

Ю. В. Гриняев^{а,б}, Н. В. Чертова^а, Е. В. Шилько^{а,б}*

^аИнститут физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия

^бНациональный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ АНАЛИЗА АКУСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ДВУХФАЗНЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ДЕФЕКТНЫМИ МЕЖФАЗНЫМИ ГРАНИЦАМИ

*Y. V. Grinyayev, N. V. Chertova, and E. V. Shilko**

LAGRANGIAN FORMALISM FOR THE ANALYSIS OF ACOUSTIC PROPERTIES OF TWO-PHASE COMPOSITE MATERIALS WITH DAMAGED INTERFACES

Keywords: two-phase composite, Lagrangian formalism, elastic wave speed, effective elastic modulus, interface damage

New macroscopic mechanical model of a two-phase composite based on the Lagrange function and the principle of least action was developed. The key advantage of the model is the direct consideration of phase interaction and defects (discontinuities) at interphase boundaries. As distinct from the classical macroscopic models, the equations of the model developed are solved in terms of the velocities of elastic waves in the composite. The effective (macroscopic) elastic moduli of the composite are calculated using the derived velocities. On the example of an analytical solution for the 1D case, the qualitatively new possibilities are demonstrated, provided by the model developed for evaluating the acoustic characteristics of composites and analyzing the effect of the volume content of phases and a damage of the interphase boundaries. It was theoretically shown for the first time that, in addition to the classical elastic waves with the parameters estimated with good accuracy in the framework of traditional models, “slow” elastic waves can originate and steadily propagate in the composite materials with damage at interfaces. Analytical relations obtained allow one to solve both the direct problem of determining the velocities of “fast” and “slow” elastic waves in a

*Автор, с которым следует вести переписку: shilko@ispms.ru
Corresponding author: shilko@ispms.ru

composite with imperfect interphase boundaries, and the inverse problem of estimating the damage and volume content of the phases from known values of the elastic wave velocities.

Ключевые слова: композит двухфазный, формализм лагранжев, скорости упругих волн, константы упругие эффективные, поврежденность

Разработана новая механическая модель двухфазного композита, базирующаяся на построении функции Лагранжа и применении принципа наименьшего действия. Ключевое преимущество модели — прямой учет межфазного взаимодействия и наличия дефектов (несплошностей) на межфазных границах. В отличие от классических моделей непосредственным решением полученных уравнений данной модели являются значения скоростей упругих волн в композите, на основании которых далее могут быть определены эффективные упругие модули. На примере аналитического решения для 1D случая показаны качественно новые возможности, появляющиеся при использовании развитой модели для оценки акустических характеристик композитов и анализа влияния объемной доли фаз и поврежденности межфазных границ. Впервые теоретически показано, что помимо классических упругих волн с параметрами, с хорошей точностью оцениваемыми в рамках традиционных моделей, в композитных материалах с повреждениями на межфазных границах могут формироваться и устойчиво распространяться “медленные” упругие волны. Получены аналитические соотношения, позволяющие решать как прямую задачу определения скоростей “быстрых” и “медленных” упругих волн в композите с несовершенными межфазными границами, так и обратную задачу оценки поврежденности и объемных долей фаз по известным значениям скоростей упругих волн.

Введение

Важной составляющей разработки новых материалов многофазного (композитного) состава является прогнозирование их статических и динамических (акустических) упругих характеристик. Связанной с ней задачей является неразрушающая диагностика фазового состава и поврежденности образцов и элементов структур различного назначения из композитных материалов, что крайне важно в контексте создания цифровых двойников конечных изделий. Для решения этих проблем развиваются различные неразрушающие методы, в том числе основанные на анализе скоростей и дисперсии упругих волн [1—6]. Развитие таких методов базируется на построении математического формализма, позволяющего связывать интегральные упругие характеристики композитного материала,

в частности характеристики упругих волн, с фазовым составом и дефектностью структуры.

Наиболее полным и общим подходом к определению макроскопических механических характеристик композита является микромеханический подход, в рамках которого композитный материал рассматривается как кусочно-непрерывная среда. Для такой среды строится система определяющих соотношений с учетом условий для напряжений и деформаций на внутренних границах раздела (интерфейсах). В общем случае такая система уравнений решается численно, а усреднение получаемых результатов для представительных мезообъемов позволяет оценивать эффективные свойства композита [7—13]. Несмотря на хорошо известные преимущества (возможность явного учета микроструктуры и особых свойств интерфейсов), непосредственная компьютерная гомогенизация является вычислительно крайне затратной процедурой вследствие необходимости проведения многопараметрического исследования для определения однозначного соответствия внутренней структуры и макроскопических свойств материала. Это обуславливает низкую эффективность численного подхода для построения функциональных зависимостей макроскопических свойств от интегральных характеристик внутренней структуры (таких как объемные доли фаз, дефектность межфазных границ и т.д.).

При решении задач такого рода привлекательной альтернативой непосредственной компьютерной гомогенизации является аналитическая гомогенизация. В ее основе лежат теоретические представления о композитном материале на макромасштабном уровне как об эффективной среде, в которой реальная дискретная структура аппроксимируется взаимопроницающими континуумами компонентов. Использование упрощенных предположений об аппроксимации дискретной микроструктуры материала эффективным однородным континуумом позволяет получать полуаналитические или аналитические зависимости механических (в частности, упругих) характеристик от интегральных параметров композитной структуры.

Классическими и наиболее широко применяемыми представителями аналитических моделей являются модели Фойгта и Рейсса [14—16], Хашина—Штрикмана [17—19], Мори—Танака [20, 21], самосогласованный метод [22, 23] и т.д. Эти модели прогнозируют интервалы значений упругих модулей макроскопически изотропного двухфазного композита при заданных значениях объемного содержания компонентов. Преимуществами указанных моделей являются достаточно простые аналитические соотношения. К их ключевым недостаткам традиционно относят достаточно широкие значения интервалов. В частности, различие оценок Фойгта и Рейсса для композитов с высоким локальным контрастом упругих свойств может составлять порядок величины, что делает эти модели практически бесполезными для контрастных материалов. Модель Хашина—Штрикмана, использующая решение классической задачи Эшелби [24], в большинстве случаев обеспечивает наиболее узкий интервал значений. Тем не менее и

он может быть неприемлемо широким для композитов, упругие свойства компонентов которого различаются на несколько порядков величины.

В последние два десятилетия предложен целый ряд других моделей гомогенизации структуры, дающих однозначные оценки эффективных (макроскопических) механических свойств [25—32]. В ряде работ развиты модели, учитывающие влияние геометрии фаз на макроскопические упругие модули [1, 3, 33—35]. Эти оценки зависят от корреляционных функций, однако полный набор пространственных корреляционных функций, необходимых для вычисления эффективных свойств, как правило, не определен. Среди последних работ также можно выделить микромеханический подход, основанный на комбинировании тензора вкладов в жесткость материала и схем гомогенизации Мори—Танака и Максвелла [36]; новый метод определения макроскопических упругих констант композитов на основе гипотезы эквивалентности полной упругой энергии [37, 38]; полуаналитическую модель описания представительного объема как ансамбля ячеек с различными свойствами и несовершенными границами раздела ячеек [39].

Важно отметить, что в широко используемых в инженерной практике классических моделях явно не говорится о том, что величина эффективных упругих модулей в значительной степени определяется взаимодействием компонентов композита, а степень их взаимодействия в свою очередь — дефектностью межфазных границ. При этом взаимодействие компонентов неявно учитывается. Кроме того, в традиционных моделях, применяемых для оценки эффективных упругих модулей, решают частные стационарные задачи теории упругости для определения распределения напряжений и деформаций. Далее находят эффективные (макроскопические) упругие модули композита на основе процедур гомогенизации. Динамические (в том числе акустические) свойства композитов определяются на основе решения уравнений динамики с использованием полученных оценок эффективных упругих модулей. Это является очевидным ограничением такого подхода. Действительно, в его рамках акустические свойства материала однозначно определяются его статическими характеристиками (эффективными упругими константами), что далеко не всегда справедливо для реальных многофазных материалов.

В настоящей работе предложена новая динамическая механическая модель макроскопически изотропного двухфазного композитного материала, основанная на лагранжевом формализме и принципе наименьшего действия. В модели используется постановка задачи, в определенном смысле обратная по отношению к классическим моделям, а именно: определение динамических характеристик композита (параметров упругих волн), которые можно применять для оценки эффективных (интегральных) упругих констант материала. В рамках модели конструируется лагранжиан, представляющий собой разность кинетической и потенциальной энергий материала. Потенциальная энергия состоит из суммы потенциальных энергий фаз и потенциальной энергии их взаимодействия. Последняя

явным образом учитывает такую ключевую характеристику межфазных границ, как поврежденность. В рамках данной модели выведена система связанных динамических уравнений относительно упругих смещений компонентов (фаз).

1. Общие положения

Модель основана на классическом принципе эффективной среды. В приближении эффективной среды микроскопически дискретная структура материала макроскопически описывается в рамках взаимопроникающих континуумов. Полагаем, что полная масса M упругого материала непрерывно распределена в объеме V , занятом композитом. Масса каждого компонента также непрерывно распределена в этом объеме. Таким образом, макроскопическая модель композита представляет собой сочетание взаимно проникающих и взаимодействующих континуумов. Принято, что уравнения состояния компонентов композита аналогичны уравнениям для этих величин в свободном состоянии. Определим зависимости между эффективными и истинными плотностями компонентов (фаз) двухфазного композита на основе принципа сохранения массы.

Рассмотрим малый, но конечный представительный объем dV , представляющий собой суперпозицию объемов, занятых отдельными компонентами. К представительному объему предъявляются два базовых требования [38]: во-первых, он должен содержать достаточное количество структурных элементов (включений), чтобы его увеличение не приводило к значимому изменению параметров интегрального механического отклика; во-вторых, его размеры должны быть пренебрежимо малы в сравнении с размерами образца. В этом случае представительный объем dV можно приближенно рассматривать как материальную точку, и к нему применимы операции дифференцирования и интегрирования.

В предположении, что масса dM_α каждого компонента α непрерывно распределена в представительном объеме dV , локальную эффективную плотность каждого компонента определяем как

$$\tilde{\rho}_\alpha = \frac{dM_\alpha}{dV}. \quad (1)$$

В действительности каждый компонент занимает некоторый объем dV_α с некоторой истинной плотностью ρ_α . В предположении постоянства масс компонентов (т. е. нет диффузии и химических реакций) справедливо равенство

$$dM_\alpha = \tilde{\rho}_\alpha dV = \rho_\alpha dV_\alpha. \quad (2)$$

Отсюда следует связь между эффективными и истинными плотностями каждого компонента композита

$$\tilde{\rho}_\alpha = \phi_\alpha \rho_\alpha, \quad (3)$$

где $\phi_\alpha = dV_\alpha / dV$ — объемная доля компонента α . Отметим, что объемные доли удовлетворяют условию $\sum_{\alpha=1}^2 \phi_\alpha = 1$. Таким образом, из условия посто-

янства масс компонентов получаем зависимости между эффективными и истинными локальными плотностями компонентов в композите.

2. Лагранжиан двухфазного композита и уравнения движения компонентов

Как уже было отмечено, при макроскопическом описании представительный объем композита рассматриваем как материальную точку, в которой определены эффективные параметры двух компонентов. Полагая, что компоненты в составе композита сохраняют свою “индивидуальность” (в том числе упругие характеристики), функцию Лагранжа двухфазного композита в терминах эффективных параметров можно записать в общем виде как

$$L = \frac{\tilde{\rho}_1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{(ef1)}}{\partial t} \right)^2 + \frac{\tilde{\rho}_2}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{(ef2)}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(ef1)} \varepsilon_{ij}^{(ef1)} - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(ef2)} \varepsilon_{ij}^{(ef2)} - \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^{(ef1)} \varepsilon_{ij}^{(ef2)} + \sigma_{ij}^{(ef2)} \varepsilon_{ij}^{(ef1)} \right). \quad (4)$$

Здесь первые два слагаемых представляют объемные плотности кинетической энергии первого и второго компонентов соответственно (\mathbf{u} — вектор смещения). Третий и четвертый члены определяют плотности потенциальных энергий этих компонентов (σ_{ij} и ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций). Пятый член определяет потенциальную энергию взаимодействия компонентов. Индексы $ef1$ и $ef2$ указывают, что соответствующие параметры являются эффективными параметрами компонентов.

Форма записи потенциальной энергии (4) вытекает из следующих положений. Как уже было отмечено, эффективные характеристики представительного объема двухфазного композита определяются в предположении, что оба компонента равномерно и непрерывно распределены в этом объеме (модель двух взаимопроникающих и взаимодействующих континуумов). Отсюда вытекают два очевидных следствия. Во-первых, логично полагать, что напряжения и деформации в каждой фазе представительного объема распределены однородно. Во-вторых, следствием взаимодействия фаз является тот факт, что деформации каждой фазы вызывают напряжения как в одной фазе, так и в другой (поскольку с физической точки зрения напряжения являются реакцией материала на деформирование). Исходя

из этих следствий, выражение для плотности потенциальной энергии представительного объема двухфазного композита можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{(ef1)} \left(\sigma_{ij}^{(ef1)} + \sigma_{ij}^{(ef2)} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{(ef2)} \left(\sigma_{ij}^{(ef2)} + \sigma_{ij}^{(ef1)} \right).$$

Для удобства это выражение можно представить в виде сумм потенциальных энергий отдельных фаз и потенциальной энергии взаимодействия фаз. Данная формулировка приведена в лагранжиане (4).

Отметим также, что в приведенной формулировке лагранжиана намеренно не делаются упрощающие предположения о характере связи деформаций (или напряжений) в различных фазах. Действительно, часто используемое в смесевых моделях предположение об одинаковости деформаций приводит к модели Фойгта. Альтернативное предположение об одинаковости напряжений в различных фазах приводит к абсурдному результату — равенству упругих модулей компонентов. Важно упомянуть, что оба этих предположения не согласуются с многочисленными результатами микромеханического численного моделирования представительных объемов двухфазных композитов. Из этих результатов хорошо известно, что значения напряжений и деформаций в компонентах различны (в более “мягких” компонентах выше деформации, а в более “жестких” — выше напряжения). Различия определяются соотношением упругих констант компонентов и тем выше, чем больше различия упругих модулей компонентов. Поэтому формулировка лагранжиана (4), постулирующая априори характер взаимосвязи деформаций (или напряжений) в различных фазах композита, является наиболее общей и корректной.

Для записи лагранжиана (4) в терминах истинных параметров компонентов определим зависимости между эффективными и истинными характеристиками компонентов композита. Это может быть сделано на основе анализа условий сохранения кинетической энергии компонентов и действующих на них объемных сил.

Кинетическая энергия “равнораспределенного” компонента α в представительном объеме dV равна кинетической энергии для реального объема dV_α , занимаемого этим компонентом:

$$\frac{1}{2} \tilde{\rho}_\alpha \left(\mathbf{v}^{(ef\alpha)} \right)^2 dV = \frac{1}{2} \rho_\alpha \left(\mathbf{v}^{(\alpha)} \right)^2 dV_\alpha, \quad (5)$$

где $\mathbf{v} = \partial \mathbf{u} / \partial t$, $\alpha = 1, 2$. Отсюда вытекает связь между эффективным и реальным значениями кинетической энергии компонента α :

$$\frac{1}{2} \tilde{\rho}_\alpha \left(\mathbf{v}^{(ef\alpha)} \right)^2 = \frac{\phi_\alpha}{2} \rho_\alpha \left(\mathbf{v}^{(\alpha)} \right)^2. \quad (6)$$

Отметим, что потенциальная энергия отдельного компонента не сохраняется при переходе от эффективного к “истинному” рассмотрению, поскольку имеет место взаимодействие компонентов.

Найдем связь между эффективным и реальным тензорами напряжений, используя условие сохранения объемных сил. Сила, действующая на единицу объема, определяется как $\nabla \cdot \sigma$. Если отдельный компонент непрерывно распределен в представительном объеме dV , тогда непрерывно распределены в этом объеме и соответствующие эффективные напряжения. В этом случае объемную силу, действующую на компонент, определяем как

$$\nabla \cdot \sigma^{(ef\alpha)} dV = \mathbf{F}^{(\alpha)}, \quad (7)$$

где $\sigma^{(ef\alpha)}$ — эффективные напряжения в объеме dV , занятом компонентом α . В действительности каждый компонент занимает объем dV_α и характеризуется истинными напряжениями $\sigma^{(\alpha)}$. Тогда объемную силу, действующую на компонент α , определяем как

$$\nabla \cdot \sigma^{(\alpha)} dV_\alpha = \mathbf{F}^{(\alpha)}. \quad (8)$$

Из условия равенства объемных сил (7) и (8) следует связь между полями истинных и эффективных напряжений

$$\nabla \cdot \sigma^{(ef\alpha)} = \phi_\alpha \nabla \cdot \sigma^{(\alpha)}. \quad (9)$$

Если компоненты распределены равномерно в представительном объеме dV , тогда ϕ_α являются константами, и их можно внести под знак дивергенции $\nabla \cdot (\sigma^{(ef\alpha)} - \phi_\alpha \sigma^{(\alpha)}) = 0$. Отсюда следует, что выражение в скобках

определено с точностью до ротора некоторого произвольного тензора второго ранга A : $\sigma^{(ef\alpha)} - \phi_\alpha \sigma^{(\alpha)} = \nabla \times A$. Ввиду произвольности выбора тензора A положим его равным нулю. Дополнительным обоснованием такого выбора является то, что тензор A имеет смысл моментных напряжений. Настоящее рассмотрение проводим в рамках линейной теории упругости и моментные напряжения не учитываем. Тогда в приближении однородного распределения компонентов в объеме dV связь между полями истинных и эффективных напряжений примет вид

$$\sigma^{(ef\alpha)} = \phi_\alpha \sigma^{(\alpha)}. \quad (10)$$

В случае малых упругих деформаций истинные и эффективные напряжения можно выразить через истинные и эффективные деформации по закону Гука

$$\sigma = (-2\mu/3)(\text{Sp}\varepsilon)\delta + (\mu/2)\varepsilon,$$

где K и μ — модуль объемного сжатия и модуль сдвига соответственно; $Spr\varepsilon$ — сумма диагональных компонентов тензора деформации; δ — единичный тензор. Учтем, что удельные (в расчете на единицу объема) упругие характеристики материала компонента не зависят от того, сосредоточен ли он в своем объеме dV_α или непрерывно распределен в представительном объеме dV . Тогда из (12) легко получить взаимосвязь тензоров истинных $\varepsilon^{(\alpha)}$ и эффективных $\varepsilon^{(ef\alpha)}$ деформаций

$$\varepsilon^{(ef\alpha)} = \phi_\alpha \varepsilon^{(\alpha)}. \quad (11)$$

В лагранжиане (4) в выражении для плотности полной потенциальной энергии перейдем от эффективных характеристик к истинным, учитывая (10) и (11):

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{ij}^{(ef1)} \varepsilon_{ij}^{(ef1)} + \sigma_{ij}^{(ef2)} \varepsilon_{ij}^{(ef2)} + \left(\sigma_{ij}^{(ef1)} \varepsilon_{ij}^{(ef2)} + \sigma_{ij}^{(ef2)} \varepsilon_{ij}^{(ef1)} \right) \right) dV = \\ & = \phi_1^2 \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV_1 + \phi_2^2 \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV_2 + \phi_1 \phi_2 \left(\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \right) dV. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} & \sigma_{ij}^{(ef1)} \varepsilon_{ij}^{(ef1)} + \sigma_{ij}^{(ef2)} \varepsilon_{ij}^{(ef2)} + \left(\sigma_{ij}^{(ef1)} \varepsilon_{ij}^{(ef2)} + \sigma_{ij}^{(ef2)} \varepsilon_{ij}^{(ef1)} \right) = \\ & \phi_1^3 \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} + \phi_2^3 \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \phi_1 \phi_2 \left(\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Степень взаимодействия компонентов определяется свойствами межфазных границ. Действительно, напряжения от одного компонента к другому передаются через границу раздела. Границы раздела могут быть несовершенны, т.е. иметь несплошности (микротрещины). В этом случае напряжения передаются частично, а, следовательно, энергия взаимодействия компонентов будет меньше в сравнении с совершенными границами. Будем характеризовать поврежденность межфазных границ безразмерным удельным параметром q , определяемый как отношение суммарной площади совершенных (сплошных) участков межфазных границ к общей площади границ раздела: $0 \leq q \leq 1$. Полагаем, что на поврежденных участках границ поверхности несплошностей не контактируют. Тогда энергию взаимодействия компонентов умножаем на величину q . Принимая во внимание сказанное и с учетом выражения (13), лагранжиан запишем в общем виде как

$$\begin{aligned} L = & \frac{\phi_1 \rho_1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial t} \right)^2 + \frac{\phi_2 \rho_2}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial t} \right)^2 - \frac{\phi_1^3}{2} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} - \frac{\phi_2^3}{2} \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} - \\ & - \frac{q \phi_1 \phi_2}{2} \left(\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Обоснованность такого учета несплошности межфазных границ в лагранжиане (14) можно пояснить следующим образом. Если в отсутствие межфазных несплошностей ($q = 1$) деформации ε_{ij} одной фазы вызывают напряжения другой фазы, то при ненулевой дефектности границ ($q < 1$) те же самые деформации ε_{ij} одной фазы вызовут напряжения $q\sigma_{ij}$ в объеме другой фазы вследствие уменьшения фактической площади поверхности взаимодействия фаз (поверхности, на которой одна фаза деформирует другую). Данное приближение можно рассматривать как первое (линейное) приближение к учету влияния несплошных участков границ раздела на энергию межфазного взаимодействия. Использование линейного приближения непосредственно вытекает из приближения однородного распределения истинных напряжений и деформаций в каждой фазе представительного объема.

В случае малых упругих деформаций тензор истинных деформаций компонентов определяем через истинные смещения следующим образом:

$$\varepsilon^{(\alpha)} = \left(\nabla \mathbf{u}^{(\alpha)} + \mathbf{u}^{(\alpha)} \nabla \right) / 2.$$

Соответственно, лагранжиан двухфазного композита в линейно-упругом приближении принимает вид

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \phi_1 \rho_1 \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \phi_2 \rho_2 \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial t} \right)^2 - \\ & - \frac{\phi_1^3}{4} \left[\frac{2(3K_1 - 2\mu_1)}{3} \left(\frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial x_n} \right)^2 + \mu_1 \left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i} \right)^2 \right] - \\ & - \frac{\phi_2^3}{4} \left[\frac{2(3K_2 - 2\mu_2)}{3} \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_i} \right)^2 + \mu_2 \left(\frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial x_k} \right)^2 \right] - \\ & - \frac{q\phi_2\phi_1[(3K_2 - 2\mu_2) + (3K_1 - 2\mu_1)]}{6} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_i} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_k} - \\ & - \frac{q\phi_2\phi_1[\mu_2 + \mu_1]}{4} \left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где нижние индексы i и j обозначают проекцию вектора на соответствующую координатную ось.

Соотношения для скоростей упругих волн можно получить на основе вывода уравнений движения для смещений компонентов $u^{(\alpha)}$ из уравнения Эйлера—Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial u_m^{(\alpha)}}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial u_m^{(\alpha)}}{\partial x_k}} = 0. \quad (16)$$

Подставляя лагранжиан (15), получим уравнения движения компонентов двухфазного композита в терминах их упругих смещений $u_m^{(\alpha)}$

$$\begin{aligned} \phi_1 \rho_1 \frac{\partial^2 u_m^{(1)}}{\partial t^2} = & \phi_1^3 \left[\frac{3K_1 - 2\mu_1}{3} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_i} + \mu_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m^{(1)}}{\partial x_j} \right) \right] + \\ & + \frac{q\phi_2\phi_1[(3K_2 - 2\mu_2) + (3K_1 - 2\mu_1)]}{6} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_i} + \\ & + \frac{q\phi_2\phi_1[\mu_2 + \mu_1]}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m^{(2)}}{\partial x_j} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \phi_2 \rho_2 \frac{\partial^2 u_m^{(2)}}{\partial t^2} = & \phi_2^3 \left[\frac{3K_2 - 2\mu_2}{3} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_i} + \mu_2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m^{(2)}}{\partial x_j} \right) \right] + \\ & + \frac{q\phi_2\phi_1[(3K_2 - 2\mu_2) + (3K_1 - 2\mu_1)]}{6} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_i} + \\ & + \frac{q\phi_2\phi_1[\mu_2 + \mu_1]}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m^{(1)}}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

3. Аналитические соотношения для скоростей упругих волн и упругих констант

В общем 3D случае уравнения движения (17), (18) могут быть решены только численно при задании начальных и граничных условий. Однако в частном одномерном случае возможно получение важных аналитических решений, дающих оценки скоростей плоских продольной и поперечной упругих волн в макроскопически изотропных двухфазных композитах, в том числе содержащих повреждения (несплошности) на межфазных границах.

Для получения соотношений для скорости продольной плоской упругой волны полагаем, что имеют место только продольные смещения (в направ-

лении распространения волны, совпадающем с координатной осью X). В одномерном случае уравнения движения компонентов принимают вид

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} = \phi_1^2 \left[c_1^2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} \right] + A_1 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} = \phi_2^2 \left[c_2^2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} \right] + A_2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2}. \quad (20)$$

Отметим, что при выводе уравнений (19), (20) использованы соотношения для скоростей продольных упругих волн в материалах фаз

$$c_\alpha^2 = \frac{3K_\alpha + 4\mu_\alpha}{3\rho_\alpha}, \quad (21)$$

где K_α , μ_α и ρ_α — модуль всестороннего сжатия, модуль сдвига и плотность компонента (фазы) α , а также введены материальные коэффициенты связи между фазами

$$A_1 = \frac{q\phi_2 [(3K_2 + 4\mu_2) + (3K_1 + 4\mu_1)]}{6\rho_1}, \quad (22)$$

$$A_2 = \frac{q\phi_1 [(3K_2 + 4\mu_2) + (3K_1 + 4\mu_1)]}{6\rho_2}. \quad (23)$$

Ищем решение уравнений (19), (20) в виде плоской волны $U_0^{(1)} e^{i(kx - \omega t)}$ и $U_0^{(2)} e^{i(kx - \omega t)}$ соответственно. Подставляя это решение, получим уравнения для определения амплитуд $U_0^{(1)}$ и $U_0^{(2)}$

$$(\phi_1^2 c_1^2 k^2 - \omega^2) U_0^{(1)} + A_1 k^2 U_0^{(2)} = 0, \quad (24)$$

$$A_2 k^2 U_0^{(1)} + (\phi_2^2 c_2^2 k^2 - \omega^2) U_0^{(2)} = 0. \quad (25)$$

Данная система уравнений имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю:

$$\det \begin{bmatrix} (\phi_1^2 c_1^2 k^2 - \omega^2) & A_1 k^2 \\ A_2 k^2 & (\phi_2^2 c_2^2 k^2 - \omega^2) \end{bmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим характеристическое уравнение

$$\omega^4 - (\phi_1^2 c_1^2 + \phi_2^2 c_2^2) \omega^2 k^2 + \phi_1^2 \phi_2^2 c_1^2 c_2^2 k^4 - A_1 A_2 k^4 = 0. \quad (26)$$

Решением этого уравнения является зависимость частоты от волнового числа

$$\omega_{1,2} = k \sqrt{\frac{\phi_1^2 c_1^2 + \phi_2^2 c_2^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\phi_1^2 c_1^2 - \phi_2^2 c_2^2)^2}{4} + A_1 A_2}}. \quad (27)$$

Отсюда можно получить выражение для групповой скорости (скорости распространения продольного звука) в двухфазном композите как производной частоты по волновому числу

$$V_{1,2} = d\omega_{1,2} / dk.$$

Как видно из (27), в двухфазном композите могут стационарно (без дисперсии) распространяться две продольные упругие волны с разными скоростями:

$$V_1 = \sqrt{\frac{\phi_1^2 c_1^2 + \phi_2^2 c_2^2}{2} + \sqrt{\frac{(\phi_1^2 c_1^2 - \phi_2^2 c_2^2)^2}{4} + A_1 A_2}}, \quad (28)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{\phi_1^2 c_1^2 + \phi_2^2 c_2^2}{2} - \sqrt{\frac{(\phi_1^2 c_1^2 - \phi_2^2 c_2^2)^2}{4} + A_1 A_2}}. \quad (29)$$

Первая из скоростей (“быстрая” V_1) является скоростью классической продольной упругой волны в материале. Смысл второй (“медленной” V_2) волны будет обсужден далее.

Аналогичным образом можно вывести соотношения для плоских поперечных упругих волн в композите. Используем приближение только поперечных ненулевых смещений по отношению к направлению движения волны. Кроме того, учитываем, что при распространении поперечной волны объем не изменяется ($\partial u_i / \partial x_i = 0$). В этом случае уравнения (17), (18) в одномерном случае примут вид

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} = \frac{\phi_1^2 \mu_1}{\rho_1} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{q \phi_2 (\mu_1 + \mu_2)}{2 \rho_1} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} = \frac{\phi_2^2 \mu_2}{\rho_2} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{q \phi_1 (\mu_1 + \mu_2)}{2 \rho_2} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2}. \quad (31)$$

По аналогии с продольными волнами решение уравнений (30), (31) ищем в виде плоской поперечной волны $\tilde{U}_0^{(1)} e^{i(kx - \omega t)}$ и $\tilde{U}_0^{(2)} e^{i(kx - \omega t)}$ соот-

ответственно. Подставляя это решение, получаем уравнения для определения амплитуд $\tilde{U}_0^{(1)}$ и $\tilde{U}_0^{(2)}$ поперечных колебаний

$$\tilde{U}^{(1)} \left(\omega^2 - \frac{\phi_1^2 \mu_1 k^2}{\rho_1} \right) - \tilde{U}^{(2)} \left(\frac{q \phi_2 (\mu_1 + \mu_2) k^2}{2 \rho_1} \right) = 0, \quad (32)$$

$$\tilde{U}^{(1)} \left(-\frac{q \phi_1 (\mu_1 + \mu_2) k^2}{2 \rho_2} \right) - \tilde{U}^{(2)} \left(\omega^2 - \frac{\phi_2^2 \mu_2 k^2}{\rho_2} \right) = 0. \quad (33)$$

Решение этих уравнений дает дисперсионное соотношение

$$\tilde{\omega}_{1,2} = k \sqrt{\frac{\phi_1^2 \mu_1 \rho_2 + \phi_2^2 \mu_2 \rho_1}{2 \rho_1 \rho_2} \pm \sqrt{\frac{(\phi_1^2 \mu_1 \rho_2 - \phi_2^2 \mu_2 \rho_1)^2}{4 \rho_1^2 \rho_2^2} + \frac{q^2 \phi_1 \phi_2 (\mu_1 + \mu_2)^2}{4 \rho_1 \rho_2}}}. \quad (34)$$

Как и в случае продольных волн, отсюда можно получить выражение для скорости распространения поперечного звука в двухфазном композите как производной частоты по волновому числу

$$\tilde{V}_{1,2} = d\tilde{\omega}_{1,2}/dk.$$

Как видно из (34), в двухфазном композите могут стационарно (без дисперсии) распространяться две поперечные упругие волны с различными скоростями — “быстрая” (\tilde{V}_1) и “медленная” (\tilde{V}_2):

$$\tilde{V}_1 = \sqrt{\frac{\phi_1^2 C_1^2 + \phi_2^2 C_2^2}{2} + \sqrt{\frac{(\phi_1^2 C_1^2 - \phi_2^2 C_2^2)^2}{4} + \frac{q_1^2 \phi_1 \phi_2 \rho_1 \rho_2}{4} \left(\frac{C_1^2}{\rho_2} + \frac{C_2^2}{\rho_1} \right)^2}}, \quad (35)$$

$$\tilde{V}_2 = \sqrt{\frac{\phi_1^2 C_1^2 + \phi_2^2 C_2^2}{2} - \sqrt{\frac{(\phi_1^2 C_1^2 - \phi_2^2 C_2^2)^2}{4} + \frac{q_1^2 \phi_1 \phi_2 \rho_1 \rho_2}{4} \left(\frac{C_1^2}{\rho_2} + \frac{C_2^2}{\rho_1} \right)^2}}. \quad (36)$$

Здесь $C_{1,2} = \sqrt{\mu_{1,2}/\rho_{1,2}}$ — скорости поперечных упругих волн в материалах фаз.

Таким образом, применение лагранжева формализма позволяет напрямую определять скорости упругих волн в композитном материале в зависимости от фазового состава, объемной доли фаз и дефектности межфазных границ. При этом в отличие от классических моделей, где скорости упругих волн определяют на основе известных значений эффективных (интегральных) значений упругих констант и плотности композита, в

развитой динамической модели эффективные упругие модули определяют из вычисленных значений скоростей упругих волн (28) и (29), (35) и (36).

В частности, эффективные модуль сдвига μ , модуль всестороннего сжатия K , модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν композитного материала рассчитываем как

$$\mu = (\phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2) \tilde{V}_1^2, \quad (37)$$

$$K = (\phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2) \left(V_1^2 - \frac{4}{3} \tilde{V}_1^2 \right), \quad (38)$$

$$E = \frac{3(\phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2) \tilde{V}_1^2 \left(V_1^2 - \frac{4}{3} \tilde{V}_1^2 \right)}{V_1^2 - \tilde{V}_1^2}, \quad (39)$$

$$\nu = \frac{V_1^2 - 2\tilde{V}_1^2}{2(V_1^2 - \tilde{V}_1^2)}. \quad (40)$$

4. Верификация механической модели двухфазного композита

Точность аналитических оценок данной модели и ее применимость для макроскопически изотропных неорганических и органических композитных материалов верифицирована на примере нескольких двухкомпонентных композитов, упругие константы компонентов которых имеют одинаковый порядок величины либо различаются на два порядка. Зависимости значений упругих констант (40)—(43) сопоставлены с доступными экспериментальными данными и аналитическими оценками в рамках широко применяемой модели Хашина—Штрикмана [19,40]:

$$\mu^+ = \mu_1 + \frac{\phi_2}{\frac{1}{\mu_2 - \mu_1} + \frac{6(K_1 + 2\mu_1)\phi_1}{5\mu_1(3K_1 + 4\mu_1)}}, \quad \mu^- = \mu_2 + \frac{\phi_1}{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{6(K_2 + 2\mu_2)\phi_2}{5\mu_2(3K_2 + 4\mu_2)}}, \quad (41)$$

$$K^+ = K_1 + \frac{\phi_2}{\frac{1}{K_2 - K_1} + \frac{3\phi_1}{3K_1 + 4\mu_1}}, \quad K^- = K_2 + \frac{\phi_1}{\frac{1}{K_1 - K_2} + \frac{3\phi_2}{3K_2 + 4\mu_2}}, \quad (42)$$

$$E^+ = \frac{9K^+ \mu^+}{3K^+ + \mu^+}, \quad E^- = \frac{9K^- \mu^-}{3K^- + \mu^-}. \quad (43)$$

Здесь индексы (+) и (–) обозначают соответственно верхнюю и нижнюю границы интервала значений упругого модуля в модели Хашина—Штрикмана.

Упругие характеристики компонентов композита NiAl—Al₂O₃

Компонент	K , ГПа	μ , ГПа	ρ , кг/м ³
Al ₂ O ₃	253,5	162,3	3990
NiAl	161,9	71,2	7150

4.1. Металлокерамический композит NiAl—Al₂O₃ — макроскопически изотропный спеченный композитный материал с металлической матрицей, армированной керамическими частицами. Упругие константы компонентов приведены в табл. 1. В данном случае значения упругих модулей компонентов имеют одинаковый порядок величины и различаются в пределах двух раз.

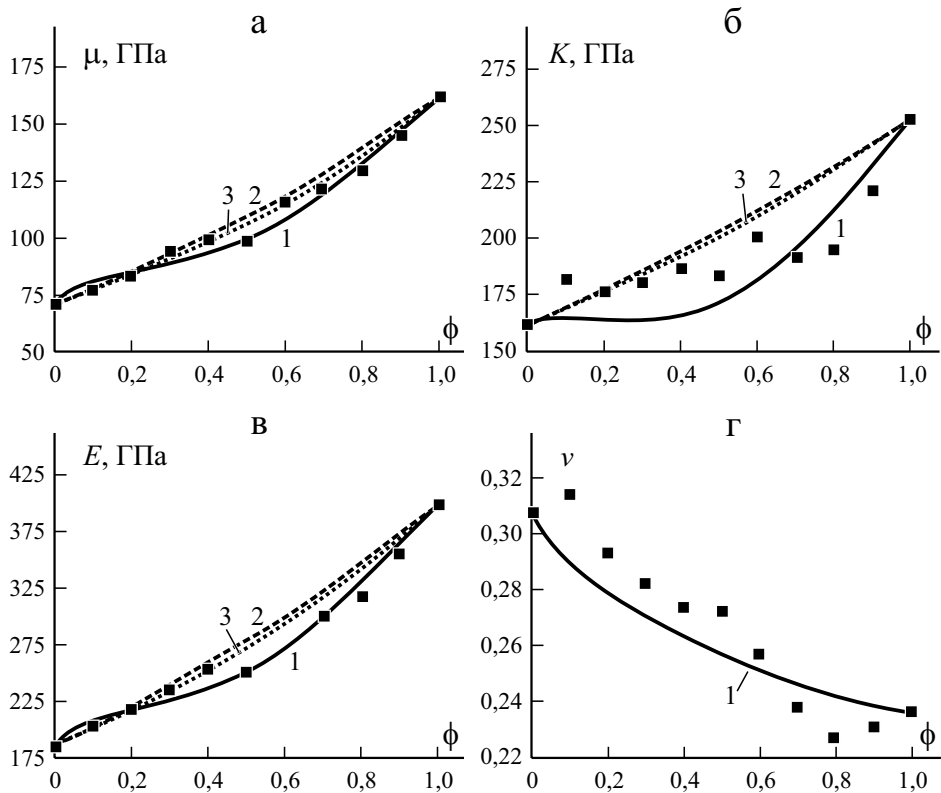


Рис. 1. Зависимость упругих констант металлокерамического композитного материала NiAl—Al₂O₃ от объемного содержания ϕ компонента Al₂O₃. Кривые, полученные на основе соотношений развитой модели, рассчитывали в приближении бездефектных межфазных границ ($q = 1$). Экспериментальные данные взяты из [41]: 1 — развитая модель; 2 — модель Хашина—Штрикмана (+); 3 — модель Хашина—Штрикмана (-); ■ — эксперимент.

В [41] приведены экспериментальные значения упругих констант спеченного композита NiAl—Al₂O₃ в широком интервале концентраций керамической фазы, но не содержится информации о дефектности (поврежденности) полученных образцов, а авторы отмечают близкую к нулю пористость образцов (в пределах 1%) и высокую степень совершенства границ раздела NiAl и Al₂O₃. Поэтому аналитические оценки получены в предположении бездефектности межфазных границ ($q = 1$). На рис. 1 представлены аналитические зависимости значений упругих констант в интервале объемных концентраций керамической фазы от 0 до 1. Эти кривые сопоставлены с экспериментальными данными и оценками (41)—(43) модели Хашина—Штрикмана. Из данных рисунка видно хорошее количественное согласование теоретических оценок, полученных в рамках лагранжева подхода с явным учетом межфазного взаимодействия, и экспериментальных данных. Важно также отметить следующее качественное преимущество развитой модели в сравнении с классическим подходом Хашина—Штрикмана. Хотя обе модели дают оценки, близкие к экспериментальным данным, зависимости упругих модулей от концентрации керамических включений имеют почти линейный характер в модели Хашина—Штрикмана. В то же время, как свидетельствуют приведенные экспериментальные данные, а также литературные данные для некоторых других композитов, такие зависимости, как правило, являются существенно нелинейными. Разработанная модель качественно верно воспроизводит такую нелинейность. При этом умеренные количественные различия на отдельных участках кривых могут определяться большим разбросом экспериментальных данных (на рисунке приведены их средние значения), различной, хотя и малой, концентрацией несплошностей на межфазных границах разных экспериментальных образцов (что влияет на средние значения) и другими причинами.

4.2. Полиацеталь, армированный короткими углеродными волокнами. Полиацеталь (ПА) — полимерный материал, широко применяемый в техническом и автомобильном производстве, строительстве, электронике, медицинской промышленности и т.д. Недостатком данного материала является его низкая жесткость (порядка нескольких гигапаскалей), сравнимая с жесткостью губчатой костной ткани. Для повышения жесткости, прочности и износостойкости изделий полиацеталь армируют различными компонентами (включениями), жесткость и прочность которых мно-

Табл. 2

Упругие характеристики компонентов композита
полиацеталь—углеродные волокна [37]

Компонент	K , ГПа	μ , ГПа	ρ , кг/м ³
Полиацеталь (POM T-300)	3,17	1,27	1410
Волокна (CF Fortafil F-3)	252,2	86	1800

гократно превышают характеристики полимерной матрицы. Содержание этих добавок может достигать десятков процентов. В настоящей работе рассмотрен композит на основе полиацеталя, армированный короткими углеродными волокнами (ПА—УВ) (длина волокон 100—200 мкм). Композит получен методом литья под давлением (injection molding) [37]. В данной работе приведены экспериментальные данные для нескольких композитов этого состава с разным содержанием волокон.

Значения упругих констант компонентов композита приведены в табл. 2. В данном случае упругие константы компонентов различаются примерно на два порядка. Поскольку армирующие включения имеют микромасштабную длину и отсутствуют сведения о наличии выделенной ориентации волокон, полагаем, что данные композиты являются макроскопически изотропными.

Как видно из данных рис. 2, “вилка” значений в классической модели Хашина—Штрикмана является столь широкой, что делает данную модель фактически бесполезной для прогноза эффективных макроскопических свойств композитов, значения механических свойств компонентов которых различаются на порядки. Отметим, что завышенные значения макроскопических упругих модулей дает и развитая модель в приближении бездефектного композита.

Для полимерных композитов, армированных углеродными волокнами, известной проблемой является наличие “непроклеев”, т.е. отсутствие сцепления (несплошности) на участках границ раздела матрицы и включений при недостаточно высококачественной технологии изготовления. На рис. 2 видно, что аналитическая оценка точно ложится на экспериментальные данные в предположении высокой дефектности межфазных

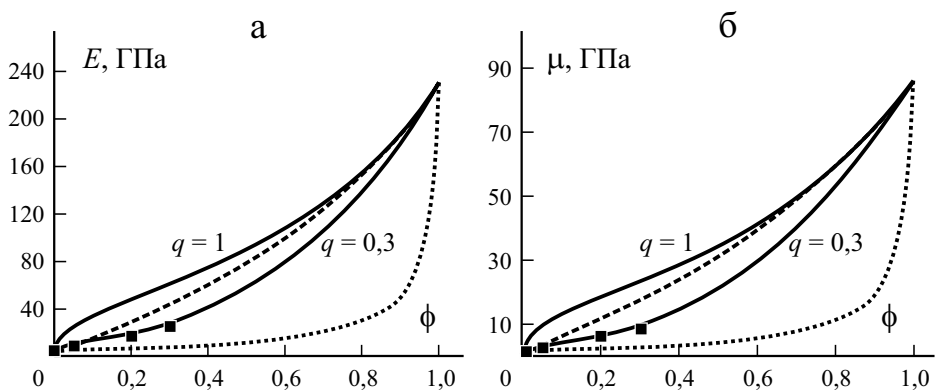


Рис. 2. Зависимость упругих констант полимерного композита “полиацеталь, армированный короткими углеродными волокнами” от объемного содержания ϕ волокон. Кривые, полученные на основе соотношений развитой модели, рассчитывали в приближении бездефектных межфазных границ ($q = 1$) и межфазных границ с содержанием дефектов 70% ($q = 0,3$). Экспериментальные данные взяты из [37].

Остальные обозначения те же, что на рис. 1.

границ ($q = 0,3$, что соответствует 70% поврежденности межфазных границ). Полученный результат дает основание предположить, что образцы данного полимерного композита, полученного в лабораторных условиях [37], содержат большое количество несплошностей на межфазных границах. Таким образом, развитая модель позволяет не только прогнозировать макроскопические упругие свойства двухфазных макроскопически изотропных композитов, но и решать обратную задачу — оценивать характерную величину поврежденности межфазных границ.

5. Условия бездисперсного распространения “медленных” упругих волн

Развитая модель предсказывает помимо классических “быстрых” и существование устойчиво распространяющихся “медленных” упругих волн в двухфазных композитах с дефектами (несплошностями) на межфазных границах. Как следует из соотношений (28), (29) и (35), (36), такие волны могут существовать в композитах, характеризующихся значениями параметра q не выше определенных пороговых значений (иными словами, при дефектности межфазных границ $(1 - q)$ не ниже определенных пороговых значений). Особенности структуры несплошностей, определяющие конкретные значения параметра q , являются предметом обсуждения. В частности, в развитой модели на поврежденных участках межфазных границ предполагаем отсутствие нормального и касательного взаимодействия фаз. Это можно интерпретировать как достаточно широкую апертуру интерфейсных несплошностей, вследствие чего при малых относительных смещениях поверхности не взаимодействуют (например, при прохождении упругих волн). Пороговые (максимальные) значения параметра q определяем из условий $V_2 = 0$ и $\tilde{V}_2 = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{crit}^P = \sqrt{\phi_1^2 \phi_2^2 c_1^2 c_2^2 / B_P}, B_P = \frac{\phi_1 \phi_2}{4} \left(c_1^2 + \frac{c_2^2 \rho_2}{\rho_1} \right) \left(\frac{c_1^2 \rho_1}{\rho_2} + c_2^2 \right) \\ q_{crit}^S = \sqrt{\phi_1^2 \phi_2^2 C_1^2 C_2^2 / B_S}, B_S = \frac{\phi_1 \phi_2 \rho_1 \rho_2}{4} \left(\frac{C_1^2}{\rho_2} + \frac{C_2^2}{\rho_1} \right)^2 \end{array} \right. \quad (44)$$

Продольные плоские “медленные” упругие волны могут устойчиво (без дисперсии) распространяться в композите, если $q < q_{crit}^P$, т.е. поврежденность межфазных границ D больше критического значения $D_{crit}^P = (1 - q_{crit}^P)$. Аналогично плоские поперечные “медленные” волны устойчиво распространяются в композите, если поврежденность межфазных границ D выше порогового значения $D_{crit}^S = (1 - q_{crit}^S)$.

На рис. 3 приведены зависимости критических значений поврежденности от объемной доли включений для двух рассмотренных композитных материалов. Можно видеть, что минимальное критическое значение по-

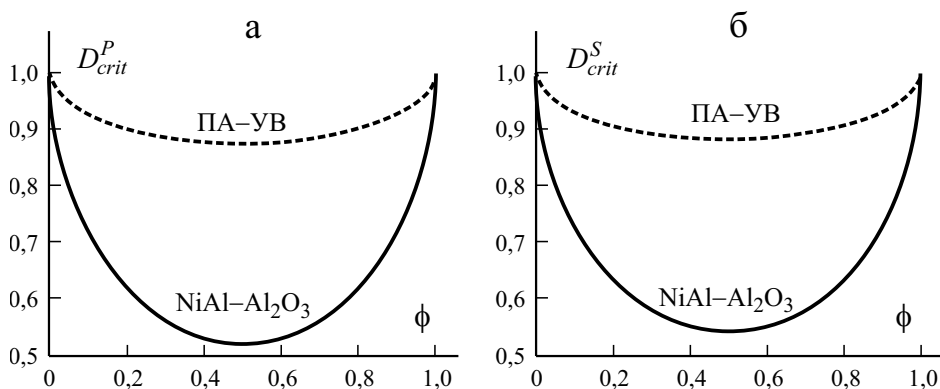


Рис. 3. Зависимость критических значений поврежденности межфазных границ от объемной доли включений ϕ (Al_2O_3 и УВ) для двух композитных материалов: а —

$$D_{crit}^P = (1 - q_{crit}^P); \text{ б — } D_{crit}^S = (1 - q_{crit}^S). \text{ Пояснения в тексте.}$$

врежденности, при превышении которой в материале возможно устойчивое распространение “медленных” упругих волн, достигается при равном объемном соотношении компонентов ($\phi_1 = \phi_2 = 0,5$). Также важно отметить, что чем больше относительное различие упругих констант материала, тем больше характерные значения критической (минимально необходимой) поврежденности межфазных границ. В частности, для композита на основе полиацетала, в котором отношение упругих модулей компонентов составляет два порядка величины, минимальное необходимое значение поврежденности должно составлять около 90% (при $\phi_1 = \phi_2 = 0,5$). Очевидно, что композиты с такими значениями поврежденности межфазных границ могут применяться только в условиях отсутствия значительных механических нагрузок. То же самое (хотя и в меньшей степени) справедливо и для первого из рассмотренных композитных материалов.

Как следует из соотношений (44), наименьшая возможная величина критической поврежденности $D_{crit}^P = D_{crit}^S = 0,5$ достижима в композите, образованном компонентами с одинаковыми механическими характеристиками. В этом случае речь фактически идет об однофазном материале с повреждениями на границах раздела структурных элементов (частиц в спеченном однофазном материале или консолидированной осадочной горной породе, блоков в блочной геосреде и т.д.).

При превышении критических значений поврежденности межфазных границ в композите могут распространяться “медленные” продольные и поперечные волны. Скорость этих волн зависит не только от объемной доли включений, но и от поврежденности. На рис. 4 приведены примеры таких зависимостей для двух композитов при одинаковой объемной доле включений, равной 30%. Выбор данного значения ϕ в качестве примера

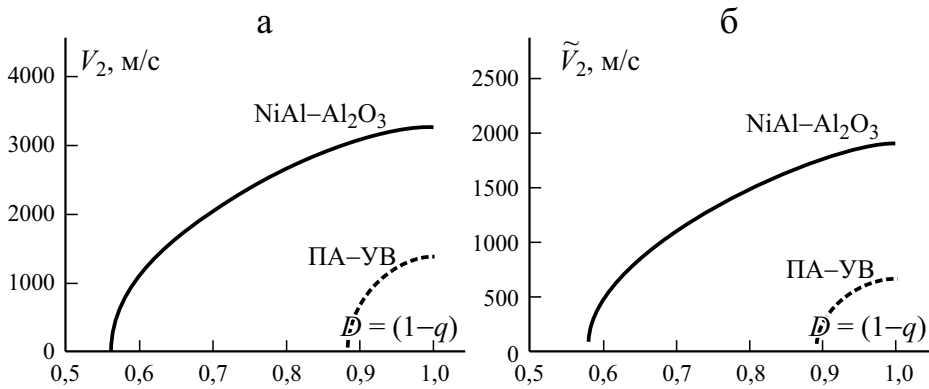


Рис. 4. Зависимость скорости плоских “медленных” упругих волн V_2 (а) и \tilde{V}_2 (б) от поврежденности межфазных границ D для двух композитных материалов. В обоих случаях $\phi = 30\%$.

связан с тем, что для него имеются экспериментальные данные об упругих свойствах этих композитов (иными словами, композиты такого состава могут быть синтезированы, а дефектностью межфазных границ потенциально возможно управлять изменением технологических параметров синтеза). Из данных рисунка видно, что с ростом поврежденности скорость “медленных” упругих волн возрастает и достигает того же порядка величины, что и скорость “быстрых” (классических) упругих волн. При этом отметим, что поскольку $D_{crit}^P < D_{crit}^S$, в определенном интервале значений поврежденности (хотя и сравнительно узком) в двухфазных композитах могут распространяться только продольные “медленные” упругие волны.

Поскольку скорости упругих волн формально связаны с упругими константами, логично ассоциировать с “медленными” упругими волнами соответствующие значения модулей сдвига и всестороннего сжатия. Характерные значения этих констант минимум на порядок величины ниже значений “классических” упругих констант. Вопрос о физическом смысле столь “малых” упругих констант непосредственно проистекает из определения физической природы и механизмов формирования самих “медленных” упругих волн и является предметом дальнейшего исследования.

Предсказанные теоретически “медленные” упругие волны в многофазных материалах, характеризующихся высокой концентрацией несплошностей на внутренних интерфейсах, известны и на протяжении последних 30 лет наблюдаются и исследуются в так называемых дискретных или блочных (моно- и многофазных) средах. Примерами являются фрагменты горных массивов, а также разнообразные ансамбли взаимодействующих блоков, разделенных “ослабленными” границами (контактные или частично поврежденные границы раздела, прослойки вязкоупругого мягкого материала и т.д.). В таких дискретных средах имеют место разнообразные динамические явления, которые не наблюдаются в

сплошных средах. Одним из них является распространение групп волн, характеризующихся малыми скоростями (многократно меньшими скорости продольных волн в материале блоков), большими длинами волн и слабым затуханием. Исследования “медленных” волн проводят главным образом на одномерных лабораторных объектах (цепочки стержней или блоков) или путем численного моделирования (как правило, также в одномерной постановке) [42—45]. Результаты цитируемых и других исследований показывают, что в зависимости от особенностей межблочных границ скорость продольной “медленной” волны в блочной среде может быть ниже, чем скорость продольной упругой волны в материале блока от 2—3 раз до порядка величины и более. Также существуют экспериментальные и численные исследования, показывающие существование “медленных” поперечных волн.

Говоря о вкладе межфазных интерфейсов в акустические свойства дисперсно упрочненных композитных материалов, необходимо упомянуть технику нелинейной акустики, применяемую для диагностики повреждений. Хорошо известно, что монохроматическое возбуждение вызывает в материале с дефектами упругий волновой отклик в широком спектре частот, в том числе с частотами многократно ниже частоты возбуждения. До настоящего времени для композитных материалов не проводили анализ экспериментальных данных, направленный на выявление низкочастотных “медленных” волн. Однако имеющиеся данные для блочных сред свидетельствуют о том, что в композитных материалах с высокой степенью дефектности межфазных границ (более 50%) также должны формироваться предсказанные в настоящей работе “медленные” волны, характеризующиеся помимо прочего более слабым затуханием в сравнении с традиционными (“быстрыми”) упругими волнами.

Заключение

Разработана новая механическая модель, позволяющая аналитически и численно оценивать упругие характеристики и акустические свойства макроскопически изотропных двухфазных композитных материалов. Модель явным образом учитывает взаимодействие фаз и поврежденность межфазных границ. Ключевым отличием данной модели от классических макроскопических моделей композитов является полностью динамическая, а не статическая постановка задачи. Следствием этого является, в частности, возможность получения решения в терминах скоростей упругих волн, из которых могут определяться “статические” упругие константы материала (в классических моделях ситуация обратная). На примере нескольких композитных материалов показаны преимущества модели в сравнении с широко используемой в инженерной практике моделью Хашина—Штрикмана. В частности, развитая модель верно отражает существенно нелинейный характер зависимости эффективных

упругих характеристик дисперсно упрочненных композитов от объемного содержания включений и дефектности межфазных границ.

Предложенная модель предсказывает существование “медленных” продольных и поперечных волн в композитах, характеризующихся дефектностью межфазных границ выше некоторого порогового (минимального) значения. Получены аналитические соотношения для пороговых значений поврежденности, связывающие их с объемными долями компонентов, их упругими характеристиками и плотностями. Поскольку устойчивое распространение “медленных” упругих волн возможно только при достаточно высоких значениях поврежденности межфазных границ, такие упругие волны можно назвать “мезоскопическими” (т.е. обусловленными особенностями структуры на мезомасштабе) в отличие от “макроскопически обусловленных” “быстрых” волн.

Развитая модель может быть использована при решении задач неразрушающего контроля поврежденности и фазового состава композитных материалов, прогнозировании эффективных упругих и акустических свойств проектируемых композитов, а также при определении специфических характеристик поврежденности, обеспечивающих появление аномальных акустических свойств в многофазных материалах. Отметим, что формализм модели является открытым и может быть расширен на анизотропные (например, слоистые) многофазные системы, а также макроскопически изотропные многофазные материалы, в которых имеет место преимущественная ориентация несплошных участков интерфейсов (анизотропная поврежденность). Формализм модели позволяет естественным образом вводить и диссипацию механической энергии за счет различных механизмов (т.е. учитывать рассеяние энергии упругих волн в объеме фаз и на совершенных участках межфазных границ, вязкость и пластичность фаз). В этой связи уместно отметить, что в представленной модели рассеяние механической энергии за счет межфазных дефектов уже эффективно учитывается в линейном приближении, поскольку упругая энергия взаимодействия фаз пропорциональна доле совершенных участков границ раздела.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FWRW-2021-0002.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gao H., Xiang Z.* Manipulating elastic waves with conventional isotropic materials // *Phys. Rev. Appl.* — 2019. — Vol. 11. — Article 064040.
2. *Rauter N., Lammering R.* Impact damage detection in composite structures considering nonlinear Lamb wave propagation // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2015. — Vol. 22. — P. 44–51.
3. *Zuo Q. H., Deganis L. E., Wang G.* Elastic waves and damage quantification in brittle material with evolving damage // *J. Phys. D: Appl. Phys.* — 2012. — Vol. 45. — Article 145302.

4. *Bouzidi Y., Schmitt D. R.* Measurement of the speed and attenuation of the Biot slow wave using a large ultrasonic transmitter // *J. Geophys. Res.* — 2009. — Vol. 114. — Article B08201.
5. *Guyer R. A., Johnson P. A.* Nonlinear mesoscopic elasticity: evidence for a new class of materials // *Phys. Today.* — 1999. — Vol. 52. — Article 30.
6. *Burkov M. V., Eremin A. V., Byakov A. V., Lyubutin P. S., Panin S. V.* Impact damage detection in laminate and honeycomb cfrps using lamb wave ultrasonic sensing // *Russ. J. Nondestruct. Test.* — 2021. — Vol. 57. — P. 114–124.
7. *Barulich N. D., Godoy L. A., Dardati P. M.* A computational micromechanics approach to evaluate elastic properties of composites with fiber-matrix interface damage // *Compos. Struct.* — 2016. — Vol. 154. — P. 309–318.
8. *Zhu W., Dong Q.* Effective elastic properties of cracked composites with periodically distributed particulates // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2020. — DOI: 10.1080/15376494.2020.1859655.
9. *Farkash A., Mittelman B., Hayun S., Priel E.* Aluminum matrix composites with weak particle matrix interfaces: effective elastic properties investigated using micromechanical modeling // *Materials.* — 2021. — Vol. 14. — Article 6083.
10. *Grigoriev A. S., Zabolotskiy A. V., Shilko E. V., Dmitriev A. I., Andreev K.* Analysis of the quasi-static and dynamic fracture of the silica refractory using the mesoscale discrete element modelling // *Materials.* — 2021. — Vol. 14. — Article 7376.
11. *Xia W., Oterkus E., Oterkus S.* 3-dimensional bond-based peridynamic representative volume element homogenization // *Phys. Mesomech.* — 2021. — Vol. 24. — P. 541–547.
12. *Grinyaev Y. V., Chertova N. V., Shilko E. V., Psakhie S. G.* The continuum approach to the description of semi-crystalline polymers deformation regimes: the role of dynamic and translational defects // *Polymers.* — 2018. — Vol. 10. — Article 1155.
13. *Balokhonov R. R., Kulkov A. S., Zemlyanov A. V., Romanova V. A., Evtushenko E. P., Gatiyatullina D. D., Kulkov S. N.* Evolution of residual stresses and fracture in thermo-mechanically loaded particle-reinforced metal matrix composites // *Phys. Mesomech.* — 2021. — Vol. 24. — P. 503–512.
14. *Voight W.* Lehrbuch der Kristallphysik. — Berlin: Teubner, 1928. — 962 p.
15. *Reuss A.* Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle // *ZAMM.* — 1929. — Vol. 9. — P. 49–58.
16. *Azhi S., Bahlouli N., Makradi A., Belouettar S.* Composite modeling for the effective elastic properties of semicrystalline polymers // *J. Mech. Mater. Struct.* — 2007. — Vol. 2. — No. 1. — P. 1–21.
17. *Hashin Z., Shtrikman S.* On some variational principals in anisotropic and non-homogeneous Elasticity // *J. Mech. Phys. Solids.* — 1962. — Vol. 10. — P. 335–343.
18. *Hashin Z.* Analysis of composite materials // *J. Appl. Mech.* — 1983. — Vol. 50. — P. 481–505.
19. *Hashin Z., Shtrikman S.* A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials // *J. Mech. Phys. Solids.* — 1963. — Vol. 11. — P. 127–140.
20. *Mori T., Tanaka K.* Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // *Acta Metall.* — 1973. — Vol. 21. — P. 571–574.
21. *Brisard S., Guilleminot J., Sab K., Tran V. P.* Mori–Tanaka estimates of the effective elastic properties of stress-gradient composites // *Int. J. Solids Struct.* — 2018. — Vol. 146. — P. 55–68.
22. *Hill R.* Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials — III. Self-consistent model // *J. Mech. Phys. Solids.* — 1965. — Vol. 13. — No. 4. — P. 189–198.

23. Xiong Z., Lu S., Liu J., Lv G., Li Y., Yu J. A combined self-consistent method to estimate the effective properties of polypropylene/calcium carbonate composites // *Polymers*. — 2018. — Vol. 10. — Article 101.
24. Eshelby J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // *Proc. R. Soc. A*. — 1957. — Vol. 241. — P. 376-396.
25. Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H. Effective properties of particulate composites with surface-varying interphases // *Composites: Part B*. — 2018. — Vol. 149. — P. 268–84.
26. Sun C. T., Vaidya R. S. Prediction of composite properties from a representative volume element // *Compos. Sci. Technol.* — 1996. — Vol. 56. — P. 171–179.
27. Gan H., Orozco C. E., Herakovich C. T. A strain-compatible method for micro-mechanical analysis of multi-phase composites // *Int. J. Solids Struct.* — 2000. — Vol. 37. — P. 5097–5122.
28. Liu B., Feng X., Zhang S.-M. The effective Young's modulus of composites beyond the Voigt estimation due to Poisson effect // *Compos. Sci. Technol.* — 2009. — Vol. 69. — P. 2198–2204.
29. Würkner M., Berger H., Gabbert U. On numerical evaluation of effective material properties for composite structures with rhombic fiber arrangements // *Int. J. Eng. Sci.* — 2011. — Vol. 49. — P. 322–332.
30. Selvadurai A. P. S., Nikopour H. Transverse elasticity of a unidirectionally reinforced composite with an irregular fibre arrangement: experiments, theory and computations // *Compos. Struct.* — 2012. — Vol. 94. — P. 1973–1981.
31. Trotta S., Marmo F., Rosati L. Evaluation of the Eshelby tensor for polygonal inclusions // *Composites: Part B*. — 2017. — Vol. 115. — P.170–181.
32. Buryachenko V. A., Roy A. Effective elastic moduli of nanocomposites with prescribed random orientation of nanofibers // *Composites: Part B*. — 2005. — Vol. 36. — P. 405–416.
33. Cheng Y., Bian L., Wang Y., Taheri F. Influences of reinforcing particle and interface bonding strength on material properties of Mg/nano-particle composites // *Int. J. Solids Struct.* — 2014. — Vol. 51. — P. 3168–3176.
34. Dalaq A. S., Abueidda D. W., Abu Al-Rub R. K., Jasiuk I. M. Finite element prediction of effective elastic properties of interpenetrating phase composites with architected 3D sheet reinforcements // *Int. J. Solids Struct.* — 2016. — Vol. 83. — P. 169–182.
35. Aleshin V. Elastic properties of two-dimensional two-phase composites with isotropic phases // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 46. — P. 513–530.
36. Trofimov A., Drach B., Sevostianov I. Effective elastic properties of composites with particles of polyhedral shapes // *Int. J. Solids Struct.* — 2017. — Vol. 120. — P. 157–170.
37. Wiśniewska A., Hernik S., Liber-Kneć A., Egner H. Effective properties of composite material based on total strain energy equivalence // *Composites: Part B*. — 2019. — Vol. 166. — P. 213–220.
38. Wiśniewska A., Egner H. Optimization of functionally graded structural members by means of new effective properties estimation method // *Materials*. — 2019. — Vol. 12. — Article 3139.
39. Li C., Wang J., Dou F. An estimation approach for the effective elastic modulus of lightweight bulk filling material with compressible inclusions and imperfect interfaces // *Materials*. — 2020. — Vol. 13. — Article 3563.
40. Upadhyay A., Beniwal R. S., Singh R. Elastic properties of Al_2O_3 -NiAl: a modified version of Hashin-Shtrikman bounds // *Contin. Mech. Thermodyn.* — 2012. — Vol. 24. — P. 257–266.

41. *Hsieh C. L., Tuan W. H., Wu T. T.* Elastic behaviour of a model two-phase material // J. Eur. Ceram. Soc. — 2004. — Vol. 24. — P. 3789–3793.

42. *Kurlenya M. V., Oparin V. N., Vostrikov V. I.* Pendulum-type waves. Part II: Experimental methods and main results of physical modeling // J. Min. Sci. — 1996. — Vol. 32. — P. 245–273.

43. *Ayzenberg-Stepanenko M. V., Sher E. N.* Modeling of wave phenomena in periodic structures // Fizicheskaya Mezomekhanika. — 2007. — Vol. 10. — P. 47–57.

44. *Wu H., Fang Q., Zhang Y.-D., Liu J.-C., Gong Z.-M.* Mechanism of pendulum-type wave phenomenon in deep block rock mass // Min. Sci. Technol. — 2009. — Vol. 19. — P. 0699–0708.

45. *Aleksandrova N. I.* Pendulum waves on the surface of block rock mass under dynamic impact // J. Min. Sci. — 2017. — Vol. 53. — P. 59–64.

Поступила в редакцию 26.01.2021

Окончательный вариант поступил 02.05.2022

Received Jan. 26, 2022 (May 2, 2022)
