложенная прикладная теория позволяет точно определить характеристики устройств аккумулирования энергии на основе рассмотренного биморфа.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ № 21-19-00423 в Южном федеральном университете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gaudenzi P. Smart Structures: Physical Behaviour, Mathematical Modelling and Applications.* — N. Y. — Chichester—Brisbane—Toronto: John Wiley & Sons, 2009.
2. *Qader I. N., Kok M., Dagdelen F., and Aydogdu Y. A review of smart materials: researches and applications // El-Cezeri J. Sci. Eng.* — 2019. — Vol. 6, No. 3. — P. 755—788.
3. *Janeliukstis R. and Mironovs D. Smart composite structures with embedded sensors for load and damage monitoring. A review // Mech. Compos. Mater.* — 2021. — Vol. 57, No. 2. — P. 131—152.
4. *Plotnikova S. V. and Kulikov G. M. Shape control of composite plates with distributed piezoelectric actuators in a three-dimensional formulation // Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 56, No. 5. — P. 557—572.

5. Kovalovs A., Barkanov E., Rucevskis S., and Wesolowski M. Modeling and design of a full-scale rotor blade with embedded piezocomposite actuators // *Mech. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 53, No. 2. — P. 179—192.
6. Amrillah T., Hermawan A., Wulandari C. P., Muthi'Ah A. D., and Simanjuntak F. M. Crafting the multiferroic $\text{BiFeO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$ nanocomposite for next-generation devices: A review // *Mater. Manufacturing Processes.* — 2021. — Vol. 36, No. 14. — P.1579—1596.
7. Lamouri R., Mounkachi O., Salmani E., Hamedoun M., Benyoussef A., and Ez-Zahraouy H. Size effect on the magnetic properties of CoFe_2O_4 nanoparticles: a Monte Carlo study // *Ceramics Int.* — 2020. — Vol. 46, No. 6. — P. 8092—8096.
8. Fiebig M. Revival of the magnetoelectric effect // *J. Phys. D: Appl. Phys.* — 2005. — Vol. 38, No. 8. — P. R123—R152.
9. Siva K. V., Kaviraj P., and Arockiarajan A. Improved room temperature magneto-electric response in $\text{CoFe}_2\text{O}_4\text{-BaTiO}_3$ core shell and bipolar magnetostrictive properties in CoFe_2O_4 // *Materials Lett.* — 2020. — Vol. 268. — P. 127623.
10. Challagulla K. S. and Georgiades A. V. Micromechanical analysis of magneto-electro-thermo-elastic composite materials with applications to multilayered structures // *Int. J. Eng. Sci.* — 2011. — Vol. 49, No. 1. — P. 85—104.
11. Novatskiy V. and Shachnev V. A. *Electromagnetic Effects in Solids.* — Moscow: Mir, 1986 [in Russian].
12. Parton V. Z. and Kudryavtsev B. A. *Electromagnetoelasticity of Piezoelectric and Electroconductive Bodies.* — Moscow: Nauka, 1988 [in Russian].
13. Vatul'yan A. O. and Rynkova A. A. Flexural vibrations of a piezoelectric bimorph with a cut internal electrode // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* — 2001. — Vol. 42, No. 1. — P. 164—168.
14. Soloviev A. N., Oganesyan P. A., Lupeiko T. G., Kirillova E. V., Chang S. H., and Yang C. D. /Ed. I. A. Parinov // *Advanced Materials.* Chap. 46. Modeling of Non-Uniform Polarization for Multi-Layered Piezoelectric Transducer for Energy Harvesting Devices. — Heidelberg: Springer, 2016. — P. 651—658.
15. Wang J. G., Chen L. F., and Fang S. State vector approach to analysis of multilayered magneto-electro-elastic plates // *Int. J. Solids Struct.* — 2003. — Vol. 40, No. 7. — P. 1669—1680.
16. Pan E. Exact solution for simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates // *J. Appl. Mech.* — 2001. — Vol. 68, No. 4. — P. 608—618.
17. Milazzo A., Orlando C., and Alaimo A. An analytical solution for the magneto-electro-elastic bimorph beam forced vibrations problem // *Smart Mater. Struct.* — 2009. — Vol. 18, No. 8. — P. 085012.
18. Levi M. O. and Kalinchuk V. V. Some features of the dynamics of electro-magneto-elastic half-space with initial deformations // *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)* — IEEE, Omsk, 2017. — P. 1—5.
19. Pan E. and Heyliger P. R. Free vibrations of simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates // *J. Sound Vib.* — 2002. — Vol. 252, No. 3. — P. —429—442.
20. Annigeri A. R., Ganesan N., and Swarnamani S. Free vibration behaviour of multiphase and layered magneto-electro-elastic beam // *J. Sound Vib.* — 2007. — Vol. 299, Nos. 1—2. — P. 44—63.
21. Milazzo A., Benedetti I., and Orlando C. Boundary element method for magneto electro elastic laminates // *Comput. Model. Eng. Sci.* — 2006. — Vol. 15. — P. 17—3.
22. Soloviev A. N., Chebanenko V. A., Parinov I. A., and Oganesyan P. A. Applied theory of bending vibrations of a piezoelectric bimorph with a quadratic electric potential distribution // *Mater. Phys. Mech.* — 2019. — Vol. 42, No. 1. — P. 65—73.

23. *Binh D. T., Chebanenko V. A., Duong L. V., Kirillova E., Thang P. M., and Soloviev A. N.* Applied theory of bending vibration of the piezoelectric and piezomagnetic bimorph // *J. Adv. Dielectrics*. — 2020. — Vol. 10, No. 3. — P. 2050007.

24. *Kurbatova N. V., Nadolin D. K., Nasedkin A. V., Oganesyanyan P. A., and Soloviev A. N.* / Eds. H. Altenbach, E. Carrera, G. Kulikov // *Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems. Advanced Structured Materials, Finite Element Approach for Composite Magneto-Piezoelectric Materials Modeling in ACELAN-COMPOS Package*. — Singapore: Springer, 2018. — P. 69—88.

Поступила в редакцию 09.12.2021

Окончательный вариант поступил 30.04.2022

Received Dec. 9, 2021 (Apr. 30, 2022)
