

# МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

MECHANICS  
OF COMPOSITE  
MATERIALS

**2022**

**4**

ЛАТВИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
LATVIAN ACADEMY of SCIENCES

# **МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

## **MECHANICS of COMPOSITE MATERIALS**

2022 ● Т. 58 ● 4 ● 647—862

Июль—август  
July—August

<https://doi.org/10.22364/mkm.58.4>

Выходит 6 раз в год с января 1965 г.  
Issued since 1965, bimonthly

ЛАТВИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
РИГА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *А. К. Чате*

EDITOR-IN-CHIEF *A. K. Chate*

#### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

*Х. Альтенбах* (зам. главного редактора, Германия), *Я. Андерсонс* (зам. главного редактора, Латвия), *А. Анискевич* (Латвия), *Я. Варна* (Швеция), *А. Красников* (Латвия), *О. Старкова* (Латвия), *С. В. Шешенин* (Россия)

#### EDITORIAL BOARD

*H. Altenbach* (ass. editor, Germany), *J. Andersons* (ass. editor, Latvia), *A. Aniskevich* (Latvia), *J. Varna* (Sweden), *A. Krasnikovs* (Latvia), *O. Starkova* (Latvia), *S. V. Sheshenin* (Russia)

#### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

*М. Айдогду* (Турция), *С. Д. Акбаров* (Турция), *С. К. Амико* (Бразилия), *А. Артейру* (Португалия), *Л. Асп* (Швеция), *Е. Барканов* (Латвия), *В. Беккер* (Германия), *В. Н. Бурлаенко* (Украина), *И. Гузь* (Великобритания), *Нгуен Дин Дык* (Вьетнам), *В. А. Еремеев* (Италия), *Г. Кан* (Китай), *В. Карвелли* (Италия), *В. А. Касьянов* (Латвия), *А. Катунин* (Польша), *Сон С. Ким* (Южная Корея), *Е. Конту* (Греция), *Е.-М. Крачун* (Румыния), *А. Кривцов* (Россия), *В. Кулаков* (Латвия), *Г. Куликов* (Россия), *С. В. Ломов* (Бельгия, Россия), *Ю. Маяк* (Эстония), *Г. Михасёв* (Беларусь), *А. Муц* (Польша), *В. Н. Паймушин* (Россия), *С. В. Панин* (Россия), *Л. Плачиди* (Италия), *Т. Садовский* (Польша), *С. Б. Сапожников* (Россия), *М. Ди Скьюва* (Италия), *Р. Талreja* (США), *Ю. Токовий* (Украина), *Э. В. Ярве* (США)

#### ADVISORY BOARD

*M. Aydogdu* (Turkey), *S. D. Akbarov* (Turkey), *S. C. Amico* (Brazil), *A. Arteiro* (Portugal), *L. Asp* (Sweden), *E. Barkanov* (Latvia), *W. Becker* (Germany), *V. N. Burlayenko* (Ukraine), *I. Guz'* (United Kingdom), *Nguyen Dinh Duc* (Vietnam), *V. A. Eremeyev* (Italy), *G. Kang* (China), *V. Carvelli* (Italy), *V. A. Kasyanov* (Latvia), *A. Katunin* (Poland), *Seong S. Kim* (South Korea), *E. Kontou* (Greece), *E. M. Craciun* (Romania), *A. Krivtsov* (Russia), *V. Kulakov* (Latvia), *G. Kulikov* (Russia), *S. V. Lomov* (Belgium, Russia), *J. Majak* (Estonia), *G. Mikhasev* (Belarus), *A. Muc* (Poland), *V. N. Pajmushin* (Russia), *S. V. Panin* (Russia), *L. Placidi* (Italy), *T. Sadowski* (Poland), *S. B. Sapozhnikov* (Russia), *M. Di Sciuva* (Italy), *R. Talreja* (USA), *Yu. Tokovyy* (Ukraine), *E. V. Iarve* (USA)

#### ПОЧЕТНАЯ РЕДКОЛЛЕГИЯ

*Л. Агаловян* (Армения), *А. Богданович* (США), *А. Н. Гузь* (Украина), *А. Дуда* (Германия), *А. Д. Заманов* (Азербайджан), *М. Калнинь* (Латвия), *В. В. Коврига* (Россия), *С. Т. Милейко* (Россия), *Ю. М. Плескачевский* (Беларусь), *В. А. Поляков* (Латвия), *Н. Щербина* (Украина)

#### HONORARY BOARD

*L. Aghalovyan* (Armenia), *A. Bogdanovich* (USA), *A. N. Guz'* (Ukraine), *A. Duda* (Germany), *A. D. Zamanov* (Azerbaijan), *M. Kalniņš* (Latvia), *V. V. Kovriga* (Russia), *S. T. Mileiko* (Russia), *Yu. M. Pleskachevskii* (Belarus), *V. A. Polyakov* (Latvia), *N. Shcherbina* (Ukraine)

Журнал издается на английском языке Springer Science+Business Media, Inc. (США, ISSN 0191-5665) и аннотируется в следующих изданиях:

The Journal is published in English by Springer Science+Business Media, Inc. (USA, ISSN 0191-5665) and is abstracted or indexed in:

Science Citation Index Expanded (SciSearch), Journal Citation Reports/Science Edition, SCOPUS, INSPEC, Chemical Abstracts Service (CAS), Google Scholar, EBSCO, CSA, Academic OneFile, Academic Search, ChemWeb, CSA, Environmental Sciences, Current Contents/Engineering, Computing and Technology, Earthquake Engineering Abstracts, EI-Compendex, Gale, INIS Atomindex, OCLC, Polymer Library, Reaction Citation Index, Referativnyi Zhurnal (VINITI), SCImago, Summon by ProQuest.

Ю. В. Гриняев<sup>а,б</sup>, Н. В. Чертова<sup>а</sup>, Е. В. Шилько<sup>а,б\*</sup>

<sup>а</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия

<sup>б</sup>Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

## ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ АНАЛИЗА АКУСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ДВУХФАЗНЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ДЕФЕКТНЫМИ МЕЖФАЗНЫМИ ГРАНИЦАМИ

*Y. V. Grinyayev, N. V. Chertova, and E. V. Shilko\**

### LAGRANGIAN FORMALISM FOR THE ANALYSIS OF ACOUSTIC PROPERTIES OF TWO-PHASE COMPOSITE MATERIALS WITH DAMAGED INTERFACES

**Keywords:** two-phase composite, Lagrangian formalism, elastic wave speed, effective elastic modulus, interface damage

New macroscopic mechanical model of a two-phase composite based on the Lagrange function and the principle of least action was developed. The key advantage of the model is the direct consideration of phase interaction and defects (discontinuities) at interphase boundaries. As distinct from the classical macroscopic models, the equations of the model developed are solved in terms of the velocities of elastic waves in the composite. The effective (macroscopic) elastic moduli of the composite are calculated using the derived velocities. On the example of an analytical solution for the 1D case, the qualitatively new possibilities are demonstrated, provided by the model developed for evaluating the acoustic characteristics of composites and analyzing the effect of the volume content of phases and a damage of the interphase boundaries. It was theoretically shown for the first time that, in addition to the classical elastic waves with the parameters estimated with good accuracy in the framework of traditional models, “slow” elastic waves can originate and steadily propagate in the composite materials with damage at interfaces. Analytical relations obtained allow one to solve both the direct problem of determining the velocities of “fast” and “slow” elastic waves in a

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [shilko@ispms.ru](mailto:shilko@ispms.ru)  
Corresponding author: [shilko@ispms.ru](mailto:shilko@ispms.ru)



composite with imperfect interphase boundaries, and the inverse problem of estimating the damage and volume content of the phases from known values of the elastic wave velocities.

**Ключевые слова:** композит двухфазный, формализм лагранжев, скорости упругих волн, константы упругие эффективные, поврежденность

Разработана новая механическая модель двухфазного композита, базирующаяся на построении функции Лагранжа и применении принципа наименьшего действия. Ключевое преимущество модели — прямой учет межфазного взаимодействия и наличия дефектов (несплошностей) на межфазных границах. В отличие от классических моделей непосредственным решением полученных уравнений данной модели являются значения скоростей упругих волн в композите, на основании которых далее могут быть определены эффективные упругие модули. На примере аналитического решения для 1D случая показаны качественно новые возможности, появляющиеся при использовании развитой модели для оценки акустических характеристик композитов и анализа влияния объемной доли фаз и поврежденности межфазных границ. Впервые теоретически показано, что помимо классических упругих волн с параметрами, с хорошей точностью оцениваемыми в рамках традиционных моделей, в композитных материалах с повреждениями на межфазных границах могут формироваться и устойчиво распространяться “медленные” упругие волны. Получены аналитические соотношения, позволяющие решать как прямую задачу определения скоростей “быстрых” и “медленных” упругих волн в композите с несовершенными межфазными границами, так и обратную задачу оценки поврежденности и объемных долей фаз по известным значениям скоростей упругих волн.

## Введение

Важной составляющей разработки новых материалов многофазного (композитного) состава является прогнозирование их статических и динамических (акустических) упругих характеристик. Связанной с ней задачей является неразрушающая диагностика фазового состава и поврежденности образцов и элементов структур различного назначения из композитных материалов, что крайне важно в контексте создания цифровых двойников конечных изделий. Для решения этих проблем развиваются различные неразрушающие методы, в том числе основанные на анализе скоростей и дисперсии упругих волн [1—6]. Развитие таких методов базируется на построении математического формализма, позволяющего связывать интегральные упругие характеристики композитного материала,

в частности характеристики упругих волн, с фазовым составом и дефектностью структуры.

Наиболее полным и общим подходом к определению макроскопических механических характеристик композита является микромеханический подход, в рамках которого композитный материал рассматривается как кусочно-непрерывная среда. Для такой среды строится система определяющих соотношений с учетом условий для напряжений и деформаций на внутренних границах раздела (интерфейсах). В общем случае такая система уравнений решается численно, а усреднение получаемых результатов для представительных мезообъемов позволяет оценивать эффективные свойства композита [7—13]. Несмотря на хорошо известные преимущества (возможность явного учета микроструктуры и особых свойств интерфейсов), непосредственная компьютерная гомогенизация является вычислительно крайне затратной процедурой вследствие необходимости проведения многопараметрического исследования для определения однозначного соответствия внутренней структуры и макроскопических свойств материала. Это обуславливает низкую эффективность численного подхода для построения функциональных зависимостей макроскопических свойств от интегральных характеристик внутренней структуры (таких как объемные доли фаз, дефектность межфазных границ и т.д.).

При решении задач такого рода привлекательной альтернативой непосредственной компьютерной гомогенизации является аналитическая гомогенизация. В ее основе лежат теоретические представления о композитном материале на макромасштабном уровне как об эффективной среде, в которой реальная дискретная структура аппроксимируется взаимопроницаемыми континуумами компонентов. Использование упрощенных предположений об аппроксимации дискретной микроструктуры материала эффективным однородным континуумом позволяет получать полуаналитические или аналитические зависимости механических (в частности, упругих) характеристик от интегральных параметров композитной структуры.

Классическими и наиболее широко применяемыми представителями аналитических моделей являются модели Фойгта и Рейсса [14—16], Хашина—Штрикмана [17—19], Мори—Танака [20, 21], самосогласованный метод [22, 23] и т.д. Эти модели прогнозируют интервалы значений упругих модулей макроскопически изотропного двухфазного композита при заданных значениях объемного содержания компонентов. Преимуществами указанных моделей являются достаточно простые аналитические соотношения. К их ключевым недостаткам традиционно относят достаточно широкие значения интервалов. В частности, различие оценок Фойгта и Рейсса для композитов с высоким локальным контрастом упругих свойств может составлять порядок величины, что делает эти модели практически бесполезными для контрастных материалов. Модель Хашина—Штрикмана, использующая решение классической задачи Эшелби [24], в большинстве случаев обеспечивает наиболее узкий интервал значений. Тем не менее и

он может быть неприемлемо широким для композитов, упругие свойства компонентов которого различаются на несколько порядков величины.

В последние два десятилетия предложен целый ряд других моделей гомогенизации структуры, дающих однозначные оценки эффективных (макроскопических) механических свойств [25—32]. В ряде работ развиты модели, учитывающие влияние геометрии фаз на макроскопические упругие модули [1, 3, 33—35]. Эти оценки зависят от корреляционных функций, однако полный набор пространственных корреляционных функций, необходимых для вычисления эффективных свойств, как правило, не определен. Среди последних работ также можно выделить микромеханический подход, основанный на комбинировании тензора вкладов в жесткость материала и схем гомогенизации Мори—Танака и Максвелла [36]; новый метод определения макроскопических упругих констант композитов на основе гипотезы эквивалентности полной упругой энергии [37, 38]; полуаналитическую модель описания представительного объема как ансамбля ячеек с различными свойствами и несовершенными границами раздела ячеек [39].

Важно отметить, что в широко используемых в инженерной практике классических моделях явно не говорится о том, что величина эффективных упругих модулей в значительной степени определяется взаимодействием компонентов композита, а степень их взаимодействия в свою очередь — дефектностью межфазных границ. При этом взаимодействие компонентов неявно учитывается. Кроме того, в традиционных моделях, применяемых для оценки эффективных упругих модулей, решают частные стационарные задачи теории упругости для определения распределения напряжений и деформаций. Далее находят эффективные (макроскопические) упругие модули композита на основе процедур гомогенизации. Динамические (в том числе акустические) свойства композитов определяются на основе решения уравнений динамики с использованием полученных оценок эффективных упругих модулей. Это является очевидным ограничением такого подхода. Действительно, в его рамках акустические свойства материала однозначно определяются его статическими характеристиками (эффективными упругими константами), что далеко не всегда справедливо для реальных многофазных материалов.

В настоящей работе предложена новая динамическая механическая модель макроскопически изотропного двухфазного композитного материала, основанная на лагранжевом формализме и принципе наименьшего действия. В модели используется постановка задачи, в определенном смысле обратная по отношению к классическим моделям, а именно: определение динамических характеристик композита (параметров упругих волн), которые можно применять для оценки эффективных (интегральных) упругих констант материала. В рамках модели конструируется лагранжиан, представляющий собой разность кинетической и потенциальной энергий материала. Потенциальная энергия состоит из суммы потенциальных энергий фаз и потенциальной энергии их взаимодействия. Последняя

явным образом учитывает такую ключевую характеристику межфазных границ, как поврежденность. В рамках данной модели выведена система связанных динамических уравнений относительно упругих смещений компонентов (фаз).

## 1. Общие положения

Модель основана на классическом принципе эффективной среды. В приближении эффективной среды микроскопически дискретная структура материала макроскопически описывается в рамках взаимопроникающих континуумов. Полагаем, что полная масса  $M$  упругого материала непрерывно распределена в объеме  $V$ , занятом композитом. Масса каждого компонента также непрерывно распределена в этом объеме. Таким образом, макроскопическая модель композита представляет собой сочетание взаимно проникающих и взаимодействующих континуумов. Принято, что уравнения состояния компонентов композита аналогичны уравнениям для этих величин в свободном состоянии. Определим зависимости между эффективными и истинными плотностями компонентов (фаз) двухфазного композита на основе принципа сохранения массы.

Рассмотрим малый, но конечный представительный объем  $dV$ , представляющий собой суперпозицию объемов, занятых отдельными компонентами. К представительному объему предъявляются два базовых требования [38]: во-первых, он должен содержать достаточное количество структурных элементов (включений), чтобы его увеличение не приводило к значимому изменению параметров интегрального механического отклика; во-вторых, его размеры должны быть пренебрежимо малы в сравнении с размерами образца. В этом случае представительный объем  $dV$  можно приближенно рассматривать как материальную точку, и к нему применимы операции дифференцирования и интегрирования.

В предположении, что масса  $dM_\alpha$  каждого компонента  $\alpha$  непрерывно распределена в представительном объеме  $dV$ , локальную эффективную плотность каждого компонента определяем как

$$\tilde{\rho}_\alpha = \frac{dM_\alpha}{dV}. \quad (1)$$

В действительности каждый компонент занимает некоторый объем  $dV_\alpha$  с некоторой истинной плотностью  $\rho_\alpha$ . В предположении постоянства масс компонентов (т. е. нет диффузии и химических реакций) справедливо равенство

$$dM_\alpha = \tilde{\rho}_\alpha dV = \rho_\alpha dV_\alpha. \quad (2)$$

Отсюда следует связь между эффективными и истинными плотностями каждого компонента композита

$$\tilde{\rho}_\alpha = \phi_\alpha \rho_\alpha, \quad (3)$$

где  $\phi_\alpha = dV_\alpha / dV$  — объемная доля компонента  $\alpha$ . Отметим, что объемные доли удовлетворяют условию  $\sum_{\alpha=1}^2 \phi_\alpha = 1$ . Таким образом, из условия посто-

яинства масс компонентов получаем зависимости между эффективными и истинными локальными плотностями компонентов в композите.

## 2. Лагранжиан двухфазного композита и уравнения движения компонентов

Как уже было отмечено, при макроскопическом описании представительный объем композита рассматриваем как материальную точку, в которой определены эффективные параметры двух компонентов. Полагая, что компоненты в составе композита сохраняют свою “индивидуальность” (в том числе упругие характеристики), функцию Лагранжа двухфазного композита в терминах эффективных параметров можно записать в общем виде как

$$L = \frac{\tilde{\rho}_1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^{(ef1)}}{\partial t} \right)^2 + \frac{\tilde{\rho}_2}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^{(ef2)}}{\partial t} \right)^2 - \\ - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(ef1)} \varepsilon_{ij}^{(ef1)} - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(ef2)} \varepsilon_{ij}^{(ef2)} - \frac{1}{2} \left( \sigma_{ij}^{(ef1)} \varepsilon_{ij}^{(ef2)} + \sigma_{ij}^{(ef2)} \varepsilon_{ij}^{(ef1)} \right). \quad (4)$$

Здесь первые два слагаемых представляют объемные плотности кинетической энергии первого и второго компонентов соответственно ( $\mathbf{u}$  — вектор смещения). Третий и четвертый члены определяют плотности потенциальных энергий этих компонентов ( $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензоров напряжений и деформаций). Пятый член определяет потенциальную энергию взаимодействия компонентов. Индексы  $ef1$  и  $ef2$  указывают, что соответствующие параметры являются эффективными параметрами компонентов.

Форма записи потенциальной энергии (4) вытекает из следующих положений. Как уже было отмечено, эффективные характеристики представительного объема двухфазного композита определяются в предположении, что оба компонента равномерно и непрерывно распределены в этом объеме (модель двух взаимопроникающих и взаимодействующих континуумов). Отсюда вытекают два очевидных следствия. Во-первых, логично полагать, что напряжения и деформации в каждой фазе представительного объема распределены однородно. Во-вторых, следствием взаимодействия фаз является тот факт, что деформации каждой фазы вызывают напряжения как в одной фазе, так и в другой (поскольку с физической точки зрения напряжения являются реакцией материала на деформирование). Исходя

из этих следствий, выражение для плотности потенциальной энергии представительного объема двухфазного композита можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{(ef1)} \left( \sigma_{ij}^{(ef1)} + \sigma_{ij}^{(ef2)} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{(ef2)} \left( \sigma_{ij}^{(ef2)} + \sigma_{ij}^{(ef1)} \right).$$

Для удобства это выражение можно представить в виде сумм потенциальных энергий отдельных фаз и потенциальной энергии взаимодействия фаз. Данная формулировка приведена в лагранжиане (4).

Отметим также, что в приведенной формулировке лагранжиана намеренно не делаются упрощающие предположения о характере связи деформаций (или напряжений) в различных фазах. Действительно, часто используемое в смесевых моделях предположение об одинаковости деформаций приводит к модели Фойгта. Альтернативное предположение об одинаковости напряжений в различных фазах приводит к абсурдному результату — равенству упругих модулей компонентов. Важно упомянуть, что оба этих предположения не согласуются с многочисленными результатами микромеханического численного моделирования представительных объемов двухфазных композитов. Из этих результатов хорошо известно, что значения напряжений и деформаций в компонентах различны (в более “мягких” компонентах выше деформации, а в более “жестких” — выше напряжения). Различия определяются соотношением упругих констант компонентов и тем выше, чем больше различия упругих модулей компонентов. Поэтому формулировка лагранжиана (4), не постулирующая априори характер взаимосвязи деформаций (или напряжений) в различных фазах композита, является наиболее общей и корректной.

Для записи лагранжиана (4) в терминах истинных параметров компонентов определим зависимости между эффективными и истинными характеристиками компонентов композита. Это может быть сделано на основе анализа условий сохранения кинетической энергии компонентов и действующих на них объемных сил.

Кинетическая энергия “равнораспределенного” компонента  $\alpha$  в представительном объеме  $dV$  равна кинетической энергии для реального объема  $dV_\alpha$ , занимаемого этим компонентом:

$$\frac{1}{2} \tilde{\rho}_\alpha \left( \mathbf{v}^{(ef\alpha)} \right)^2 dV = \frac{1}{2} \rho_\alpha \left( \mathbf{v}^{(\alpha)} \right)^2 dV_\alpha, \quad (5)$$

где  $\mathbf{v} = \partial \mathbf{u} / \partial t$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Отсюда вытекает связь между эффективным и реальным значениями кинетической энергии компонента  $\alpha$ :

$$\frac{1}{2} \tilde{\rho}_\alpha \left( \mathbf{v}^{(ef\alpha)} \right)^2 = \frac{\phi_\alpha}{2} \rho_\alpha \left( \mathbf{v}^{(\alpha)} \right)^2. \quad (6)$$

Отметим, что потенциальная энергия отдельного компонента не сохраняется при переходе от эффективного к “истинному” рассмотрению, поскольку имеет место взаимодействие компонентов.

Найдем связь между эффективным и реальным тензорами напряжений, используя условие сохранения объемных сил. Сила, действующая на единицу объема, определяется как  $\nabla \cdot \sigma$ . Если отдельный компонент непрерывно распределен в представительном объеме  $dV$ , тогда непрерывно распределены в этом объеме и соответствующие эффективные напряжения. В этом случае объемную силу, действующую на компонент, определяем как

$$\nabla \cdot \sigma^{(ef\alpha)} dV = F^{(\alpha)}, \quad (7)$$

где  $\sigma^{(ef\alpha)}$  — эффективные напряжения в объеме  $dV$ , занятом компонентом  $\alpha$ . В действительности каждый компонент занимает объем  $dV_\alpha$  и характеризуется истинными напряжениями  $\sigma^{(\alpha)}$ . Тогда объемную силу, действующую на компонент  $\alpha$ , определяем как

$$\nabla \cdot \sigma^{(\alpha)} dV_\alpha = F^{(\alpha)}. \quad (8)$$

Из условия равенства объемных сил (7) и (8) следует связь между полями истинных и эффективных напряжений

$$\nabla \cdot \sigma^{(ef\alpha)} = \phi_\alpha \nabla \cdot \sigma^{(\alpha)}. \quad (9)$$

Если компоненты распределены равномерно в представительном объеме  $dV$ , тогда  $\phi_\alpha$  являются константами, и их можно внести под знак дивергенции  $\nabla \cdot (\sigma^{(ef\alpha)} - \phi_\alpha \sigma^{(\alpha)}) = 0$ . Отсюда следует, что выражение в скобках

определено с точностью до ротора некоторого произвольного тензора второго ранга  $A$ :  $\sigma^{(ef\alpha)} - \phi_\alpha \sigma^{(\alpha)} = \nabla \times A$ . Ввиду произвольности выбора тензора  $A$  положим его равным нулю. Дополнительным обоснованием такого выбора является то, что тензор  $A$  имеет смысл моментных напряжений. Настоящее рассмотрение проводим в рамках линейной теории упругости и моментные напряжения не учитываем. Тогда в приближении однородного распределения компонентов в объеме  $dV$  связь между полями истинных и эффективных напряжений примет вид

$$\sigma^{(ef\alpha)} = \phi_\alpha \sigma^{(\alpha)}. \quad (10)$$

В случае малых упругих деформаций истинные и эффективные напряжения можно выразить через истинные и эффективные деформации по закону Гука

$$\sigma = (-2\mu/3)(\text{Sp}\epsilon)\delta + (\mu/2)\epsilon,$$



где  $K$  и  $\mu$  — модуль объемного сжатия и модуль сдвига соответственно;  $Spr$  — сумма диагональных компонентов тензора деформации;  $\delta$  — единичный тензор. Учтем, что удельные (в расчете на единицу объема) упругие характеристики материала компонента не зависят от того, сосредоточен ли он в своем объеме  $dV_\alpha$  или непрерывно распределен в представительном объеме  $dV$ . Тогда из (12) легко получить взаимосвязь тензоров истинных  $\varepsilon^{(\alpha)}$  и эффективных  $\varepsilon^{(ef\alpha)}$  деформаций

$$\varepsilon^{(ef\alpha)} = \phi_\alpha \varepsilon^{(\alpha)}. \quad (11)$$

В лагранжиане (4) в выражении для плотности полной потенциальной энергии перейдем от эффективных характеристик к истинным, учитывая (10) и (11):

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_{ij}^{(ef1)} \varepsilon_{ij}^{(ef1)} + \sigma_{ij}^{(ef2)} \varepsilon_{ij}^{(ef2)} + \left( \sigma_{ij}^{(ef1)} \varepsilon_{ij}^{(ef2)} + \sigma_{ij}^{(ef2)} \varepsilon_{ij}^{(ef1)} \right) \right) dV = \\ & = \phi_1^2 \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV_1 + \phi_2^2 \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV_2 + \phi_1 \phi_2 \left( \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \right) dV. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} & \sigma_{ij}^{(ef1)} \varepsilon_{ij}^{(ef1)} + \sigma_{ij}^{(ef2)} \varepsilon_{ij}^{(ef2)} + \left( \sigma_{ij}^{(ef1)} \varepsilon_{ij}^{(ef2)} + \sigma_{ij}^{(ef2)} \varepsilon_{ij}^{(ef1)} \right) = \\ & \phi_1^3 \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} + \phi_2^3 \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \phi_1 \phi_2 \left( \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Степень взаимодействия компонентов определяется свойствами межфазных границ. Действительно, напряжения от одного компонента к другому передаются через границу раздела. Границы раздела могут быть несовершенными, т.е. иметь несплошности (микротрещины). В этом случае напряжения передаются частично, а, следовательно, энергия взаимодействия компонентов будет меньше в сравнении с совершенными границами. Будем характеризовать поврежденность межфазных границ безразмерным удельным параметром  $q$ , определяемый как отношение суммарной площади совершенных (сплошных) участков межфазных границ к общей площади границ раздела:  $0 \leq q \leq 1$ . Полагаем, что на поврежденных участках границ поверхности несплошностей не контактируют. Тогда энергию взаимодействия компонентов умножаем на величину  $q$ . Принимая во внимание сказанное и с учетом выражения (13), лагранжиан запишем в общем виде как

$$\begin{aligned} L = & \frac{\phi_1 \rho_1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial t} \right)^2 + \frac{\phi_2 \rho_2}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial t} \right)^2 - \frac{\phi_1^3}{2} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} - \frac{\phi_2^3}{2} \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} - \\ & - \frac{q \phi_1 \phi_2}{2} \left( \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (14)$$



Обоснованность такого учета несплошности межфазных границ в лагранжиане (14) можно пояснить следующим образом. Если в отсутствие межфазных несплошностей ( $q = 1$ ) деформации  $\varepsilon_{ij}$  одной фазы вызывают напряжения другой фазы, то при ненулевой дефектности границ ( $q < 1$ ) те же самые деформации  $\varepsilon_{ij}$  одной фазы вызовут напряжения  $q\sigma_{ij}$  в объеме другой фазы вследствие уменьшения фактической площади поверхности взаимодействия фаз (поверхности, на которой одна фаза деформирует другую). Данное приближение можно рассматривать как первое (линейное) приближение к учету влияния несплошных участков границ раздела на энергию межфазного взаимодействия. Использование линейного приближения непосредственно вытекает из приближения однородного распределения истинных напряжений и деформаций в каждой фазе представительного объема.

В случае малых упругих деформаций тензор истинных деформаций компонентов определяем через истинные смещения следующим образом:

$$\varepsilon^{(\alpha)} = \left( \nabla \mathbf{u}^{(\alpha)} + \mathbf{u}^{(\alpha)} \nabla \right) / 2.$$

Соответственно, лагранжиан двухфазного композита в линейно-упругом приближении принимает вид

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \phi_1 \rho_1 \left( \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \phi_2 \rho_2 \left( \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial t} \right)^2 - \\ & - \frac{\phi_1^3}{4} \left[ \frac{2(3K_1 - 2\mu_1)}{3} \left( \frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial x_n} \right)^2 + \mu_1 \left( \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i} \right)^2 \right] - \\ & - \frac{\phi_2^3}{4} \left[ \frac{2(3K_2 - 2\mu_2)}{3} \left( \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_i} \right)^2 + \mu_2 \left( \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial x_k} \right)^2 \right] - \\ & - \frac{q\phi_2\phi_1[(3K_2 - 2\mu_2) + (3K_1 - 2\mu_1)]}{6} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_i} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_k} - \\ & - \frac{q\phi_2\phi_1[\mu_2 + \mu_1]}{4} \left( \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где нижние индексы  $i$  и  $j$  обозначают проекцию вектора на соответствующую координатную ось.

Соотношения для скоростей упругих волн можно получить на основе вывода уравнений движения для смещений компонентов  $\mathbf{u}^{(\alpha)}$  из уравнения Эйлера—Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial u_m^{(\alpha)}}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial u_m^{(\alpha)}}{\partial x_k}} = 0. \quad (16)$$

Подставляя лагранжиан (15), получим уравнения движения компонентов двухфазного композита в терминах их упругих смещений  $u_m^{(\alpha)}$

$$\begin{aligned} \phi_1 \rho_1 \frac{\partial^2 u_m^{(1)}}{\partial t^2} = & \phi_1^3 \left[ \frac{3K_1 - 2\mu_1}{3} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_i} + \mu_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m^{(1)}}{\partial x_j} \right) \right] + \\ & + \frac{q\phi_2\phi_1[(3K_2 - 2\mu_2) + (3K_1 - 2\mu_1)]}{6} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_i} + \\ & + \frac{q\phi_2\phi_1[\mu_2 + \mu_1]}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m^{(2)}}{\partial x_j} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \phi_2 \rho_2 \frac{\partial^2 u_m^{(2)}}{\partial t^2} = & \phi_2^3 \left[ \frac{3K_2 - 2\mu_2}{3} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_i} + \mu_2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m^{(2)}}{\partial x_j} \right) \right] + \\ & + \frac{q\phi_2\phi_1[(3K_2 - 2\mu_2) + (3K_1 - 2\mu_1)]}{6} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_i} + \\ & + \frac{q\phi_2\phi_1[\mu_2 + \mu_1]}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m^{(1)}}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

### 3. Аналитические соотношения для скоростей упругих волн и упругих констант

В общем 3D случае уравнения движения (17), (18) могут быть решены только численно при задании начальных и граничных условий. Однако в частном одномерном случае возможно получение важных аналитических решений, дающих оценки скоростей плоских продольной и поперечной упругих волн в макроскопически изотропных двухфазных композитах, в том числе содержащих повреждения (несплошности) на межфазных границах.

Для получения соотношений для скорости продольной плоской упругой волны полагаем, что имеют место только продольные смещения (в направ-

лении распространения волны, совпадающем с координатной осью  $X$ ). В одномерном случае уравнения движения компонентов принимают вид

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} = \phi_1^2 \left[ c_1^2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} \right] + A_1 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} = \phi_2^2 \left[ c_2^2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} \right] + A_2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2}. \quad (20)$$

Отметим, что при выводе уравнений (19), (20) использованы соотношения для скоростей продольных упругих волн в материалах фаз

$$c_\alpha^2 = \frac{3K_\alpha + 4\mu_\alpha}{3\rho_\alpha}, \quad (21)$$

где  $K_\alpha$ ,  $\mu_\alpha$  и  $\rho_\alpha$  — модуль всестороннего сжатия, модуль сдвига и плотность компонента (фазы)  $\alpha$ , а также введены материальные коэффициенты связи между фазами

$$A_1 = \frac{q\phi_2 [(3K_2 + 4\mu_2) + (3K_1 + 4\mu_1)]}{6\rho_1}, \quad (22)$$

$$A_2 = \frac{q\phi_1 [(3K_2 + 4\mu_2) + (3K_1 + 4\mu_1)]}{6\rho_2}. \quad (23)$$

Ищем решение уравнений (19), (20) в виде плоской волны  $U_0^{(1)} e^{i(kx - \omega t)}$  и  $U_0^{(2)} e^{i(kx - \omega t)}$  соответственно. Подставляя это решение, получим уравнения для определения амплитуд  $U_0^{(1)}$  и  $U_0^{(2)}$

$$(\phi_1^2 c_1^2 k^2 - \omega^2) U_0^{(1)} + A_1 k^2 U_0^{(2)} = 0, \quad (24)$$

$$A_2 k^2 U_0^{(1)} + (\phi_2^2 c_2^2 k^2 - \omega^2) U_0^{(2)} = 0. \quad (25)$$

Данная система уравнений имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю:

$$\det \begin{bmatrix} (\phi_1^2 c_1^2 k^2 - \omega^2) & A_1 k^2 \\ A_2 k^2 & (\phi_2^2 c_2^2 k^2 - \omega^2) \end{bmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим характеристическое уравнение

$$\omega^4 - (\phi_1^2 c_1^2 + \phi_2^2 c_2^2) \omega^2 k^2 + \phi_1^2 \phi_2^2 c_1^2 c_2^2 k^4 - A_1 A_2 k^4 = 0. \quad (26)$$

Решением этого уравнения является зависимость частоты от волнового числа

$$\omega_{1,2} = k \sqrt{\frac{\phi_1^2 c_1^2 + \phi_2^2 c_2^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\phi_1^2 c_1^2 - \phi_2^2 c_2^2)^2}{4} + A_1 A_2}}. \quad (27)$$

Отсюда можно получить выражение для групповой скорости (скорости распространения продольного звука) в двухфазном композите как производной частоты по волновому числу

$$V_{1,2} = d\omega_{1,2} / dk.$$

Как видно из (27), в двухфазном композите могут стационарно (без дисперсии) распространяться две продольные упругие волны с разными скоростями:

$$V_1 = \sqrt{\frac{\phi_1^2 c_1^2 + \phi_2^2 c_2^2}{2} + \sqrt{\frac{(\phi_1^2 c_1^2 - \phi_2^2 c_2^2)^2}{4} + A_1 A_2}}, \quad (28)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{\phi_1^2 c_1^2 + \phi_2^2 c_2^2}{2} - \sqrt{\frac{(\phi_1^2 c_1^2 - \phi_2^2 c_2^2)^2}{4} + A_1 A_2}}. \quad (29)$$

Первая из скоростей (“быстрая”  $V_1$ ) является скоростью классической продольной упругой волны в материале. Смысл второй (“медленной”  $V_2$ ) волны будет обсужден далее.

Аналогичным образом можно вывести соотношения для плоских поперечных упругих волн в композите. Используем приближение только поперечных ненулевых смещений по отношению к направлению движения волны. Кроме того, учитываем, что при распространении поперечной волны объем не изменяется ( $\partial u_i / \partial x_i = 0$ ). В этом случае уравнения (17), (18) в одномерном случае примут вид

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} = \frac{\phi_1^2 \mu_1}{\rho_1} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{q \phi_2 (\mu_1 + \mu_2)}{2 \rho_1} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} = \frac{\phi_2^2 \mu_2}{\rho_2} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{q \phi_1 (\mu_1 + \mu_2)}{2 \rho_2} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2}. \quad (31)$$

По аналогии с продольными волнами решение уравнений (30), (31) ищем в виде плоской поперечной волны  $\tilde{U}_0^{(1)} e^{i(kx - \omega t)}$  и  $\tilde{U}_0^{(2)} e^{i(kx - \omega t)}$  соот-

ветственно. Подставляя это решение, получаем уравнения для определения амплитуд  $\tilde{U}_0^{(1)}$  и  $\tilde{U}_0^{(2)}$  поперечных колебаний

$$\tilde{U}^{(1)} \left( \omega^2 - \frac{\phi_1^2 \mu_1 k^2}{\rho_1} \right) - \tilde{U}^{(2)} \left( \frac{q \phi_2 (\mu_1 + \mu_2) k^2}{2 \rho_1} \right) = 0, \quad (32)$$

$$\tilde{U}^{(1)} \left( -\frac{q \phi_1 (\mu_1 + \mu_2) k^2}{2 \rho_2} \right) - \tilde{U}^{(2)} \left( \omega^2 - \frac{\phi_2^2 \mu_2 k^2}{\rho_2} \right) = 0. \quad (33)$$

Решение этих уравнений дает дисперсионное соотношение

$$\tilde{\omega}_{1,2} = k \sqrt{\frac{\phi_1^2 \mu_1 \rho_2 + \phi_2^2 \mu_2 \rho_1}{2 \rho_1 \rho_2} \pm \sqrt{\frac{(\phi_1^2 \mu_1 \rho_2 - \phi_2^2 \mu_2 \rho_1)^2}{4 \rho_1^2 \rho_2^2} + \frac{q^2 \phi_1 \phi_2 (\mu_1 + \mu_2)^2}{4 \rho_1 \rho_2}}}. \quad (34)$$

Как и в случае продольных волн, отсюда можно получить выражение для скорости распространения поперечного звука в двухфазном композите как производной частоты по волновому числу

$$\tilde{V}_{1,2} = d\tilde{\omega}_{1,2}/dk.$$

Как видно из (34), в двухфазном композите могут стационарно (без дисперсии) распространяться две поперечные упругие волны с различными скоростями — “быстрая” ( $\tilde{V}_1$ ) и “медленная” ( $\tilde{V}_2$ ):

$$\tilde{V}_1 = \sqrt{\frac{\phi_1^2 C_1^2 + \phi_2^2 C_2^2}{2} + \sqrt{\frac{(\phi_1^2 C_1^2 - \phi_2^2 C_2^2)^2}{4} + \frac{q_1^2 \phi_1 \phi_2 \rho_1 \rho_2}{4} \left( \frac{C_1^2}{\rho_2} + \frac{C_2^2}{\rho_1} \right)^2}}, \quad (35)$$

$$\tilde{V}_2 = \sqrt{\frac{\phi_1^2 C_1^2 + \phi_2^2 C_2^2}{2} - \sqrt{\frac{(\phi_1^2 C_1^2 - \phi_2^2 C_2^2)^2}{4} + \frac{q_1^2 \phi_1 \phi_2 \rho_1 \rho_2}{4} \left( \frac{C_1^2}{\rho_2} + \frac{C_2^2}{\rho_1} \right)^2}}. \quad (36)$$

Здесь  $C_{1,2} = \sqrt{\mu_{1,2}/\rho_{1,2}}$  — скорости поперечных упругих волн в материалах фаз.

Таким образом, применение лагранжева формализма позволяет напрямую определять скорости упругих волн в композитном материале в зависимости от фазового состава, объемной доли фаз и дефектности межфазных границ. При этом в отличие от классических моделей, где скорости упругих волн определяют на основе известных значений эффективных (интегральных) значений упругих констант и плотности композита, в

развитой динамической модели эффективные упругие модули определяют из вычисленных значений скоростей упругих волн (28) и (29), (35) и (36).

В частности, эффективные модуль сдвига  $\mu$ , модуль всестороннего сжатия  $K$ , модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  композитного материала рассчитываем как

$$\mu = (\phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2) \tilde{V}_1^2, \quad (37)$$

$$K = (\phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2) \left( V_1^2 - \frac{4}{3} \tilde{V}_1^2 \right), \quad (38)$$

$$E = \frac{3(\phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2) \tilde{V}_1^2 \left( V_1^2 - \frac{4}{3} \tilde{V}_1^2 \right)}{V_1^2 - \tilde{V}_1^2}, \quad (39)$$

$$\nu = \frac{V_1^2 - 2\tilde{V}_1^2}{2(V_1^2 - \tilde{V}_1^2)}. \quad (40)$$

#### 4. Верификация механической модели двухфазного композита

Точность аналитических оценок данной модели и ее применимость для макроскопически изотропных неорганических и органических композитных материалов верифицирована на примере нескольких двухкомпонентных композитов, упругие константы компонентов которых имеют одинаковый порядок величины либо различаются на два порядка. Зависимости значений упругих констант (40)–(43) сопоставлены с доступными экспериментальными данными и аналитическими оценками в рамках широко применяемой модели Хашина—Штрикмана [19,40]:

$$\mu^+ = \mu_1 + \frac{\phi_2}{\frac{1}{\mu_2 - \mu_1} + \frac{6(K_1 + 2\mu_1)\phi_1}{5\mu_1(3K_1 + 4\mu_1)}}, \quad \mu^- = \mu_2 + \frac{\phi_1}{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{6(K_2 + 2\mu_2)\phi_2}{5\mu_2(3K_2 + 4\mu_2)}}, \quad (41)$$

$$K^+ = K_1 + \frac{\phi_2}{\frac{1}{K_2 - K_1} + \frac{3\phi_1}{3K_1 + 4\mu_1}}, \quad K^- = K_2 + \frac{\phi_1}{\frac{1}{K_1 - K_2} + \frac{3\phi_2}{3K_2 + 4\mu_2}}, \quad (42)$$

$$E^+ = \frac{9K^+ \mu^+}{3K^+ + \mu^+}, \quad E^- = \frac{9K^- \mu^-}{3K^- + \mu^-}. \quad (43)$$

Здесь индексы (+) и (–) обозначают соответственно верхнюю и нижнюю границы интервала значений упругого модуля в модели Хашина—Штрикмана.

Табл. 1

Упругие характеристики компонентов композита  $\text{NiAl}-\text{Al}_2\text{O}_3$ 

Компонент	$K$ , ГПа	$\mu$ , ГПа	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
$\text{Al}_2\text{O}_3$	253,5	162,3	3990
$\text{NiAl}$	161,9	71,2	7150

**4.1. Металлокерамический композит  $\text{NiAl}-\text{Al}_2\text{O}_3$**  — макроскопически изотропный спеченный композитный материал с металлической матрицей, армированной керамическими частицами. Упругие константы компонентов приведены в табл. 1. В данном случае значения упругих модулей компонентов имеют одинаковый порядок величины и различаются в пределах двух раз.

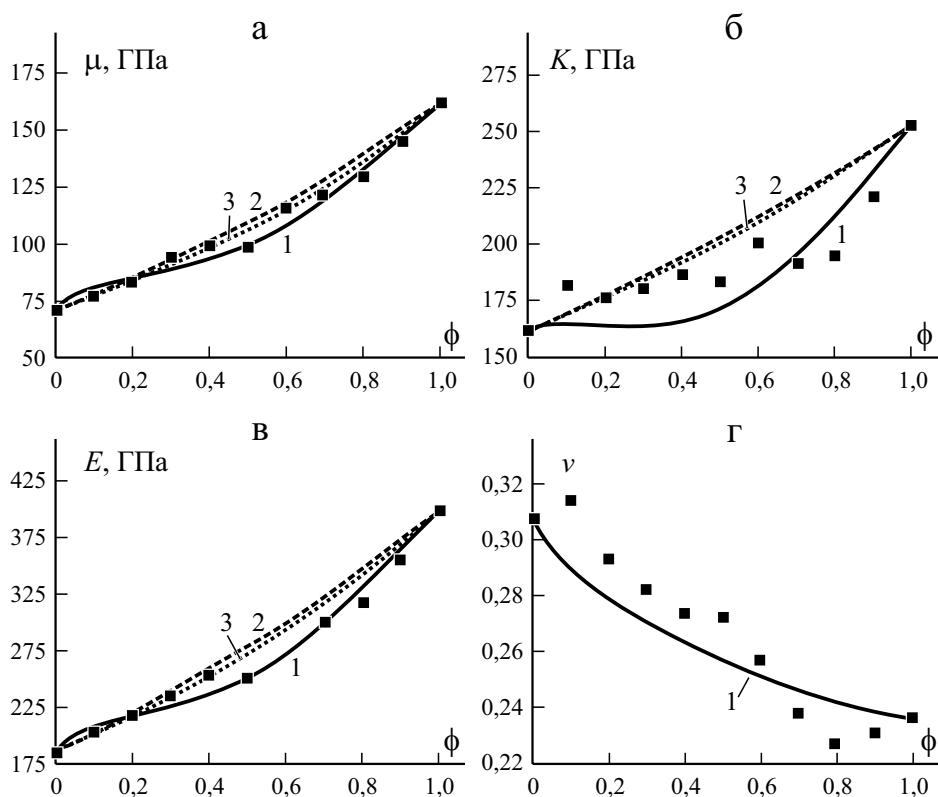


Рис. 1. Зависимость упругих констант металлокерамического композитного материала  $\text{NiAl}-\text{Al}_2\text{O}_3$  от объемного содержания  $\phi$  компонента  $\text{Al}_2\text{O}_3$ . Кривые, полученные на основе соотношений развитой модели, рассчитывали в приближении бездефектных межфазных границ ( $q = 1$ ). Экспериментальные данные взяты из [41]: 1 — развитая модель; 2 — модель Хашина—Штрикмана (+); 3 — модель Хашина—Штрикмана (–); ■ — эксперимент.

В [41] приведены экспериментальные значения упругих констант спеченного композита  $\text{NiAl}-\text{Al}_2\text{O}_3$  в широком интервале концентраций керамической фазы, но не содержится информации о дефектности (поврежденности) полученных образцов, а авторы отмечают близкую к нулю пористость образцов (в пределах 1%) и высокую степень совершенства границ раздела  $\text{NiAl}$  и  $\text{Al}_2\text{O}_3$ . Поэтому аналитические оценки получены в предположении бездефектности межфазных границ ( $q = 1$ ). На рис. 1 представлены аналитические зависимости значений упругих констант в интервале объемных концентраций керамической фазы от 0 до 1. Эти кривые сопоставлены с экспериментальными данными и оценками (41)—(43) модели Хашина—Штрикмана. Из данных рисунка видно хорошее количественное согласование теоретических оценок, полученных в рамках лагранжева подхода с явным учетом межфазного взаимодействия, и экспериментальных данных. Важно также отметить следующее качественное преимущество развитой модели в сравнении с классическим подходом Хашина—Штрикмана. Хотя обе модели дают оценки, близкие к экспериментальным данным, зависимости упругих модулей от концентрации керамических включений имеют почти линейный характер в модели Хашина—Штрикмана. В то же время, как свидетельствуют приведенные экспериментальные данные, а также литературные данные для некоторых других композитов, такие зависимости, как правило, являются существенно нелинейными. Разработанная модель качественно верно воспроизводит такую нелинейность. При этом умеренные количественные различия на отдельных участках кривых могут определяться большим разбросом экспериментальных данных (на рисунке приведены их средние значения), различной, хотя и малой, концентрацией несплошностей на межфазных границах разных экспериментальных образцов (что влияет на средние значения) и другими причинами.

**4.2. Полиацеталь, армированный короткими углеродными волокнами.** Полиацеталь (ПА) — полимерный материал, широко применяемый в техническом и автомобильном производстве, строительстве, электронике, медицинской промышленности и т.д. Недостатком данного материала является его низкая жесткость (порядка нескольких гигапаскалей), сравнимая с жесткостью губчатой костной ткани. Для повышения жесткости, прочности и износостойкости изделий полиацеталь армируют различными компонентами (включениями), жесткость и прочность которых мно-

Табл. 2

Упругие характеристики компонентов композита  
полиацеталь—углеродные волокна [37]

Компонент	$K$ , ГПа	$\mu$ , ГПа	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Полиацеталь (POM T-300)	3,17	1,27	1410
Волокна (CF Fortafil F-3)	252,2	86	1800



гократно превышают характеристики полимерной матрицы. Содержание этих добавок может достигать десятков процентов. В настоящей работе рассмотрен композит на основе полиацетала, армированный короткими углеродными волокнами (ПА—УВ) (длина волокон 100—200 мкм). Композит получен методом литья под давлением (injection molding) [37]. В данной работе приведены экспериментальные данные для нескольких композитов этого состава с разным содержанием волокон.

Значения упругих констант компонентов композита приведены в табл. 2. В данном случае упругие константы компонентов различаются примерно на два порядка. Поскольку армирующие включения имеют микромасштабную длину и отсутствуют сведения о наличии выделенной ориентации волокон, полагаем, что данные композиты являются макроскопически изотропными.

Как видно из данных рис. 2, “вилка” значений в классической модели Хашина—Штрикмана является столь широкой, что делает данную модель фактически бесполезной для прогноза эффективных макроскопических свойств композитов, значения механических свойств компонентов которых различаются на порядки. Отметим, что завышенные значения макроскопических упругих модулей дает и развитая модель в приближении бездефектного композита.

Для полимерных композитов, армированных углеродными волокнами, известной проблемой является наличие “непроклеев”, т.е. отсутствие сцепления (несплошности) на участках границ раздела матрицы и включений при недостаточно высококачественной технологии изготовления. На рис. 2 видно, что аналитическая оценка точно ложится на экспериментальные данные в предположении высокой дефектности межфазных

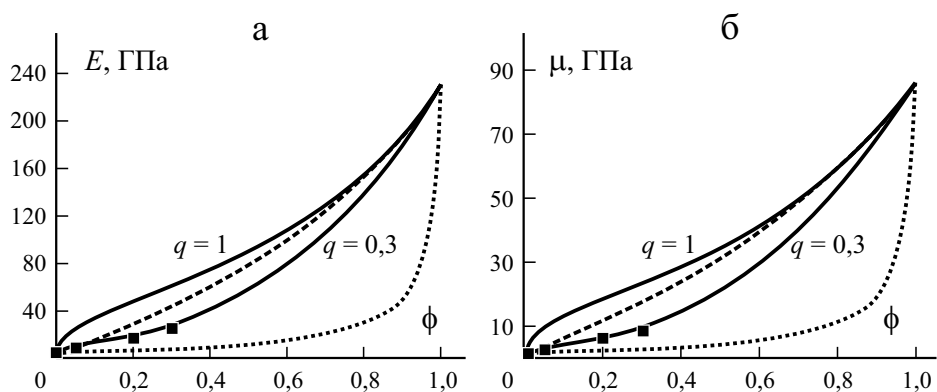


Рис. 2. Зависимость упругих констант полимерного композита “полиацеталь, армированный короткими углеродными волокнами” от объемного содержания  $\phi$  волокон. Кривые, полученные на основе соотношений развитой модели, рассчитывали в приближении бездефектных межфазных границ ( $q = 1$ ) и межфазных границ с содержанием дефектов 70% ( $q = 0,3$ ). Экспериментальные данные взяты из [37].

Остальные обозначения те же, что на рис. 1.

границ ( $q = 0,3$ , что соответствует 70% поврежденности межфазных границ). Полученный результат дает основание предположить, что образцы данного полимерного композита, полученного в лабораторных условиях [37], содержат большое количество несплошностей на межфазных границах. Таким образом, развитая модель позволяет не только прогнозировать макроскопические упругие свойства двухфазных макроскопически изотропных композитов, но и решать обратную задачу — оценивать характерную величину поврежденности межфазных границ.

## 5. Условия бездисперсного распространения “медленных” упругих волн

Развитая модель предсказывает помимо классических “быстрых” и существование устойчиво распространяющихся “медленных” упругих волн в двухфазных композитах с дефектами (несплошностями) на межфазных границах. Как следует из соотношений (28), (29) и (35), (36), такие волны могут существовать в композитах, характеризующихся значениями параметра  $q$  не выше определенных пороговых значений (иными словами, при дефектности межфазных границ  $(1 - q)$  не ниже определенных пороговых значений). Особенности структуры несплошностей, определяющие конкретные значения параметра  $q$ , являются предметом обсуждения. В частности, в развитой модели на поврежденных участках межфазных границ предполагаем отсутствие нормального и касательного взаимодействия фаз. Это можно интерпретировать как достаточно широкую апертуру интерфейсных несплошностей, вследствие чего при малых относительных смещениях поверхности не взаимодействуют (например, при прохождении упругих волн). Пороговые (максимальные) значения параметра  $q$  определяем из условий  $V_2 = 0$  и  $\tilde{V}_2 = 0$ :

$$\begin{cases} q_{crit}^P = \sqrt{\phi_1^2 \phi_2^2 c_1^2 c_2^2 / B_P}, B_P = \frac{\phi_1 \phi_2}{4} \left( c_1^2 + \frac{c_2^2 \rho_2}{\rho_1} \right) \left( \frac{c_1^2 \rho_1}{\rho_2} + c_2^2 \right) \\ q_{crit}^S = \sqrt{\phi_1^2 \phi_2^2 C_1^2 C_2^2 / B_S}, B_S = \frac{\phi_1 \phi_2 \rho_1 \rho_2}{4} \left( \frac{C_1^2}{\rho_2} + \frac{C_2^2}{\rho_1} \right)^2 \end{cases}. \quad (44)$$

Продольные плоские “медленные” упругие волны могут устойчиво (без дисперсии) распространяться в композите, если  $q < q_{crit}^P$ , т.е. поврежденность межфазных границ  $D$  больше критического значения  $D_{crit}^P = (1 - q_{crit}^P)$ . Аналогично плоские поперечные “медленные” волны устойчиво распространяются в композите, если поврежденность межфазных границ  $D$  выше порогового значения  $D_{crit}^S = (1 - q_{crit}^S)$ .

На рис. 3 приведены зависимости критических значений поврежденности от объемной доли включений для двух рассмотренных композитных материалов. Можно видеть, что минимальное критическое значение по-

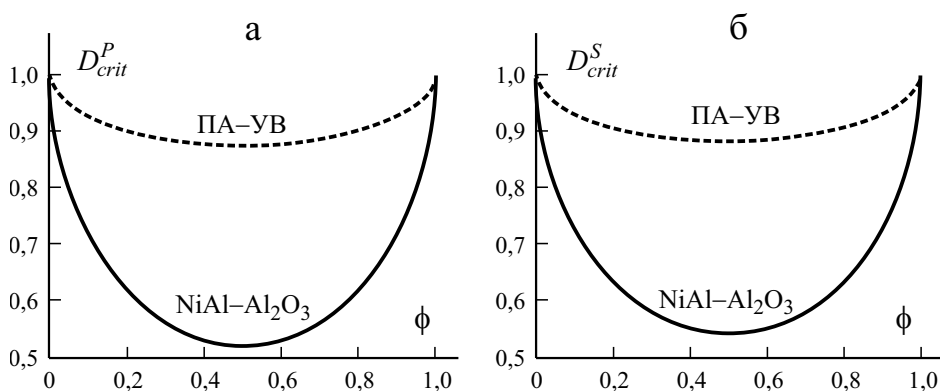


Рис. 3. Зависимость критических значений поврежденности межфазных границ от объемной доли включений  $\phi$  ( $\text{Al}_2\text{O}_3$  и УВ) для двух композитных материалов: а —

$$D_{crit}^P = (1 - q_{crit}^P); \text{ б — } D_{crit}^S = (1 - q_{crit}^S). \text{ Пояснения в тексте.}$$

врежденности, при превышении которой в материале возможно устойчивое распространение “медленных” упругих волн, достигается при равном объемном соотношении компонентов ( $\phi_1 = \phi_2 = 0,5$ ). Также важно отметить, что чем больше относительное различие упругих констант материала, тем больше характерные значения критической (минимально необходимой) поврежденности межфазных границ. В частности, для композита на основе полиацетала, в котором отношение упругих модулей компонентов составляет два порядка величины, минимальное необходимое значение поврежденности должно составлять около 90% (при  $\phi_1 = \phi_2 = 0,5$ ). Очевидно, что композиты с такими значениями поврежденности межфазных границ могут применяться только в условиях отсутствия значительных механических нагрузок. То же самое (хотя и в меньшей степени) справедливо и для первого из рассмотренных композитных материалов.

Как следует из соотношений (44), наименьшая возможная величина критической поврежденности  $D_{crit}^P = D_{crit}^S = 0,5$  достижима в композите, образованном компонентами с одинаковыми механическими характеристиками. В этом случае речь фактически идет об однофазном материале с повреждениями на границах раздела структурных элементов (частиц в спеченном однофазном материале или консолидированной осадочной горной породе, блоков в блочной геосреде и т.д.).

При превышении критических значений поврежденности межфазных границ в композите могут распространяться “медленные” продольные и поперечные волны. Скорость этих волн зависит не только от объемной доли включений, но и от поврежденности. На рис. 4 приведены примеры таких зависимостей для двух композитов при одинаковой объемной доле включений, равной 30%. Выбор данного значения  $\phi$  в качестве примера

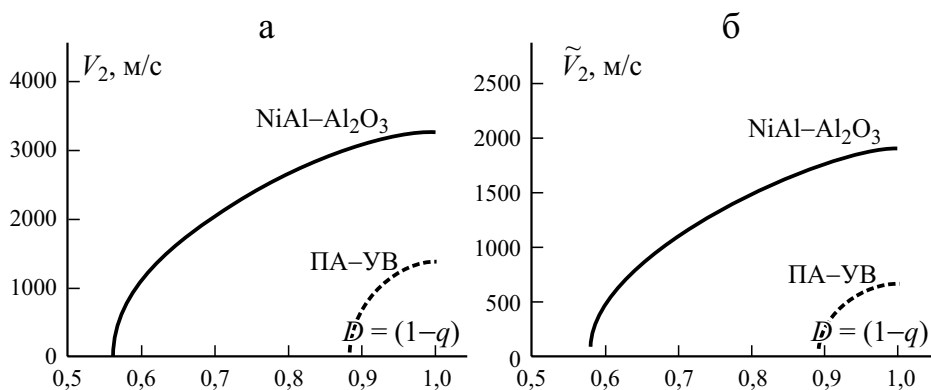


Рис. 4. Зависимость скорости плоских “медленных” упругих волн  $V_2$  (а) и  $\tilde{V}_2$  (б) от поврежденности межфазных границ  $\bar{D}$  для двух композитных материалов. В обоих случаях  $\phi = 30\%$ .

связан с тем, что для него имеются экспериментальные данные об упругих свойствах этих композитов (иными словами, композиты такого состава могут быть синтезированы, а дефектностью межфазных границ потенциально возможно управлять изменением технологических параметров синтеза). Из данных рисунка видно, что с ростом поврежденности скорость “медленных” упругих волн возрастает и достигает того же порядка величины, что и скорость “быстрых” (классических) упругих волн. При этом отметим, что поскольку  $D_{crit}^P < D_{crit}^S$ , в определенном интервале значений поврежденности (хотя и сравнительно узком) в двухфазных композитах могут распространяться только продольные “медленные” упругие волны.

Поскольку скорости упругих волн формально связаны с упругими константами, логично ассоциировать с “медленными” упругими волнами соответствующие значения модулей сдвига и всестороннего сжатия. Характерные значения этих констант минимум на порядок величины ниже значений “классических” упругих констант. Вопрос о физическом смысле столь “малых” упругих констант непосредственно проистекает из определения физической природы и механизмов формирования самих “медленных” упругих волн и является предметом дальнейшего исследования.

Предсказанные теоретически “медленные” упругие волны в многофазных материалах, характеризующихся высокой концентрацией несплошностей на внутренних интерфейсах, известны и на протяжении последних 30 лет наблюдаются и исследуются в так называемых дискретных или блочных (моно- и многофазных) средах. Примерами являются фрагменты горных массивов, а также разнообразные ансамбли взаимодействующих блоков, разделенных “ослабленными” границами (контактные или частично поврежденные границы раздела, прослойки вязкоупругого мягкого материала и т.д.). В таких дискретных средах имеют место разнообразные динамические явления, которые не наблюдаются в

сплошных средах. Одним из них является распространение групп волн, характеризующихся малыми скоростями (многократно меньшими скорости продольных волн в материале блоков), большими длинами волн и слабым затуханием. Исследования “медленных” волн проводят главным образом на одномерных лабораторных объектах (цепочки стержней или блоков) или путем численного моделирования (как правило, также в одномерной постановке) [42—45]. Результаты цитируемых и других исследований показывают, что в зависимости от особенностей межблочных границ скорость продольной “медленной” волны в блочной среде может быть ниже, чем скорость продольной упругой волны в материале блока от 2—3 раз до порядка величины и более. Также существуют экспериментальные и численные исследования, показывающие существование “медленных” поперечных волн.

Говоря о вкладе межфазных интерфейсов в акустические свойства дисперсно упрочненных композитных материалов, необходимо упомянуть технику нелинейной акустики, применяемую для диагностики повреждений. Хорошо известно, что монохроматическое возбуждение вызывает в материале с дефектами упругий волновой отклик в широком спектре частот, в том числе с частотами многократно ниже частоты возбуждения. До настоящего времени для композитных материалов не проводили анализ экспериментальных данных, направленный на выявление низкочастотных “медленных” волн. Однако имеющиеся данные для блочных сред свидетельствуют о том, что в композитных материалах с высокой степенью дефектности межфазных границ (более 50%) также должны формироваться предсказанные в настоящей работе “медленные” волны, характеризующиеся помимо прочего более слабым затуханием в сравнении с традиционными (“быстрыми”) упругими волнами.

## Заключение

Разработана новая механическая модель, позволяющая аналитически и численно оценивать упругие характеристики и акустические свойства макроскопически изотропных двухфазных композитных материалов. Модель явным образом учитывает взаимодействие фаз и поврежденность межфазных границ. Ключевым отличием данной модели от классических макроскопических моделей композитов является полностью динамическая, а не статическая постановка задачи. Следствием этого является, в частности, возможность получения решения в терминах скоростей упругих волн, из которых могут определяться “статические” упругие константы материала (в классических моделях ситуация обратная). На примере нескольких композитных материалов показаны преимущества модели в сравнении с широко используемой в инженерной практике моделью Хашина—Штрикмана. В частности, развитая модель верно отражает существенно нелинейный характер зависимости эффективных

упругих характеристик дисперсно упрочненных композитов от объемного содержания включений и дефектности межфазных границ.

Предложенная модель предсказывает существование “медленных” продольных и поперечных волн в композитах, характеризующихся дефектностью межфазных границ выше некоторого порогового (минимального) значения. Получены аналитические соотношения для пороговых значений поврежденности, связывающие их с объемными долями компонентов, их упругими характеристиками и плотностями. Поскольку устойчивое распространение “медленных” упругих волн возможно только при достаточно высоких значениях поврежденности межфазных границ, такие упругие волны можно назвать “мезоскопическими” (т.е. обусловленными особенностями структуры на мезомасштабе) в отличие от “макроскопически обусловленных” “быстрых” волн.

Развитая модель может быть использована при решении задач неразрушающего контроля поврежденности и фазового состава композитных материалов, прогнозировании эффективных упругих и акустических свойств проектируемых композитов, а также при определении специфических характеристик поврежденности, обеспечивающих появление аномальных акустических свойств в многофазных материалах. Отметим, что формализм модели является открытым и может быть расширен на анизотропные (например, слоистые) многофазные системы, а также макроскопически изотропные многофазные материалы, в которых имеет место преимущественная ориентация несплошных участков интерфейсов (анизотропная поврежденность). Формализм модели позволяет естественным образом вводить и диссипацию механической энергии за счет различных механизмов (т.е. учитывать рассеяние энергии упругих волн в объеме фаз и на совершенных участках межфазных границ, вязкость и пластичность фаз). В этой связи уместно отметить, что в представленной модели рассеяние механической энергии за счет межфазных дефектов уже эффективно учитывается в линейном приближении, поскольку упругая энергия взаимодействия фаз пропорциональна доле совершенных участков границ раздела.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FWRW-2021-0002.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gao H., Xiang Z.* Manipulating elastic waves with conventional isotropic materials // *Phys. Rev. Appl.* — 2019. — Vol. 11. — Article 064040.
2. *Rauter N., Lammering R.* Impact damage detection in composite structures considering nonlinear Lamb wave propagation // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2015. — Vol. 22. — P. 44–51.
3. *Zuo Q. H., Deganis L. E., Wang G.* Elastic waves and damage quantification in brittle material with evolving damage // *J. Phys. D: Appl. Phys.* — 2012. — Vol. 45. — Article 145302.



4. *Bouzidi Y., Schmitt D. R.* Measurement of the speed and attenuation of the Biot slow wave using a large ultrasonic transmitter // *J. Geophys. Res.* — 2009. — Vol. 114. — Article B08201.
5. *Guyer R. A., Johnson P. A.* Nonlinear mesoscopic elasticity: evidence for a new class of materials // *Phys. Today.* — 1999. — Vol. 52. — Article 30.
6. *Burkov M. V., Eremin A. V., Byakov A. V., Lyubutin P. S., Panin S. V.* Impact damage detection in laminate and honeycomb cfrps using lamb wave ultrasonic sensing // *Russ. J. Nondestruct. Test.* — 2021. — Vol. 57. — P. 114–124.
7. *Barulich N. D., Godoy L. A., Dardati P. M.* A computational micromechanics approach to evaluate elastic properties of composites with fiber-matrix interface damage // *Compos. Struct.* — 2016. — Vol. 154. — P. 309–318.
8. *Zhu W., Dong Q.* Effective elastic properties of cracked composites with periodically distributed particulates // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2020. — DOI: 10.1080/15376494.2020.1859655.
9. *Farkash A., Mittelman B., Hayun S., Priel E.* Aluminum matrix composites with weak particle matrix interfaces: effective elastic properties investigated using micromechanical modeling // *Materials.* — 2021. — Vol. 14. — Article 6083.
10. *Grigoriev A. S., Zabolotskiy A. V., Shilko E. V., Dmitriev A. I., Andreev K.* Analysis of the quasi-static and dynamic fracture of the silica refractory using the mesoscale discrete element modelling // *Materials.* — 2021. — Vol. 14. — Article 7376.
11. *Xia W., Oterkus E., Oterkus S.* 3-dimensional bond-based peridynamic representative volume element homogenization // *Phys. Mesomech.* — 2021. — Vol. 24. — P. 541–547.
12. *Grinyaev Y. V., Chertova N. V., Shilko E. V., Psakhie S. G.* The continuum approach to the description of semi-crystalline polymers deformation regimes: the role of dynamic and translational defects // *Polymers.* — 2018. — Vol. 10. — Article 1155.
13. *Balokhonov R. R., Kulkov A. S., Zemlyanov A. V., Romanova V. A., Evtushenko E. P., Gatiyatullina D. D., Kulkov S. N.* Evolution of residual stresses and fracture in thermomechanically loaded particle-reinforced metal matrix composites // *Phys. Mesomech.* — 2021. — Vol. 24. — P. 503–512.
14. *Voight W.* Lehrbuch der Kristallphysik. — Berlin: Teubner, 1928. — 962 p.
15. *Reuss A.* Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle // *ZAMM.* — 1929. — Vol. 9. — P. 49–58.
16. *Azhi S., Bahloul N., Makradi A., Belouettar S.* Composite modeling for the effective elastic properties of semicrystalline polymers // *J. Mech. Mater. Struct.* — 2007. — Vol. 2. — No. 1. — P. 1–21.
17. *Hashin Z., Shtrikman S.* On some variational principals in anisotropic and non-homogeneous Elasticity // *J. Mech. Phys. Solids.* — 1962. — Vol. 10. — P. 335–343.
18. *Hashin Z.* Analysis of composite materials // *J. Appl. Mech.* — 1983. — Vol. 50. — P. 481–505.
19. *Hashin Z., Shtrikman S.* A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials // *J. Mech. Phys. Solids.* — 1963. — Vol. 11. — P. 127–140.
20. *Mori T., Tanaka K.* Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // *Acta Metall.* — 1973. — Vol. 21. — P. 571–574.
21. *Brisard S., Guilleminot J., Sab K., Tran V. P.* Mori–Tanaka estimates of the effective elastic properties of stress-gradient composites // *Int. J. Solids Struct.* — 2018. — Vol. 146. — P. 55–68.
22. *Hill R.* Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials — III. Self-consistent model // *J. Mech. Phys. Solids.* — 1965. — Vol. 13. — No. 4. — P. 189–198.

23. Xiong Z., Lu S., Liu J., Lv G., Li Y., Yu J. A combined self-consistent method to estimate the effective properties of polypropylene/calcium carbonate composites // *Polymers*. — 2018. — Vol. 10. — Article 101.
24. Eshelby J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // *Proc. R. Soc. A*. — 1957. — Vol. 241. — P. 376-396.
25. Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H. Effective properties of particulate composites with surface-varying interphases // *Composites: Part B*. — 2018. — Vol. 149. — P. 268–84.
26. Sun C. T., Vaidya R. S. Prediction of composite properties from a representative volume element // *Compos. Sci. Technol.* — 1996. — Vol. 56. — P. 171–179.
27. Gan H., Orozco C. E., Herakovich C. T. A strain-compatible method for micro-mechanical analysis of multi-phase composites // *Int. J. Solids Struct.* — 2000. — Vol. 37. — P. 5097–5122.
28. Liu B., Feng X., Zhang S.-M. The effective Young's modulus of composites beyond the Voigt estimation due to Poisson effect // *Compos. Sci. Technol.* — 2009. — Vol. 69. — P. 2198–2204.
29. Würkner M., Berger H., Gabbert U. On numerical evaluation of effective material properties for composite structures with rhombic fiber arrangements // *Int. J. Eng. Sci.* — 2011. — Vol. 49. — P. 322–332.
30. Selvadurai A. P. S., Nikopour H. Transverse elasticity of a unidirectionally reinforced composite with an irregular fibre arrangement: experiments, theory and computations // *Compos. Struct.* — 2012. — Vol. 94. — P. 1973–1981.
31. Trotta S., Marmo F., Rosati L. Evaluation of the Eshelby tensor for polygonal inclusions // *Composites: Part B*. — 2017. — Vol. 115. — P. 170–181.
32. Buryachenko V. A., Roy A. Effective elastic moduli of nanocomposites with prescribed random orientation of nanofibers // *Composites: Part B*. — 2005. — Vol. 36. — P. 405–416.
33. Cheng Y., Bian L., Wang Y., Taheri F. Influences of reinforcing particle and interface bonding strength on material properties of Mg/nano-particle composites // *Int. J. Solids Struct.* — 2014. — Vol. 51. — P. 3168–3176.
34. Dalaq A. S., Abueidda D. W., Abu Al-Rub R. K., Jasiuk I. M. Finite element prediction of effective elastic properties of interpenetrating phase composites with architected 3D sheet reinforcements // *Int. J. Solids Struct.* — 2016. — Vol. 83. — P. 169–182.
35. Aleshin V. Elastic properties of two-dimensional two-phase composites with isotropic phases // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 46. — P. 513–530.
36. Trofimov A., Drach B., Sevostianov I. Effective elastic properties of composites with particles of polyhedral shapes // *Int. J. Solids Struct.* — 2017. — Vol. 120. — P. 157–170.
37. Wiśniewska A., Hernik S., Liber-Kneć A., Egner H. Effective properties of composite material based on total strain energy equivalence // *Composites: Part B*. — 2019. — Vol. 166. — P. 213–220.
38. Wiśniewska A., Egner H. Optimization of functionally graded structural members by means of new effective properties estimation method // *Materials*. — 2019. — Vol. 12. — Article 3139.
39. Li C., Wang J., Dou F. An estimation approach for the effective elastic modulus of lightweight bulk filling material with compressible inclusions and imperfect interfaces // *Materials*. — 2020. — Vol. 13. — Article 3563.
40. Upadhyay A., Beniwal R. S., Singh R. Elastic properties of  $\text{Al}_2\text{O}_3$ –NiAl: a modified version of Hashin–Shtrikman bounds // *Contin. Mech. Thermodyn.* — 2012. — Vol. 24. — P. 257–266.



41. *Hsieh C. L., Tuan W. H., Wu T. T.* Elastic behaviour of a model two-phase material // J. Eur. Ceram. Soc. — 2004. — Vol. 24. — P. 3789–3793.

42. *Kurlenya M. V., Oparin V. N., Vostrikov V. I.* Pendulum-type waves. Part II: Experimental methods and main results of physical modeling // J. Min. Sci. — 1996. — Vol. 32. — P. 245–273.

43. *Ayzenberg-Stepanenko M. V., Sher E. N.* Modeling of wave phenomena in periodic structures // Fizicheskaya Mezomekhanika. — 2007. — Vol. 10. — P. 47–57.

44. *Wu H., Fang Q., Zhang Y.-D., Liu J.-C., Gong Z.-M.* Mechanism of pendulum-type wave phenomenon in deep block rock mass // Min. Sci. Technol. — 2009. — Vol. 19. — P. 0699–0708.

45. *Aleksandrova N. I.* Pendulum waves on the surface of block rock mass under dynamic impact // J. Min. Sci. — 2017. — Vol. 53. — P. 59–64.

Поступила в редакцию 26.01.2021

Окончательный вариант поступил 02.05.2022

Received Jan. 26, 2022 (May 2, 2022)

---

*А. Н. Соловьёв<sup>а,б</sup>, До Тхань Бинь<sup>а</sup>, В. А. Чебаненко<sup>в\*</sup>, И. А. Паринов<sup>а</sup>*

<sup>а</sup>Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

<sup>б</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

<sup>в</sup>Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия

## **ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОМПОЗИТНОГО ПЬЕЗОАКТИВНОГО БИМОРФА В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ: ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ<sup>1</sup>**

*A. N. Soloviev, B. T. Do, V. A. Chebanenko\*, I. A. Parinov*

## **FLEXURAL VIBRATIONS OF A COMPOSITE PIEZOACTIVE BIMORPH IN AN ALTERNATING MAGNETIC FIELD: APPLIED THEORY AND FINITE-ELEMENT SIMULATION**

**Keywords:** smart materials, electroelasticity, boundary-value problems, forced vibrations, fixation

An applied theory describing the transverse vibrations of a cantilever bimorph in an alternating magnetic field is presented. The bimorph is made of piezoactive materials, which is a multilayer composite with alternating piezoelectric and piezomagnetic layers. The mechanical and physical properties of such a composite are specified by their effective constants. This theory can serve as a model for energy harvesting devices under the action of an external alternating magnetic field. Within the framework of the theory, quadratic distributions of electric and magnetic potentials over the cantilever thickness are assumed inhomogeneous in its longitudinal direction. The stress-strain state of the bimorph, the distribution of electric and magnetic fields, and its natural frequencies are calculated. In addition, the case where the potential at one of electrodes is unknown is examined. The results of calculations in the low-frequency region are compared with those found by a finite-element model based on a system of partial differential equations built in the COMSOL Multiphysics package. A

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [chebanenko.va@gmail.com](mailto:chebanenko.va@gmail.com)

Corresponding author: [chebanenko.va@gmail.com](mailto:chebanenko.va@gmail.com)

<sup>1</sup>Перевод с англ.

comparison showed a good agreement between the calculated field characteristics and the data of finite-element modeling in the entire area of the bimorph, except in the vicinity of the beam fixation and its free end.

**Ключевые слова:** материалы умные, электроупругость, задачи краевые, колебания вынужденные, закрепление

Представлена прикладная теория, описывающая поперечные колебания кантилеверного биморфа в переменном магнитном поле. Биморф изготовлен из пьезоактивного материала, представляющего собой многослойный композит с чередующимися пьезоэлектрическими и пьезомагнитными слоями. Механические и физические свойства такого композита задаются эффективными константами. Подобная конструкция может служить моделью устройства накопления энергии, находящегося под действием внешнего переменного магнитного поля. В рамках теории приняты квадратичные распределения электрического и магнитного потенциалов по толщине, а также учтены неоднородности в продольном направлении. Проведены расчеты напряженно-деформированного состояния биморфа, распределения электрического и магнитного полей, а также собственных частот. Рассмотрен случай, когда потенциал на одном из электродов неизвестен. Проведено сравнение результатов расчетов в области низких частот с результатами конечно-элементной модели на основе системы уравнений в частных производных, решенной в пакете COMSOL Multiphysics. Сравнение показало хорошее совпадение результатов расчета характеристик поля с данными конечно-элементного моделирования во всей области биморфа, за исключением окрестности заделки и свободного конца.

## Введение

Известно, что пьезоэлектрические материалы широко используют в качестве актуаторов, датчиков и генераторов в машиностроении и аэрокосмической промышленности для контроля конструкций, аккумулирования энергии, активного подавления паразитных колебаний, шумоподавления и т. д. Эти материалы обладают хорошими электромеханическими свойствами, гибкостью в процессе проектирования, простотой изготовления и высокой эффективностью преобразования электрической энергии в механическую и наоборот. При использовании пьезоэлектрических материалов в качестве актуаторов их деформациями можно управлять, изменяя величину приложенного к ним электрического потенциала. В датчиках деформацию измеряют с помощью наведенного потенциала. В области аккумулирования энергии с помощью пьезоэлектрических материалов свободную механическую энергию в конструкциях преобразуют в электри-

ческую энергию, пригодную для питания маломощных устройств. Более подробный обзор приведен в [1, 2].

Типичные актуаторы, датчики и генераторы, подвергаемые изгибу, представляют собой структуру, состоящую из нескольких слоев с разными механическими и электрическими свойствами. Все перечисленные качества позволили создать датчики, встраиваемые в композитные конструкции [3], и актуаторы [4, 5].

Существуют материалы с пьезомагнитными свойствами. Пьезомагнетизм — явление, наблюдаемое в некоторых антиферромагнитных и ферромагнитных кристаллах и характеризующееся линейной зависимостью между магнитной поляризацией системы и механическими деформациями. В пьезомагнитном материале самопроизвольный магнитный момент может быть обусловлен физическим напряжением или физической деформацией, приложенной магнитным полем. Один из наиболее распространенных пьезомагнитных материалов —  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  [6, 7]. Сосуществование пьезоэлектрического и пьезомагнитного эффектов, связанных упругим полем, приводит к возникновению магнитоэлектрического взаимодействия [8]. В связи с этим большой интерес представляет исследование композита на основе  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  и  $\text{BaTiO}_3$ , обладающего одновременно пьезоэлектрическими и пьезомагнитными свойствами [9, 10].

В [11, 12] классические решения задач электроупругости приведены наряду с решениями задач магнитоупругости. В [13] развита прикладная теория колебаний пьезоэлектрических пластин, учитывающая особенности распределения электрического потенциала по толщине конструкции и разрезного электрода. В [14] развита прикладная теория колебаний пьезопреобразователей с неоднородной поляризацией.

В [15] представлены уравнения для трехмерной, ортотропной и магнитоэлектроупругой сред, полученные на основе смешанной постановки задач механики твердого тела, в которой в качестве основных неизвестных приняты не только перемещения, электрический и магнитный потенциалы, но и некоторые напряжения, электрические перемещения и магнитная индукция. В [16] получили точные решения для трехмерных анизотропных линейно-магнитоупругих свободно опертых многослойных прямоугольных пластин при статических нагрузках. В [17] на основе теории балки Тимошенко получено общее аналитическое решение для переходных процессов магнитоэлектроупругого биморфа. В [18] рассмотрены динамические связанные задачи о гармонических колебаниях магнитоэлектроупругого слоя и полупространства под действием вибрационной нагрузки при разных электрических и магнитных условиях на его поверхностях, а также о предварительных напряжениях и их влиянии на дисперсионные свойства. В [19] получены аналитические решения для свободных колебаний трехмерных линейных анизотропных магнитоэлектроупругих многослойных прямоугольных пластин, а также дисперсионные уравнения. На основе полученных уравнений показано, что формы колебаний зависят не только от упругих характеристик материалов, но и от их пьезоэлектрических и

пьезомагнитных свойств. Два последних сильно зависят от характеристик материалов и последовательности их укладки.

Существуют также подходы к исследованию магнитоэлектрoупругих пластин, основанные на методах конечных (МКЭ) [20] и граничных элементов [21].

Ранее авторами была предложена прикладная теория, учитывающая нелинейность распределения электрического потенциала в продольном и поперечном направлениях: исследовали напряженно-деформированное и электрическое состояние шарнирно опертого биморфа [22]. Эта теория продемонстрировала хорошее согласование с результатами конечно-элементного моделирования. Также использовали прикладную теорию колебаний биморфа, состоящего из электрoупругого и магнитоупругого слоев, хорошо согласующуюся с результатами конечно-элементного анализа [23].

В настоящей работе рассмотрены изгибные колебания консольного биморфа из пьезомагнитоэлектрического композита в рамках плоской деформации. В данном подходе использованы квадратичные распределения электрического и магнитного потенциалов по толщине консоли в предположении наличия неоднородности в продольном направлении. На основе полученных уравнений вычислены распределения механического, электрического и магнитного полей, определены собственные частоты колебаний. Результаты расчета сравнены с полученными с помощью конечно-элементной модели на основе системы дифференциальных уравнений в частных производных, построенной посредством программного обеспечения COMSOL Multiphysics.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим плоскую задачу об установившихся изгибных колебаниях биморфной консольной пластины бесконечной ширины (рис. 1). Пластина состоит из двух одинаковых слоев с пьезомагнитоэлектрическими свойствами. Большие поверхности слоев снабжены электродами, а слои поляризованы по толщине. Предполагаем, что слои биморфа имеют идеальное механическое, электрическое и магнитное взаимодействие. Биморф консольно закреплен на левом конце, а остальные поверхности свободны от механических напряжений. На верхней и нижней поверхностях биморфа

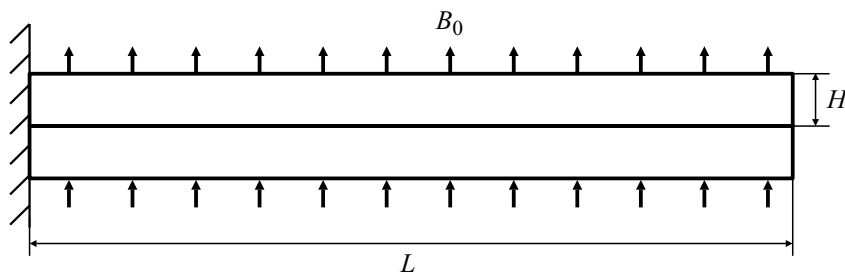


Рис. 1. Пьезоактивный биморф в переменном магнитном поле.

действует магнитный поток  $B_0$ , а на поверхности раздела слоев магнитный потенциал равен нулю. Электрический потенциал на всех электродах равен нулю. Боковые поверхности считаем изолированными от магнитных и электрических полей.

Для описания колебаний данной пластины использовали общие уравнения и уравнения состояния пьезомагнитоупругого тела [24]

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \sigma_{\Omega},\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= 1/2(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \\ \mathbf{E} &= -\nabla \varphi, \\ \mathbf{H} &= -\nabla \xi,\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E} - \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{H}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{e} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{H}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{h} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H},\end{aligned}\tag{3}$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензоры механических напряжений и деформаций соответственно;  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  — векторы электрической индукции и напряженности электрического поля соответственно;  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  — векторы магнитной индукции и напряженности магнитного поля соответственно;  $\rho$  — плотность материала;  $\mathbf{c}$  — тензор модулей упругости;  $\mathbf{e}$  — тензор пьезоэлектрических модулей;  $\mathbf{h}$  — тензор пьезомагнитных модулей;  $\boldsymbol{\epsilon}$  — тензор диэлектрических проницаемостей;  $\boldsymbol{\alpha}$  — тензор магнитоэлектрических модулей;  $\boldsymbol{\mu}$  — тензор магнитных проницаемостей;  $\mathbf{f}$  — вектор плотности массовых сил;  $\sigma_{\Omega}$  — объемная плотность электрических зарядов;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений;  $\varphi$  и  $\xi$  — электрический и магнитный потенциал соответственно.

Следует отметить, что электрическое и магнитное поля можно считать стационарными, поскольку предполагаем, что упругие волны распространяются очень медленно по сравнению с электромагнитными.

Для завершения постановки задачи к этим уравнениям также необходимо добавить граничные и начальные условия. Полное описание общей постановки задачи для пьезомагнитоупругого тела приведено в [24].

## 2. Прикладная теория

Для построения прикладной теории использовали уравнение в вариациях для случая установившихся колебаний [12], обобщенный принцип Гамильтона в теории электроупругости и рассматривали магнитные со-

ставляющие. Для случая плоских деформаций при отсутствии поверхностных и объемных нагрузок, зарядов и наличии магнитного потока  $\tilde{B}$  уравнение в вариациях имеет вид

$$\iint_S \delta \tilde{H} dS - \rho \omega^2 \iint_S u_i \delta u_i dS + \iint_{\partial S} \tilde{B} \delta \xi dl = 0, \quad (4)$$

где  $\delta \tilde{H} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i - B_i \delta H_i$ ;  $S$  — площадь биморфа.

Для дальнейших упрощений приняли гипотезу Кирхгофа, в соответствии с которой  $\sigma_{33} = 0$ ; распределение перемещений по толщине принимает вид

$$u_1(x_1, x_3) = -x_3 w_{,1}, \quad u_3(x_1, x_3) = w(x_1), \quad (5)$$

где  $w(x_1)$  — функция, описывающая прогиб нейтральной оси.

В частности, для механического поля приняли гипотезу единой нормали. Поскольку в задаче электрический потенциал на электродах считали нулевым, его распределение по толщине для первых мод колебаний описывали нелинейной функцией. Конечно-элементный анализ показал [22], что для распределения этого поля по толщине можно использовать квадратичное соотношение

$$\varphi(x_1, \tilde{x}_3) = V_0(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{H} \left( \frac{2\tilde{x}_3}{H} - 1 \right) + V_1(x_1) \left( 1 - \frac{4\tilde{x}_3^2}{H^2} \right) + V_2(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{H} \left( \frac{2\tilde{x}_3}{H} + 1 \right), \quad (6)$$

где  $\tilde{x}_3 = x_3 - H/2$ . Здесь функции  $V_0$ ,  $V_1$  и  $V_2$  отвечают за электрические потенциалы на внутреннем электроде, срединной поверхности и на внешнем электроде соответственно. Функции  $V_0$  и  $V_2$  постоянны, так как задают потенциалы на электродах, а функция  $V_1$  зависит от продольной координаты и учитывает неоднородность потенциала по длине. Для выполнения условий задачи запишем эти функции в виде

$$V_0(x_1) = V_0 = \text{const}, \quad V_1(x_1) = \Phi(x_1), \quad V_2(x_1) = V_2 = \text{const},$$

где  $\Phi(x_1)$  — неизвестная функция.

Магнитный потенциал на внутренней поверхности пьезомагнитного слоя считаем нулевым, а его распределение на внешней поверхности неизвестным. Поэтому удобно использовать распределение магнитного потенциала также в аналогичной форме:

$$\xi(x_1, \tilde{x}_3) = M_0(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{H} \left( \frac{2\tilde{x}_3}{H} - 1 \right) + M_1(x_1) \left( 1 - \frac{4\tilde{x}_3^2}{H^2} \right) + M_2(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{H} \left( \frac{2\tilde{x}_3}{H} + 1 \right),$$

где  $\tilde{x}_3 = x_3 - H/2$ . Здесь функции  $M_0$ ,  $M_1$  и  $M_2$  ответственны за магнитные потенциалы на внутренней, срединной и внешней поверхностях соответственно. Для выполнения условий задачи эти функции приняли в виде

$$M_0(x_1) = M_0 = \text{const}, \quad M_1(x_1) = \Xi_2(x_1), \quad M_2(x_1) = \Xi_3(x_1),$$

где  $\Xi_2(x_1)$  и  $\Xi_3(x_1)$  — неизвестные функции.

После варьирования уравнения (4) и интегрирования по толщине биморфа коэффициенты при независимых вариациях  $\delta w$ ,  $\delta \Phi$ ,  $\delta \Xi_2$  и  $\delta \Xi_3$  приравняли к нулю. Это привело к системе четырех дифференциальных уравнений и пяти граничных условий с четырьмя неизвестными функциями, зависящими от  $x_1$ . Далее будем опускать  $x_1$  для упрощения записи.

На основе коэффициента для независимой вариации  $\delta w$  получили уравнение

$$\frac{4\tilde{e}_{31}H}{3}\Phi'' + \frac{\tilde{h}_{31}H}{3}(4\Xi_2'' - \Xi_3'') - \frac{2\rho\omega^2 H^3}{3}w'' + 2\omega^2 \rho Hw + \frac{2H^3\tilde{c}_{11}}{3}w^{(4)} = 0.$$

Также из условия равенства нулю внеинтегральных членов в вариационном уравнении вывели два естественных краевых условия:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{e}_{31}H}{3}(V_0 - 5V_2 + 4\Phi) + \frac{\tilde{h}_{31}H}{3}(4\Xi_2 - 5\Xi_3 + M_0) + \frac{2H^3\tilde{c}_{11}}{3}w'' &= 0, \\ -\frac{4\tilde{e}_{31}}{3}\Phi' - \frac{\tilde{h}_{31}H}{3}(4\Xi_2' - 5\Xi_3') - \frac{2H^3\tilde{c}_{11}}{3}w''' + \frac{2\rho\omega^2 H^3}{3}w' &= 0. \end{aligned}$$

Первое условие описывает случай, когда изгибающий момент равен нулю, а второе — поперечную силу. Эти условия наложили на правый свободный конец биморфа. На левом конце использовали условия закрепления: перемещение  $w = 0$  и угол поворота  $w' = 0$ .

Уравнение, возникающее при вариации  $\delta \Phi$ , приняло вид

$$\begin{aligned} \frac{16\tilde{\epsilon}_{33}}{3H}(V_0 + V_2 - 2\Phi) + \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H}(-2\Xi_2 + \Xi_3 + M_0) - \\ - \frac{16\epsilon_{11}H}{15}\Phi'' - \frac{2\alpha_{11}H}{15}(8\Xi_2'' + \Xi_3'') - \frac{4\tilde{e}_{31}H}{3}w'' &= 0. \end{aligned}$$

Оно имеет одно естественное граничное условие, наложенное на оба конца балки:

$$\frac{16\epsilon_{11}H}{15}\Phi' + \frac{16\alpha_{11}H}{15}\Xi_2' + \frac{2\alpha_{11}H}{15}\Xi_3' = 0. \quad (7)$$

Магнитный потенциал зависит от двух неизвестных функций; поэтому после их варьирования получили два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H}(V_0 + V_2 - 2\Phi) + \frac{16\tilde{\mu}_{33}}{3H}(-2\Xi_2 + \Xi_3 + M_0) - \\ - \frac{16\alpha_{11}H}{15}\Phi'' - \frac{2\mu_{11}H}{15}(8\Xi_2'' + \Xi_3'') - \frac{4\tilde{h}_{31}H}{3}w'' &= 0, \end{aligned}$$



$$-\frac{2\tilde{\alpha}_{33}}{3H}(V_0 + 7V_2 - 8\Phi) + \frac{2\tilde{\mu}_{33}}{3H}(8\Xi_2 - 7\Xi_3 - M_0) - \\ - \frac{2\alpha_{11}H}{15}\Phi'' - \frac{2\mu_{11}H}{15}(\Xi_2'' + 2\Xi_3'') + \frac{5\tilde{h}_{31}H}{3}w'' - 2B_0 = 0.$$

Для неизвестных  $\Xi_2(x_1)$  и  $\Xi_3(x_1)$  получили два естественных краевых условия:

$$\frac{16\alpha_{11}H}{15}\frac{d}{dx}\Phi(x) + \frac{16\mu_{11}H}{15}\frac{d}{dx}\Xi_2(x) + \frac{2\mu_{11}H}{15}\frac{d}{dx}\Xi_3(x) = 0, \\ \frac{2\alpha_{11}H}{15}\frac{d}{dx}\Phi(x) + \frac{2\mu_{11}H}{15}\frac{d}{dx}\Xi_2(x) + \frac{4\mu_{11}H}{15}\frac{d}{dx}\Xi_3(x) = 0,$$

которые также наложили на оба конца биморфа.

В приведенных уравнениях и граничных условиях ввели следующие обозначения:

$$\tilde{c}_{11} = c_{11} - c_{13}^2 / c_{33}, \quad \tilde{e}_{31} = e_{31} - c_{13}e_{33} / c_{33}, \quad \tilde{h}_{31} = h_{31} - c_{13}h_{33} / c_{33}, \\ \tilde{\alpha}_{33} = -\alpha_{33} - e_{33}h_{33} / c_{33}, \quad \tilde{\epsilon}_{33} = -\epsilon_{33} - e_{33}^2 / c_{33}.$$

Они возникли, когда для принятой гипотезы Кирхгофа выполнили условие  $\sigma_{33} = 0$  и исключили компоненту деформации  $\epsilon_{33}$ .

### 3. Численный эксперимент

Для проверки полученной теории использовали конечно-элементное программное обеспечение COMSOL Multiphysics. В COMSOL нет модуля магнитоэлектрорупругости, но оно позволяет решать уравнения в частных производных общего вида. Для этого общие уравнения (1) и уравнения состояния (2) преобразовали путем подстановки в них вектора перемещений в виде

$$\mathbf{u} = (u(x, z), 0, w(x, z)).$$

Здесь  $u(x, z)$  и  $w(x, z)$  — компоненты вектора перемещений вдоль осей  $x$  и  $z$  соответственно. Таким образом, осуществили переход к плоской задаче. Затем основные уравнения и уравнения состояния преобразовали к виду

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} = -\rho\omega^2 u, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = -\rho\omega^2 w, \\ \frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_3}{\partial z} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_3}{\partial z} = 0, \\
 & \sigma_{11} = C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial w}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + h_{31} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \\
 & \sigma_{13} = \frac{C_{44}}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + h_{15} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\
 & \sigma_{33} = C_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial w}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + h_{33} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \\
 & D_1 = \frac{e_{15}}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \epsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \alpha_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\
 & D_3 = e_{31} \frac{\partial u}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial w}{\partial z} - \epsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \alpha_{33} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \\
 & B_1 = h_{15} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \alpha_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mu_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\
 & B_3 = h_{31} \frac{\partial u}{\partial x} + h_{33} \frac{\partial w}{\partial z} - \alpha_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu_{33} \frac{\partial \xi}{\partial z},
 \end{aligned} \tag{8}$$

где  $\omega$  — круговая частота.

Для сравнения согласованности результатов, получаемых с помощью предлагаемой прикладной теории и конечно-элементной модели, рассмотрели биморф длиной  $L = 10$  мм с толщиной одного слоя  $H = 0,6$  мм. Пьезоактивные слои представляли собой композиты с чередующимися пьезоэлектрическими и пьезомагнитными слоями. Механические и физические свойства этого композита задали эффективными постоянными, значения которых взяты из [10]. В качестве основного материала выбрали композит, состоящий из 20%  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  и 80%  $\text{BaTiO}_3$ , постоянные кото-

Табл. 1

Свойства материала

Постоянная	Значение	Постоянная	Значение	Постоянная	Значение
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	5847	$e_{31}$ , К/м <sup>2</sup>	−0,2	$\alpha_{33}$ , нН·с/(В·К)	235
$c_{11}^E$ , ГПа	185	$e_{33}$ , К/м <sup>2</sup>	0,5	$h_{31}$ , Н/(А·м)	15
$c_{12}^E$ , ГПа	90	$e_{15}$ , К/м <sup>2</sup>	8,8	$h_{33}$ , Н/(А·м)	−6
$c_{13}^E$ , ГПа	72	$\epsilon_{11}$ , нФ/м	9,4	$\mu_{11}$ , мН·с <sup>2</sup> /К <sup>2</sup>	12,5
$c_{33}^E$ , ГПа	200	$\epsilon_{33}$ , нФ/м	30	$\mu_{33}$ , мН·с <sup>2</sup> /К <sup>2</sup>	200
$c_{44}^E$ , ГПа	39	$\alpha_{11}$ , нН·с/(В·К)	−0,23		

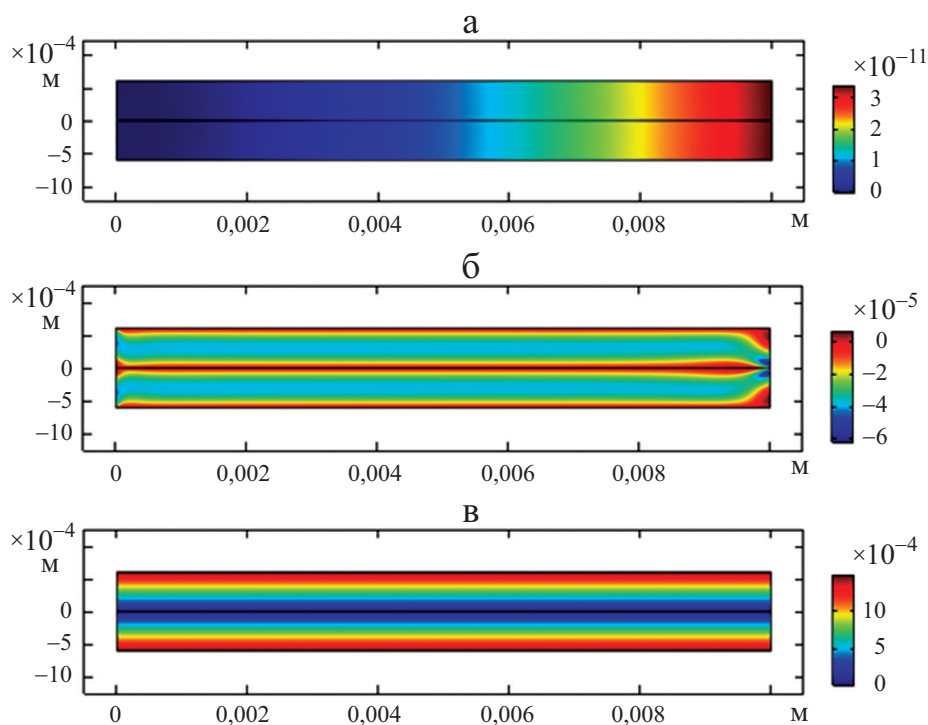


Рис. 2. Результаты, полученные МКЭ: распределения перемещения  $w$  (а), электрического  $\varphi$  (б) и магнитного  $\xi$  (в) потенциалов в биморфе.

рого приведены в табл. 1. Биморф возбуждали магнитным потоком  $B_0 = 5$  мкВб с частотой  $f = 1$  кГц.

На рис. 2 представлены двухмерные распределения перемещения  $w$ , электрического  $\varphi$  и магнитного  $\xi$  потенциалов. Из данных рис. 2—б видно, что распределение электрического потенциала по толщине слоя нелинейное, а по длине практически постоянное, за исключением областей вблизи закрепления консоли и её свободного конца. Данные рис. 2—в свидетельствуют о том, что распределение магнитного потенциала биморфа линейное по толщине и постоянное по длине.

Теперь сравним результаты расчетов, полученных с помощью используемой теории и конечно-элементного анализа. Краевую задачу, основанную на прикладной теории, решали численными методами. На рис. 3—5 представлены распределения перемещения  $w$ , электрического  $\varphi$  и магнитного  $\xi$  потенциалов по толщине и длине биморфа.

На основании распределения перемещения на рис. 3 можно сделать вывод о том, что представленная прикладная теория достаточно точно описывает прогиб исследуемого биморфа.

На рис. 4—а показано распределение электрического потенциала по середине верхнего слоя ( $z = H/2$ ) биморфа. Распределение, рассчитанное по прикладной теории, имеет линейный характер, а посредством конеч-

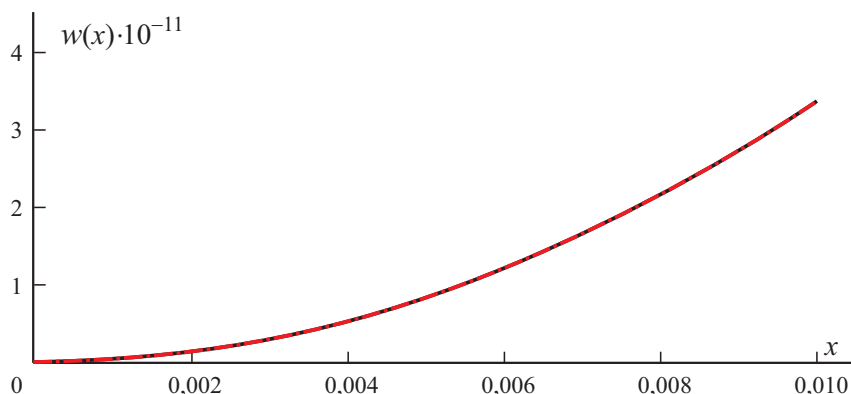


Рис. 3. Сравнение распределений прогиба по длине биморфа, рассчитанных по прикладной теории (—) и МКЭ (- · -).

но-элементного анализа — ярко выраженный нелинейный характер в области закрепления биморфа балки и его свободного конца (см. также рис. 2—б). В средней части биморфа прикладная теория с достаточной степенью точности описывает поведение электрического потенциала. В области закрепления погрешность достигает 5%, а на свободном конце — 25%. Это несоответствие, скорее всего, обусловлено формулировкой граничных условий в прикладной теории, поскольку в силу введенной гипотезы Кирхгофа (5) компоненты, связанные со сдвигом (6), исчезают из граничных условий, при том что в программе COMSOL при формировании условий нулевого потока эти составляющие сохраняются. Анализ размера области этого несоответствия в зависимости от относительной толщины биморфа показал, что его размер порядка толщины биморфа. Следует отметить, что упомянутое различие значений электрического потенциала на концах биморфа становилось незначительным, если на внешнем элект-

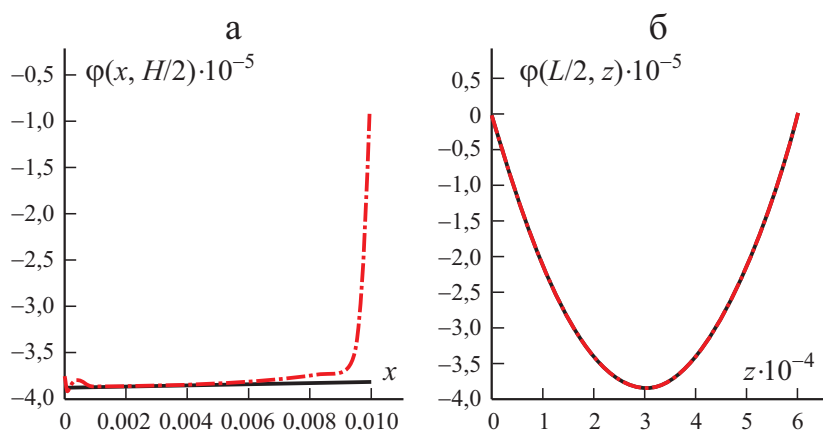


Рис. 4. Распределение электрического потенциала по длине (а) и толщине (б) в середине верхнего слоя биморфа по прикладной теории (—) и МКЭ (- · -).

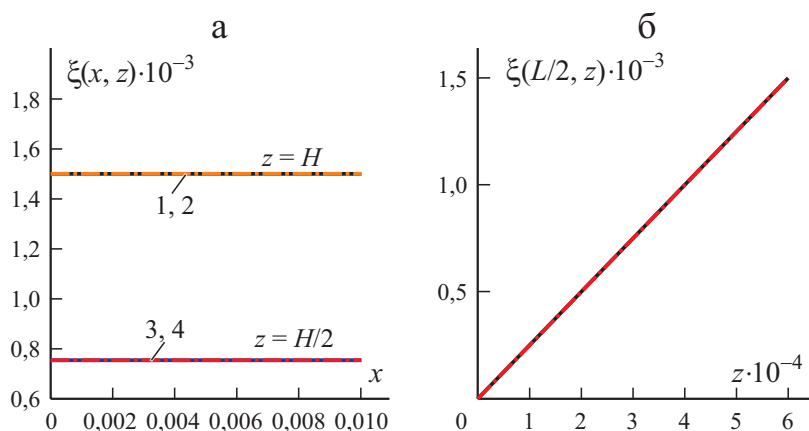


Рис. 5. То же для магнитного потенциала: 1, 3 — теория; 2, 4 — МКЭ.

роде задавали ненулевой электрический потенциал, величина которого заметно влияла на напряженно-деформированное состояние биморфа.

Из данных рис. 4—б следует, что распределение потенциала в середине биморфа ( $x = L/2$ ) как функция толщины верхнего слоя квадратично, что хорошо описывается предложенной теорией.

На основании данных рис. 5 можно сделать вывод о линейном распределении магнитного потенциала по толщине биморфа и его постоянном значении по длине слоя с магнитным потоком, не зависящим от продольной координаты. На рис. 5—а показаны распределения потенциала вдоль срединного слоя ( $z = H/2$ ) и верхней границы ( $z = H$ ), соответствующие функциям  $\Xi_2(x)$  и  $\Xi_3(x)$ . Анализ данных рис. 5—а и 5—б позволяет сделать вывод о том, что магнитный потенциал с достаточной степенью точности описывается предложенной теорией.

Далее рассмотрим случай, когда электрический потенциал  $V_2$  на внешних электродах неизвестен. Такие задачи типичны для пьезоэлектрических элементов, действующих как датчики или пьезоэлектрические генераторы для аккумулирования энергии. Для решения такой задачи необходимо ввести дополнительное условие

$$\iint_{\partial S} D_3 dl = I,$$

из которого можно определить значение электрического потенциала. Здесь  $I$  — электрический ток во внешней электрической цепи,  $\partial S$  — площадь электрода. Если электрод свободен, то  $I = 0$ .

В результате оказалось, что по данным конечно-элементного расчета электрический потенциал равен 0,113 мВ, а по прикладной теории — 0,111 мВ, что соответствует погрешности 1,7%.

Анализ данных рис. 6—а показывает, что характер продольного распределения электрического потенциала аналогичен показанному на рис. 4—а, а прикладная теория описывает поведение электрического потенциала с

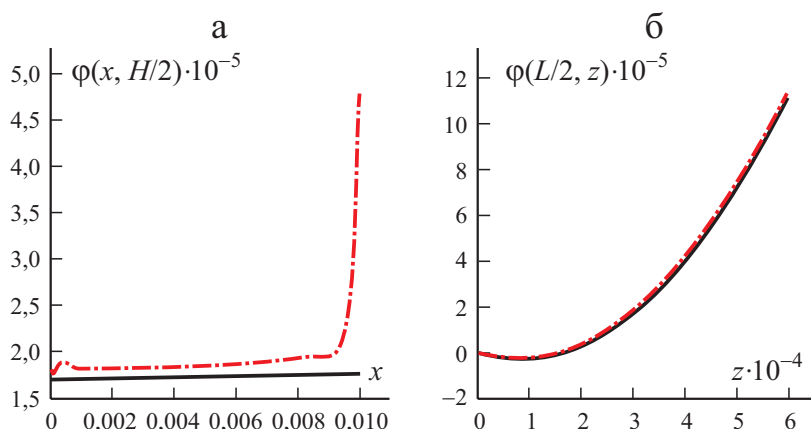


Рис. 6. Распределение электрического потенциала по длине (а) и толщине (б) в середине верхнего слоя биморфа по прикладной теории (—) и МКЭ (- · -).

некоторой погрешностью. Из данных рис. 6—б следует, что поперечное распределение электрического потенциала имеет ярко выраженный нелинейный характер, адекватно описываемый принятой в прикладной теории квадратичной формой электрического потенциала (6).

В заключение сравним собственные частоты, определенные посредством прикладной теории и МКЭ. Результаты для первых трех форм изгибных колебаний, представленные в табл. 2, свидетельствуют об их хорошем согласовании.

Проведенные численные исследования позволяют сделать вывод о том, что расчет основных характеристик композитного пьезомагнитоэлектрического биморфа по предложенной прикладной теории дает достаточно точные результаты, хорошо согласующиеся с данными конечно-элементного анализа. Погрешность не превышает 1%. Исключением является распределение электрического потенциала при нулевых значениях на электродах в районе закрепления консоли и её свободного конца.

Табл. 2

Собственные частоты, кГц

Мода	Прикладная теория	МКЭ	Ошибка, %
1	10,06	9,96	1
2	62,04	57,63	7,6
3	169,39	146,2	15,8

## Заключение

Предложена прикладная теория расчета поперечных колебаний биморфа, состоящего из двух слоев композита на основе  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  и  $\text{BaTiO}_3$ , обладающего одновременно пьезоэлектрическими и пьезомагнитными свойствами в переменном магнитном поле. Эта теория может служить моделью для пьезоэлектрического устройства аккумулирования энергии под действием внешнего магнитного поля. Определены напряженно-деформированное состояние биморфа, распределения электрического и магнитного полей и собственные частоты. Для проверки прикладной теории на основе системы уравнений в частных производных построили двухмерную конечно-элементную модель с помощью программного обеспечения COMSOL Multiphysics. Сравнение результатов расчетов биморфа по предложенной теории и МКЭ показало, что ошибки определения характеристик механического и магнитного полей — менее 1%. Однако при определении потенциала электрического поля различие составило ~ 5% в области закрепления консоли и 25% — на её свободном конце. Расчеты собственных частот показали, что первые три формы изгибных колебаний можно определить с приемлемой точностью.

Принятое в настоящей работе квадратичное распределение электрического и магнитного потенциалов по толщине композита продемонстрировало хорошее согласование результатов, полученных посредством прикладной теории и МКЭ, во всей области биморфа, кроме области его закрепления и свободного конца. Анализ показал, что размер области этого несоответствия в зависимости от относительной толщины биморфа порядка его толщины. Значения выходного потенциала, рассчитанные по предложенной теории и МКЭ, отличались на 1,7%. Таким образом, предложенная прикладная теория позволяет точно определить характеристики устройств аккумулирования энергии на основе рассмотренного биморфа.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 21-19-00423 в Южном федеральном университете.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gaudenzi P. Smart Structures: Physical Behaviour, Mathematical Modelling and Applications.* — N. Y. — Chichester—Brisbane—Toronto: John Wiley & Sons, 2009.
2. *Qader I. N., Kok M., Dagdelen F., and Aydogdu Y. A review of smart materials: researches and applications // El-Cezeri J. Sci. Eng.* — 2019. — Vol. 6, No. 3. — P. 755—788.
3. *Janeliukstis R. and Mironovs D. Smart composite structures with embedded sensors for load and damage monitoring. A review // Mech. Compos. Mater.* — 2021. — Vol. 57, No. 2. — P. 131—152.
4. *Plotnikova S. V. and Kulikov G. M. Shape control of composite plates with distributed piezoelectric actuators in a three-dimensional formulation // Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 56, No. 5. — P. 557—572.

5. Kovalovs A., Barkanov E., Rucevskis S., and Wesolowski M. Modeling and design of a full-scale rotor blade with embedded piezocomposite actuators // *Mech. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 53, No. 2. — P. 179—192.
6. Amrillah T., Hermawan A., Wulandari C. P., Muthi'Ah A. D., and Simanjuntak F. M. Crafting the multiferroic  $\text{BiFeO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$  nanocomposite for next-generation devices: A review // *Mater. Manufacturing Processes.* — 2021. — Vol. 36, No. 14. — P.1579—1596.
7. Lamouri R., Mounkachi O., Salmani E., Hamedoun M., Benyoussef A., and Ez-Zahraouy H. Size effect on the magnetic properties of  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  nanoparticles: a Monte Carlo study // *Ceramics Int.* — 2020. — Vol. 46, No. 6. — P. 8092—8096.
8. Fiebig M. Revival of the magnetoelectric effect // *J. Phys. D: Appl. Phys.* — 2005. — Vol. 38, No. 8. — P. R123—R152.
9. Siva K. V., Kaviraj P., and Arockiarajan A. Improved room temperature magneto-electric response in  $\text{CoFe}_2\text{O}_4\text{-BaTiO}_3$  core shell and bipolar magnetostrictive properties in  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  // *Materials Lett.* — 2020. — Vol. 268. — P. 127623.
10. Challagulla K. S. and Georgiades A. V. Micromechanical analysis of magneto-electro-thermo-elastic composite materials with applications to multilayered structures // *Int. J. Eng. Sci.* — 2011. — Vol. 49, No. 1. — P. 85—104.
11. Novatskiy V. and Shachnev V. A. *Electromagnetic Effects in Solids.* — Moscow: Mir, 1986 [in Russian].
12. Parton V. Z. and Kudryavtsev B. A. *Electromagnetoelasticity of Piezoelectric and Electroconductive Bodies.* — Moscow: Nauka, 1988 [in Russian].
13. Vatul'yan A. O. and Rynkova A. A. Flexural vibrations of a piezoelectric bimorph with a cut internal electrode // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* — 2001. — Vol. 42, No. 1. — P. 164—168.
14. Soloviev A. N., Oganessian P. A., Lupeiko T. G., Kirillova E. V., Chang S. H., and Yang C. D. /Ed. I. A. Parinov // *Advanced Materials. Chap. 46. Modeling of Non-Uniform Polarization for Multi-Layered Piezoelectric Transducer for Energy Harvesting Devices.* — Heidelberg: Springer, 2016. — P. 651—658.
15. Wang J. G., Chen L. F., and Fang S. State vector approach to analysis of multilayered magneto-electro-elastic plates // *Int. J. Solids Struct.* — 2003. — Vol. 40, No. 7. — P. 1669—1680.
16. Pan E. Exact solution for simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates // *J. Appl. Mech.* — 2001. — Vol. 68, No. 4. — P. 608—618.
17. Milazzo A., Orlando C., and Alaimo A. An analytical solution for the magneto-electro-elastic bimorph beam forced vibrations problem // *Smart Mater. Struct.* — 2009. — Vol. 18, No. 8. — P. 085012.
18. Levi M. O. and Kalinchuk V. V. Some features of the dynamics of electro-magneto-elastic half-space with initial deformations // *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)* — IEEE, Omsk, 2017. — P. 1—5.
19. Pan E. and Heyliger P. R. Free vibrations of simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates // *J. Sound Vib.* — 2002. — Vol. 252, No. 3. — P. 429—442.
20. Annigeri A. R., Ganesan N., and Swarnamani S. Free vibration behaviour of multiphase and layered magneto-electro-elastic beam // *J. Sound Vib.* — 2007. — Vol. 299, Nos. 1—2. — P. 44—63.
21. Milazzo A., Benedetti I., and Orlando C. Boundary element method for magneto electro elastic laminates // *Comput. Model. Eng. Sci.* — 2006. — Vol. 15. — P. 17—3.
22. Soloviev A. N., Chebanenko V. A., Parinov I. A., and Oganessian P. A. Applied theory of bending vibrations of a piezoelectric bimorph with a quadratic electric potential distribution // *Mater. Phys. Mech.* — 2019. — Vol. 42, No. 1. — P. 65—73.



23. Binh D. T., Chebanenko V. A., Duong L. V., Kirillova E., Thang P. M., and Soloviev A. N. Applied theory of bending vibration of the piezoelectric and piezomagnetic bimorph // J. Adv. Dielectrics. — 2020. — Vol. 10, No. 3. — P. 2050007.

24. Kurbatova N. V., Nadolin D. K., Nasedkin A. V., Oganesyan P. A., and Soloviev A. N. / Eds. H. Altenbach, E. Carrera, G. Kulikov // Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems. Advanced Structured Materials, Finite Element Approach for Composite Magneto-Piezoelectric Materials Modeling in ACELAN-COMPOS Package. — Singapore: Springer, 2018. — P. 69—88.

Поступила в редакцию 09.12.2021

Окончательный вариант поступил 30.04.2022

Received Dec. 9, 2021 (Apr. 30, 2022)

---

*С. Д. Акбаров<sup>a,\*</sup>, М. Й. Анвар<sup>b</sup>, З. Кутюг<sup>b</sup>*

*<sup>a</sup>Faculty of Mechanical Engineering, Yildiz Technical University, 34349, Istanbul, Turkey*

*<sup>b</sup>Department of Civil Engineering, Yildiz Technical University, 34220, Istanbul, Turkey*

*<sup>c</sup>Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan*

## **ТРЕХМЕРНАЯ НЕОСЕССИМЕТРИЧНАЯ ЛОКАЛЬНАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ИЗ АНИЗОТРОПНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА<sup>1</sup>**

*S. D. Akbarov\*, M. Y. Anwar, and Z. Kutüg*

### **3D NONAXISYMMETRIC LOCAL STABILITY LOSS OF A HOLLOW CYLINDER MADE OF AN ANISOTROPIC VISCOELASTIC MATERIAL**

**Keywords:** viscoelasticity, cylindrical shell, nonaxisymmetric stability, buckling

The 3D nonaxisymmetric local stability loss problem is studied for a hollow cylinder, made of a viscoelastic composite material, under the axial compression. The criterion of an infinitesimal initial imperfection is employed, and the evolution of this imperfection is investigated by 3D geometrically nonlinear exact equations of viscoelasticity theory. The corresponding nonlinear problem is solved by the boundary perturbation method. The material of the cylinder is modeled as a viscoelastic transversely isotropic medium. Numerical results for the critical time and critical compressive forces are presented, discussed, and compared with those obtained by approximate shell theories.

**Ключевые слова:** вязкоупругость, оболочка цилиндрическая, устойчивость неосесимметричная, потеря устойчивости

Изучена трехмерная неосесимметричная задача локальной потери устойчивости полого цилиндра из вязкоупругого композитного материала при осевом сжатии. Использован критерий бесконечно малого начального несовершенства, эволюцию которого исследовали с помощью трехмерных геометрически

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [akbarov@yildiz.edu.tr](mailto:akbarov@yildiz.edu.tr)

Corresponding author: [akbarov@yildiz.edu.tr](mailto:akbarov@yildiz.edu.tr)

<sup>1</sup>Перевод с англ.

нелинейных точных уравнений теории вязкоупругости. Соответствующую нелинейную задачу решали методом краевых возмущений. Материал цилиндра моделировали как вязкоупругую трансверсально-изотропную среду. Численные результаты для критического времени и критических сжимающих сил обсуждены и сопоставлены с полученными с помощью приближенных теорий оболочек.

## Введение

Во многих случаях анализ проблем потери устойчивости конструктивных элементов из композитных материалов требует применения трехмерной линеаризованной теории устойчивости (ТЛТУ), для получения уравнений и соотношений которой нелинейные уравнения механики деформируемого твердого тела подвергают процедуре линеаризации [1—3]. Термин “общая теория устойчивости”, используемый в [2, 4, 5], — другое обозначение ТЛТУ. Основные вклады в разработку и применение ТЛТУ при решении разных задач устойчивости конструктивных элементов из композитных материалов описаны в [6, 7].

Из научной литературы следует, что в течение XX века ТЛТУ использовали в основном при решении задач потери устойчивости элементов, изготовленных из материалов со свойствами, не зависящими от времени. В этих исследованиях применяли бифуркационный (Эйлеров) подход. Однако было установлено, что подход Эйлера не пригоден для решения этих задач при действии статических нагрузок на конструктивные элементы, изготовленные из материалов со свойствами, зависящими от времени. Поэтому в работах, перечисленных в [6, 7], предложили использовать метод критической деформации [8] для изучения подобных задач в рамках ТЛТУ.

В этом методе предполагают, что критические деформации чисто упругого и соответствующего вязкоупругого элементов идентичны. Поэтому, исходя из результатов задачи чисто упругой устойчивости, критическое время вычисляют по соответствующим уравнениям состояния для вязкоупругого случая. Ограничение метода заключается в том, что этот метод — грубый и его можно применять в случаях с однородным докритическим напряженным состоянием. Наиболее часто используемый и надежный подход к решению задач потери устойчивости для материалов со свойствами, зависящими от времени, основан на оценке незначительных начальных несовершенств [9] в элементах конструкции, растущих со временем под действием фиксированных приложенных извне статических сжимающих сил.

До последнего десятилетия XX века подход, учитывающий рост начальных бесконечно малых несовершенств, не изучали в рамках ТЛТУ. Этот подход предложен и развит в [10] для исследования не только потери устойчивости конструктивных элементов, но и потери устойчивости конструкций из композитных вязкоупругих материалов. Позже этот метод

применяли при решении задач потери устойчивости элементов конструкций и потери внутренней устойчивости однонаправленных волокнисто-армированных и слоистых вязкоупругих композитов. Обзоры этих исследований приведены в [11, 12], а также в монографии [13].

В настоящей работе представлен более подробный обзор применения ТЛТУ для исследования потери устойчивости цилиндров из вязкоупругого трансверсально-изотропного материала. Первую попытку в этой области для полых и сплошных цилиндров из вязкоупругих трансверсально-изотропных материалов предприняли в [14] и [15] соответственно. Осесимметричную локальную потерю устойчивости полого цилиндра из трансверсально-изотропного материала изучали в [16], где получили численные результаты для цилиндров, состоящих из упругих волокон в вязкоупругой матрице, ориентированных в направлении оси цилиндра. На основе подхода сплошной среды материал цилиндра моделировали как вязкоупругую трансверсально-изотропную среду.

Из приведенного краткого обзора литературы следует, что, насколько известно авторам, исследования неосесимметричной локальной потери устойчивости полых цилиндров (или цилиндрических оболочек) из вязкоупругого композитного материала в рамках подхода ТЛТУ не проводили. Результаты таких исследований имели бы не только теоретическое, но и практическое значение, и их можно было бы использовать в качестве ориентиров для результатов, полученных в рамках разных приближенных теорий оболочек.

В настоящей работе рассмотрена трехмерная неосесимметричная локальная потеря устойчивости полого цилиндра (или цилиндрической оболочки) из вязкоупругих композитных материалов. Подходы, предложенные в [14—16], развиваются и применяются к рассматриваемым случаям. Численные результаты для критического времени обсуждены и сопоставлены с полученными не только в рамках трехмерного подхода, но и теории Кирхгофа—Лява и уточненных теорий оболочек третьего порядка.

Отметим, что в целом соответствующие исследования представляют не только большой теоретический, но и практический интерес. В настоящее время их интенсивно развивают в рамках разных приближенных теорий оболочек (см., например, [17, 18]).

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим полый цилиндр длиной  $\ell$  (рис. 1), связанный с декартовой  $Ox_1x_2x_3$  и цилиндрической  $O\theta z$  системами координат. Местоположения точек этого цилиндра определяют координаты Лагранжа. Срединная поверхность цилиндра имеет начальное бесконечно малое неосесимметричное несовершенство, а толщина стенок цилиндра постоянна. Под термином “толщина” стенки цилиндра понимаем расстояние между точками внутренней и внешней поверхностей цилиндра, расположенных на одной

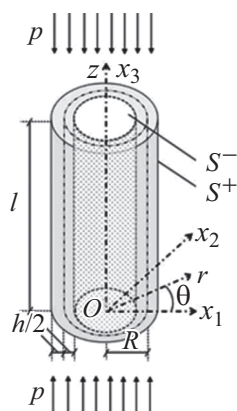


Рис. 1. Геометрия рассматриваемого полого цилиндра.

нормали к его срединной поверхности. Согласно этим предположениям срединную поверхность цилиндра можно описать уравнением

$$r = R + \varepsilon F(\theta, z), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq \ell, \quad (1)$$

где  $\varepsilon \ll 1$  — бесконечно малый параметр начального несовершенства;  $F(\theta, z)$  — гладкая функция координат  $\theta$  и  $z$ .

Предположим, что материал цилиндра — наследственно-вязкоупругий и трансверсально-изотропный с осью симметрии  $Oz$ ; на концах цилиндра  $z=0$  и  $z=\ell$  действуют равномерно распределенные сжимающие силы интенсивностью  $p$ .

Учитывая эти предположения, попытаемся исследовать эволюцию во времени бесконечно малого несовершенства цилиндра. Время, по достижении которого это несовершенство начнет бесконечно возрастать, будем считать критическим. Исследуем квазистатическое равновесие цилиндра под действием сжимающих сил на его концах в рамках трехмерных геометрических нелинейных точных уравнений и соотношений теории линейной вязкоупругости для анизотропных тел. Искомые величины разложим в степенной ряд по малому параметру  $\varepsilon$  и соответствующие уравнения и граничные условия найдем отдельно для каждого приближения. Для получения граничных условий на боковых внутренней и внешней поверхностях цилиндра применим метод краевых возмущений, используя ряды для искомых величин.

Таким образом, как показано в монографии [13] и перечисленных там источниках, для определения критического времени или критической силы для соответствующей задачи потери устойчивости достаточно знать только величины, относящиеся к нулевому и первому приближениям. Таким образом, исследование неосесимметричной локальной потери устойчивости полого цилиндра сводится к решению следующих краевых задач.

Уравнения равновесия для первого приближения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(1)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}) + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(1)}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(1)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения состояния имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)} &= A_{11}^* \varepsilon_{rr}^{(1)} + A_{12}^* \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} + A_{13}^* \varepsilon_{zz}^{(1)}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} &= A_{12}^* \varepsilon_{rr}^{(1)} + A_{11}^* \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} + A_{13}^* \varepsilon_{zz}^{(1)}, \quad \sigma_{\theta z}^{(1)} = 2G^* \varepsilon_{\theta z}^{(1)}, \\ \sigma_{zz}^{(1)} &= A_{13}^* \varepsilon_{rr}^{(1)} + A_{13}^* \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} + A_{33}^* \varepsilon_{zz}^{(1)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = (A_{11}^* - A_{12}^*) \varepsilon_{r\theta}^{(1)}, \quad \sigma_{rz}^{(1)} = 2G^* \varepsilon_{rz}^{(1)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $A_{ij}^*$  и  $G^*$  — операторы:

$$\left\{ A_{ij}^* \right\} \phi(t) = \left\{ A_{ij0} \right\} \phi(t) + \int_0^t \left\{ A_{ij1}(t-\tau) \right\} \phi(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Соотношения между деформациями и перемещениями имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(1)} &= \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(1)}}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta^{(1)}}{r} \right), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{\theta z}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z^{(1)}}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{r \partial \theta} + \frac{u_r^{(1)}}{r}, \quad \varepsilon_{zz}^{(1)} = \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно методу краевых возмущений дополним эту систему уравнений граничными условиями на боковой поверхности цилиндра

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)}(R \pm h/2, \theta, t_3, t) &= 0, \quad \sigma_{rz}^{(1)}(R \pm h/2, \theta, t_3, t) = \mp \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial F}{\partial t_3}, \\ \sigma_{r\theta}^{(1)}(R \pm h/2, \theta, t_3, t) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

и его концах

$$u_r^{(1)}(r, \theta, t_3, t) \Big|_{t_3=0; \ell} = 0, \left( \sigma_{zz}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} \right) \Big|_{t_3=0; \ell} = 0, \quad (7)$$

$$u_\theta^{(1)}(r, \theta, t_3, t) \Big|_{t_3=0; \ell} = 0.$$

Напряжение  $\sigma_{zz}^{(0)}$  в уравнениях (2) и соотношениях (6) и (7) относится к нулевому приближению и определяется как  $\sigma_{zz}^{(0)} = -p$ . Это завершает постановку задачи о неосесимметричной потере устойчивости полого цилиндра из вязкоупругих композитных материалов.

## 2. Метод решения

Для решения поставленной задачи сначала применим преобразование Лапласа

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad (8)$$

с  $s > 0$  к уравнениям (2), (3), (5) и граничным условиям (6) и (7). Используя операторы (4) и теорему о свертке, изображение Лапласа для уравнений состояния (3) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr}^{(1)} &= \bar{A}_{11}^* \bar{\varepsilon}_{rr}^{(1)} + \bar{A}_{12}^* \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(1)} + \bar{A}_{13}^* \bar{\varepsilon}_{zz}^{(1)}, \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)} = \bar{A}_{12}^* \bar{\varepsilon}_{rr}^{(1)} + \bar{A}_{11}^* \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(1)} + \bar{A}_{13}^* \bar{\varepsilon}_{zz}^{(1)}, \\ \bar{\sigma}_{\theta z}^{(1)} &= 2\bar{G}^* \bar{\varepsilon}_{\theta z}^{(1)}, \quad \bar{\sigma}_{zz}^{(1)} = \bar{A}_{13}^* \bar{\varepsilon}_{rr}^{(1)} + \bar{A}_{13}^* \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(1)} + \bar{A}_{33}^* \bar{\varepsilon}_{zz}^{(1)}, \\ \bar{\sigma}_{r\theta}^{(1)} &= (\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*) \bar{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)}, \quad \bar{\sigma}_{rz}^{(1)} = 2\bar{G}^* \bar{\varepsilon}_{rz}^{(1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения (2), граничные условия (6) и (7) и соотношения (5) для соответствующих величин изображений Лапласа остаются в силе.

Таким образом, получаем полную систему уравнений (2), (5), (9) и граничные условия (6) и (7) в пространстве параметра  $s$  преобразования Лапласа для определения изображений Лапласа искомых величин. При применении преобразования Лапласа к уравнениям (2) и граничным условиям (5) и (6)  $\sigma_{zz}^{(0)} = \text{const}$  благодаря постоянной интенсивности внешней нагрузки  $p$ .

Теперь рассмотрим процедуру решения указанной краевой задачи, сформулированную для изображений Лапласа искомых величин. Поскольку определяющие полевые уравнения данной задачи совпадают с соответствующими уравнениями ТЛТУ, воспользуемся представлением,

разработанным ранее [3] для общего решения этих уравнений, которое можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{u}_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \chi, \quad \bar{u}_\theta = -\frac{1}{r} \psi - \frac{\partial^2}{r \partial \theta \partial z} \chi, \\ \bar{u}_z &= (\bar{A}_{13}^* + \bar{G}^*)^{-1} \left[ \bar{A}_{11}^* \Delta_1 + (\bar{G}^* + \sigma_{zz}^{(0)}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \chi, \\ \Delta_1 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},\end{aligned}\tag{10}$$

где функции  $\psi$  и  $\chi$  в (10) удовлетворяют уравнениям

$$\left( \Delta_1 + \xi_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0, \quad \left( \Delta_1 + \xi_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \Delta_1 + \xi_3^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi = 0.\tag{11}$$

В уравнениях (10) и (11)

$$\begin{aligned}\xi_1^2 &= \frac{2\bar{G}^*}{\bar{A}_{11}^* - \bar{A}_{12}^*}, \quad \xi_{2,3}^2 = c \pm \left( c^2 - \frac{(\bar{A}_{33}^* + \sigma_{zz}^{(0)})(\bar{G}^* + \sigma_{zz}^{(0)})}{\bar{A}_{11}^* \bar{G}^*} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ 2\bar{A}_{11}^* \bar{G}^* c &= \bar{A}_{11}^* (\bar{A}_{33}^* + \sigma_{zz}^{(0)}) + \bar{G}^{*2} - (\bar{A}_{13}^* + \bar{G}^*)^2.\end{aligned}\tag{12}$$

Для продолжения процедуры решения необходимо выбрать начальную форму несовершенства, т.е. функцию  $F(\theta, t_3)$  в уравнении (1), также присутствующую в граничных условиях (6). В соответствии с условиями (6), (7) и неосесимметричной модой локальной потери устойчивости полого цилиндра эту функцию примем в виде

$$F(\theta, t_3) = \ell \sin n\theta \sin \frac{m\pi t_3}{\ell},\tag{13}$$

где  $\ell$  — полудлина периода начального несовершенства. Предположим в (1) для начального несовершенства (13)  $\varepsilon F(\theta, t_3) = F(\theta, t_3) = \varepsilon \ell \sin n\theta \sin(m\pi t_3/\ell) = L \sin n\theta \sin(m\pi t_3/\ell)$ ,  $L \ll \ell$  и  $\varepsilon = L/\ell$ . Отметим, что выбор функции (13) основан на неосесимметричных модах потери устойчивости круговых оболочек, наблюдаемых в чисто упругих случаях, а смысл геометрических параметров  $n$  и  $m$  (или чисел  $n$  и  $m$ ) совпадает с таковыми в чисто упругих случаях.

Таким образом, согласно формуле (13) и условиям (6) функции  $\psi$  и  $\chi$  можно представить в виде

$$\psi = \psi_1(s, r) \sin(n\theta) \sin(m\alpha_1 z), \quad \chi = \chi_1(s, r) \cos(n\theta) \cos(m\alpha_1 z), \quad \alpha_1 = \pi/\ell.\tag{14}$$



Подставив (14) в (12), получим уравнения для функций  $\psi_1(s, r)$  и  $\chi_1(s, r)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi_1}{dr_1^2} + \frac{d\psi_1}{r_1 dr_1} - \left(1 + \frac{n^2}{r_1^2}\right) \psi_1 = 0, \quad \frac{d^2\chi_{11}}{dr_2^2} + \frac{d\chi_{11}}{r_2 dr_2} - \left(1 + \frac{n^2}{r_2^2}\right) \chi_{11} = 0, \\ \frac{d^2\chi_{12}}{dr_3^2} + \frac{d\chi_{12}}{r_3 dr_3} - \left(1 + \frac{n^2}{r_3^2}\right) \chi_{12} = 0, \quad \chi_1 = \chi_{11} + \chi_{12}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $r_i = \xi_i m \alpha_1$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Решение уравнений (15) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_1 &= B_1 I_n(\xi_1 m \alpha r) + B_4 K_n(\xi_1 m \alpha r), \\ \chi_1 &= B_2 I_n(\xi_2 m \alpha r) + B_3 I_n(\xi_3 m \alpha r) + B_5 K_n(\xi_2 m \alpha r) + B_6 K_n(\xi_3 m \alpha r), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $I_n(x)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка чисто мнимого аргумента;  $K_n(x)$  — функция Макдональда  $n$ -го порядка;  $B_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ) — неизвестные постоянные.

Подставив решения (16) и (14) в уравнения (10), получим выражения для изображений Лапласа для перемещений, подставив которые в преобразованные по Лапласу уравнения (5), получим изображения Лапласа для деформаций. Наконец, подставив эти выражения в соотношения (9), найдем выражения изображений Лапласа для напряжений. Для сокращения объема настоящей работы эти выражения здесь не приводим.

Отметим, что эти выражения при  $n = 1$  и  $m = 1$  совпадают с полученными в [15] для глобальной устойчивости круглого полого цилиндра из вязкоупругих материалов. Аналогично эти выражения при  $n = 0$  совпадают с полученными в [16] для осесимметричной локальной потери устойчивости полого цилиндра из вязкоупругого композитного материала.

Согласно уравнениям (14) и (10) изображения Лапласа для условий (7) удовлетворяются автоматически благодаря члену  $\sin(m \alpha_1 z)$  в выражениях  $\bar{u}_r^{(1)}$ ,  $\bar{u}_\theta^{(1)}$  и члену  $\cos(m \alpha_1 z)$  в выражении  $\bar{u}_z^{(1)}$ . Поэтому остается выполнить только условия (6), согласно которым получаем шесть неоднородных линейных уравнений для неизвестных  $B_1, B_2, \dots, B_6$  из изображений Лапласа для этих условий. Для сокращения объема работы эти уравнения здесь также не приводим. После определения неизвестных  $B_1, B_2, \dots, B_6$  из этой линейной неоднородной алгебраической системы уравнений получим изображения Лапласа для искомых величин.

Для определения оригиналов искомых величин применим метод обратного преобразования [19], согласно которому, например, перемещение  $u_r^{(1)}(r, \theta, z, t)$  вычисляем как

$$u_r^{(1)}(r, \theta, z, t) \approx \bar{u}_r^{(1)}(r, \theta, z, s) \Big|_{s=1/(2t)}. \quad (17)$$

Аналогичным образом можно определить оригиналы для других перемещений и напряжений. Наконец, в качестве критерия потери устойчивости используем критерий начального несовершенства [9], который для рассматриваемого случая можно сформулировать следующим образом: для вязкоупругих материалов

$$\max_{\substack{t_3 \in (0, \ell) \\ r \in [R^-, R^+] \\ \theta \in [0, 2\pi]}} |u_r^{(1)}(r, \theta, z, t)| \rightarrow \infty, \text{ так как } t \rightarrow t_{cr}, \quad (18)$$

для упругих материалов

$$\max_{\substack{t_3 \in (0, \ell) \\ r \in [R^-, R^+] \\ \theta \in [0, 2\pi]}} |u_r^{(1)}(r, \theta, z)| \rightarrow \infty, \text{ так как } p \rightarrow p_{cr}. \quad (19)$$

На этом рассмотрение процедуры решения для полого цилиндра из анизотропного вязкоупругого материала с помощью теории ТЛТУ завершено.

Для иллюстрации значимости используемого трехмерного подхода по сравнению с теориями Кирхгофа—Лява и уточненными теориями оболочек третьего порядка также получили соответствующие полевые уравнения для этих теорий с применением процедуры усреднение—интегрирование применительно к уравнениям (2)—(7). В теории оболочек Кирхгофа—Лява перемещения имеют вид

$$u_r^{(1)} = w(\theta, z), \quad u_r^{(1)} = v(\theta, z) - r' \frac{\partial w}{R \partial \theta}, \quad u_z^{(1)} = u(\theta, z) - r' \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (20)$$

где  $w(\theta, z)$ ,  $v(\theta, z)$ ,  $u(\theta, z)$  — перемещения срединной поверхности оболочки в радиальном, окружном и осевом направлениях соответственно;  $r' = r - R$ .

В уточненной теории оболочек третьего порядка перемещения имеют вид

$$u_r^{(1)} = w(\theta, z), \quad u_r^{(1)} = v(\theta, z) - r' \frac{\partial w}{R \partial \theta} + \left( \frac{h^2}{4} r' - \frac{1}{3} r'^3 \right) \varphi_\theta, \\ u_z^{(1)} = u(\theta, z) - r' \frac{\partial w}{\partial z} + \left( \frac{h^2}{4} r' - \frac{1}{3} r'^3 \right) \varphi_z. \quad (21)$$

### 3. Численные результаты и обсуждение

Рассмотрим численные результаты, полученные для вязкоупругого цилиндра не только методом ТЛТУ, но и с помощью приближенных теорий оболочек, рассмотренных ранее.

Предположим, что материал цилиндра представляет собой вязкоупругий однонаправленный композит с волокнами, ориентированными вдоль оси  $Oz$ . Известно, что в континуальном подходе такой материал можно рассматривать как трансверсально-изотропный с осью симметрии  $Oz$ . Кроме того, предположим, что материал волокон чисто упругий, а матрица линейно-вязкоупругая. Далее величины, относящиеся к матрице и волокнам, обозначим верхними индексами (1) и (2) соответственно.

Модуль Юнга  $E^{(i)}$ , коэффициент Пуассона  $\nu^{(i)}$  и модуль сдвига  $\mu^{(i)}$  равны

$$\begin{aligned} E^{*(1)}\varphi &= E_0^{(1)} \left[ \varphi(t) - \omega_0 \Pi_\alpha^* (-\omega_0 - \omega_\infty) \varphi \right], \\ \nu^{*(1)}\varphi &= \nu_0^{(1)} \left[ \varphi(t) + \frac{1 - 2\nu_0^{(1)}}{2\nu_0^{(1)}} \omega_0 \Pi_\alpha^* (-\omega_0 - \omega_\infty) \varphi \right], \\ \mu^{*(1)}\varphi &= \mu_0^{(1)} \left[ \varphi(t) - \frac{3}{2(1 + \nu_0^{(1)})} \omega_0 \Pi_\alpha^* \left( -\frac{3}{2(1 + \nu_0^{(1)})} \omega_0 - \omega_\infty \right) \varphi \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь  $E_0^{(1)}$ ,  $\nu_0^{(1)}$ ,  $\mu_0^{(1)}$  — мгновенные значения модуля Юнга, коэффициента Пуассона и модуля сдвига матрицы соответственно;  $\alpha$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_\infty$  — реологические параметры вязкоупругого материала матрицы;  $\Pi_\alpha^*$  — дробно-экспоненциальный оператор Работнова [20], определяемый как

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha^*(x, t)\varphi &= \int_0^t \Pi_\alpha(x, t - \tau) \varphi(\tau) d\tau, \\ \Pi_\alpha(x, t) &= t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma((1+n)(1+\alpha))}, \quad -1 < \alpha < 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция.

Для расчета эффективных механических свойств указанного композитного материала использовали известные выражения, представленные, например, в монографии [21] для композитных материалов. Напомним, что если составляющие композитного материала — вязкоупругие, то для получения изображений Лапласа эффективных операторов этого материала вместо механических постоянных в выражениях используют изображение Лапласа соответствующих операторов составляющих. Тогда полу-

чаем следующие выражения для изображений Лапласа  $\bar{A}_{11}^*$ ,  $\bar{A}_{12}^*$ ,  $\bar{A}_{13}^*$ ,  $\bar{A}_{33}^*$  и  $\bar{G}^*$ :

$$\begin{aligned}\bar{A}_{ij}^* &= \bar{A}_{ij}^*(\bar{\mu}^{(1)}, \bar{\mu}^{(2)}, \bar{\nu}^{(1)}, \bar{\nu}^{(2)}, \eta^{(2)}), \\ \bar{G}_{ij}^* &= \bar{G}_{ij}^*(\bar{\mu}^{(1)}, \bar{\mu}^{(2)}, \bar{\nu}^{(1)}, \bar{\nu}^{(2)}, \eta^{(2)}),\end{aligned}\quad (24)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{K}^{*(1)} &= \frac{\bar{E}^{*(1)}}{3(1-2\bar{\nu}^{*(1)})}, \quad \bar{K}^{(2)} = \frac{\bar{E}^{(2)}}{3(1-2\bar{\nu}^{(2)})}, \quad \bar{\mu}^{(2)} = \frac{\bar{E}^{(2)}}{2(1+\bar{\nu}^{(2)})}, \\ \bar{E}^{(2)} &= \frac{1}{s}E^{(2)}, \quad \bar{\nu}^{(2)} = \frac{1}{s}\nu^{(2)}, \quad \bar{E}^{*(1)} = E_0^{(1)} \left[ \frac{1}{s} - \bar{\Pi}_\alpha(-\omega) \right], \\ \bar{\nu}^{*(1)} &= \nu_0^{(1)} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1-2\nu_0^{(1)}}{2\nu_0^{(1)}} \bar{\Pi}_\alpha(-\omega) \right], \\ \bar{\mu}^{*(1)} &= \mu_0^{(1)} \left[ \frac{1}{s} - \frac{3}{2(1+\nu_0^{(1)})} \bar{\Pi}_\alpha \left( -\frac{3}{2(1+\nu_0^{(1)})} - \omega \right) \right], \quad \bar{\Pi}_\alpha(-\omega) = \frac{1}{s(s^{1+\alpha} + \omega)},\end{aligned}\quad (25)$$

$\omega = \omega_\infty / \omega_0$ . Введем безразмерное время  $t' (= \omega_0^{1/(1+\alpha)} t)$  и примем, что  $\nu^{(2)} = \nu_0^{(1)} = 0,3$  и  $\eta^{(2)} = 0,5$ , где  $\eta^{(2)}$  — объемное содержание волокон в рассматриваемом композите. Явные выражения формул (24) здесь опущены для уменьшения объема настоящей работы. Они приведены во многих монографиях, например, в [21].

Для проверки правильности модели, предложенной в настоящей работе, локальные неосесимметричные критические напряжения потери устойчивости, полученные в рамках ТЛТУ, сравнили с классическими неосесимметричными напряжениями потери устойчивости, полученными в [22], где  $h/R = 0,0025$ ,  $R/l = 0,1252$ , и предполагали, что модуль упругости и коэффициент Пуассона материала цилиндра равны  $E = 207$  ГПа и  $\nu = 0,3$ . Неосесимметричные критические напряжения потери устойчивости, минимизированные согласно  $m$  для каждого значения  $n$ , приведены в табл. 1. Видно, что модель, разработанная в рамках ТЛТУ, хорошо согласуется с литературными данными и даже предсказывает в рассматриваемом случае меньшее значение критического напряжения потери устойчивости.

Отметим, что результаты потери устойчивости, полученные в рамках ТЛТУ, основаны на критерии (19), который использовали после решения системы уравнений для неизвестных констант  $B_1, B_2, \dots, B_6$  в (16). Однако результаты, приведенные в [22], получены с использованием теории оболочек Кирхгофа—Лява с применением подхода собственных значений Эйлера.

Табл. 1

## Проверка достоверности предложенной модели

$n$	$\sigma_{cr,3D}$ , ГПа, настоящая работа	$\sigma_{cr}$ , ГПа, [22]
2	1,467 ( $m=1$ )	1,478 ( $m=1$ )
3	0,372 ( $m=1$ )	0,388 ( $m=1$ )
4	0,269 ( $m=1$ )	0,281 ( $m=1$ )
5	0,290 ( $m=2$ )	0,298 ( $m=2$ )
6	0,290 ( $m=3$ )	0,309 ( $m=3$ )
7	0,289 ( $m=4$ )	0,308 ( $m=4$ )
8	0,290 ( $m=5$ )	0,305 ( $m=5$ )
9	0,289 ( $m=6$ )	0,305 ( $m=6$ )
10	0,290 ( $m=8$ )	0,305 ( $m=8$ )

Кроме того, при расчете результатов настоящей работы в уравнениях (24) и (25) предполагали, что  $t = 0$ ,  $E^{(1)*} = E_0^{(1)}$ ,  $\nu^{(1)*} = \nu_0^{(1)}$ ,  $E^{(2)} = E_0^{(1)}$ ,  $\nu^{(2)} = \nu_0^{(1)}$ .

Из данных табл. 1 следует, что при  $h/R = 0,0025$  и  $R/l = 0,1252$ , соответствующих очень тонкой изотропной оболочке, результаты, полученные с помощью ТЛТУ с использованием критерия начального несовершенства и теории Кирхгофа—Лява с подходом собственных значений Эйлера, очень близки. Тем не менее результаты, полученные в рамках ТЛТУ, меньше, хотя и незначительно, чем полученные в рамках теории оболочек Кирхгофа—Лява. Такая ситуация согласуется с известными механическими и инженерными соображениями и дает определенную гарантию обоснованности применяемого метода решения и алгоритма расчета.

Обсуждаемые далее численные результаты при  $n=1$  и  $m=1$  совпадают с найденными для глобальной потери устойчивости кругового полого вязкоупругого цилиндра [15]. Аналогично при  $n=0$  численные результаты совпадают с полученными для осесимметричной локальной потери устойчивости полого вязкоупругого цилиндра [16]. На этом проверка алгоритма расчета и вычислительных программ, использованных в настоящем исследовании, завершена.

Теперь проанализируем численные результаты, полученные с помощью настоящего трехмерного подхода. Рассмотрели два случая получения результатов при безразмерном времени  $t' = 0$  и  $t' = \infty$ . Критические силы, связанные с ними, обозначили нижними индексами 0 и  $\infty$ . Отметим, что при вычислении критических сил при  $t' = 0$  использовали постоянные  $E_0^{(1)}$  и  $\nu_0^{(1)}$ , а при  $t' = \infty$  в формуле (26) — постоянные  $E^{(1)*}$  и  $\nu^{(1)*}$  вместо изображений Лапласа  $\bar{E}^{(1)*}$  и  $\bar{\nu}^{(1)*}$  соответственно, и константы  $E^{(2)}$  и  $\nu^{(2)}$  вместо изображений Лапласа в уравнениях (24) и (25):

$$E_{\infty}^{(1)} = E_0^{(1)}(1 - 1/\omega) \text{ и } v_{\infty}^{(1)} = v_0^{(1)} \left[ 1 - (1 - 2v_0^{(1)}) / (2v_0^{(1)}\omega) \right]. \quad (26)$$

Здесь рассмотрели не только численные результаты, полученные с помощью ТЛТУ, но и с помощью теории Кирхгофа—Лява и уточненной теории оболочек третьего порядка. С помощью соотношений

$$p'_{3D.c.0} = p_{3D.c.0} / E_0^{(1)}, \quad p'_{Rf.c.0} = p_{Rf.c.0} / E_0^{(1)}, \quad p'_{K.c.0} = p_{K.c.0} / E_0^{(1)}, \quad (27)$$

$$p'_{3D.c.\infty} = p_{3D.c.\infty} / E_0^{(1)}, \quad p'_{Rf.c.\infty} = p_{Rf.c.\infty} / E_0^{(1)}, \quad p'_{K.c.\infty} = p_{K.c.\infty} / E_0^{(1)} \quad (28)$$

обозначили безразмерные критические силы, определенные в рамках ТЛТУ, уточненной теории оболочек третьего порядка и теории оболочек Кирхгофа—Лява соответственно при  $t' = 0$  (27) и  $t' = \infty$  (28). Согласно выражениям (26), критические силы при  $t' = \infty$  должны зависеть от безразмерного реологического параметра  $\omega$ . Для анализа численных результатов также ввели параметр  $\lambda = m\alpha_1 R$ , характеризующий количество полуволн моды потери устойчивости вдоль оси цилиндра.

Таким образом, определили параметры задачи  $h/R$ ,  $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ ,  $v^{(2)}$ ,  $v_0^{(1)}$ ,  $n$ ,  $\lambda = m\alpha_1 R$  и  $\omega$ . Как уже было отмечено, предположили, что  $v^{(2)} = v_0^{(1)} = 0,3$  и  $\omega = 0,5$ , и представленные результаты минимизировали по отношению к параметру  $\lambda$ .

Таким образом, рассмотрели и проанализировали численные результаты, относящиеся к критическим силам в (27) и (28) и полученные в

Табл. 2

Значения критических сил при разных значениях  $n$   $\left( E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5, \right.$   
 $\left. \omega = 0,5, \alpha = -0,5, h/R = 0,01 \right)$

$n$	$p'_{3D.c.0} \cdot 10^2$	$p'_{Rf.c.0} \cdot 10^2$	$p'_{K.c.0} \cdot 10^2$
0	1,2810 (15,8)	1,5411 (16,3)	1,1551 (16,1)
1	1,2803 (15,7)	1,5394 (16,1)	1,5500 (15,9)
2	1,2766 (15,6)	1,5339 (15,8)	1,5451 (15,8)
3	1,2704 (15,2)	1,5247 (15,5)	1,5370 (15,5)
4	1,2616 (14,8)	1,5119 (15,0)	1,5258 (15,0)
5	1,2503 (14,2)	1,4952 (14,4)	1,5115 (14,3)
6	1,2364 (13,4)	1,4748 (13,4)	1,4942 (13,5)
7	1,2197 (12,2)	1,4503 (12,1)	1,4746 (12,4)
8	1,1996 (10,5)	1,4207 (9,80)	1,4543 (10,7)
9	1,1739 (6,70)	1,3987 (7,60)	1,4457 (9,00)
10	1,1960 (8,20)	1,4422 (8,70)	1,4847 (9,30)
11	1,2605 (9,20)	1,5356 (9,70)	1,5759 (10,0)

Табл. 3

Минимизированные значения критических сил при  $t = 0$  ( $\omega = 0,5$ ,  $\alpha = -0,5$ )

$E^{(2)}/E_0^{(1)}$	$p'_{D.c.0} \cdot 10^2$	$p'_{Rf.c.0} \cdot 10^2$	$p'_{K.c.0} \cdot 10^2$
$h/R = 0,01$			
1	0,5917 (9, 6,9)	0,6902 (9, 7,7)	—
5	1,1739 (9, 6,7)	1,3987 (9, 7,6)	1,4457 (9, 9,0)
10	1,4750 (9, 6,4)	1,7524 (9, 7,0)	1,8156 (9, 7,7)
$h/R = 0,05$			
1	2,6776 (4, 2,7)	3,1759 (4, 2,9)	—
5	5,3637 (4, 2,4)	6,4882 (4, 2,8)	7,4973 (3, 5,9)
10	6,7914 (4, 2,4)	8,1525 (4, 2,7)	9,5435 (4, 4,0)
$h/R = 0,10$			
1	4,8733 (3, 2,1)	5,8913 (3, 2,1)	—
5	9,7918 (3, 1,8)	12,026 (3, 2,2)	15,133 (2, 4,4)
10	12,467 (3, 1,7)	15,166 (3, 2,1)	19,985 (3, 3,2)

рамках сделанных предположений. Результаты, приведенные в табл. 2, иллюстрируют критические (минимальные) сжимающие силы и параметр  $\lambda$  для каждого выбранного значения  $n$ . Видно, что критическая сила минимальна при  $n = 9$ . В табл. 3 и 4 приведены только значения критических сил, минимизированные в соответствии со значениями  $n$  и  $\lambda$ .

Табл. 4

Минимизированные значения критических сил при  $t = \infty$  ( $\omega = 0,5$ ,  $\alpha = -0,5$ )

$E^{(2)}/E_0^{(1)}$	$p'_{D.c.\infty} \cdot 10^2$	$p'_{Rf.c.\infty} \cdot 10^2$	$p'_{K.c.\infty} \cdot 10^2$
$h/R = 0,01$			
1	0,1653 (9, 6,4)	0,3140 (7, 6,3)	0,3344 (7, 7,2)
5	0,2463 (8, 4,2)	0,4829 (6, 4,8)	0,5192 (7, 5,8)
10	0,2889 (8, 3,6)	0,5473 (6, 4,3)	0,6012 (6, 4,4)
$h/R = 0,05$			
1	0,7612 (4, 2,5)	1,3964 (3, 2,1)	1,8428 (3, 4,1)
5	1,1328 (4, 2,1)	2,0804 (3, 2,5)	2,9358 (3, 2,8)
10	1,3508 (4, 1,7)	2,3821 (3, 2,1)	3,4546 (3, 2,4)
$h/R = 0,10$			
1	1,1759 (2, 0,5)	2,3451 (2, 1,2)	4,0681 (2, 3,4)
5	1,0774 (1, 0,1)	2,4058 (1, 0,2)	6,9603 (2, 2,3)
10	1,7775 (1, 0,1)	3,3347 (1, 0,2)	8,3660 (2, 1,9)

В табл. 3 и 4 указаны значения критических сил в (27) и (28) соответственно. Первое число в скобках указывает значение  $n$ , а второе — значение  $\lambda$ , при котором критические силы становятся минимальными. В табл. 2 в скобках указано только значение  $\lambda$ , при котором критические силы становятся минимальными для выбранного числа  $n$ . Критические силы определили при разных значениях  $h/R$  и  $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ , анализ которых позволил сделать следующие выводы.

1. Во всех случаях, рассмотренных в табл. 2—4, справедливы неравенства

$$p'_{3D.c.0} < p'_{Rf.c.0} < p'_{K.c.0}, \quad p'_{3D.c.\infty} < p'_{Rf.c.\infty} < p'_{K.c.\infty}, \quad (29)$$

$$p'_{3D.c.\infty} < p'_{3D.c.0}, \quad p'_{Rf.c.\infty} < p'_{Rf.c.0}, \quad p'_{K.c.\infty} < p'_{K.c.0}. \quad (29)$$

2. Увеличение отношений  $h/R$  и  $E^{(2)}/E_0^{(1)}$  увеличивает критические силы  $p'_{3D.c.0}$ ,  $p'_{Rf.c.0}$  и  $p'_{K.c.0}$ , найденные при  $t'=0$  (критические силы  $p'_{3D.c.\infty}$ ,  $p'_{Rf.c.\infty}$  и  $p'_{K.c.\infty}$ , определенные при  $t'=\infty$ ), а также увеличивают разности  $p'_{Rf.c.0} - p'_{3D.c.0}$ ,  $p'_{K.c.0} - p'_{3D.c.0}$ ,  $p'_{K.c.0} - p'_{Rf.c.0}$ ,  $p'_{Rf.c.\infty} - p'_{3D.c.\infty}$ ,  $p'_{K.c.\infty} - p'_{3D.c.\infty}$  и  $p'_{K.c.\infty} - p'_{Rf.c.\infty}$ .

3. За исключением значений  $p'_{K.c.0}$ , полученных при  $E^{(2)}/E_0^{(1)}=1$ , во всех случаях, рассмотренных в табл. 3 и 4, критические силы минимальны при  $n$ , обозначенном как  $n^*$ .

4. Соотношения между  $n^*_{3D.0}$ ,  $n^*_{Rf.0}$  и  $n^*_{K.0}$ , при которых критические силы  $p'_{3D.c.0}$ ,  $p'_{Rf.c.0}$  и  $p'_{K.c.0}$  минимальны, —

$$n^*_{3D.0} = n^*_{Rf.0} > n^*_{K.0}. \quad (30)$$

5. Игнорируя некоторые исключения, возникающие при  $h/R=0,01$ , отношения между  $n^*_{3D.\infty}$ ,  $n^*_{Rf.\infty}$  и  $n^*_{K.\infty}$  имеют место в случае, когда критические силы  $p'_{3D.c.\infty}$ ,  $p'_{Rf.c.\infty}$  и  $p'_{K.c.\infty}$  минимальны:

$$n^*_{3D.\infty} \geq n^*_{Rf.\infty} = n^*_{K.\infty}. \quad (31)$$

6. Значения  $n^*$  убывают с  $h/R$  и практически не зависят от отношения  $E^{(2)}/E_0^{(1)}$ .

7. Из анализа численных результатов можно вывести следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (\min(p'_{Rf.c.\infty}) / \min(p'_{3D.c.\infty})) &> (\min(p'_{Rf.c.0}) / \min(p'_{3D.c.0})), \\ (\min(p'_{Rf.c.0}) - \min(p'_{3D.c.0})) &> (\min(p'_{K.c.0}) - \min(p'_{Rf.c.0})), \end{aligned} \quad (32)$$



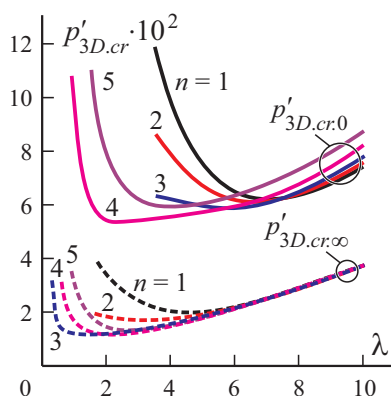


Рис. 2. Зависимости величин  $p'_{3D.c.0}$  и  $p'_{3D.c.\infty}$  от параметров  $\lambda$  и  $n$  при  $h/R = 0,05$ ,  $\omega = 0,5$ ,  $\alpha = -0,5$ ,  $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ .

$$\begin{aligned}
 (\min(p'_{Rf.c.\infty}) - \min(p'_{3D.c.\infty})) &> (\min(p'_{K.c.\infty}) - \min(p'_{Rf.c.\infty})), \\
 (\min(p'_{Rf.c.\infty}) - \min(p'_{3D.c.\infty})) &> (\min(p'_{Rf.c.0}) - \min(p'_{3D.c.0})), \\
 (\min(p'_{K.c.\infty}) - \min(p'_{Rf.c.\infty})) &> (\min(p'_{K.c.0}) - \min(p'_{Rf.c.0})).
 \end{aligned} \tag{32}$$

Таковы основные выводы, вытекающие из численных результатов, представленных в табл. 3 и 4. Эти результаты получены с помощью зависимостей между критической сжимающей силой и параметром  $\lambda$  для каждого выбранного значения  $n$ . Графики на рис. 2 иллюстрируют отношения между  $p'_{3D.c.0}$  и  $\lambda$  и между  $p'_{3D.c.\infty}$  и  $\lambda$  в случае, когда  $h/R = 0,05$ ,  $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ ,  $\alpha = -0,5$  и  $\omega = 0,5$ .

Напомним, что все значения  $p'_{3D.c.\infty}$ ,  $p'_{Rf.c.\infty}$  и  $p'_{K.c.\infty}$ , приведенные в табл. 3 и 4, получены при  $\omega = 0,5$ . Для иллюстрации влияния реологического параметра  $\omega$  на значения  $p'_{3D.c.\infty}$ ,  $p'_{Rf.c.\infty}$  и  $p'_{K.c.\infty}$ , полученные для соответствующих значений  $n_{3D.\infty}^*$ ,  $n_{Rf.\infty}^*$ ,  $n_{K.\infty}^*$  и  $\lambda_{3D.\infty}^*$ ,  $\lambda_{Rf.\infty}^*$ ,  $\lambda_{K.\infty}^*$ , приведены в табл. 5 ( $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$  и  $\alpha = -0,5$ ). Из данных таблицы следует, что увеличение реологического параметра  $\omega$  увеличивает значения  $p'_{3D.c.\infty}$ ,  $p'_{Rf.c.\infty}$  и  $p'_{K.c.\infty}$ .

На этом рассмотрение численных результатов, полученных для критических сил в чисто упругом случае, завершено. Отметим, что для определения критического времени потери устойчивости вязкоупругого цилиндра необходимо знать критические силы, определенные при  $t' = 0$  и  $t' = \infty$ . Полученные численные результаты использовали для оценки критического времени потери устойчивости вязкоупругого цилиндра.

Теперь рассмотрим численные результаты для вязкоупругого случая. Для этого необходимо выбрать такую интенсивность внешних

Табл. 5

Минимизированные значения критических сил при  $t = \infty$  и разных значениях  $\omega$

$\omega$	$p'_{3D.c.\infty} \cdot 10^2$	$p'_{Rf.c.\infty} \cdot 10^2$	$p'_{K.c.\infty} \cdot 10^2$
$h/R = 0,01$			
0,5	0,2463 (8, 4,2)	0,4829 (6, 4,8)	0,5192 (7, 5,8)
1,0	0,4530 (9, 5,6)	0,7258 (8, 6,4)	0,7629 (8, 6,7)
2,0	0,6864 (9, 6,3)	0,9550 (8, 6,3)	0,9990 (8, 7,2)
$h/R = 0,05$			
0,5	1,1328 (4, 2,1)	2,0804 (3, 2,5)	2,9358 (3, 2,8)
1,0	2,0917 (4, 2,4)	3,2557 (3, 2,2)	4,2303 (4, 3,5)
2,0	3,1248 (3, 1,0)	4,4589 (4, 3,2)	5,3316 (4, 3,9)
$h/R = 0,10$			
0,5	2,0066 (2, 0,5)	3,4857 (2, 1,4)	6,9603 (2, 2,3)
1,0	3,8558 (3, 1,6)	5,7754 (2, 1,0)	9,2334 (3, 2,8)
2,0	5,8066 (3, 1,8)	8,2603 (3, 2,3)	11,379 (3, 3,0)

сжимающих сил  $p' = p / E_0^{(1)}$ , чтобы неравенства  $p'_{3D.c.0} > p' > p'_{3D.c.\infty}$ ,  $p'_{3D.c.0} > p' > p'_{3D.c.\infty}$  и  $p'_{K.c.0} > p' > p'_{K.c.\infty}$  выполнялись в ТЛТУ, теории уточненных оболочек третьего порядка и теории оболочек Кирхгофа соответственно.

Для сравнения полученных результатов должно удовлетворяться условие

$$p' \in \left\{ [p'_{3D.c.\infty}, p'_{3D.c.0}] \cap [p'_{Rf.c.\infty}, p'_{Rf.c.0}] \cap [p'_{K.c.\infty}, p'_{K.c.0}] \right\}. \quad (33)$$

Однако согласно данным, приведенным в табл. 2—4, во многих случаях для тех же  $n^*$  и  $\lambda^*$

$$\left\{ [p'_{3D.c.\infty}, p'_{3D.c.0}] \cap [p'_{Rf.c.\infty}, p'_{Rf.c.0}] \right\} \cap [p'_{K.c.\infty}, p'_{K.c.0}] = \emptyset. \quad (34)$$

Поэтому далее рассмотрим случаи, когда выполняется условие (35), и сравним критические времена  $t'_{3D.cr}$  и  $t'_{Rf.cr}$ , определенные с помощью ТЛТУ и уточненной теории оболочек третьего порядка, а именно:

$$p' \in \left\{ [p'_{3D.c.\infty}, p'_{3D.c.0}] \cap [p'_{Rf.c.\infty}, p'_{Rf.c.0}] \right\}. \quad (35)$$

В табл. 6—8 приведены значения критических времен  $t'_{3D.cr}$  (числитель) и  $t'_{Rf.cr}$  (знаменатель) для разных значений  $p'$ ,  $n$  и  $\lambda$  в случаях  $h/R = 0,01$ ,  $0,05$  и  $0,10$  соответственно при  $E^{(2)} / E_0^{(1)} = 5$ ,  $\omega = 0,5$ ,

Табл. 6

Значения  $t'_{3D.cr}$  (числитель) и  $t'_{Rf.cr}$  (знаменатель) при  $h/R = 0,01$   
 $(\omega = 0,5, \alpha = -0,5)$  и  $n = 8$

$\lambda$	$p' \cdot 10^2$					
	0,60	0,65	0,80	0,85	1,00	1,05
	$t'_{3D.cr}/t'_{Rf.cr}$					
6,8	0,528	0,345	0,102	0,067	0,015	0,008
	17,80	5,985	0,895	0,556	0,152	0,098
8,0	0,569	0,365	0,104	0,068	0,015	0,008
	29,28	7,945	1,007	0,614	0,161	0,103
9,5	0,695	0,426	0,105	0,060	0,014	0,005
	$> 10^3$	22,55	1,473	0,838	0,195	0,122

$\alpha = -0,5$ . Из данных таблиц следует, что критические времена уменьшались по мере приближения  $p'$  к критической силе, определенной при  $t' = 0$ . Точно так же критические времена увеличивались по мере приближения  $p'$  к критической силе при  $t' = \infty$ . Кроме того, из данных таблиц следует, что при увеличении  $|n - n^*|$  или  $|\lambda - \lambda^*|$  критическое время также возрастает.

На основании данных, приведенных в табл. 6—8, трудно сделать какие-либо выводы о влиянии отношения  $h/R$  на критическое время, поскольку они получены при разных значениях  $p'$ ,  $n$ ,  $\lambda$  и  $h/R$ .

Сравнение значений  $t'_{3D.cr}$  и  $t'_{Rf.cr}$  показывает, что разность между ними может составлять более одного-двух порядков, особенно в случаях, когда

Табл. 7

Значения  $t'_{3D.cr}$  (числитель) и  $t'_{Rf.cr}$  (знаменатель) при  $h/R = 0,05$   
 $(\omega = 0,5, \alpha = -0,5)$  и  $n = 3$

$\lambda$	$p' \cdot 10^2$					
	2,40	3,00	3,30	3,90	4,20	4,50
	$t'_{3D.cr}/t'_{Rf.cr}$					
2,5	1,910	0,629	0,391	0,159	0,101	0,063
	40,61	4,014	2,038	0,700	0,440	0,282
4,0	2,334	0,627	0,367	0,136	0,083	0,049
	9095	9,335	3,725	1,010	0,591	0,358
5,5	8,599	1,113	0,550	0,161	0,088	0,047
	$> 10^4$	421,5	25,27	2,794	1,326	0,685

Табл. 8

Значения  $t'_{3D.cr}$  (числитель) и  $t'_{Rf.cr}$  (знаменатель) для  $h/R = 0,10$   
( $\omega = 0,5$ ,  $\alpha = -0,5$ ) при  $n = 3$

$\lambda$	$p' \cdot 10^2$					
	5,00	5,50	7,50	8,00	8,50	9,00
	$t'_{3D.cr}/t'_{Rf.cr}$					
1,8	0,505	0,302	0,036	0,019	0,008	0,002
	475,4	24,80	0,738	0,418	0,242	0,140
2,1	0,532	0,316	0,039	0,020	0,009	0,003
	52,27	10,46	0,536	0,312	0,184	0,107
2,4	0,595	0,350	0,044	0,023	0,011	
	33,11	8,249	0,494	0,292	0,174	

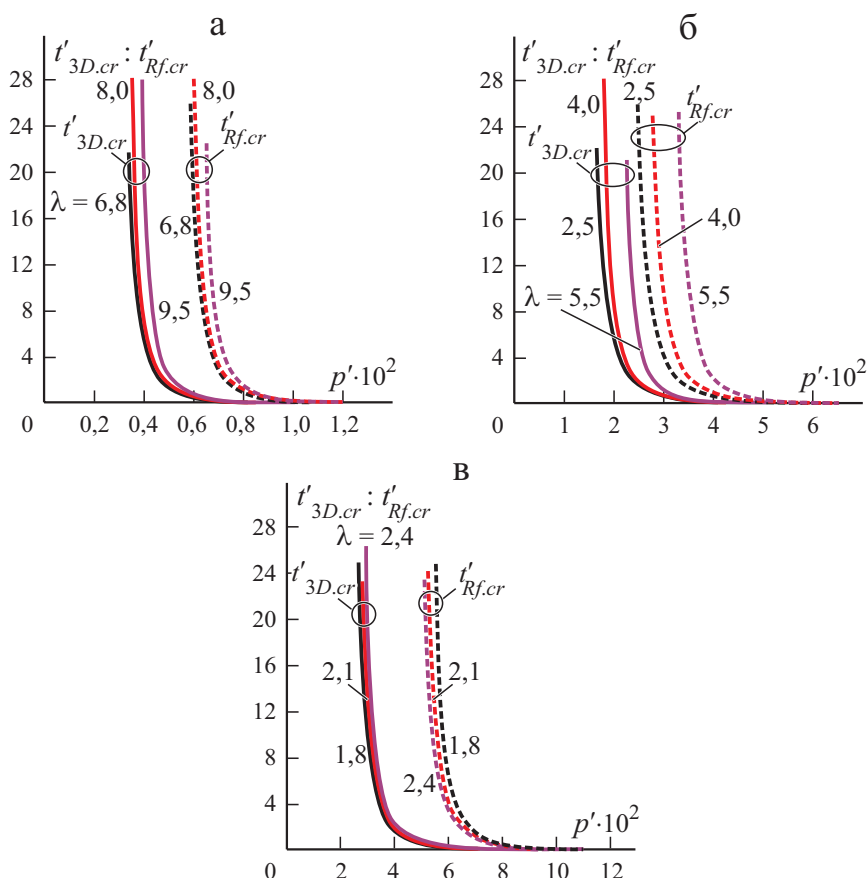


Рис. 3. Зависимости величин  $t'_{3D.cr}$  и  $t'_{Rf.cr}$  от интенсивности сжимающей силы  $p'$  при  $h/R = 0,01$  и  $n = 8$  (а);  $h/R = 0,05$  и  $n = 3$  (б);  $h/R = 0,10$  и  $n = 3$  (в) и  $\omega = 0,5$ ,  $\alpha = -0,5$ ,  $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ .

значения силы  $p'$  близки к критическим, определенным при  $t' = 0$  и  $t' = \infty$ . Это различие также проиллюстрировано на рис. 3, где приведена зависимость критических времен  $t'_{3D.cr}$  и  $t'_{Rf.cr}$  от интенсивности  $p'$  сжимающей силы при  $h/R = 0,01, 0,05$  и  $0,10$  соответственно. Отметим, что графики построены при  $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ ,  $\omega = 0,5$  и  $\alpha = -0,5$  и разных значениях  $\lambda$ . Из этих графиков следует, что при  $p'_{3D.c.\infty} < p' < p'_{Rf.c.\infty}$  потеря устойчивости вязкоупругого цилиндра не может происходить в рамках уточненной теории оболочек третьего порядка. Однако такая потеря устойчивости происходит согласно ТЛТУ. Следовательно, приближенные теории оболочек не могут описать потерю устойчивости цилиндра из вязкоупругих композитных материалов ни количественно, ни качественно.

Теперь рассмотрим графические представления влияния безразмерных реологических параметров  $\alpha$  и  $\omega$  на зависимости между безразмерным критическим временем  $t'_{3D.cr}$  и безразмерной интенсивностью сжимающих сил. Влияние параметра  $\alpha$  на эти зависимости при  $\omega = 0,5$  и  $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$  иллюстрируют графики рис. 4, а влияние параметра  $\omega$  при  $\omega = 0,5$  и  $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$  — графики рис. 5.

Из данных рис. 4 следует, что до достижения определенного значения интенсивности  $p'$  сжимающей силы (обозначим его как  $p'^*$ ) увеличение абсолютного значения параметра  $\alpha$  уменьшает критическое время  $t'_{3D.cr}$ . После этого значения  $p'$  (т. е. при  $p' > p'^*$ ) увеличение абсолютного значения параметра  $\alpha$  приводит к увеличению значений  $t'_{3D.cr}$ . Кроме того, видно, что при  $p' = p'^*$  влияние безразмерного реологического параметра  $\alpha$  на значения  $t'_{3D.cr}$  исчезает.

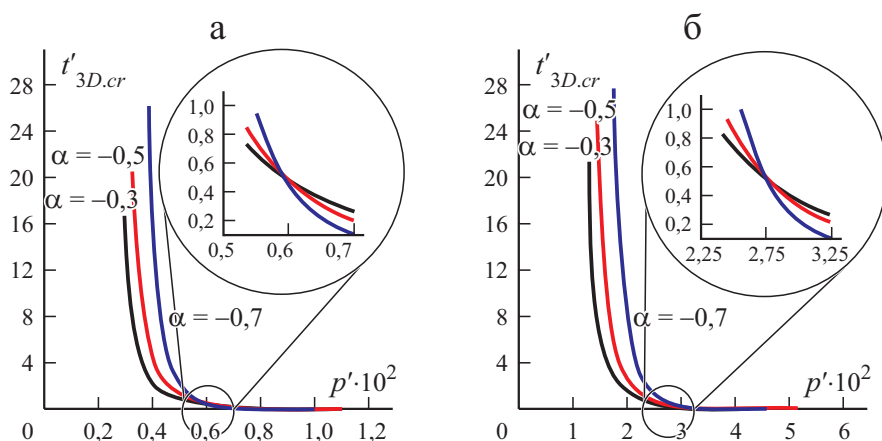


Рис. 4. Влияние реологического параметра  $\alpha$  на зависимости  $t'_{3D.cr}$  от величины  $p'$  при  $h/R = 0,01$ ,  $\lambda = 5,5$ ,  $n = 9$  (а) и  $h/R = 0,05$ ,  $\lambda = 2,0$ ,  $n = 4$  (б) и  $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ ,  $\omega = 0,5$ .

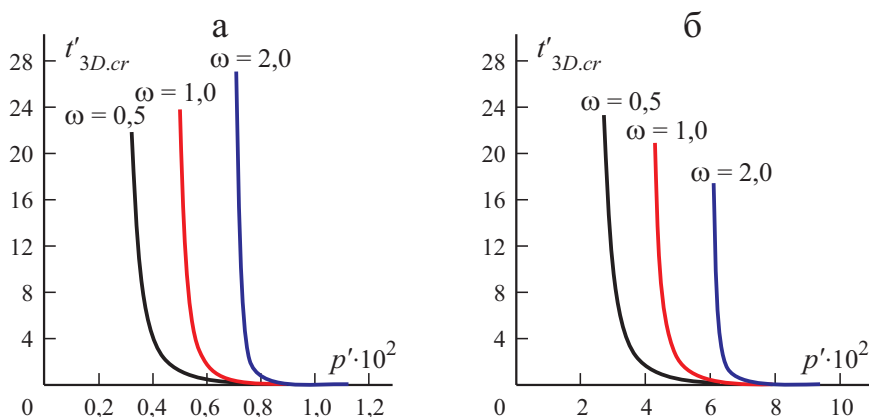


Рис. 5. Влияние реологического параметра  $E$  на зависимости  $t'_{3D.cr}$  от величины  $p'$  при  $h/R = 0,01$ ,  $\lambda = 5,5$ ,  $n = 9$  (а) и  $h/R = 0,10$ ,  $\lambda = 1,5$ ,  $n = 3$  (б) и  $E^{(2)}/E_0^{(1)} = 5$ ,  $\alpha = -0,5$ .

Из данных рис. 5 следует, что увеличение значений безразмерного реологического параметра  $\omega$  увеличивает критическое время  $t'_{3D.cr}$ . Однако напомним, что увеличение параметра  $\omega$  приводит к уменьшению значения  $p'_{3D.c.\infty}$ . Поэтому сделанный ранее вывод о характере влияния параметра  $\omega$  на значения параметра  $t'_{3D.cr}$  относится к случаям, когда  $p' < p'_{3D.c.\infty}|_{\omega=2,0}$  и  $p' < p'_{3D.c.\infty}|_{\omega=1,0}$ .

### Заключение

Таким образом, в настоящей работе рассмотрена трехмерная неосесимметричная задача локальной потери устойчивости полого цилиндра из вязкоупругого композитного материала. В предположении о том, что срединная поверхность цилиндра имеет бесконечно малое начальное несовершенство, в рамках трехмерных геометрически нелинейных уравнений и соотношений теории вязкоупругости изучали эволюцию этого несовершенства во времени. Соответствующую нелинейную задачу решали с помощью метода краевых возмущений, согласно которому ввели малый параметр, характеризующий начальное несовершенство, а все искомые величины представили в виде степенных рядов по этому параметру. Для исследования задач потери устойчивости используют только нулевое и первое приближения, которых достаточно для определения критического времени или критической силы.

Для выполнения численных исследований предположили, что материал цилиндра состоит из вязкоупругой матрицы и чисто упругих волокон, ориентированных в направлении оси цилиндра. Вязкоупругость материала цилиндра описывали дробно-экспоненциальными операторами. В

рамках континуального подхода материал цилиндра считали трансверсально-изотропным.

Основные выводы, основанные на численных результатах, можно сформулировать следующим образом.

1. Во многих случаях рассматриваемые приближенные теории оболочек достаточно хорошо описывают локальную неосесимметричную потерю устойчивости полого цилиндра из вязкоупругих композитных материалов.

2. В упомянутых случаях для исследования локальной неосесимметричной потери устойчивости цилиндра из вязкоупругого композитного материала более целесообразно использование ТЛТУ.

3. В некоторых случаях разность значений критического времени, определенных с помощью ТЛТУ и уточненной теории оболочек третьего порядка, может составлять один или два порядка, особенно когда значения интенсивности  $p'$  сжимающей силы близки к критическим, полученным при  $t' = 0$  и  $t' = \infty$ .

Наконец, следует отметить следующее. В настоящей работе использовали вторую версию теории малых начальных деформаций ТЛТУ. В то же время было бы интересно исследовать аналогичные задачи, применив процедуру линеаризации в более упрощенных геометрически нелинейных теориях упругости, рассмотренных в [23—26]. В этих работах использовали “последовательный” вариант геометрических соотношений, предложенный Доннеллом [27] для малых деформаций, и показали, что некоторые “абсурдные” результаты по устойчивости конструктивных элементов в классических нелинейных геометрических соотношениях исчезают. Было бы интересно сравнить результаты, полученные в рамках подхода, развитого в [23—26], с результатами настоящей работы.

Настоящая работа представлена как частичное выполнение требований для получения PhD степени в Йылдызском техническом университете.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biot M. A.* Mechanics of Incremental Deformations. — N. Y.: John Wiley and Sons, 1965.
2. *Green A. E., Rivlin R. S., and Shield R. T.* General theory of small elastic deformations superimposed on finite elastic deformations // Proc. R. Soc. A 211. — 1952. — No. 1104. — P. 128—154.
3. *Guz A. N.* Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. — Berlin: Springer-Verlag, Berlin, 1999.
4. *Biezeno C. B. and Hencky H.* On the general theory of elastic stability // Proc. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. — 1929. — Vol. 32, No. 4. — P. 444—456.
5. *Southwell R. V.* On the general theory of elastic stability // Phil. Trans. R. Soc. A. — 1914. — No. 213. — P. 187—244.

6. Babich I. Y. and Guz A. N. Stability of composite structural members (three-dimensional formulation) // Int. Appl. Mech. — 2002. — Vol. 38, No. 9. — P. 1048—1075.
7. Babich I. Y., Guz A. N., and Chechov V. N. The three-dimensional theory stability of fibrous and laminated materials // Int. Appl. Mech. — 2001. — Vol. 37, No. 9. — P. 103—1141.
8. Gerard F. and Gilbert A. A. Critical strain approach to creep buckling of plates and shells // J. Aeronaut. Sci. — 1958. — Vol. 25, No. 7. — P. 429—438.
9. Hoff N. J. Buckling and stability // J. Roy. Aeronaut. Soc. — 1954. — Vol. 58, No. 1.
10. Akbarov S. D. On the three-dimensional stability loss problems of elements of constructions fabricated from viscoelastic composite materials // Mech. Compos. Mater. — 1998. — Vol. 34, No. 6. — P. 537—544.
11. Akbarov S. D. Buckling delamination of elastic and viscoelastic composite plates with cracks. Survey I: solution method and problems related to the plane strain state // Mech. Compos. Mater. — 2012. — Vol. 48, No. 6. — P. 681—692.
12. Akbarov S. D. Buckling delamination of elastic and viscoelastic composite plates with cracks. Survey II: axisymmetric and 3D problems // Mech. Compos. Mater. — 2013. — Vol. 49, No. 1. — P. 97—106.
13. Akbarov S. D. Stability Loss and Buckling Delamination: Three-Dimensional Linearized Approach for Elastic and Viscoelastic Composites. — Berlin: Springer, 2013.
14. Akbarov S. D. and Karakaya S. 3D analyses of the stability loss of the circular solid cylinder made from viscoelastic composite material // Comput., Mater. & Continua. — 2011. — Vol. 22, No. 1. — P. 1—38.
15. Akbarov S. D. and Karakaya S. 3D analyses of the global stability loss of the circular hollow cylinder made from viscoelastic composite material // Eur. J. Mech. A - Solids. — 2012. — Vol. 33. — P. 48—66.
16. Akbarov S. D. and Karakaya S. 3D analyses of the symmetric local stability loss of the circular hollow cylinder made from viscoelastic composite material // Appl. Math. Model. — 2012. — Vol. 36. — P. 4241—4260.
17. Abrosimov N. A., Elesin A. V., and Igumnov L. A. Numerical simulation of the process of loss of stability of composite cylindrical shells under combined quasi-static and dynamic actions // Mech. Compos. Mater. — 2019. — Vol. 55, No. 1. — P. 41—52.
18. Bochkarev S. A. and Lekomtsev S. V. Stability of functionally graded circular cylindrical shells under combined loading // Mech. Compos. Mater. — 2019. — Vol. 55, No. 3. — P. 349—362.
19. Schapery R. A. Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analyses // Proc. 4th US Nat. Cong. Appl. Mech. ASME, 1962. — P. 1075—1086.
20. Rabotnov Yu. N. Elements of Hereditary Mechanics of Solid Bodies. — M.: Nauka, 1977 [in Russian].
21. Christensen R. M. Mechanics of Composite Materials. — N. Y.: Wiley, 1979.
22. ABAQUS-MIT, Buckling of a cylindrical shell under uniform axial pressure. Massachusetts Institute of Technology web resources, 2017. <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/> [Accessed: 2021 May 07]
23. Paimushin V. N. and Shalashilin V. I. Consistent variant of continuum deformation theory in the quadratic approximation // Dokl. Fisics. — 2004. — Vol. 49, No 6. — P. 374—377.
24. Paimushin V. N. and Shalashilin V. I. The relations of deformation theory in the quadratic approximation and the problems of constructing improved versions of the geometrically nonlinear theory of laminated structures // J. Appl. Math. Mech. — 2005. — Vol. 69, No 5. — P. 773—791.



25. *Paimushin V. N. and Shalashilin V. I.* Geometrically nonlinear equations in the theory of momentless shells with applications to problems on the non-classical forms of loss of stability of a cylinder // *J. Appl. Math. Mech.* — 2006. — Vol. 70, No 1. — P. 91—101.

26. *Berezhnoy D. V., Paimushin V. N., and Shalashilin V. I.* Investigations of the quality of the equations of the geometrically nonlinear theory of elasticity at small deformations and arbitrary displacements // *Solid Mech.* — 2009. — No. 6. — P. 31—47.

27. *Donnell L. H.* Beams, Plates, and Shells. — N. Y.: McGraw-Hill, 1972.

Поступила в редакцию 02.06.2021

Окончательный вариант поступил 12.10.2021

Received June 2, 2021 (Oct. 12, 2021)

---

*Н. В. Турбин\*, Р. Д. Трифонов, С. С. Ковтунов*

*Московский авиационный институт (НИИ), Россия*

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ СМЯТИЯ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА МЕТОДАМИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МИКРОМЕХАНИКИ**

*N. V. Turbin\*, R. D. Trifonov, and S. S. Kovtunov*

### **SIMULATION OF CRUMPLING IN COMPOSITE MATERIALS VIA COMPUTATIONAL MICROMECHANICS**

**Keywords:** crumpling, computational micromechanics, polymer-matrix composites, joints

A method for studying the crumpling of unidirectional composite material based on the computational micromechanics is proposed. A micromechanical model is used to study the elasticity and strength of a unidirectional composite material in crumpling under a fastener. The model simulates the test results on a semisample with a hole of diameter 6 mm. The effect of contact friction and fiber defects on the elastic modulus of crumpling is shown on a model that takes into account only the geometric nonlinearity. On a model with elastic-plastic properties of the matrix, the formation features of kink bands in fibers are shown and the sequence of damage initiation during crumpling is revealed. The relations obtained can be taken into account when creating a damage model of the homogenized material of a unidirectional composite layer and studying the crumpling on multidirectional lay-ups.

**Ключевые слова:** смятие, микромеханика вычислительная, композит с полимерной матрицей, соединения

Предложен метод изучения смятия однонаправленного композитного материала на основе вычислительной микромеханики. Микромеханическая модель использована для изучения упругости и прочности однонаправленного композитного материала в

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [turbinnv@mai.ru](mailto:turbinnv@mai.ru)  
Corresponding author: [turbinnv@mai.ru](mailto:turbinnv@mai.ru)

условиях работы на смятие под крепежным элементом. Модель имитирует результаты испытаний на полуобразце с отверстием диаметром 6 мм. На модели, учитывающей только геометрическую нелинейность, показано влияние трения контакта и дефектов волокна на модуль упругости смятия. На модели с упругопластическими свойствами матрицы показаны особенности образования полос кинкинга волокон и выявлена последовательность разрушения при смятии. Полученные закономерности могут быть учтены при создании модели разрушения обобщенного материала слоя и изучении смятия на разнонаправленных укладках.

## Введение

Полимерные композитные материалы (ПКМ) являются перспективными конструкционными материалами ввиду уникальных удельных прочностных и жесткостных свойств по сравнению с такими традиционно используемыми материалами, как металлические сплавы. В изделиях различных отраслей промышленности композитные материалы применяют уже более полувека, например, в авиации первый опыт применения конструкций из ПКМ в несущих конструкциях относится к 60-м гг. XX века. Основой расчета перспективных конструкций являются методы и положения, развитые механикой композитных материалов.

История использования композитных материалов в технике всегда была сопряжена с интенсивной научно-исследовательской работой ввиду обширного списка трудно объяснимых явлений, связанных со структурными особенностями материала и не поддающихся упрощениям в практических целях, проработанных за долгое время в отношении традиционных металлических сплавов. К числу таких феноменов относится смятие композитного материала под крепежным элементом и связанные с этим проблемы. Исследование смятия актуально [1] при использовании композитных материалов ввиду большого числа различных механических соединений в конструкциях, в том числе высоконагруженных. Анализ жесткости таких мест при высоком уровне нагрузок представляет некоторую трудность, так как поведение ПКМ при смятии при высоких нагрузках демонстрирует существенную нелинейность. Таким образом, расчеты несущей способности с учетом податливости болтовых соединений являются необходимостью [2].

Известны различные классификации видов конструкционных стыков, определяемые такими параметрами, как количество рядов крепежа, плоскостей среза, направления нагрузки, оформлением зоны контакта соединяемых поверхностей и др. Каждый тип соединений обладает своими особенностями при анализе [3].

В условиях смятия элемента конструкции из ПКМ наиболее вероятной причиной разрушения и начальной потери жесткости в ходе приложения

нагрузки является потеря устойчивости волокон [4—9]. Величина критической силы при этом зависит от кривизны и несоосности волокон – технологического дефекта, возникающего на стадии производства материала волокон и в процессе укладки изделия.

Явление складывания групп волокон (англ. “kinking”) следует отметить вследствие его исключительной роли в разрушении ортотропного материала под сжимающей нагрузкой. Обычно о возникновении группового изгиба волокон судят по результатам исследования уже разрушенного испытательного образца, получение же информации о развитии явления в процессе нагружения существенно усложняет процедуру испытаний и требует специального оборудования в виде мощных томографов и микроскопов.

В [10] приведены результаты испытания на сжатие однонаправленных образцов с наклонным надрезом для акцентированного развития складывания. Поведение материала при возрастании нагрузки фиксировалось в различных зонах при помощи снимков сканирующего электронного микроскопа. Микромеханическое моделирование испытаний на сжатие сумело воспроизвести некоторые локальные явления, характеризующие складывание волокна, соответствующие эксперименту. Таким образом, для случая одноосного сжатия удалось сделать выводы относительно роли и характеристик феномена складывания. Во-первых, подтверждалась гипотеза о том, что обширный кинкинг, как форма разрушения материала, соответствует точке потери несущей способности, во-вторых, сам по себе кинкинг является прогрессирующим феноменом и включает несколько этапов. Пиковой нагрузке соответствует выход в пластическую область деформирования материала матрицы по ширине образца (т.н. полоса пластичности), приводящий к потере жесткости системы волокно—матрица и соответственно увеличению изгиба волокон в пределах зоны пластичности. Волокна начинают складываться на границе полосы пластичности, при этом достигнутая к этому этапу кривизна филамента (по углу  $\varphi$ ) не меняется, а угол полосы складывания  $\beta$  возрастает. Разрушение волокон начинается от границ по вертикали полосы пластичности и прогрессирует к середине. Таким образом, разрушение волокна наступает после потери несущей способности образцом. Выявленная последовательность разрушения была подтверждена результатами расчета по аналитической балочной модели [11], сформулированной на основе проведенного экспериментального и численного исследования. Параметры полосы кинкинга, меняющиеся в процессе нагружения, представлены на рис. 1 ( $\omega$  — ширина полосы кинкинга,  $\beta$  — угол кинкинга).

Информация о закономерностях формировании полос сложенных волокон, полученная на микроуровне в испытаниях и при моделировании, может служить в дальнейшем при разработке аналитических моделей [8, 10, 12—14].

Зависимость напряжение—деформация, получаемая в ходе испытаний при смятии, имеет, как правило, нелинейный вид с тремя характерными

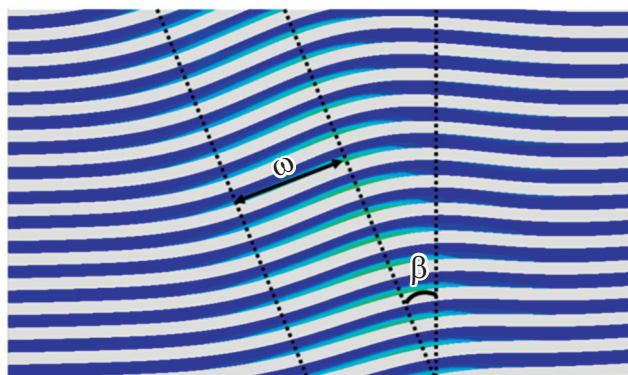


Рис. 1. Параметры полосы кинкинга.

участками. Начальный наклон обусловлен развитием контакта, средний участок представляет линейную зависимость, после чего наступает период потери жесткости по нелинейному закону. Испытания при смятии обычно продолжают до деформации отверстия 10%. Существует несколько признанных стандартов испытаний при смятии, таких как ASTM D 5961 A-D, ASTM D 953 и их аналогов [15, 16]. Альтернативно применяются оригинальные подходы, имеющие свои преимущества и недостатки относительно стандартных. Так, для создания условий доминирующего смятия материала испытывают полуобразец с отверстием путем надавливания выреза на фиксированный стержень заданного диаметра [9, 17].

Исследование роли кинкинга волокон в ходе смятия исследовали на полуобразцах тканого материала в работе [17]. Нелинейный участок кривой сила—перемещение начинался приблизительно на 70% пиковой нагрузки, а с 80% пиковой нагрузки были зафиксированы полосы кинкинга с разной ориентацией, в основном вблизи кромки отверстия. Ориентация полос кинкинга в слое однонаправленной ткани с нулевым направлением, судя по снимку томографа, зависит от соотношения сжимающих и сдвиговых деформаций: в центральной зоне, где преобладают деформации сжатия, полосы кинкинга были нормальны направлению нагрузки, а по сторонам, в местах больших деформаций сдвига, полосы кинкинга имели наклон к направлению нагрузки. Эффекты, полученные в эксперименте, не смогли быть зафиксированы авторами исследования [17] в расчете методом конечного элемента. Использовали континуальную модель разрушения в нескольких вариантах, различающихся методом регуляризации решения. Был сделан вывод о том, что континуальные модели с уровнем сложности, пригодным для практики, не способны локализовать прогрессивное разрушение волокна и нелинейное поведение матрицы до наступления пиковой нагрузки. В настоящем исследовании численная модель образца, выполненная на микромеханическом уровне, позволяет зафиксировать эффекты кинкинга, приводящие к потере несущей способности образца.

Дополнение натурных испытаний моделированием является в настоящее время распространенным и развивающимся подходом [18—20]. Так называемые виртуальные испытания, производимые, как правило, с использованием метода конечных элементов, служат удобным инструментом в подготовке испытаний, интерпретации результатов и выявлении таких свойств материала и конструкций, которые затруднительно и нерентабельно получать лабораторными испытаниями. В контексте использования пирамиды образцов исходные данные для расчета получают с более низкого уровня испытаний и затем применяют при прогнозировании свойств образцов высшего уровня, что, естественно, соответствует иерархической природе композитного материала. Наиболее распространено использование такого подхода при обобщении свойств слоя, полученных в ходе испытаний однонаправленных укладок, на свойства пакета для дальнейшего моделирования конструкций.

Модель слоя материала, будучи основой точного расчетного подхода, должна отражать все необходимые особенности механического поведения для адекватного использования в составе конструкций. Эффект смятия материала при контакте возможно зафиксировать при моделировании его на уровне составляющих — волокон и матрицы. Микромеханическая постановка задачи успешно применяется для гомогенизации таких свойств композитного материала, как упругость, прочность и вязкость разрушения методами виртуальных испытаний на ячейке периодичности и встроенной ячейке [21—23]. Упомянутые эффекты, обуславливающие поведение ПКМ при смятии (потеря устойчивости волокон, локальное пластическое течение матрицы и др.), возникают на микроуровне. Таким образом, для выявления подобных эффектов, анализа их развития и учета их влияния на поведение материала наиболее информативным является микромеханический анализ. В силу сложности задачи упругопластического деформирования гетерогенного материала с учетом геометрической нелинейности и контактных взаимодействий такую задачу решают численно с использованием метода конечных элементов (МКЭ).

Аналитическое решение задачи смятия слоя композитного материала является комплексной проблемой, в составе которой — задача на контакт, эффекты свободного края, многоосное напряженное состояние и потеря устойчивости. Однако такое решение, даже при наличии упрощений, является предпочтительным, давая основу для теоретического описания физического явления и инструмент для оптимизации параметров соединения при проектировании [6, 11, 24]. Корректность вновь полученного аналитического решения возможно подтвердить результатами эксперимента и расчета численными методами, такими как метод конечных элементов.

В настоящей работе предложен метод изучения смятия однонаправленного композитного материала на основе вычислительной микромеханики. Микромеханическая модель используется для изучения упругости и прочности однонаправленного композитного материала в условиях работы при смятии под крепежным элементом. Модель имитирует результаты

испытаний на полуобразце с отверстием диаметром 6 мм. В первой части исследования рассмотрено поведение материала с линейно-упругими свойствами и учетом нелинейных геометрических эффектов с целью получения модуля смятия и решения вопроса о состоятельности данной формулировки модели для имитирования поведения образца материала из эксперимента. В данной постановке оценено влияние трения и дефектов волокна на модуль смятия на основе параметрических исследований. Во второй части исследования использована модель, учитывающая упругопластические свойства матрицы и рассмотрена последовательность, локализация и особенности явлений, ведущих к потере несущей способности модели образца.

### 1. Определение модуля смятия на основе микромеханической модели с линейно-упругими свойствами материалов компонентов

Для получения численного решения использовали метод конечных элементов, реализованный в комплексе Abaqus (Abaqus Unified FEA — Dassault Systèmes® SIMULIA™). Модель имитирует испытания однонаправленного слоя методом сжатия полуобразца.

Граничные условия в модели: на левой кромке полуобразца задано равномерное ненулевое перемещение ( $U_1 \neq 0$ ), верхняя кромка ограничена перемещениями по оси  $Y$  ( $U_2 = 0$ ) и вращательными степенями свободы относительно осей  $X$  и  $Z$  ( $UR_1 = 0$ ,  $UR_3 = 0$ , по правой кромке болта заданы симметричные граничные условия по оси  $X$  ( $U_1 = UR_2 = UR_3 = 0$ ) (рис. 2.).

Геометрические параметры модели следующие: длина  $l = 8$  мм, полуширина  $\frac{1}{2}w = 4$  мм, диаметр отверстия  $d = 6$  мм, толщина  $t = 1$  мм.

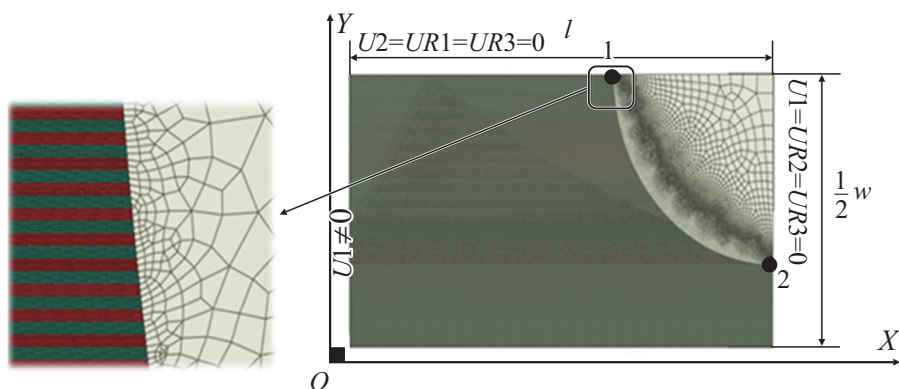


Рис. 2. Параметры основного образца: 1, 2 — расположение точек на образце для расчета деформации смятия. На увеличенном изображении видно разбиение на матрицу и волокно в композитном материале.



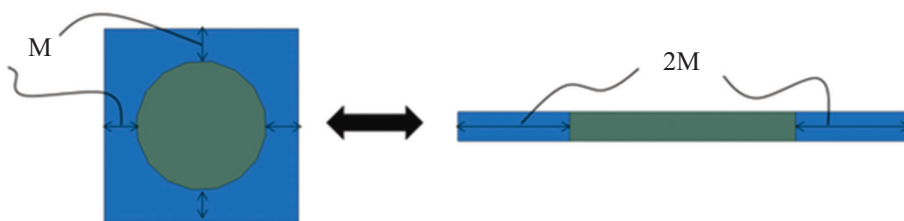


Рис. 3. Получение эквивалентной представительной ячейки в материале при моделировании элементами с плоской деформацией ( $M$  — содержание матрицы в образце).

В качестве композитного материала использовали углепластик T800/924C на основе угольного волокна и термореактивного связующего. Свойства материала и компонентов взяты из [25]: однонаправленный слой T800-924C —  $E_{11}=145$  ГПа,  $E_{22}=9,5$  ГПа,  $\nu_{12}=0,3$ ,  $G_{12}=5,0$  ГПа; матрица 924C —  $E_m=3,5$  ГПа,  $G_m=1,3$  ГПа,  $\sigma_y=80$  МПа; волокно T800 —  $E_L=294$  ГПа,  $\nu_{LT}=0,28$ ; стальной болт —  $E=210$  ГПа,  $\nu=0,3$ .

Дискретизация модели выполнена элементами с плоским деформированным состоянием. Для упрощения геометрии волокна в материале имели регулярное расположение. Обеспечение заданного объемного содержания волокна с учетом использования элементов с плоской деформацией имеет свои особенности. В плоском представлении ячейка материала должна быть механически эквивалентна объемной ячейке, модули упругости в плоскости должны соответствовать друг другу. В плоской ячейке для выполнения данного условия достаточно увеличить объем матрицы в два раза. Схема проиллюстрирована на рис. 3. Модули для сравнения получены на объемной ячейке и объемной плоской ячейке методами вычислительной микромеханики с использованием периодических граничных условий на ячейке с квадратной упаковкой.

Симметрия испытательного образца относительно оси  $OX$  используется для экономии вычислительного ресурса и отражена в граничных условиях.

Численные расчеты проводили на рабочей станции, имеющей 128 ГБ оперативной памяти, 16 физических ядер с возможностью распараллеливания вычислений на 32 потока, тактовая частота процессора Intel Xeon W-2295 — 3 ГГц.

Последовательность расчетных случаев выбиралась из условия постепенного уточнения задействованных эффектов. Сначала рассчитывали модель без трения, с прямолинейными волокнами и линейно-упругим материалом. Затем серией расчетов оценивали влияние трения и устанавливали значение трения для использования в будущих расчетных случаях. С выбранным значением коэффициента трения были совершены расчеты с учетом криволинейного волокна и расче-



ты с учетом упругопластических свойств компонентов материала во второй части исследования.

**1.1.1. Исследование 1. Базовый вариант модели.** Модель образца для испытаний представлена на рис. 2. Нагрузку в виде перемещения прикладывали к левой кромке образца. Значение перемещения подбирали из условия достижения требуемой средней деформации сжатия образца. Рассматривали два варианта: небольшая деформация, приблизительно 0,05 %, и высокая деформация 10%.

Принцип определения модуля смятия базируется на отношении средних напряжений смятия и относительной деформации отверстия, так что процедура в общем аналогична описанным в стандартах [15, 16]. Перемещение рассчитывали по разности перемещений точек 1 и 2 (см. рис. 2) и преобразовывали в деформацию смятия по выражению (1). Очевидно, что получаемая величина модуля смятия существенно зависит способа вычисления деформации (расчет с прямолинейными волокнами без учета трения,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\mu = 0$ ):

- заданное перемещение образца  $u_0 = 0,003$  мм,
- полученное перемещение точки 1  $u_1 = 0,00082$  мм,
- полученное перемещение точки 2  $u_2 = 0,002917$  мм,
- деформация отверстия по заданному перемещению  $\varepsilon_{\text{hole}0} = 0,05\%$ ,
- деформация отверстия по перемещению точки 2  $\varepsilon_{\text{hole}2} = 0,0486\%$ ,
- деформация отверстия по разнице перемещений точек 1 и 2  $\varepsilon_{\text{hole}12} = 0,0349\%$ ,
- модуль смятия по  $\varepsilon_{\text{hole}0}$   $E_{\text{crump}0} = 65,046$  ГПа,
- модуль смятия по  $\varepsilon_{\text{hole}2}$   $E_{\text{crump}2} = 66,902$  ГПа,
- модуль смятия по  $\varepsilon_{\text{hole}12}$   $E_{\text{crump}12} = 93,168$  ГПа.

Выражение для определения модуля смятия имеет вид

$$E_{\text{crump}} = \frac{\sigma_{\text{crump}}}{\varepsilon_{\text{hole}12}}, \quad \sigma_{\text{crump}} = \frac{2 \cdot RF}{d \cdot t}, \quad \varepsilon_{\text{hole}12} = \frac{u_2 - u_1}{d} \quad (1)$$

$RF$  — сила реакции.

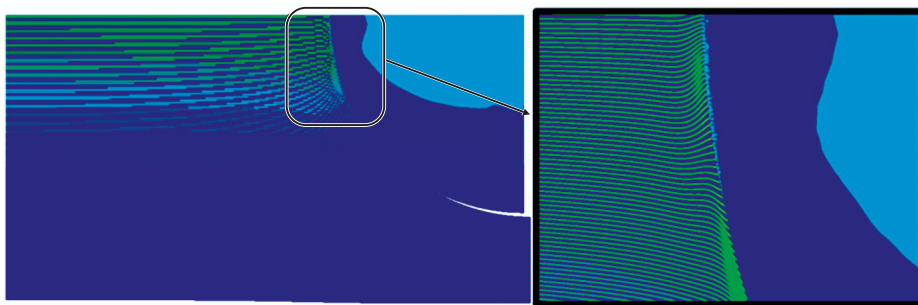


Рис. 4. Форма отклонения волокон при учете только геометрической нелинейности. Соответствует деформации образца 1,3%, масштаб деформаций 10:1.

Диаграмма деформирования в случае приложения малой и высокой деформации имела сходный наклон, что свидетельствует о несущественном влиянии изгиба волокон в зоне отверстия на жесткость системы. Форма изгиба волокон отражена на рис. 4 (перемещения в увеличенном масштабе 10:1). Очевидно, что направление изгиба волокон различается в зависимости от зоны расположения вдоль окружности контакта. Участок с изогнутыми волокнами имеет локальный характер и не влияет на потерю несущей способности образца материала в целом. Данные недавнего исследования с использованием обработки томограмм текущего состояния материала в ходе приложения нагрузки [26] подтверждают, что волокна меняют свою ориентацию группами в зависимости от величины нагрузки.

Модуль смятия, рассчитанный по модели обобщенного материала со свойствами, взятыми из [25] и коэффициентом трения, отличается от рассчитанного по микромеханической модели с тем же коэффициентом трения на 6%. В условиях отсутствия экспериментальных данных по смятию однонаправленного материала полученные результаты могут служить в качестве верификации микромеханической модели и обоснованием для анализа явлений, связанных со смятием, на качественном уровне.

**1.1.2. Исследование 2. Влияние трения.** Точная оценка модуля смятия требует учета трения контакта между болтом и слоем. Влияние трения оценивали в ходе параметрического исследования, в котором заданная величина коэффициента трения принимает значения 0,2, 0,4, 0,8.

В нашем случае трение моделируется [27] без учёта зависимости силы трения от скорости относительного движения контактирующих поверхностей. Использовали расширенную версию классической изотропной модели кулоновского трения.

Согласно модели относительного движения контактирующих поверхностей не происходит, если эквивалентное напряжение трения

$$\tau_{\text{eqv}} = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} \quad (2)$$

меньше критического напряжения  $\tau_{\text{cr}}$ , пропорционального контактному давлению  $p$ :

$$\tau_{\text{cr}} = \mu p. \quad (3)$$

Результаты расчета следующие: при  $\mu = 0$   $\varepsilon_{\text{hole}12} = 0,0349\%$  и  $E_{\text{crump}12} = 93,168$  ГПа; при  $\mu = 0,2$  —  $0,0341\%$  и  $112,1348$  ГПа; при  $\mu = 0,8$  —  $0,0265\%$  и  $220,4026$  ГПа соответственно. Видно, что учет трения значительно влияет на модуль упругости смятия. Отклонение волокон в ходе приложения нагрузки имеет форму, схожую с базовым случаем. Увеличение модуля упругости смятия связано с увеличением обобщенной силы, действующей на образец, при сохранении деформации. Возросшая величина обобщенной силы может быть объяснена возникновением “удерживающих” касательных напряжений в зоне контакта, что способ-

ствуем увеличению нормальных напряжений и расширению области действия максимальных нормальных напряжений по ширине образца.

Для дальнейших расчетов используем коэффициент трения 0,2 как наиболее правдоподобный.

Результаты моделирования в настоящем исследовании косвенно служат оценкой приблизительных границ диапазона возможных коэффициентов трения между однонаправленным композитным материалом и металлическим крепежным элементом. Из результатов видно, что коэффициент трения  $\mu = 0,2$  дает правдоподобное значение модуля смятия, в то же время при  $\mu = 0,8$  превышает модуль смятия материала при растяжении. Следовательно, реальный коэффициент трения находится в диапазоне  $\mu = 0,2—0,3$ .

**1.1.3. Исследование 3. Влияние угла несоосности волокон.** Из результатов многочисленных исследований известно, что прочность при сжатии однонаправленного материала имеет выраженную зависимость от наличия таких дефектов, как несоосность и криволинейность волокон, возникающих в ходе изготовления волокон и их укладки [4—8]. Причиной разрушения материала в условиях сжатия является потеря устойчивости волокон, при этом критическое напряжение уменьшается с увеличением указанных дефектов. Угол несоосности, характеризующий дефекты, измеряли разными техниками, в числе которых пересчет овализации волокна для ряда шлифов и обработка снимков рентген-микроскопа [28, 29]. Плотность вероятности отклонения волокон однонаправленного образца на определенный угол описывается нормальным распределением. Среднее значение угла отклонения соответствует  $\varphi = 0^\circ$ , т.е. номинальной ориентации материала слоя. Вероятность симметричного отклонения волокна на заданный угол одинакова для отрицательного и положительного значения. Стандартное отклонение величины несоосности волокон свидетельствует о качестве изготовления однонаправленного материала.

В настоящем исследовании предполагаем, что наличие особого поведения композитного материала в зоне смятия определяется во многом последствиями локальной потери устойчивости, поэтому отклонение геометрических характеристик армирующего компонента должно напрямую сказаться на значении модуля смятия. Влияние угла несоосности оценивали, сравнивая результаты расчета при углах 0, 1, 2, 5°.

Существует несколько способов представления искривленного волокна в модели. Наиболее распространенным является моделирование гео-

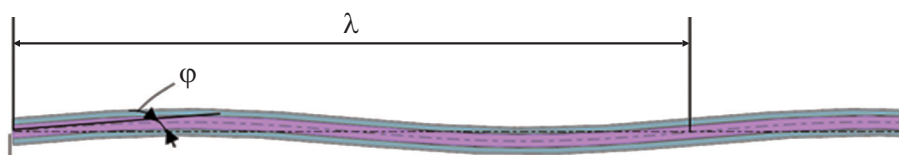


Рис. 5. Параметры модели криволинейного волокна.

метрии волокна тригонометрической функцией косинуса или синуса, где угол пересечения с соответствующей осью определяется выбранным значением угла несоосности филамента (рис. 5). Таким образом, уравнение синусоиды связывает ключевые параметры, моделирующие дефект, при заданном угле отклонения волокна  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} y &= b \sin(cx), \\ y' &= \operatorname{tg}(\varphi) = b \cos(cx)c, \\ b &= \frac{\operatorname{tg}(\varphi)}{\cos(cx)c} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi)}{c}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $b$  — амплитуда синусоиды;  $c$  — частота синусоиды —

$$\lambda = 2(l/n) \Rightarrow c = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (5)$$

$l$  — длина образца;  $n$  — количество пиков синусоиды;  $\lambda$  — длина волны синусоиды. При этом возникает множество вариантов для выбора длины волны синусоиды. В условиях ресурсоемкой вычислительной задачи длину волны в работе выбирали из удобства наложения и качества сетки.

Результаты расчетов (принято, что  $\mu = 0,2$ ) следующие: при  $\varphi = 0^\circ$   $\varepsilon_{\text{hole}12} = 0,0341\%$  и  $E_{\text{crump}12} = 112,7884$  ГПа; при  $\varphi = 1^\circ$  —  $0,0342\%$  и  $112,348$  ГПа; при  $\varphi = 2^\circ$  —  $0,0343\%$  и  $103,0927$  ГПа; при  $\varphi = 5^\circ$  —  $0,0346\%$  и  $99,59677$  ГПа соответственно. Уменьшение модуля смятия соответствует увеличению угла отклонения, зависимость имеет нелинейный характер. Отклонение волокон в ходе приложения нагрузки имеет форму, схожую с результатами предыдущих расчетных случаев. Снижение модуля упругости смятия связывается с нелинейным уменьшением напряжения потери устойчивости в зависимости от угла несоосности волокна [4].

**1.1.4. Выводы по расчету смятия на основе микромеханической модели с линейно-упругими свойствами материалов компонентов.** Результаты описанных исследований подтверждают тот факт, что при моделировании упругого материала и учете только геометрических нелинейных эффектов потери несущей способности элемента конструкции в заданных пределах деформации образца вследствие смятия не происходит. Учет трения между болтом и слоем наряду с учетом криволинейности волокна влияет только на изменение жесткости контакта. Для изучения явлений, возникающих в материале в ходе испытаний при смятии и влияющих на прочность, были выполнены квазистатические расчеты в явном решателе Abaqus с учетом пластических свойств матрицы.

## 1.2. Исследование упругости и прочности материала на основе микромеханической модели с упругопластическими свойствами матрицы

Расчетный анализ прочности композитного материала при смятии требует проведения расчетов при высоком уровне нагруженности материала, при котором происходит потеря устойчивости волокон, что обуславливает существенное геометрически нелинейное поведение модели. В то же время для адекватного описания поведения материала при высоких нагрузках модель материала матрицы должна включать в себя описание пластического течения материала, что приводит к высокому уровню физической нелинейности в поведении модели. В настоящем исследовании использовали упругопластические свойства матрицы, являющиеся типовыми для класса реактопластов и используемые в аналогичных исследованиях [30].

Обусловленная указанными факторами высокая степень нелинейности поведения модели приводит к проблемам со сходимостью решения при неявной схеме решения методом конечных элементов. В такой ситуации для обеспечения сходимости решения была использована явная схема решения.

Необходимость моделирования на микроуровне приводит к чрезвычайно малому размеру элемента конечно-элементной сетки, в результате чего конечно-элементная сетка модели содержит более 7,6 млн элементов. В силу того что размер элемента крайне мал, размер временного инкремента решения, определяемый при явной схеме решения по критерию Куранта—Фридрихса—Леви, принимает также крайне малое значение, рассчитываемое по формуле [27]

$$\Delta t \leq \min \left( L_e \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} \right), \quad (6)$$

где  $\Delta t$  — допустимый размер временного инкремента;  $L_e$  — характерный размер элемента;  $\rho$  — плотность материала;  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе (обозначены только здесь согласно первоисточнику, а в остальной части работы — длина волны из формулы (5) и коэффициент трения соответственно):

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (7)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (8)$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Таким образом, данная задача становится чрезвычайно ресурсоемкой с вычислительной

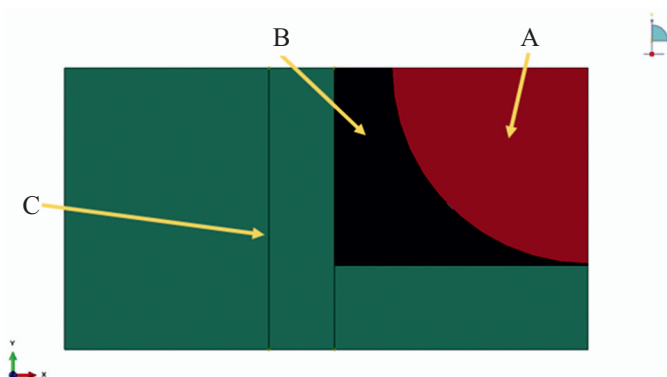
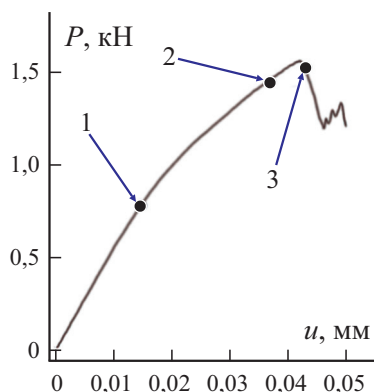


Рис. 6. Смешанная модель (A — материал болта, B — гетерогенный материал, C — однородный материал).

точки зрения. Для уменьшения времени расчета была подготовлена смешанная модель. В такой модели область смятия, где важно воспроизвести эффекты, возникающие на уровне волокна и матрицы, смоделирована на микроуровне, а удаленная от области смятия часть модели, в которой микроскопические эффекты не представляют интереса, смоделирована в виде однородного материала, обладающего гомогенизированными свойствами монослоя. Общий вид модели показан на рис. 6. Размер области, смоделированной на микроуровне, определен на основании результатов расчета модели, выполненной на микроуровне целиком. Остальная часть модели, в которой такие эффекты отсутствуют, смоделирована в виде однородного материала монослоя, так как его поведение при отсутствии эффектов, имеющих место на микроуровне, совпадает с истинным поведением гетерогенного материала.

**1.2.1. Исследование 4. Смятие микромеханической модели образца с учетом упругопластического поведения матрицы.** Принятое в расчете пластическое поведение материала матрицы основано на модели Дрюкера—Прагера (Drucker—Prager), в которой учитывается влияние объемных деформаций и внутреннего трения, что существенно, когда матрица находится под воздействием сжатия и сдвига. В некоторых работах, посвященных микромеханическому моделированию, показана эффективность указанной формулировки [13, 21]. Данная модель является встроенной в расчетном комплексе Abaqus, в руководстве пользователя [27] есть подробное описание модели и набор типовых свойств для расчета. Значение предела текучести  $\sigma_y = 80$  МПа матрицы выбрано по результатам анализа данных статей [13, 21, 27].

По результатам расчета микромеханической модели построена зависимость действующей на образец силы от перемещений заделки образца. Данную кривую можно условно разделить на три участка: линейно-упругий участок, участок с выраженной нелинейностью, участок полной потери

Рис. 7. Зависимость силы  $P$  от перемещения  $u$ .

несущей способности (рис. 7). В таблице приведены значения средних напряжений, деформаций отверстия и секущих модулей для характерных точек на графике сила—перемещение.

Переход от линейного к нелинейному участку кривой совпадает с началом изгиба первых волокон. При этом волокна начинают изгибаться примерно одновременно в двух зонах (рис. 8), в верхней зоне ось волокна параллельна нормали к сминающей поверхности, изгиб волокна происходит от сжатия. В нижней зоне ось волокна составляет некоторый угол с нормалью к сминающей поверхности, и изгиб волокна происходит в том числе под воздействием силы, перпендикулярной к оси волокна. В свою очередь процесс изгиба волокон связан с пластическим течением матрицы, так как волокно в матрице можно представить как балку на упругом основании, и ослабление матрицы в результате пластического течения приводит к изменению условий опирания и соответственно к снижению критических напряжений потери устойчивости. На примере результатов моделирования можно убедиться, что во всех случаях, где наблюдается изгиб волокна, ему

Значения средних напряжений, деформаций отверстия и секущего модуля для характерных точек на кривой деформирования образца

Номер точки на графике сила—перемещение (см. рис. 7)	Деформация отверстия по разности перемещений в точках образца 1 и 2 $\varepsilon_{\text{hole12}}$	Средние напряжения $\sigma_{\text{crump}}$ , МПа	Секущий модуль смятия $E_{\text{crump12}}$ , ГПа
1	0,002276	243,743	107,1
2	0,006464	497,78	77
3	0,00698	517,41	74,1

Примечание: Значения напряжений  $\sigma_{\text{crump}}$  и деформаций  $\varepsilon_{\text{hole12}}$  определены по значениям сил и перемещений по формулам, приведенным ранее.



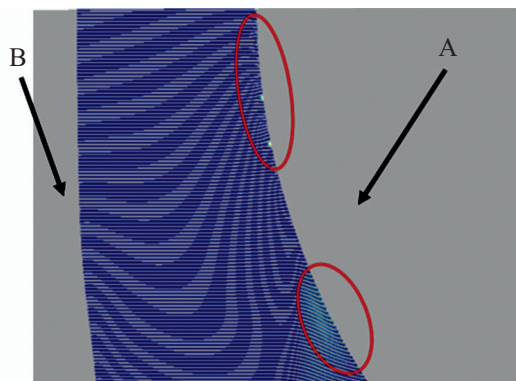


Рис. 8. Зоны начала изгиба волокон:  $A$  — болт,  $B$  — материал с обобщенными свойствами (для наглядности показан масштабированный результат).

предшествует появление пластических деформаций в прилегающей области матрицы. На рис. 9 приведены временные зависимости эквивалентных пластических деформаций и вертикальных перемещений точки матрицы, прилегающей к волокну в области смятия, положение точки показано на рис. 10. По вертикальным перемещениям можно судить об изгибе волокна. Можно увидеть, что изгиб волокна связан с пластическим течением матрицы (см. кривую  $B$ ).

На протяжении всего процесса деформирования образца области изгиба волокон возникают только в зоне контакта со сминающим элементом и

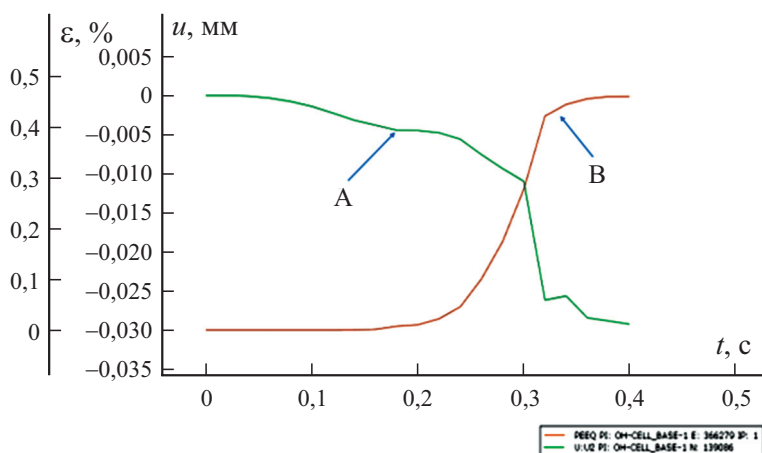


Рис. 9. Временные зависимости — вертикальных перемещений  $u$  точки модели ( $A$ ) и эквивалентных пластических деформаций  $\varepsilon$  ( $B$ ) от времени  $t$ , находящейся в области смятия (местоположение точки показано на рис. 10).



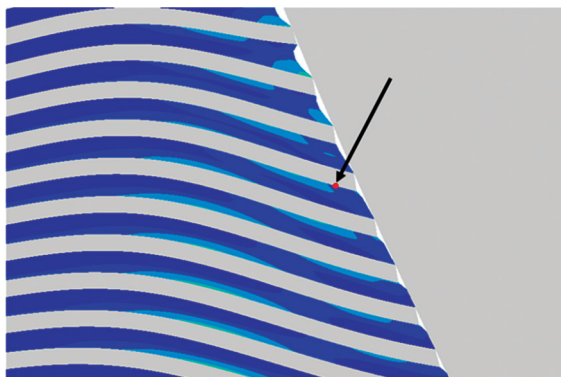


Рис. 10. Местоположение точки, для которой были построены графики пластических деформаций и вертикальных перемещений (местоположение точки указано стрелкой).

только к моменту потери несущей способности выходят за пределы зоны контакта. Состояние образца на момент времени, соответствующий точке 2 на кривой сила—перемещение (см. рис. 7), иллюстрируют данные рис. 11, т.е. до потери несущей способности. Видно, что изгиб волокон имеет место только в области контакта со сминающим элементом. На рис. 12 проиллюстрировано состояние образца на момент времени, соответствующий точке 3 на кривой сила—перемещение (см. рис. 7), после потери несущей способности. В этот момент времени изгиб волокна имеет место за пределами области контакта со сминающим элементом. Такое поведение модели соответствует результатам обработки томограмм текущего состоя-

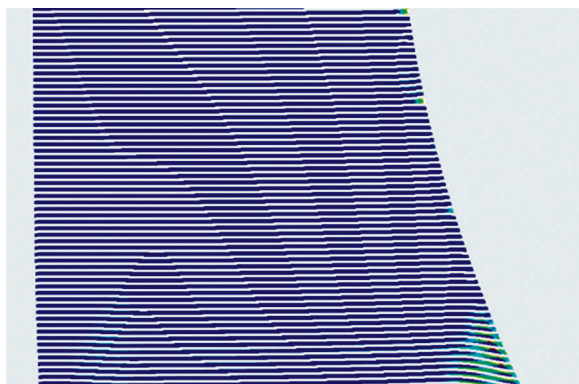


Рис. 11. Состояние образца на момент времени, соответствующий точке 2 на кривой сила—перемещение (см. рис. 7); изгиб волокна происходит только в зоне контакта со сминающим элементом.

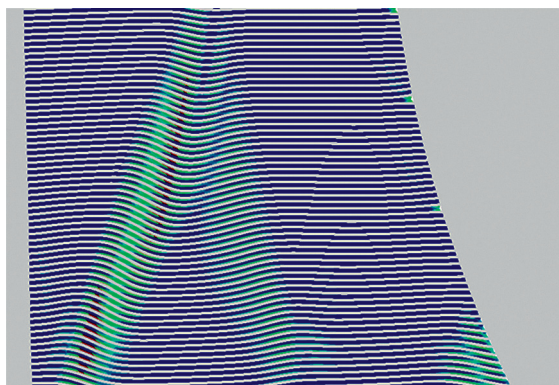


Рис. 12. Состояние образца на момент времени, соответствующий точке 3 на кривой сила—перемещение (см. рис. 7); изгиб волокна происходит в том числе и за пределами зоны контакта со сминающим элементом.

ния материала, приведенным в работе [26] и показывающим, что волокна меняют свою ориентацию группами в зависимости от величины нагрузки.

### Заключение

По результатам проведенных исследований можно судить о применимости вычислительной микромеханической модели в части детального представления поведения композитного материала под сминающим воздействием крепежного элемента.

Для получения характеристик упругого поведения материала достаточной оказывается формулировка модели, учитывающая только линейно-упругое поведение компонентов материала. При этом существенное влияние на результат моделирования оказывает выбранное значение коэффициента трения контакта крепежного элемента и композитного слоя. Сравнительная оценка результатов дает основание предполагать, что реальное значение коэффициента трения не превышает  $\mu = 0,4$ . Кривизна волокна также влияет на модуль смятия, однако существенного влияния в диапазоне выбранных для параметрического исследования значений учет криволинейности волокон не показал. В то же время линейно-упругая микромеханическая модель материала оказалась не способна зафиксировать потерю несущей способности системы вследствие потери устойчивости, а, следовательно, учет только геометрической нелинейности недостаточен для определения прочности образца при смятии.

Выводы о последовательности, локализации и особенности явлений, ведущих к потере несущей способности, получены по результатам микромеханической модели с учетом нелинейности материала матрицы. Явление “складывания” волокна (kinking) оказывается в случае смятия

основным механизмом разрушения, так же как и в случае продольного сжатия, однако конфигурация и развитие зон интенсивного складывания различны для двух видов нагружения. Переход напряженно-деформированного состояния матрицы в пластическую зону начинается на ранних стадиях нагружения и, занимая определенную область в зоне контакта, значительно ускоряет процесс складывания, что приводит к достижению пика нагрузки. Микромеханическая модель позволяет отчетливо выделить зоны с разным характером протекании процессов разрушения.

Развитие предлагаемого подхода видится авторам применительно к изучению смятия в многослойных разнонаправленных укладках, в которых должна учитываться деламинация слоев и эффект от взаимодействия соседних слоев с разными ориентациями. Текущая формулировка модели может быть уточнена включением разрушаемого интерфейса волокно—матрица, что может повлиять на картину разрушения материала в условиях смятия.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Montagne B., Lachaud F., Paroissien E., Martini D.* Failure analysis of composite bolted joints by an experimental and a numerical approach // ECCM 2018 - 18th Europ. Conf. Compos. Mater., Athens, 24-28 June, 2020.
2. *Eremin V., Bolshikh A., Koroliskii V., Shelkov K.* Methods for flexibility determination of bolted joints: Empirical formula review // J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — Vol. 1925, No. 1. — P. 1—9.
3. *Camanho P. P., Matthews F. L.* Stress analysis and strength prediction of mechanically fastened joints in FRP: A review // Composites: Part A. — 1997. — Vol. 28, No. 6. — P. 529—547.
4. *Barbero E. J.* Prediction of compression strength of unidirectional polymer matrix composites // J. Compos. Mater. — 1998. — Vol. 32, No. 5. — P. 483—502.
5. *Budiansky B., Fleck N. A.* Compressive failure of fibre composites // J. Mech. Phys. Solids. — 1993. — Vol. 41, No. 1. — P. 183—211.
6. *Budiansky B., Fleck N. A., Amazigo J. C.* On kink-band propagation in fiber composites // J. Mech. Phys. Solids. — 1998. — Vol. 46, No. 9. — P. 1637—1653.
7. *Soutis C., Fleck N. A., Smith P. A.* Failure prediction technique for compression loaded carbon fibre-epoxy laminate with open holes // J. Compos. Mater. — 1991. — Vol. 25, No. 11. — P. 1476—1498.
8. *Sutcliffe M. P. F., Fleck N. A.* Microbuckle propagation in fibre composites // Acta Materialia. — 1997. — Vol. 45, No. 3. — P. 921—932.
9. *Wu P. S., Sun C. T.* Modeling bearing failure initiation in pin-contact of composite laminates // Mech. Mater. — 1998. — Vol. 29, Nos. 3—4. — P. 325—335.
10. *Pimenta S., Gutkin R., Pinho S. T., Robinson P.* A micromechanical model for kink-band formation: Part I. Experimental study and numerical modelling // Compos. Sci. Technol. — 2009. — Vol. 69, Nos. 7—8. — P. 948—955.
11. *Pimenta S., Gutkin R., Pinho S. T., Robinson P.* A micromechanical model for kink-band formation: Part II-Analytical modelling // Compos. Sci. Technol. — 2009. — Vol. 69, Nos. 7—8. — P. 956—964.

12. Hsu S. Y., Vogler T. J., Kyriakides S. Compressive strength predictions for fiber composites // J. Appl. Mech., Trans. ASME. — 1998. — Vol. 65, No. 1. — P. 7—16.
13. Herráez M., Bergan A. C., Lopes C. S., González C. Computational micromechanics model for the analysis of fiber kinking in unidirectional fiber-reinforced polymers // Mech. Mater. — 2020. — Vol. 142, March. — P. 1—25.
14. Daum B., Feld N., Allix O., Rolfes R. A review of computational modelling approaches to compressive failure in laminates // Compos. Sci. Technol. — 2019. — Vol. 181, Sept. — P. 1-37
15. ASTM Standard D 953-37 Bearing Strength of Plastics. — 2019. — P. 1—8.
16. ASTM Standard D5961/D5961M-13 Bearing Response of Polymer Matrix Composite Laminates. — 2013. — P. 1—31.
17. Sola C., Castanié B., Michel L., Lachaud F., Delabie A., Mermoz E. On the role of kinking in the bearing failure of composite laminates // Compos. Struct. — 2016. — Vol. 141, May. — P. 184—193.
18. Falcó O., Tijss B., Romano B., Lopes C. S. A virtual test lab for unidirectional composite coupons // ECCM 2018 - 18th Europ. Conf. Compos. Mater., Athens, 24-28 June, 2020.
19. Hosseini S., Löhnert S., Wriggers P., Baranger E. A Multiscale projection method for the analysis of fiber microbuckling in fiber reinforced composites // Lecture Notes in Appl. Comput. Mech. — 2020. — Vol. 93. — P. 167—184.
20. Pogosyan M., Nazarov E., Bolshikh A., Koroliskii V., Turbin N., Shramko K. Aircraft composite structures integrated approach: A review // J. Phys.: Conf. Ser. — 2021. — Vol. 1925, No. 1 — P. 1—16.
21. González C., Llorca J. Mechanical behavior of unidirectional fiber-reinforced polymers under transverse compression: Microscopic mechanisms and modeling // Compos. Sci. Technol. — 2007. — Vol. 67, No. 13. — P. 2795—2806.
22. Canal L. P., Pappas G., Botsis J. Large scale fiber bridging in mode I intralaminar fracture. An embedded cell approach // Compos. Sci. Technol. — 2016. — Vol. 126, Apr. — P. 52—59.
23. Pierard O., Friebe C., Doghri I. Mean-field homogenization of multi-phase thermo-elastic composites: A general framework and its validation // Compos. Sci. Technol. — 2004. — Vol. 64, No. 10—11. — P. 1587—1603.
24. Malakhov A. V., Polilov A. N., Li D., Tian X. Increasing the bearing capacity of composite plates in the zone of bolted joints by using curvilinear trajectories and a variable fiber volume fraction // Mech. Compos. Mater. — 2021. — Vol. 57, No. 3. — P. 287—300.
25. Zhao L., Wang K., Ding F., Qin T., Xu J., Liu F., Zhang J. A post-buckling compressive failure analysis framework for composite stiffened panels considering intra-, inter-laminar damage and stiffener debonding // Results in Physics. — 2019. — Vol. 13, June. — P.1—10.
26. Emerson M. J., Wang Y., Withers P. J., Conradsen K., Dahl A. B., Dahl V. A. Quantifying fibre reorientation during axial compression of a composite through time-lapse X-ray imaging and individual fibre tracking // Compos. Sci. Technol. — 2018. — Vol. 168, Nov. — P. 47—54.
27. Abaqus 2018 Analysis User's Guide // Book Abaqus 2018 Analysis User's Guide / EditorSimulia, 2018.
28. Czabaj M. W., Riccio M. L., Whitacre W. W. Numerical reconstruction of graphite/epoxy composite microstructure based on sub-micron resolution X-ray computed tomography // Compos. Sci. Technol. — 2014. — Vol. 105. — P. 174—182.

29. *Yurgartis S. W.* Measurement of small angle fiber misalignments in continuous fiber composites // *Compos. Sci. Technol.* — 1987. — Vol. 30, No. 4. — P. 279—293.

30. *Fiedler B., Hojo M., Ochiai S., Schulte K., Ando M.* Failure behavior of an epoxy matrix under different kinds of static loading // *Compos. Sci. Technol.* — 2001. — Vol. 61, No. 11. — P. 1615—1624.

Поступила в редакцию 08.02.2022

Окончательный вариант поступил 04.04.2022

Received Feb. 8, 2022 (Apr. 4, 2022)

---

*В. Н. Паймушин<sup>а,б\*</sup>, Р. К. Газизуллин<sup>а,б</sup>, С. А. Холмогоров<sup>а,б</sup>, М. А. Шишов<sup>а</sup>*

*<sup>а</sup>Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева,  
420111 Россия*

*<sup>б</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008 Россия*

## **МЕХАНИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕСТ-ОБРАЗЦОВ ИЗ СЛОИСТЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ СО СТРУКТУРОЙ $[\pm 45^\circ]$ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ**

### **2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ ВНУТРЕННИХ ФОРМ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ<sup>1</sup>**

*V. N. Paimushin\*, R. K. Gazizullin, S. A. Kholmogorov, and M. A. Shishov*

## **DEFORMATION MECHANICS OF FIBER-REINFORCED PLASTIC SPECIMENS WITH A $[\pm 45^\circ]$ LAY-UP IN TENSILE AND COMPRESSION TESTS**

### **2. INVESTIGATION OF FLAT INTERNAL BUCKLING MODES**

**Keywords:** fiber-reinforced plastic, specimen, cross-ply lay-up, tension, compression, linearized equations, buckling modes, ultimate stress

A refined statement of linearized problems on flat internal multiscale buckling modes of a rigid lamina with either fibers or a fiber bundle is presented, taking into account their interaction with an epoxy matrix. In the prebuckling (unperturbed) state, these constituent elements are under the influence of not only shear stresses, but also tensile (compression) ones in the direction of the fibers. This prebuckling stress state is formed in fibers and fiber bundles during the tension and compression of flat test specimens from cross-ply reinforced composites with straight fibers. For statement of the problem, equations were constructed by reducing a consistent version of the geometrically nonlinear equations of elasticity theory to one-dimensional equations of the theory of straight rods. The refined Timoshenko shear model was used, taking into account the

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [vpajmushin@mail.ru](mailto:vpajmushin@mail.ru)  
Corresponding author: [vpajmushin@mail.ru](mailto:vpajmushin@mail.ru)

<sup>1</sup>Сообщение 1 см. [36].

transverse tensile and compression strains in a rigid lamina. For epoxy layers, models of a transversely soft layer with fixed boundary planes in the perturbed state were used. They differ from the previously constructed equations by taking into account the formation of additional prebuckling tensile (compression) forces in the fiber direction in the rigid lamina of the composite. It is shown theoretically that, in  $[\pm 45]_{2s}$  specimens, the most intense and continuous rearrangement of the composite structure, due to the implementation and continuous change of the studied internal buckling modes with a continuous change in the wave formation parameter, has to be observed in compression. In tension, such phenomena are possible only owing to the formation of initial shear stresses.

**Ключевые слова:** композит волокнистый, тест-образец, армирование косоугольное, растяжение, сжатие, уравнения линеаризованные, формы потери устойчивости, напряжение критическое

Дана уточненная постановка линеаризованных задач о плоских внутренних разномасштабных формах потери устойчивости жесткого монослоя, состоящего или из волокон, или из пучков волокон (нитей) с учетом их взаимодействия с окружающей матрицей. Они являются составными структурными элементами волокнистых композитов и находятся в докритическом (невозмущенном) состоянии под действием не только напряжений сдвига, но и растяжения (сжатия) в направлении волокон. Такое начальное напряженное состояние, как установлено в первой части статьи на основе анализа результатов теоретических и экспериментальных исследований, формируется в волокнах и пучках волокон при испытаниях на растяжение и сжатие плоских тест-образцов из косоугольно армированных композитов с прямолинейными волокнами. Для постановки задачи использованы уравнения, построенные редукцией непротиворечивого варианта геометрически нелинейных уравнений теории упругости к одномерным уравнениям теории прямых стержней на основе уточненной сдвиговой модели Тимошенко с учетом деформаций растяжения—сжатия в поперечном направлении для жесткого монослоя, для слоев связующего — модели трансверсально-мягкого слоя с неподвижными граничными плоскостями в возмущенном состоянии. Они отличаются от ранее построенных учетом формирования в жестком монослое композита дополнительных докритических усилий растяжения (сжатия) в направлении волокон. Теоретически показано, что в тест-образцах со структурой  $[\pm 45]_{2s}$  наиболее интенсивная и непрерывная перестройка структуры композита из-за реализации и непрерывной смены исследуемых внутренних форм потери устойчивости при непрерывном изменении параметра волнообразования должна наблюдаться



в условиях сжатия образцов, а в условиях растяжения такие явления возможны лишь из-за формирования начальных напряжений сдвига.

### Введение

Однонаправленные волокнистые композитные материалы (ВКМ) нашли широкое применение при изготовлении высоконагруженных элементов конструкций аэрокосмической техники благодаря высокой удельной прочности. Обладая сравнительно высокими прочностными характеристиками при растяжении, они характеризуются значительно меньшими значениями прочностных свойств при сжатии. Круг задач и достаточно простые для понимания их решения, связанные с испытаниями на сжатие тест-образцов из таких композитов и анализом видов разрушения при сжатии, в доступной форме освещены в монографии [1]. Известно, что при испытаниях тест-образцов поведение волокнистого композитного материала при сжатии в направлении волокон принципиально отличается от поведения при растяжении: при растяжении как образец, так и структура материала самоориентируются вдоль направления нагрузки, в то время как при сжатии материал (образец) стремится “уйти” из-под нагрузки [1]. Механизмы такого “ухода” различны и связаны с разными видами разрушения, в частности, для ВКМ со структурой  $[0^\circ]_s$  (рис.1): смятие по торцу; потеря устойчивости; расслоение и/или расщепление с выщелкиванием слоев; “бочкообразование”, или расслоение посередине; образование полосы сдвига.

В сравнении с экспериментами на растяжение экспериментальное определение механических свойств волокнистых композитов при сжатии представляет собой гораздо более сложную задачу. Связано это с особенностями передачи нагрузки на рабочую часть образца. В настоящий

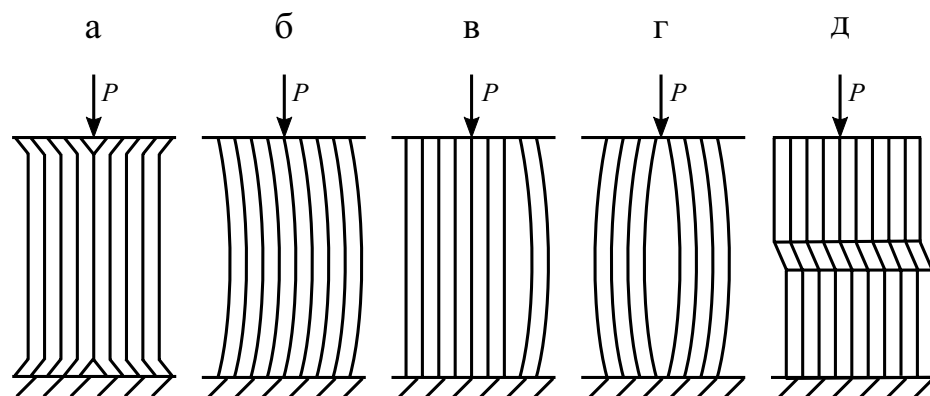


Рис. 1. Возможные виды разрушения при сжатии композитных образцов: а — смятие по торцам; б — макровыпучивание; в — выщелкивание полосы; г — расслоение посередине; д — образование полосы сдвига.



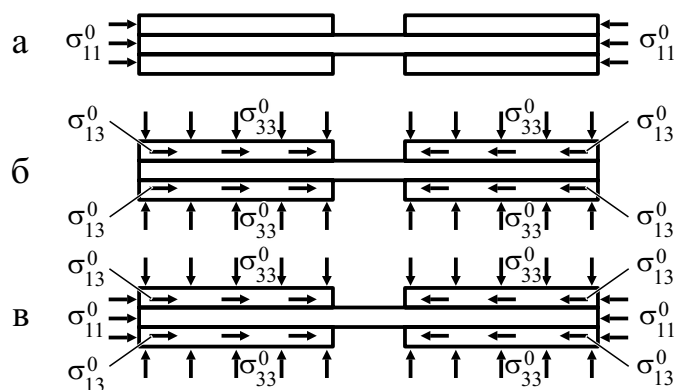


Рис. 2. Схемы нагружения образцов при испытаниях на сжатие: а —  $\sigma_{11}^0 \neq 0, \sigma_{33}^0 = 0, \sigma_{13}^0 = 0$  (торцевое нагружение); б —  $\sigma_{33}^0 \neq 0, \sigma_{13}^0 \neq 0, \sigma_{11}^0 = 0$  (касательное нагружение); в —  $\sigma_{11}^0 \neq 0, \sigma_{33}^0 \neq 0, \sigma_{13}^0 \neq 0$  (комбинированное нагружение).

момент существует три наиболее используемых стандарта испытаний, в соответствии с которыми обеспечивается торцевое, касательное или комбинированное приложение нагрузки на тест-образец (рис. 2).

Торцевое нагружение тест-образца осуществляется, например, в соответствии со стандартом ГОСТ 4651-82 (ASTM D695), согласно которому образец с подкреплённой металлическими пластинами рабочей частью длиной около 40 мм нагружают жёсткими плитами через торцы. Такие испытания являются относительно простыми в реализации, однако для высокопрочных однонаправленных волокнистых композитов вероятность разрушения торцов тест-образца от действия контактных напряжений высока. Поэтому такую технологию испытаний можно применять только для волокнистых композитов, имеющих небольшое значение отношения предела прочности к модулю поперечного сдвига.

Нагружение тест-образцов касательными усилиями ( $\sigma_{33}^0 \neq 0, \sigma_{13}^0 \neq 0, \sigma_{11}^0 = 0$ ) осуществляется, например, согласно стандарту ГОСТ 25.602-80 (ASTM D3410). Для передачи нагрузки на образец используется сравнительно сложное приспособление, представляющее два жёстких блока с интегрированными клиновыми зажимами. От клиновых захватов на тест-образец касательное усилие передаётся через достаточно мягкие накладки. Данный вид испытаний применим для многих видов композитных материалов, включая однонаправленные высокопрочные композиты на основе углеволокон. Преимущество метода заключается в значительно большей площади передачи нагрузки на образец, так как длину и ширину захватной части можно варьировать в широком диапазоне. Однако, как показывают многочисленные исследования (см., например [2]), имеет место концентрация касательных и поперечных нормальных напряжений в зоне перехода от мягких накладок к рабочей части образца. Такое явление

ние приводит к уменьшению замеряемого предела прочности композитного материала по сравнению с его реальным значением.

Схема испытаний с комбинированным нагружением тест-образца описана в стандарте ASTM D6641. Приспособление для таких испытаний технически проще приспособления ГОСТ 25.602-80 (ASTM D3410) ввиду отсутствия клиновых захватов. Усилие, передаваемое на тест-образец, распределяется между торцами и лицевой поверхностью тест-образца, что приводит к уменьшению концентрации напряжений. Очевидным недостатком метода является невозможность точного распределения торцевых и касательных усилий на тест-образец, вследствие чего может возрасти разброс экспериментальных данных.

В связи со сложностью и иногда противоречивостью получаемых механических характеристик с помощью трёх описанных схем нагружения значительное количество работ [2—9] было посвящено изучению влияния схем нагружения, типоразмеров тест-образцов и используемых накладок на величину предельных напряжений, определяемых в эксперименте.

Исследованиям механических характеристик при динамическом нагружении также уделяется большое внимание ввиду действия на некоторые конструкции в аэрокосмической отрасли ударных нагрузок. В рамках данного обзора невозможно охватить весь объём работ по этой тематике. В качестве примера можно отметить работы [10—12].

Большая работа по выбору оптимальной схемы эксперимента на сжатие однонаправленных волокнистых композитов была описана в [13, 14]. Авторами сделан вывод о том, что определение механических характеристик при сжатии с использованием перекрёстно армированных тест-образцов является более надёжным способом, чем однонаправленных тест-образцов.

Разрушение волокнистых композитов при сложнонапряжённом состоянии, как и для металлических материалов, может быть описано какой-либо теорией прочности. Разработанные на сегодняшний момент критерии прочности хорошо описывают разрушение при двухосном растяжении или растяжении со сдвигом, тогда как при сжатии результаты оказываются менее удовлетворительными. Специфика разрушения волокнистых композитов заключается в реализации различных механизмов разрушения матрицы, связующего или их комбинации. В [15] уделяется внимание разрушению слоистого композита при сжатии с учётом нелинейного поведения связующего. В критерии разрушения предусмотрена возможность реализации сдвиговой формы потери устойчивости за счет учёта отклонения волокон композита от прямолинейного направления. В [16] авторы, наряду с критерием разрушения волокон, ввели критерий, учитывающий разрушение связующего между волокнами. Это позволило более точно описать момент начала разрушения композита, которое не является исчерпанием несущей способности.

Оригинальный способ описания разрушения плоских пластин в рамках среды Коссера с использованием шестипараметрической теории

оболочек [17] предложен в работе [18]. Предполагали, что разрушение возможно ввиду реализации внутренней крутильной неустойчивости полубесконечной среды, модель которой основана на введении в нее чередующихся осевых и крутильных упругих элементов. Численные результаты, иллюстрирующие возможности предложенной теории, получены методом конечных элементов. Расчёты проведены для стержня полосы с отверстием посередине — инициатором возмущения при нагружении.

Следует отметить, что в механике композитных материалов уже более 50 лет существует направление исследований, связанное с постановкой и решением задач о так называемых внутренних и поверхностных (периферийных) формах потери устойчивости (ФПУ) слоистых волокнистых композитов, армированных прямолинейными или криволинейными волокнами и находящихся в тех или иных условиях нагружения. Большой цикл исследований в этом направлении был проведен во второй половине прошлого столетия, результаты которых нашли отражение во многих научных статьях и монографиях. Укажем некоторые из них: монография [19], в которой теория устойчивости волокнистых и слоистых армированных сред строится на основе строгих трехмерных уравнений теории упругости, для регулярных слоистых структур введены в рассмотрение формы потери устойчивости первого, второго, третьего и четвертого родов; монография [20], в которой для многослойных структур, состоящих из чередующихся жестких и мягких (мало жестких) слоев, на основе введения гипотез для каждого слоя получены двухмерные уравнения, порядок которых зависит от количества слоев, развита теория слоистых композитных материалов, полученная в результате перехода к системам мелкослойной структуры, для слоистых систем регулярного строения введены в рассмотрение синфазные, антифазные и поверхностные изгибные ФПУ.

Отметим также справочник [21], в котором на основании результатов работы [22] описан один из видов разрушения композитов, являющийся следствием потери устойчивости периферийных слоев, ориентированных параллельно приложенной нагрузке, приведены простейшие формулы для определения напряжений потери устойчивости волокон, рассматриваемых как стержни на упругом основании.

В теории прочности ВКМ одно из направлений — исследование устойчивости фаз композита, так как при сжатии вдоль волокон наиболее возможным является разрушение по причине реализации сдвиговой потери устойчивости с образованием полосы сдвига. Теоретическим и экспериментальным исследованиям этого явления на настоящий момент посвящено большое количество работ (см., например, [23—30]. Общими в них являются вопросы разработки моделей, описывающих образование полосы сдвига с определением соответствующего уровня нормальных напряжений сжатия. В соответствии с [23—30] они считаются равными осредненному значению модуля поперечного сдвига волокнистого композита. Например, работа [24], носящая обзорный характер, развивает мо-

дель образования полосы сдвига путём учёта пластичности и упрочнения матрицы композита. Обзор моделей разрушения, связанных со сдвиговой ФПУ, содержится в [25], где рассматривали особенности разработанных моделей и отмечены возможности развития каждой из них.

С распространением исследовательской оптической техники стало возможным изучение структуры композита и вида разрушения фаз. Результаты таких исследований содержатся в работе [26], где изучена поверхность излома волокон в месте разрушения тест-образца после испытаний на сжатие, а также приведены значения разрушающего сжимающего напряжения по разным моделям и дано их сравнение с экспериментальными результатами.

В работе [27] для описания формирования полосы сдвига использована модель Тимошенко. Введя пластический шарнир и используя метод разделения жесткостей, показали, что влияние на критическое сжимающее напряжение может оказать не только учёт отклонения волокон композита от осевого направления, но и учёт отклонения нагрузки.

Новый подход к описанию процесса потери устойчивости волокнистого композита по сдвиговой форме предложен в [28]. В описываемом подходе, так же как и в [24, 27], учитываются пластические свойства эпоксидного связующего. Авторы показали, что величина критического сжимающего напряжения не обязательно зависит от начала текучести связующего, а может также зависеть и от сочетания напряжения текучести связующего и отклонения волокон от осевого направления. Здесь построена закритическая ветвь диаграммы деформирования при сжатии после потери устойчивости композита по сдвиговой форме.

В работе экспериментального характера [29] для исследования сдвиговой ФПУ использован специальный тест-образец с надрезом. В процессе разрушения выявили три области деформирования: упругого деформирования, упрочнения и область, в которой происходит реализация сдвиговой формы потери устойчивости.

В практических прочностных расчётах конструкций удобнее всего пользоваться механическими характеристиками монослоя, а не волокон на микроуровне. Это связано с тем, что экспериментальными способами наиболее достоверно определяются именно характеристики монослоя композита. Подход, предлагающий переход от микромасштабной (отдельного волокна) модели к мезомасштабной (минимасштабной монослоя композита), при построении теории устойчивости среды волокнистого композита описан в [30]. Этот подход основан на энергетическом принципе и приводит к осреднению параметров ячейки периодичности композита на микроуровне с помощью вероятностных подходов, например, осреднение такого параметра, как отклонение волокон композита от осевого направления. Метод гомогенизации верифицирован на примере однонаправленного композита.

Учёт влияния вязкоупругих свойств связующего композита на величину критических сжимающих напряжений в модели устойчивости развили

авторы [31]. Здесь применён критерий прочности, связывающий предел текучести по нормальным и касательным напряжениям в виде квадратичной зависимости. Проведены эксперименты по построению диаграммы сдвига при разных отрицательных и повышенных температурах. Экспериментально показано, что наибольшее критическое напряжение при сжатии однонаправленного композита достигается при окружающей температуре  $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$ , что объясняется минимальным влиянием вязких свойств матрицы композита на реализацию сдвиговой формы потери устойчивости.

В работе [32] предложен экспериментально-вычислительный метод определения критических сжимающих напряжений волокнистого однонаправленного композита на микроуровне в разных климатических условиях. Методика заключается в экспериментальном определении механических характеристик связующего и контактной области волокна со связующим, а также использовании этих параметров в конечно-элементном расчёте. Связующее представлено упругопластической моделью, которая может учесть разрушение при растяжении.

В развитие описанных направлений исследований в [33] для выявления внутренних и поверхностных ФПУ монослоя, находящегося внутри или на периферии слоистого композита, построены уточнённые геометрически нелинейные уравнения. Они основаны на моделировании монослоя тонкой пластиной, взаимодействующей в точках граничных плоскостей со слоями связующего, моделируемого трансверсально-мягкими основаниями. Механика деформирования пластины при ее среднем изгибе описывается геометрически нелинейными соотношениями классической теории пластин, основанной на гипотезах Кирхгофа—Лява (первый вариант) и уточнённой модели Тимошенко с учетом поперечных сдвигов и обжатия (второй вариант), а оснований — линеаризованными уравнениями трехмерной теории упругости, упрощёнными в рамках модели трансверсально-мягкого слоя.

На основе уравнений работы [33] в [34] рассмотрены одномерные линеаризованные задачи о возможных ФПУ монослоя однонаправленных композитов с прямолинейными волокнами при сжатии в направлении волокон, находящегося или на периферии, или внутри слоистого композита. Найдены точные аналитические решения сформулированных задач и проведены расчеты, результаты которых сравнивали с ранее полученными экспериментальными данными. Сформулирован вывод о том, что для исследуемого композита при равномерном осевом сжатии образцов в направлении волокон потеря устойчивости монослоев по изгибным формам невозможна, а механизмом разрушения межслойным расслоением является потеря устойчивости монослоя по чисто сдвиговой форме, реализующаяся (в виду малого значения осреднённого модуля поперечного сдвига) при значении предельного сжимающего осреднённого напряжения, равного значению осреднённого модуля поперечного сдвига. Показано, что такая сдвиговая ФПУ выявляется лишь на основе уравнений, построенных с использованием сдвиговой модели Тимошенко для описания процесса деформирования монослоя композита.

В завершение обзора, не претендующего на исчерпывающую полноту, следует отметить, что, несмотря на огромное количество работ по описанной тематике, многие вопросы остаются еще неисследованными. Предметом рассмотрения данной работы являются линеаризованные задачи о внутренних плоских микро- и минимасштабных ФПУ структурных элементов косоугольно армированных тест-образцов из ВКМ со схемой укладки монослоев  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  при их испытаниях на растяжение и сжатие в направлении продольной оси образца. Реализация таких ФПУ не является причиной разрушения тест-образцов при испытаниях, а ими может быть обусловлено, главным образом, физически нелинейное поведение образцов в процессе их нагружения, значительно различающееся, как установлено в первой части статьи, в условиях растяжения и сжатия. Работа представляет собой дальнейшее развитие результатов проведенных ранее исследований [35]. При постановке задачи, в отличие от [35], здесь учитывается формирование в монослое более сложного докритического напряженно-деформированного состояния (НДС), детально исследованного в первой части работы [36]. Теоретически показано, что в тест-образцах со структурой  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  наиболее интенсивная и непрерывная перестройка структуры композита из-за реализации и непрерывной смены исследуемых внутренних ФПУ при непрерывном изменении параметра волнообразования должна наблюдаться в условиях сжатия образцов, а в условиях растяжения такие явления возможны лишь из-за формирования начальных напряжений сдвига.

### 1. Уточненная постановка задачи о плоских ФПУ монослоя композита с учетом взаимодействия со слоями связующего

В первой части [36] было показано, что при растяжении и сжатии тест-образцов из ВКМ со структурой  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  в направлении оси  $Ox$  образца (рис.1 [36]) напряжением  $\sigma_x = p$  в монослоях композита формируется сложное напряженное состояние, характеризующееся в осях ортотропии усредненными компонентами напряжений ( $\alpha$  — величина, мало отличающаяся от единицы):

$$\sigma_{11}^0 \approx \alpha p, \quad \sigma_{22}^0 \approx (1 - \alpha) p, \quad \sigma_{12}^0 = p/2, \quad (1)$$

где  $\sigma_{11}^0$  — нормальное напряжение в направлении волокон;  $\sigma_{22}^0$  — нормальное напряжение в поперечном направлении волокон;  $\sigma_{12}^0$  — касательное напряжение.

Исходя из анализа описанных в [33—35] результатов, в дополнение к предложенным в них схемам взаимодействия выделенного из композита пучка волокон (или отдельного волокна) целесообразно также рассмотреть схему [35] взаимодействия выделенного из структуры композита жесткого слоя толщиной  $t$  (рис. 3) с расположенными с двух сторон слоями связующего.



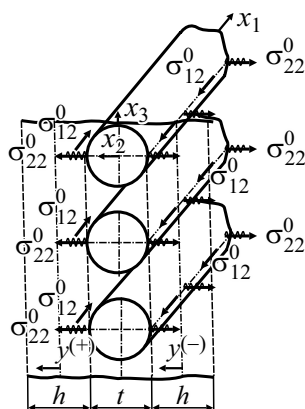


Рис. 3. Расчетная схема для постановки задачи о плоских внутренних ФПУ структурных элементов ВКМ.

На рис. 3 показаны два слоя связующего толщиной  $h$  и фрагмент монослоя, состоящего, к примеру, из трех пучков волокон (или отдельных волокон), а также выбранные оси прямоугольной декартовой системы координат, совпадающие с осями ортотропии монослоя ВКМ. Будем считать, что материал последнего в пределах представительного размера  $t$  характеризуется эффективными значениями модулей упругости первого рода  $E_1, E_2 \approx E_3$ , причем  $E_1 \gg E_2, E_3$ , и секущих модулей сдвига  $\hat{G}_{12} \sim \hat{G}_{13} \sim \hat{G}_c$ . Заметим, что выбор расчетной схемы в виде рис. 3 позволяет провести качественный анализ механизмов локальной структурной перестройки монослоя, обусловленной реализацией возможных изгибных, изгибно-сдвиговых или чисто сдвиговых ФПУ жесткого слоя толщиной  $t$  и маложестких слоев связующего, расположенных с двух сторон монослоя, из-за их потери устойчивости по чисто сдвиговой форме.

Известно [20], что при некоторых видах нагружения в элементах конструкции слоистой регулярной структуры возможна реализация как синфазных, так и антифазных ФПУ. Такие ФПУ возможны и в мелкослоистых волокнистых композитах, в которых модуль упругости связующего, упрощенно представляемого в виде отдельных слоев толщиной  $h$  в направлении осей  $y^{(\pm)}$ , на два порядка меньше эффективного модуля упругости монослоев в направлении волокон толщиной  $t$  в направлении оси  $x_2$  и шириной  $c$  в направлении оси  $x_3$ . Заметим, что величина последней абсолютно не влияет на результаты решения рассматриваемой далее задачи.

Как следует из анализа полученных ранее результатов [33–35], при формировании в стержне начальных напряжений  $\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{12}^0$  для исследования возможных ФПУ необходимо использовать предложенные ранее [37, 38] кинематические соотношения в полном квадратичном приближении вида

$$\varepsilon_1 = e_{11} + (e_{12}^2 + e_{13}^2)/2, \dots, \quad \gamma_{12} = e_{12}(1 + e_{22}) + e_{21}(1 + e_{11}) + e_{13}e_{23}, \dots, \quad (2)$$

где  $e_{\alpha\beta} = \partial u_\alpha / \partial x_\beta$ ;  $\alpha = \overline{1,3}$ ;  $\beta = \overline{1,3}$ ;  $u_\alpha$  — компоненты вектора перемещений  $\mathbf{U} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$  в выбранной системе координат  $x_1, x_2, x_3$  с единичными векторами  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

С целью упрощения задачи и исследования возможных ФПУ структурных элементов слоистого композита будем считать, что при переходе из начального невозмущенного состояния в возмущенное состояние примыкающие к мягким слоям жесткие слои остаются неподвижными, что позволяет при построении математической модели процесса возмущенного деформирования отдельно взятого монослоя композита принять расчетную схему, показанную на рис. 3. Принятое упрощающее предположение, как показали результаты исследования, имеет достаточную степень точности в тех случаях, когда в объеме ВКМ имеются локальные зоны с микро- и минимасштабными размерами с ослабленными физико-механическими характеристиками  $E_3$  и  $\hat{G}_{12}, \hat{G}_{13}, \hat{G}_{23}$ .

В соответствии с принятой расчетной схемой в приближении плоской задачи теории упругости (полагая  $\sigma_z = 0$ ) для вектора перемещений рассматриваемого жесткого слоя толщиной  $t$  примем представление [35]

$$\mathbf{U} = (u + x_2\chi)\mathbf{i} + (v + x_2\theta_2)\mathbf{j}, \quad -t/2 \leq x_2 \leq t/2, \quad (3)$$

а для мягких слоев связующего, у которых точки плоскостей  $y^{(\pm)} = \pm h_0$  имеют нулевые перемещения, представления [35]

$$\mathbf{U}^{(\pm)} = \left( \frac{1}{2} \mp \frac{y^{(\pm)}}{h} \right) \left[ \left( u \pm \frac{t}{2}\chi \right) \mathbf{i} + \left( v \pm \frac{t}{2}\theta_2 \right) \mathbf{j} \right], \quad -h_0 \leq y^{(\pm)} \leq h_0, \quad (4)$$

где  $h_0 = h/2$ , причем значения  $y^{(\pm)} = 0$  соответствуют срединным плоскостям мягких слоев.

В соответствии с соотношениями (2), представлением (3) и полученными ранее [35] результатами вариация приращения потенциальной энергии деформации жесткого слоя композита в возмущенном состоянии, в котором в невозмущенном (начальном) состоянии сформированы осевая сила  $T_x^0 = \sigma_{11}^0 F$  (в отличие от [35], где принято  $T_x^0 = 0$ ), перерезывающая сила  $Q_y^0 = F\sigma_{12}^0$  и усилие  $T_y^0 = \sigma_{22}^0 F$ , связанное с напряжением поперечного обжатия  $\sigma_{22}^0$ , в приближении  $\sigma_z^{(\pm)} = 0$  будет равна

$$\delta\P = \int_0^L \left( Q_x^* \delta u' + M_z \delta \chi' + Q_y^* \delta v' + M_{xy} \delta \theta_2' + N_y^* \delta \chi + T_y^* \delta \theta_2 \right) dx_1. \quad (5)$$

Здесь для внутренних усилий и моментов приняты обозначения

$$Q_x^* = B_x \left( u' + v_{21}\theta_2 \right) + Q_y^0 \chi, \quad Q_y^* = B_{xy} \left( v' + \chi \right) + Q_y^0 \theta_2 + \underline{Q_x^0 v'}, \quad (6)$$



$$N_y^* = B_{xy} \left( v' + \chi \right) + Q_y^0 u' + T_y^0 \chi, \quad T_y^* = B_y \left( v_{12} u' + \theta_2 \right) + Q_y^0 v', \quad (6)$$

$$M_z = D_z \chi', \quad M_{xy} = D_{xy} \theta_2',$$

отличающиеся от результатов работы [35] наличием подчеркнутого слагаемого во втором выражении зависимостей (6). В них введены в рассмотрение жесткостные и геометрические характеристики жесткого слоя

$$B_x = \frac{E_1 F}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad B_{xy} = \tilde{G}_{12} F, \quad B_y = \frac{E_2 F}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})},$$

$$D_z = \frac{E_1 J_z}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_{xy} = \tilde{G}_{12} J_z, \quad F = tc, \quad J_z = ct^3/12.$$

Здесь  $c$  — ширина жёсткого слоя композита в направлении оси  $x_3$  (см. рис.3), не влияющая на результаты решения рассматриваемой задачи о плоских внутренних ФПУ в структурных элементах композита;  $\tilde{G}_{12}$  — касательный модуль сдвига, использованный в работах [33—35] и вводимый в рассмотрение в соответствии с известной концепцией Шенли [39] при постановке линеаризованных задач. Методика теоретико-экспериментального определения зависимостей видов  $\hat{G}_{12} = \hat{G}_{12}(\gamma_{12})$ ,  $\tilde{G}_{12} = \tilde{G}_{12}(\gamma_{12})$  изложена в [36], а целесообразность и применимость физического соотношения вида  $\sigma_{12} = \tilde{G}_{12} \gamma_{12}$ , составляемого для приращений напряжения  $\sigma_{12}$  и деформации  $\gamma_{12}$ , при постановке линеаризованных задач рассматриваемого класса изучали в [40].

В соответствии с результатами [35] в мягких слоях сдвиговые  $\gamma_{12}^{(\pm)}$  и осевые  $\varepsilon_2^{(\pm)}$  деформации необходимо определять на основе использования геометрически нелинейных соотношений (2). В рамках представлений (4) деформации имеют вид

$$\gamma_{12}^{(-)} = \frac{1}{h} \left( u - \frac{t}{2} \chi \right) + \frac{1}{2} \left( v' - \frac{t}{2} \theta_2' \right) + \frac{1}{2h} \left[ \left( u' - \frac{t}{2} \chi' \right) \left( u - \frac{t}{2} \chi \right) + \right.$$

$$\left. + \left( v' - \frac{t}{2} \theta_2' \right) \left( v - \frac{t}{2} \theta_2 \right) \right], \quad \gamma_{12}^{(+)} = -\frac{1}{h} \left( u + \frac{t}{2} \chi \right) + \frac{1}{2} \left( v' + \frac{t}{2} \theta_2' \right) -$$

$$-\frac{1}{2h} \left[ \left( u' + \frac{t}{2} \chi' \right) \left( u + \frac{t}{2} \chi \right) + \left( v' + \frac{t}{2} \theta_2' \right) \left( v + \frac{t}{2} \theta_2 \right) \right], \quad (7)$$

$$\varepsilon_2^{(-)} = \frac{1}{h} \left( v - \frac{t}{2} \theta_2 \right) + \frac{1}{2h^2} \left( u - \frac{t}{2} \chi \right)^2, \quad \varepsilon_2^{(+)} = -\frac{1}{h} \left( v + \frac{t}{2} \theta_2 \right) + \frac{1}{2h^2} \left( u + \frac{t}{2} \chi \right)^2.$$

Будем считать формирующиеся в мягких слоях напряжения

$$\sigma_{12}^{(\pm)} = G_{12}^0 \gamma_{12}^{(\pm)}, \sigma_2^{(\pm)} = E_2^0 \varepsilon_2^{(\pm)} \quad (8)$$

постоянными в направлении осей  $y^{(\pm)}$ . Тогда в силу того, что в трансверсально-мягких слоях в невозмущенном состоянии сформированы только начальные напряжения  $\sigma_{12}^{(\pm)0} = \sigma_{12}^0, \sigma_{22}^{(\pm)0} = \sigma_{22}^0$ , сумма вариаций потенциальной энергии их деформаций будет равна [35]

$$\begin{aligned} \delta \Pi^{(+)} + \delta \Pi^{(-)} = & \int_0^L \left[ \left( S_x - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 \chi' + \frac{2c}{h} \sigma_{22}^0 u \right) \delta u + \right. \\ & + \left( \hat{N}_y - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 u' + \frac{t^2 c}{2h} \sigma_{22}^0 \chi \right) \delta \chi + \left( \hat{Q}_y - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 \theta_2 \right) \delta v' + \\ & + \left( \hat{M}_{xy} - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 v \right) \delta \theta_2' + \left( S_y - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 \theta_2' \right) \delta v + \\ & \left. + \left( \hat{T}_y - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 v' \right) \delta \theta_2 - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 \chi \delta u' - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 u \delta \chi' \right] dx_1, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} S_x &= G_{12}^0 c \left( \frac{2}{h} u - \frac{t}{2} \theta_2' \right), \quad \hat{N}_y = \frac{ct G_{12}^0}{2} \left( \frac{t}{h} \chi - v' \right), \\ \hat{Q}_y &= \frac{G_{12}^0 c}{2} (h v' - t \chi), \quad S_y = \frac{2 E_2^0 c}{h} v, \quad \hat{T}_y = \frac{E_2^0 t^2 c}{2h} \theta_2, \\ \hat{M}_{xy} &= \frac{ct G_{12}^0}{4} \left( \frac{th}{2} \theta_2' - 2u \right). \end{aligned} \quad (10)$$

В соответствии с принципом возможных перемещений параметры возмущенного напряженно-деформированного состояния должны удовлетворять вариационному уравнению

$$\delta \Pi + \delta \Pi^{(+)} + \delta \Pi^{(-)} = 0,$$

из которого при подстановке выражений (5) и (9) следует система однородных дифференциальных уравнений нейтрального равновесия

$$\begin{aligned} Q_{x,1}^* - S_x - \frac{2c}{h} \sigma_{22}^0 u &= 0, \quad (Q_y^* + \hat{Q}_y)_{,1} - S_y = 0, \\ M_{z,1} - N_y^* - \hat{N}_y - \frac{t^2 c}{2h} \sigma_{22}^0 \chi &= 0, \quad (M_{xy} + \hat{M}_{xy})_{,1} - T_y^* - \hat{T}_y = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

которым при  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = L$  соответствуют граничные условия

$$\begin{aligned} Q_x^* - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 \chi = 0 \text{ при } \delta u \neq 0, \quad Q_y^* + \hat{Q}_y - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 \theta_2 = 0 \text{ при } \delta v \neq 0, \\ M_z - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 u = 0 \text{ при } \delta \chi \neq 0, \quad M_{xy} + \hat{M}_{xy} - \frac{tc}{2} \sigma_{12}^0 v = 0 \text{ при } \delta \theta_2 \neq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

При подстановке соотношений (6), (10) уравнения (11) приводим к виду

$$\begin{aligned} B_x(u'' + v_{21}\theta_2') + Q_y^0 \chi' - cG_{12}^0 \left( \frac{2}{h}u - \frac{t}{2}\theta_2' \right) - \frac{2c}{h} \sigma_{22}^0 u = 0, \\ D_{xy}\theta_2'' + \frac{ctG_{12}^0}{4} \left( \frac{th}{2}\theta_2'' - 2u' \right) - B_{22}(v_{12}u' + \theta_2) - Q_y^0 v' - \frac{ct^2 E_2^0}{2h} \theta_2 = 0, \\ B_{xy}(v'' + \chi') + Q_x^0 v'' + Q_y^0 \theta_2' + \frac{cG_{12}^0}{2} (hv'' - t\chi') - \frac{2cE_2^0}{h} v = 0, \\ D_z \chi'' - B_{xy}(v' + \chi) - T_y^0 \chi - Q_y^0 u' + \frac{ct}{2h} G_{12}^0 (hv' - t\chi) - \frac{t^2 c}{2h} \sigma_{22}^0 \chi = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где подчеркнутые слагаемые, как и в уравнениях (11), обусловлены сохранением в кинематических соотношениях (7) геометрически нелинейных слагаемых.

Граничные условия (12) для уравнений (13) в силу  $F = ct$  принимают вид

$$\begin{aligned} B_x(u' + v_{21}\theta_2) + \frac{Q_y^0}{2} \chi = 0 \text{ при } \delta u \neq 0, \\ D_{xy}\theta_2' + \frac{ctG_{12}^0}{4} \left( \frac{th}{2}\theta_2' - 2u \right) - \frac{Q_y^0}{2} v = 0 \text{ при } \delta \theta_2 \neq 0, \\ B_{xy}(v' + \chi) + Q_x^0 v' + \frac{Q_y^0}{2} \theta_2 + \frac{cG_{12}^0}{2} (hv' - t\chi) = 0 \text{ при } \delta v \neq 0, \\ D_z \chi' - \frac{Q_y^0}{2} u = 0 \text{ при } \delta \chi \neq 0. \end{aligned}$$

## 2. Решения задачи о плоских ФПУ элементов структуры волокнистого композита. Результаты расчетов и их анализ

Для определения возможных ФПУ структурных элементов композита решения уравнений (13), как и в [35], будем искать в виде

$$u = \tilde{u} \cos \lambda x_1, \quad v = \tilde{v} \cos \lambda x_1, \quad \chi = \tilde{\chi} \sin \lambda x_1, \quad \theta_2 = \tilde{\theta}_2 \sin \lambda x_1, \quad (14)$$

принимая для начальных усилий  $Q_x^0, Q_y^0, T_y^0$  в жестком слое и начальных напряжений  $\sigma_{22}^0, \sigma_{12}^0$  в мягких слоях представления

$$\begin{aligned} Q_x^0 &= F\sigma_{11}^0 = ctk_{11}p, \quad Q_y^0 = F\sigma_{12}^0 = ctk_{12}p, \\ T_y^0 &= F\sigma_{22}^0 = ctk_{22}p, \quad \sigma_{12}^0 = k_{12}p, \quad \sigma_{22}^0 = k_{22}p. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь в соответствии с результатами [36] и формулами (1)  $k_{11} \approx 1, k_{12} = 1/2, k_{22} \approx 0 \div 0,1$ ;  $\lambda$  — параметр волнообразования.

При подстановке функций (14) и представлений (15) в уравнения (13) приходим к задаче на собственные значения системы однородных алгебраических уравнений вида

$$([A] - p[B])\{X\} = 0, \quad (16)$$

где  $\{X\} = \{\tilde{u}, \tilde{\theta}_2, \tilde{v}, \tilde{\chi}\}$  — вектор амплитудных значений искомых функций;  $[A], [B]$  — квадратные матрицы

$$[A] = \begin{bmatrix} -a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{12} & -a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{12} & -b_{22} \end{bmatrix},$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 2\delta k_{22}/h & 0 & 0 & -tk_{12}\lambda \\ 0 & 0 & -tk_{12}\lambda & 0 \\ 0 & -tk_{12}\lambda & \delta tk_{11}\lambda^2 & 0 \\ -tk_{12}\lambda & 0 & 0 & \delta tk_{22}\lambda \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\delta = 1$  соответствует растяжению образца,  $\delta = -1$  — его сжатию; элементы матрицы  $[A]$  вычисляем по формулам, приведенным в [35].

Для композитных тест-образцов, изготовленных методом холодного отверждения из углеленты ЭЛУР-П и связующего ХТ-118 (эпоксидной смолы), на основе найденных решений проведены расчеты по определению минимальных значений критических напряжений  $p_+^*$  (при растяжении  $\delta = 1$ ),  $p_-^*$  (при сжатии  $\delta = -1$ ), а также соответствующих им критических длин полуволн выпучивания  $l_* = 1/\lambda_*$ . Для указанного композита в [41] были найдены эффективные физико-механические характеристики: модули упругости при растяжении и сжатии вдоль волокон  $E_1^+ \approx E_1^- \approx 100$  ГПа, пределы прочности при растяжении  $\sigma_1^{\max} \approx 477$  МПа и сжатии  $\sigma_1^{\max} \approx 529$  МПа;

## Результаты расчётов для волокон и пучков волокон

Параметр	$k_{11} = 1, k_{12} = 1/2, k_{22} = 0$	$k_{11} = 0,9, k_{12} = 1/2, k_{22} = 0,1$	$k_{11} = 0, k_{12} = 1/2, k_{22} = 1/2$
Волокно			
$p_+^* (\delta = 1)$	22,51 МПа при $l_* = 1,15$ мкм	22,89 МПа при $l_* = 1,11$ мкм	22,70 МПа при $l_* = 1,07$ мкм
$p_-^* (\delta = -1)$	16,75 МПа при $l_* = 1,37$ мкм	16,5 МПа при $l_* = 1,39$ мкм	16,71 МПа при $l_* = 1,47$ мкм
Пучок волокон			
$p_+^* (\delta = 1)$	66 МПа при $l_* = 0,26$ мм	76,5 МПа при $l_* = 0,23$ мм	96,31 МПа при $l_* = 0,29$ мм
$p_-^* (\delta = -1)$	36,27 МПа при $l_* = 0,14$ мм	38,62 МПа при $l_* = 0,18$ мм	33,52 МПа при $l_* = 0,38$ мм

коэффициент Пуассона  $\nu_{12} = 0,34$ ; модуль упругости при растяжении поперек волокон  $E_2^+ \approx 5,7$  ГПа и предел прочности  $\sigma_2^{\max} \approx 16,6$  МПа; предел прочности  $\sigma_{45^\circ}^{\max} \approx 90,5$  МПа при растяжении тест-образцов с волокнами, расположенными под углами  $\pm 45^\circ$  к направлению растяжения, модуль упругости и предел прочности связующего  $E = 2,7$  ГПа,  $\sigma^{\max} \approx 27,6$  МПа. Заметим, что в силу приведенных характеристик композита представляет интерес изучение только тех форм потери устойчивости отдельного волокна или пучка волокон, которые реализуются при значениях  $p^*$ , ограниченных неравенствами  $0 \leq p^* \leq \sim 90$  МПа.

На основе решения уравнений (16) были проведены расчеты по определению величины  $p^*$  при параметрах  $t = 5$  мкм,  $h = 5$  мкм,  $E_1 = 200$  ГПа,  $E_2 = 20$  ГПа,  $\tilde{G}_{12} = 77$  ГПа,  $\nu_{12} = 0,34$ ,  $G_{12}^0 = 25$  МПа,  $E_2^0 = 50$  МПа, соответствующих исследованию ФПУ на микроуровне отдельного волокна с ослабленными механическими характеристиками связующего, и параметрах  $t = 0,2$  мм,  $h = 0,2$  мм,  $E_1 = 100$  ГПа,  $E_2 = 50$  МПа,  $\tilde{G}_{12} = 25$  МПа,  $\nu_{12} = 0,34$ ,  $G_{12}^0 = 25$  МПа,  $E_2^0 = 50$  МПа, соответствующих исследованию устойчивости на миниуровне (мезоуровне) пучка волокон с эффективным модулем упругости  $E_1$  и ослабленными механическими характеристиками  $E_2, E_2^0, G_{12}, G_{12}^0$ , одинаковыми как для пучка волокон, так и для слоев связующего.

Следует отметить, что главными характеристиками ВКМ, от которых зависит величина  $p^*$ , являются модуль упругости волокна  $E_1$ , осреднённые модули упругости связующего  $E_2^0$  и  $G_{12}^0$ , а при варьировании модулем упругости волокна  $E_2$  значения  $p^*$  практически не изменяются. Если принять  $E_2^0 \neq 0$ ,  $G_{12}^0 = 0$ , то предлагаемые соотношения практически полностью соответствуют использованию известной модели винклеров-

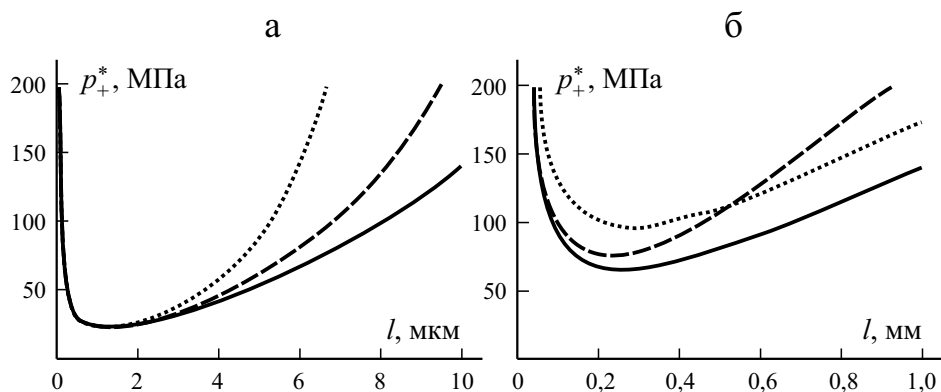


Рис. 4. Зависимости критических значений  $p_+^*$  от параметра волнообразования  $l$  при  $\delta = 1$  и  $k_{11} = 1, k_{12} = 1/2, k_{22} = 0$  (—);  $k_{11} = 0,9, k_{12} = 1/2, k_{22} = 0,1$  (- - -);  $k_{11} = 0, k_{12} = 1/2, k_{22} = 1/2$  (····).

ского основания, а дополнительный учёт  $G_{12}^0 \neq 0$  соответствует использованию более содержательной модели основания, в роли которого выступает связующее.

Полученные результаты расчетов приведены в таблице, а также на рис. 4, 5 в виде зависимостей  $p_{\pm}^* = p_{\pm}^*(l)$  при разных значениях  $\delta, k_{11}, k_{12}, k_{22}$ . Результаты, полученные при  $k_{11} = 0, k_{12} = 1/2, k_{22} = 1/2$ , соответствуют найденному ранее решению [35]. Анализ результатов показывает, что потеря устойчивости волокна на миниуровне практически полностью обусловлена формированием начального напряжения  $\sigma_{12}^0$  как в волокне, так и в пучке волокон. Несколько иная картина наблюдается при сравнении

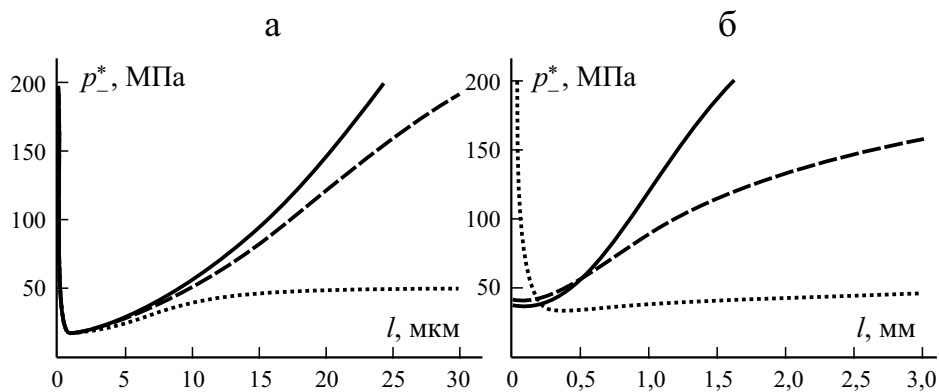


Рис. 5. Зависимости критических значений  $p_-^*$  от величины  $l$  при  $\delta = -1$ . Остальные обозначения те же, что на рис. 4.

значений  $p_+^*$  и  $p_-^*$ , соответствующих минимасштабным (мезомасштабным) ФПУ пучка волокон. Как и следовало ожидать, при  $k_{11}=0, k_{12}=1/2, k_{22}=1/2$  значение  $p_+^*$  оказалось наибольшим, а  $p_-^*$  — наименьшим.

Таким образом, в построенных уравнениях (13) главными являются параметрические слагаемые, содержащие усилия  $Q_x^0, Q_y^0$ , которые формируются в волокне (или пучке волокон), и касательное напряжение  $\sigma_{12}^0$ , формирующееся в слоях связующего. Как определяемые критические значения  $p_+^*, p_-^*$ , так и соответствующие им параметры волнообразования  $l$ , оказались зависящими от знака усилия  $Q_x^0$ , входящего в уравнения (13). Этим (в отличие от выводов работы [35]) частично можно объяснить различие зависимостей  $\sigma_x^+ = \sigma_x^+(\varepsilon_x)$ ,  $\sigma_x^- = \sigma_x^-(\varepsilon_x)$ , приведенных в [36] для случаев растяжения и сжатия образцов при однократном нагружении.

Судя по приведенным зависимостям, исследуемая плоская ФПУ отдельного волокна может реализоваться в условиях сжатия при  $p_-^* \sim 20$  МПа, а в условиях растяжения — при  $p_+^* \sim 25$  МПа, а ФПУ пучков волокон в составе монослоя — в условиях сжатия при  $p_-^* \sim 50$  МПа, а в условиях растяжения —  $p_+^* \sim 75$  МПа.

## Заключение

Полученные результаты показывают, что в процессе деформирования элементов конструкции из слоистых волокнистых композитов в монослоях, в которых формируется сложное напряженно-деформированное состояние с начальными напряжениями (1), происходят структурные изменения в композите и его деградация как при нагружении, так и разгрузке конструкции, обусловленные, в частности, реализацией внутренних разномасштабных ФПУ структурных элементов композита и приводящие к формированию остаточных деформаций. Как следствие, в волокнистых композитах физически нелинейная зависимость вида  $\sigma_{12} = \hat{G}_{12}(\gamma_{12})\gamma_{12}$  обусловлена и потерей устойчивости или армирующих волокон на микроуровне, или пучков волокон (монослоя) на миниуровне, зачастую сопровождающейся расслоением структуры композита в момент окончательной потери прочности. Данный эффект, как правило, визуально наблюдается в экспериментах как при сжатии тест-образцов, так и при их трехточечном изгибе [40]. Такие виды испытаний в настоящее время регламентированы стандартами испытаний. Особенности деформирования, обусловленные описанными явлениями потери устойчивости, в механике композитных материалов и изготовленных из них конструкций недостаточно полно учитываются при моделировании и анализе их прочности. Поэтому акту-

альной является проблема создания уточненных моделей деформирования и разрушения многослойных композитов с учетом возможности реализации неклассических форм потери устойчивости волокон на микроуровне (в масштабах размера поперечного сечения волокна), пучка волокон на миниуровне (в масштабах толщины одного монослоя) при учете взаимодействия волокон и пучка волокон с окружающей их матрицей, а также сдвиговых и изгибно-сдвиговых форм потери устойчивости на макроуровне (в масштабах толщины элементов конструкций в виде пластин и оболочек и размеров поперечного сечения элементов конструкций в виде стержней), теоретического моделирования испытаний тест-образцов из волокнистых композитов на однократное и многократное растяжение, сжатие, растяжение—сжатие и трехточечный изгиб с соответствующими экспериментальными исследованиями, а также уточнения стандартов испытаний волокнистых композитов с экспериментальным подтверждением результатов теоретических исследований.

Работа выполнена за счет средств Российского научного фонда (проект № 19-79-10018, раздел 1, 2) и за счёт средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета (“ПРИОРИТЕТ-2030”) (введение).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полилов А. Н. Этюды по механике композитов. — М.: Физматлит, 2015. — 320 с.
2. Xie M., Adams D.F. Effect of loading method on compression testing of composite materials // J. Compos. Mater. — 1995. — Vol. 29, No. 12. — P. 1581—1600.
3. Lee J., Soutis C. A study on the compressive strength of thick carbon fibre-epoxy laminates // Compos. Sci. Technol. — 2007. — Vol. 67. — P. 2015—2026. doi:10.1016/j.compscitech.2006.12.001
4. Lee J., Soutis C. Thickness effect on the compressive strength of T800/924C carbon fibre-epoxy laminates // Composites: Part A. — 2005. — Vol. 36. — P. 213—227. doi:10.1016/j.compositesa.2004.06.010
5. Adams D. F., Odom E. M. Influence of specimen tabs of the compressive strength of a unidirectional composite material // J. Compos. Mater. — 1991. — Vol. 25. — P. 774—786.
6. Adams D. F., Lewis E. Q. Influence of specimen gage length and loading method on the axial compressive strength of a unidirectional composite material // Exp. Mech. — 1991. — Vol. 3. — P. 14—20.
8. Xie M., Adams D. F. A plasticity model for unidirectional composite materials and its applications in modeling composites testing // Compos. Sci. Technol. — 1995. — Vol. 54. — P. 11—21.
9. Odom E.M., Adams D.F. Failure modes of unidirectional carbon/epoxy composite compression specimens // Compos. — 1990. — Vol. 21, No. 4. — P. 289—296.
10. Thomson D., Quino G., Cui H., Pellegrino A., Erice B., Petrinic N. Strain-rate and off-axis loading effects on the fibre compression strength of CFRP laminates: experiments



and constitutive modelling // *Compos. Sci. Technol.* — 2020. — Vol. 195. art. No. 108210 <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2020.108210>

11. *Ploeckl M., Kuhn P., Grosser J., Wolfahrt M., Koerber H.* A dynamic test methodology for analyzing the strain-rate effect on the longitudinal compressive behavior of fiber-reinforced composites // *Compos. Struct.* — 2017. — Vol. 180. — P. 429—438. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.08.048>

12. *Cui H., Thomson D., Pellegrino A., Wiegand J., Petrinic N.* Effect of strain rate and fibre rotation on the in-plane shear response of  $\pm 45^\circ$  laminates in tension and compression test // *Compos. Sci. Technol.* — 2016. — Vol. 135. — P. 106—115. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2016.09.016>

13. *Laurin F., Paulmier P., Irisarri F. X.* Determination of the longitudinal compressive strength of a CFRP ply through a tensile test on a laminate // *Composites: Part A.* — 2018. — Vol. 113. — P. 209—219. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2018.07.026>

14. *Thomson D., Cui H., Erice B., Petrinic N.* A Study on the longitudinal compression strength of fibre reinforced composites under uniaxial of off-axis loads using cross-ply laminate specimens // *Composites: Part A.* — 2019. — Vol. 121. — P. 213—222. <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2019.03.034>

15. *Pinho S. T., Iannucci L., Robinson P.* Physically-based failure models and criteria for laminated fibre-reinforced composites with emphasis on fibre kinking: Part I: Development // *Composites: Part A.* — 2005. — Vol. 37. — P. 63—73. doi: [10.1016/j.compositesa.2005.04.016](https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2005.04.016)

16. *Puck A., Shurmann H.* Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models // *Compos. Sci. Technol.* — 1998. — Vol. 58. — P. 1045—1067.

17. *Chroscielewski J., Sabik A., Sobczyk B., Witkowski W.* Nonlinear FEM 2D failure onset prediction of composite shells based on 6-parameter shell theory // *Thin-Walled Struct.* — 2016. — Vol. 105. — P. 207—219. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2016.03.024>

18. *Chroscielewski J., Francesco dell'Isola, Eremeyev V., Sabik A.* On rotational instability within the nonlinear six-parameter shell theory // *Int. J. Solids Struct.* — 2020. — Vol. 196—197. — P. 179—189. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.04.030>

19. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. — Киев: Наук. думка, 1973. — 270 с.

20. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. — М.: Машиностроение, 1980. — 375 с.

21. *Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Кн.2 / Под ред. Дж. Любина; Пер. с англ. А.Б. Геллера и др; Под ред Б.Э. Геллера.* — М.: Машиностроение, 1988. — 584 с.

22. *Suarez J. A., Whiteside J. B., Hadcock R. N.* The influence of local failure modes on the compressive strength of boron/epoxy composites // *ASTM Special Techn. Publ.*, 1972. — 497 p.

23. *Rosen B. W.* Mechanics of composite strengthening // *Fiber composite materials: papers presented at a seminar of the American Society for Metals, October 17 and 18, Metals Park, Ohio: American Society for Metals.* — 1965. — P. 37—75.

24. *Budiansky B., Fleck N. A.* Compressive failure of fibre composites // *J. Mech. Phys. Solids.* — 1993. — Vol. 41, No. 1. — P. 183—211.

25. *Jumahat A., Soutis C., Jones F. R., Hodzic A.* Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading // *Compos. Struct.* — 2010. — Vol. 92. — P. 295—305.

26. *Naik N. K., Kumar R. S.* Compressive strength of unidirectional composites: evaluation and comparison of prediction models // *Compos. Struct.* — 1999. — Vol. 46. — P. 299—308.

27. *Niu K., Talreja R.* Modeling of compressive failure in fiber reinforced composites // *Int. J. Solids Struct.* — 2000. — Vol. 37, No. 17. — P. 2405—2428.

28. *Davidson P., Waas A. M.* Mechanics of kinking in fiber-reinforced composites under compressive loading // *Math. Mech. Solids.* — 2016. — Vol. 21, No. 6. — P. 667—684.

29. *Pimenta S., Gutkin R., Pinho S. T., Robinson P.* A micromechanical model for kink-band formation: Part I — Experimental study and numerical modelling // *Compos. Sci. Technol.* — 2009. — Vol. 69. — Nos. 7—8. — P. 948-955.

30. *Zhang G., Latour Jr. R. A.* An analytical and numerical study of fiber microbuckling // *Compos. Sci. Technol.* — 1994. — Vol. 51, No. 1. — P. 95—109.

31. *Matsuo T., Kageyama K.* Compressive failure mechanism and strength of unidirectional thermoplastic composites based on modified kink band model // *Composites: Part A.* — 2017. — Vol. 93. — P. 117—125. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesa.2016.11.018>

32. *Naya F., Herraiez M., Lopez C. S., Gonzalez C., Van der Veen S., Pons F.* Computational micromechanics of fiber kinking in unidirectional FRP under different environmental conditions // *Compos. Sci. Technol.* — 2017. — Vol. 144. — P. 26—35. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2017.03.014>

33. *Paimushin V. N.* Refined Models for an analysis of internal and external buckling modes of a monolayer in a layered composite // *Mech. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 53, No. 5. — P. 613—630.

34. *Paimushin V. N., Kholmogorov S. A., Gazizullin R. K.* Mechanics of unidirectional fiber-reinforced composites: buckling modes and failure under compression along fibers // *Mech. Compos. Mater.* — 2018. — Vol. 53, No. 6. — P. 737—752.

35. *Paimushin V. N., Gazizullin R. K., Shishov M. A.* Flat internal buckling modes of fibrous composite elements under tension and compression at the mini- and microscale // *J. App. Mech. Technical Phys.* — 2019. — Vol. 60, No. 3. — P. 548—559.

36. *Паймушин В. Н., Газизуллин Р. К., Холмогоров С. А., Шишов М. А.* Механика деформирования тест-образцов из слоистых волокнистых композитов со структурой  $[\pm 45^\circ]$  при испытаниях на растяжение и сжатие. 1. Теоретико-экспериментальные методы определения механических характеристик и параметров напряженно-деформированного состояния // *Мех. композ. матер.* — 2022. — Т. 58, № 3. — С. 581—608.

37. *Паймушин В. Н., Шалашилин В. И.* Непротиворечивый вариант теории деформаций сплошных сред в квадратичном приближении // *Докл. РАН.* — 2004. — Т. 396, № 4. — С. 492—495.

38. *Паймушин В. Н., Шалашилин В. И.* О соотношениях теории деформаций в квадратичном приближении и проблемы построения уточненных вариантов геометрически нелинейной теории слоистых элементов конструкций // *Прикл. математика и механика.* — 2005. — Т. 69, № 5. — С. 861—881.

39. *Shanley F. R.* The column paradox // *J. Aeronaut. Sci.* — 1946. — Vol. 13. — No. 6. — P. 678.

40. *Paimushin V. N., Kholmogorov S. A., Makarov M. V., Tarlakovskii D. V., Lukaszewicz A.* Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests// *Z. Angew. Math. Mech.* 2019;99:e201800063.

41. *Paimushin V. N., Kholmogorov S. A.* Physical-Mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder // *Mech. Compos. Mater.*— 2018.— Vol. 54, No. 1. — P. 2—12.

Поступила в редакцию 16.07.2020

Окончательный вариант поступил 05.01.2022

Received July 16, 2020 (Jan. 5, 2022)

---

*В. Е. Стрижиус\**

*Московский авиационный институт, Россия*

**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДЕГРАДАЦИИ ОСТАТОЧНОЙ  
ПРОЧНОСТИ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ  
СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ**

*V. Strizhius\**

**PREDICTING THE DEGRADATION OF THE RESIDUAL STRENGTH  
IN CYCLIC LOADING OF LAYERED COMPOSITES**

**Keywords:** layered composites, cyclic loading, S-N curve, degradation of the residual strength

A brief overview and analysis of three well-known degradation models of the residual strength of layered composites are presented: the Schaff and Davidson model, the model of degradation of normalized strength, and the model of progressive fatigue damage. The conclusion is made about the expediency of forming a new, special model in order to obtain engineering estimates of an acceptable accuracy and labor consumption for the residual strength of layered composites during cyclic loadings. The basic relations of such a model are proposed, which were verified using an example of calculated estimates for the residual strength of samples with an open hole made of an AS4/3501-6 [0/±45/90]<sub>s4</sub> carbon-fiber plastic. The results found by the model proposed, the normalized strength degradation model, and the progressive fatigue damage model are compared.

**Ключевые слова:** материалы композитные полимерные слоистые, нагружение циклическое, кривая усталости, деградация остаточной прочности

Представлен краткий обзор и анализ трех хорошо известных моделей деградации остаточной прочности слоистых композитов: модели Шаффа и Дэвидсона, модели деградации нормализован-

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [vitaly.strizhius@gmail.com](mailto:vitaly.strizhius@gmail.com)  
Corresponding author: [vitaly.strizhius@gmail.com](mailto:vitaly.strizhius@gmail.com)

ной прочности и модели прогрессивного усталостного повреждения. Сделан вывод о целесообразности формирования новой, специальной модели с целью получения приемлемой точности и трудоемкости инженерных оценок остаточной прочности при циклическом нагружении слоистых композитов. Предложены основные соотношения такой модели. Проведена верификация соотношений предложенной модели на примере расчетных оценок остаточной прочности образцов со свободным отверстием из углепластика AS4/3501-6  $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_{s4}$ . Результаты предложенной модели сравнены с полученными по модели деградации нормализованной прочности и модели прогрессивного усталостного повреждения.

## Введение

По результатам анализа данных, представленных в многочисленных исследованиях усталостной прочности элементов конструкций из полимерных композитных материалов (ПКМ), можно сделать вывод о том, что накопленное в процессе усталостных испытаний или эксплуатации усталостное повреждение снижает (иногда достаточно значительно) механические свойства ПКМ.

Очевидно, что для элементов композитных авиаконструкций этот факт требует всестороннего изучения и учета, так как согласно требованиям нормативного документа [1] остаточная прочность композитных авиаконструкций в процессе эксплуатации не должна опускаться ниже уровня, соответствующего предельным расчетным нагрузкам. Фактически это означает, что усталостная долговечность, по которой определяются ресурсные характеристики рассматриваемого элемента из ПКМ, должна соответствовать этому уровню остаточной прочности. Очевидно, что игнорирование этого требования и определение усталостной долговечности без обеспечения такого соответствия могут привести к серьезным ошибкам (не в запас прочности) при определении ресурсных характеристик элементов из ПКМ.

Известно, что исследование снижения механических свойств ПКМ на основе прямых испытаний требует значительных затрат. Ввиду этого необходимость разработки и использования специальных моделей, позволяющих выполнять объективные *расчетные* оценки снижения (деградации) остаточной прочности в процессе накопления усталости, представляется очевидной.

В настоящее время наиболее известны три подобные модели, применяемые в современной практике расчетов на усталость элементов из ПКМ: модель Шаффа и Дэвидсона (Schaff and Davidson) [2, 3], модель деградации нормализованной прочности [4—6] и модель прогрессивного усталостного повреждения [7]. Проведен краткий анализ этих моделей. По результатам

анализа отмечены их основные достоинства и недостатки, сделан вывод о целесообразности формирования новой, специальной модели с целью получения приемлемых точности и трудоемкости инженерных оценок остаточной прочности при циклическом нагружении слоистых композитов.

## 1. Методы и материалы

**1.1. Базовые кривые усталости слоистых композитов.** Известно, что кривые усталости являются важнейшим элементом анализа различных аспектов усталостной прочности слоистых композитов, в том числе элементом анализа деградации остаточной прочности композитов в процессе циклического нагружения.

По результатам обзора и анализа данных, представленных в [3, 6, 8—15], можно сделать вывод о том, что для многих типовых элементов композитных конструкций, работающих в условиях одноосного растяжения—сжатия, могут быть построены “классические” кривые усталости  $\sigma - N$  вида

$$\sigma_{\max} = c + d \lg N \quad (1)$$

или

$$\sigma_{\max} = AN^m, \quad (2)$$

где  $\sigma_{\max}$  — максимальные нормальные номинальные (в сечении “брутто”, средние в пакете слоев) напряжения циклического растяжения—сжатия рассматриваемого образца или элемента;  $N$  — усталостная долговечность элемента;  $c, d, A$  и  $m$  — параметры уравнений (1) и (2).

По результатам анализа известных экспериментальных данных и кривых усталости, построенных с использованием уравнений (1) и (2), можно сделать следующие выводы.

1. Для параметров  $c$  и  $A$  справедливы соотношения  $c \approx A \approx \sigma_{UTS}$  — при доминирующем циклическом растяжении ( $\sigma_{UTS}$  — предел прочности элемента при растяжении);  $c \approx A \approx |\sigma_{UCS}|$  — при доминирующем циклическом сжатии ( $\sigma_{UCS}$  — предел прочности элемента при сжатии).

2. Для параметров  $d$  и  $m$  справедливы соотношения  $d < 0$  и  $m < 0$ .

**1.2. Расчетно-экспериментальная оценка уровня остаточной прочности элементов из ПКМ с использованием модели Шаффа и Дэвидсона.** По результатам обзора и анализа данных, представленных в [2, 3], можно сформулировать следующее основное положение и допущение этой модели.

1. Уровень снижения остаточной прочности в процессе накопления усталости конструктивного элемента из ПКМ зависит от его конструктивно-технологических особенностей (типа ПКМ, параметров укладки, толщины, типа концентратора напряжения и т.д.) и механических характеристик. В работах [2, 3] сделано допущение, что механические харак-

теристики при одноосном циклическом нагружении элемента могут быть связаны зависимостью

$$\sigma_{RS} = \sigma_{US} - (\sigma_{US} - \sigma_a) \left( \frac{n}{N} \right)^v, \quad (3)$$

где  $\sigma_{RS}$  — остаточная прочность элемента из ПКМ;  $\sigma_{US}$  — предел статической прочности элемента;  $\sigma_a$  — амплитуда циклического нагружения;  $n$  — количество приложенных циклов нагружения;  $N$  — количество циклов нагружения до разрушения элемента;  $v$  — параметр деградации прочности, значение которого зависит от величины  $\sigma_a$ , а также от коэффициента асимметрии циклического нагружения  $R$ .

2. Предполагали, что значение параметра  $v$  должно определяться на основе сравнения расчетных и экспериментальных данных.

Основной акцент в работе [2] сделан на построении зависимостей вероятности разрушения образца или элемента от приложенных циклов нагружения  $P = f(n)$ , а в работе [3] отмечена сложность определения подобных зависимостей. Зависимости (3) для конкретных образцов и элементов в работах [2, 3] не представлены. В работах [2, 3] отмечена сложность определения значений параметра  $v$ .

**1.3. Расчетно-экспериментальная оценка уровня остаточной прочности элементов из ПКМ с использованием модели деградации нормализованной прочности (МДНП).** По результатам обзора и анализа данных, представленных в работах [4—6], можно сформулировать следующие основные положения и допущения этой модели.

1. Уровень снижения остаточной прочности в процессе накопления усталости конструктивного элемента из ПКМ зависит от его конструктивно-технологических особенностей (типа ПКМ, параметров укладки, толщины, типа концентратора напряжения и т.д.) и механических характеристик. В работах [4—6] сделано допущение, что механические характеристики при одноосном растяжении элемента могут быть связаны зависимостью

$$t^a + s^b = 1, \quad (4)$$

где  $t = (\lg n - \alpha) / (\lg N - \alpha)$  — функция нагружения;  $n$  — количество циклов нагружения при уровне максимальных напряжений цикла  $\sigma_{\max}$ ;  $N$  — количество циклов нагружения до разрушения рассматриваемого элемента при уровне напряжений  $\sigma_{\max}$ ;  $\alpha$  — константа,  $\alpha = \lg(0,25) = -0,6021$ ;  $s = (\sigma_{RS} - \sigma_{\max}) / (\sigma_{UTS} - \sigma_{\max})$  — относительная остаточная прочность элемента из ПКМ;  $\sigma_{RS}$  — остаточная прочность элемента из ПКМ;  $\sigma_{UTS}$  — предел прочности рассматриваемого элемента при растяжении;  $a$  и  $b$  — параметры, зависящие от свойств материала и окружающей среды.

2. На основе зависимости (4) в работах [4—6] получено соотношение для оценки остаточной прочности рассматриваемого элемента в процессе накопления усталости

$$\sigma_{RS} = (\sigma_{UTS} - \sigma_{\max}) \left( 1 - \left( \frac{\lg(n) - \alpha}{\lg(N) - \alpha} \right)^a \right)^{\frac{1}{b}} + \sigma_{\max}. \quad (5)$$

По данным работы [6] параметры  $a$  и  $b$  для пластиков типа CFRP (пластик, армированный углеродным волокном), KFRP (пластик, армированный кевларовым волокном) и GRP (пластик, армированный стекловолокном) принимают значения, близкие к следующим значениям [6]: для CFRP  $a = 1,8$  и  $b = 23,1$ ; для KFRP —  $1,8$  и  $5,2$ ; для GRP —  $1,5$  и  $4,8$  соответственно. Очевидно, что значения параметров  $a$  и  $b$  будут оказывать значительное влияние на форму кривой снижения остаточной прочности  $\sigma_{RS} - N$  и получаемые с использованием этой кривой конечные результаты оценок остаточной прочности. Поэтому с целью получения достаточно достоверных результатов таких оценок для каждого рассматриваемого элемента из ПКМ значения параметров  $a$  и  $b$  должны уточняться по результатам специально проведенных испытаний.

В работе [16] представлены экспериментальные данные по усталостной долговечности и остаточной прочности образцов со свободным отверстием из углепластика AS4/3501-6 с параметрами укладки  $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_{s4}$ . В работе [17] для этих же образцов приведены значения параметров  $a$  и  $b$  для некоторых видов нагружения при испытаниях: при продольном сжатии  $a = 0,025$  и  $b = 49,06$ ; при продольном растяжении —  $0,473$  и  $10,03$  соответственно.

На рис. 1 представлены зависимости (5) для образцов со свободным отверстием из углепластика AS4/3501-6  $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_{s4}$  при продольном

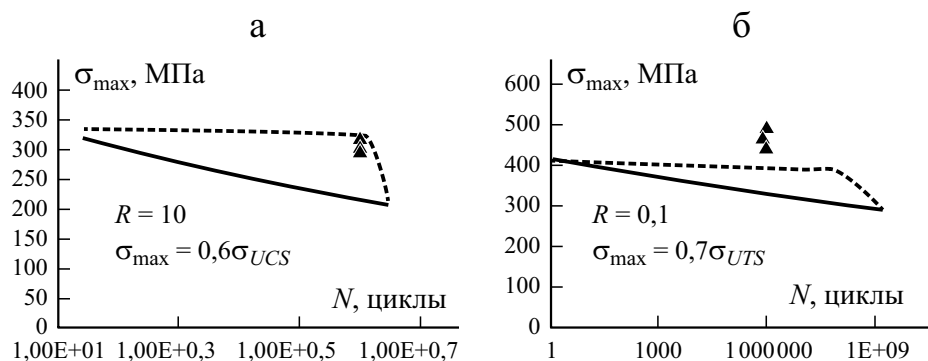


Рис. 1. Расчетная оценка деградации остаточной прочности при продольном сжатии (а) и растяжении (б) образцов со свободным отверстием из углепластика AS4/3501-6  $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_{s4}$  с использованием соотношения (5) (---) МДНП; (—) — кривая усталости; ▲ — эксперимент [16].



циклическом сжатии (рис. 1—*a*) и растяжении (рис. 1—*б*). При этом использованы следующие данные:

—  $|\sigma_{\max}| = 361,75 N^{-0,037}$ ,  $\sigma_{\max} = 415,71 N^{-0,017}$  — уравнения кривых усталости рассматриваемых образцов соответственно при продольном сжатии и растяжении (получены по результатам обработки данных работы [16]);

—  $\sigma_{UTS} = 13,7$  МПа;  $\sigma_{UCS} = -344,75$  МПа — по данным работы [16];

— значения параметров  $a$  и  $b$  [17].

Там же представлены отдельные экспериментальные значения  $\sigma_{RS}$ , полученные по данным работы [16].

**1.4. Расчетно-экспериментальная оценка уровня остаточной прочности элементов из ПКМ с использованием модели прогрессивного усталостного повреждения (МПУП).** По результатам обзора и анализа данных, представленных в работе [7], можно сформулировать следующие основные положения этой модели.

1. Уровень снижения остаточной прочности в процессе накопления усталости зависит от механических характеристик ПКМ. По данным работы [7] эти характеристики связаны зависимостью

$$s = \left[ 1 - t^A + C \cdot t^D (1 - t)^E \right]^{1/B}, \quad (6)$$

где  $s$  и  $t$  — параметры, идентичные параметрам модели деградации нормализованной прочности;  $A, B, C, D$  и  $E$  — параметры формы кривой  $s = f(t)$ , определяемые по результатам обработки экспериментальных данных.

2. На основе зависимости (6) может быть получено соотношение для расчетной оценки остаточной прочности рассматриваемого элемента в процессе накопления усталости

$$\sigma_{RS} = (\sigma_{UTS} - \sigma_{\max}) \left[ 1 - t^A + C \cdot t^D (1 - t)^E \right]^{1/B} + \sigma_{\max}. \quad (7)$$

На основании анализа соотношения (7) можно сделать следующие выводы.

1. Остаточная прочность элементов из ПКМ с использованием МПУП описывается достаточно сложным соотношением, содержащим пять параметров формы кривой  $s = f(t)$ :  $A, B, C, D$  и  $E$ .

2. Указанные параметры должны определяться по результатам специальной обработки экспериментальных данных достаточно значительного объема, что предполагает значительный объем испытаний и является основным недостатком рассматриваемой модели.

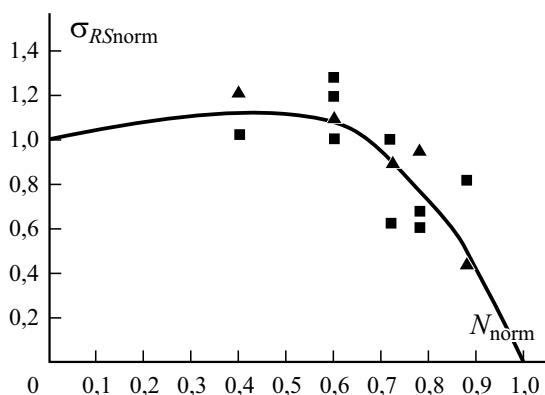


Рис. 2. Расчетная оценка деградации остаточной прочности при продольном растяжении образцов из однонаправленного пластика по соотношению (7) (—) МПУП и экспериментальные данные [7] при UTS 60% (▲) и 80% (■).

На рис. 2 представлен пример, иллюстрирующий достаточно хорошую точность оценок остаточной прочности образцов из однонаправленного пластика по соотношению (7) (использованы расчетные и экспериментальные данные работы [7]). Значения параметров формы кривой  $s = f(t)$  следующие:  $A = 3,76$ ,  $B = 0,77$ ,  $C = 1,72$ ,  $D = 2,30$ ,  $E = 0,99$ .

Отметим, что указанные значения параметров были определены на основе результатов обработки экспериментальных данных испытаний на остаточную прочность рассматриваемых образцов, а затем с использованием значений этих параметров был выполнен “контрольный” расчет. Очевидно, что это значительно снижает результаты апробации рассматриваемой модели.

**1.5. Расчетно-экспериментальная оценка уровня остаточной прочности элементов из ПКМ с использованием специальной модели деградации остаточной прочности (СМДОП).** Ввиду отмеченных недостатков модели Шаффа и Дэвидсона, модели деградации нормализованной прочности и модели прогрессивного усталостного повреждения необходимость формирования новой, специальной модели деградации остаточной прочности слоистых композитов с целью получения приемлемой точности и трудоемкости инженерных расчетов на усталость представляется очевидной.

По результатам детального обзора и анализа данных работ [4—7, 10] можно сделать допущение, что в качестве основной зависимости для такой модели может быть предложено соотношение

$$s^* + t^* = 1,$$

где  $s^* = \frac{\sigma_{RS}}{\sigma_{US}}$  — относительная остаточная прочность элемента из ПКМ;

$t^* = k_1 \left( \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{US}} \right)^{k_2} n$  — функция нагружения;  $\sigma_{RS}$  — остаточная прочность

элемента из ПКМ;  $\sigma_{US}$  — предел прочности рассматриваемого элемента при растяжении или сжатии;  $\sigma_{\max}$  — максимальные напряжения растяжения или сжатия;  $n$  — количество циклов нагружения при уровне максимальных напряжений цикла  $\sigma_{\max}$ ;  $k_1$  и  $k_2$  — параметры соотношения. Тогда

$$\sigma_{RS} = \sigma_{US} \left( 1 - k_1 \left( \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{US}} \right)^{k_2} n \right). \quad (8)$$

При этом предполагаем, что кривая усталости рассматриваемого элемента известна и может быть представлена уравнением (2).

Очевидно, что основная проблема в использовании соотношения (8) заключается в определении значений параметров  $k_1$  и  $k_2$ .

Процедуру определения этих значений можно представить следующим образом:

— соотношение (8) приводим к виду

$$\sigma_{\max} = \sigma_{US} \left( \frac{1 - \sigma_{RS} / \sigma_{US}}{k_1 N} \right)^{1/k_2};$$

— очевидно, что с учетом уравнения (2) можно записать соотношение

$$\sigma_{\max} = \sigma_{US} \left( \frac{1 - \sigma_{RS} / \sigma_{US}}{k_1 N} \right)^{1/k_2} = AN^m;$$

анализируя это соотношение, можно сделать допущение, что  $k_2 = -1/m$ ;

— в момент усталостного разрушения элемента при уровне нагружения  $\sigma_{\max}$  можно полагать, что  $\sigma_{RS} = \sigma_{\max}$ . Таким образом соотношение (8) может принимать вид

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{US}} + k_1 \left( \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{US}} \right)^{k_2} N = 1,$$

отсюда

$$k_1 = \frac{1 - \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{US}}}{\left( \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{US}} \right)^{k_2} N};$$

— при наличии экспериментальных данных по значениям остаточной прочности рассматриваемого элемента значение параметра  $k_1$  можно определить с использованием соотношения

$$k_{1\_RS} = \frac{1 - \frac{\sigma_{RS}}{\sigma_{US}}}{\left( \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{US}} \right)^{k_2} N_{RS}},$$

где  $N_{RS}$  — количество циклов нагружения, после которого экспериментально определяли остаточную прочность;

— при известном значении  $k_{1\_RS}$  соотношение (8) принимает вид

$$\sigma_{RS} = \sigma_{US} \left[ 1 - k_{1\_RS} \left( \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{US}} \right)^{k_2} n \right]. \quad (9)$$

По результатам анализа представленных соотношений можно сделать следующий вывод.

Соотношения (8) и (9) достаточно просты, и их использование не предполагает значительной трудоемкости определения входящих в них значений параметров  $k_1$  и  $k_2$ . В первом приближении значения этих параметров могут быть найдены только при известном уравнении (2) кривой усталости рассматриваемого элемента. В этом плане соотношения (8) и (9) выгодно отличаются от соотношения (5) МДНП и соотношения (7) МПУП, для использования которых необходимо знание экспериментальных значений дополнительных параметров (двух параметров  $a$  и  $b$  для МДНП и пяти параметров  $A, B, C, D$  и  $E$  для МПУП).

Точность прогнозирования остаточной прочности слоистого композита с использованием предложенных соотношений будет проиллюстрирована примером расчета образцов со свободным отверстием из углепластика AS4/3501-6.

## 2. Результаты

На рис. 3 представлены результаты расчетных оценок остаточной прочности рассмотренных образцов со свободным отверстием из углепластика AS4/3501-6  $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_{s4}$  по специальной модели деградации остаточной прочности (СМДОП). При этом использованы следующие данные:

—  $|\sigma_{\max}| = 361,75N^{-0,037}$ ,  $\sigma_{\max} = 415,71N^{-0,017}$  уравнения кривых усталости образцов при продольном сжатии и растяжении соответственно (получены по результатам обработки данных работы [16]);

—  $\sigma_{UTS} = 13,7$  МПа;  $\sigma_{UCS} = -344,75$  МПа (получены по данным работы [16]);

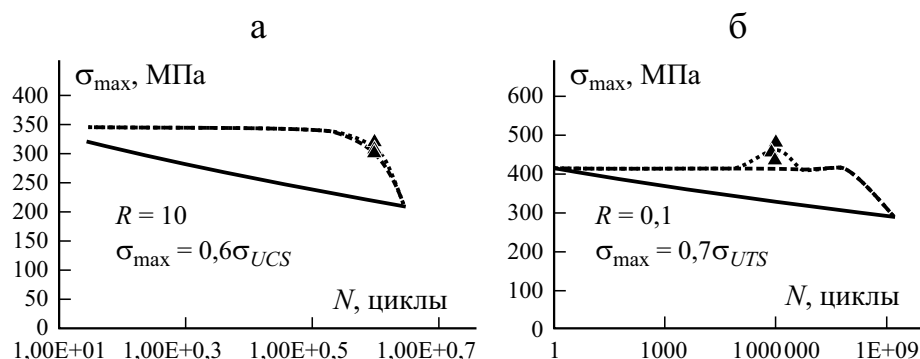


Рис. 3. Расчетная оценка деградации остаточной прочности при продольном сжатии (а) и растяжении (б) образцов со свободным отверстием из углепластика AS4/3501-6  $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_{s4}$  с использованием соотношений (8) (—) и (9) (- - -) СМДОП ( $R=10$ ,  $\sigma_{\max} = 0,6\sigma_{UCS}$ ): (—) — кривая усталости; ▲ — эксперимент [16].

— значения параметров  $k_1, k_{1\_RS}$  и  $k_2$  для продольного циклического сжатия:  $k_1 = 0,1301$ ,  $k_{1\_RS} = 0,0537$ ,  $k_2 = 25,641$  (получены по результатам обработки данных работы [16] с использованием процедуры, описанной в разделе 1.4);

— значения параметров  $k_1, k_{1\_RS}$  и  $k_2$  для продольного циклического растяжения:  $k_1 = 0,2331$ ,  $k_{1\_RS} = -155,287$ ,  $k_2 = 58,824$  (получены по результатам обработки данных работы [16] с использованием процедуры, описанной в разделе 1.4).

Там же представлены отдельные экспериментальные значения  $\sigma_{RS}$ , полученные по данным работы [16].

### 3. Обсуждение результатов

По результатам анализа данных [2, 3] можно сделать вывод, что модель деградации остаточной прочности Шаффа и Дэвидсона используется в основном для построения зависимостей вероятности разрушения образца или элемента от приложенных циклов нагружения  $P = f(n)$ . В работе [3] отмечена сложность определения подобных зависимостей. Зависимости  $\sigma_{RS} = f(n)$  для конкретных образцов и элементов в работах [2, 3], к сожалению, не представлены.

Как видно из данных, приведенных на рис. 1, основным недостатком, который может быть отмечен при практическом использовании соотношения (5) МДНП, является большая вероятность получения некорректных оценок остаточной прочности, прежде всего при продольном циклическом растяжении образцов.

На рис. 2 представлен пример, демонстрирующий достаточно хорошую точность оценок остаточной прочности образцов из однонаправленного пластика с использованием соотношения (7) МПУП. Однако, как уже было отмечено, параметры соотношения (7) должны определяться по результатам специальной обработки экспериментальных данных достаточно значительного объема, что предполагает значительный объем испытаний и является основным недостатком рассматриваемой модели.

На рис. 1—б, 2, 3—б при циклическом растяжении наблюдается рост остаточной прочности по сравнению со статической, т.е. циклическое растяжение упрочняет материал. К сожалению, ни авторы ключевой работы [7], ни авторы других работ еще не нашли объяснения этому уникальному явлению.

По результатам анализа данных рис. 4 можно сделать следующие выводы.

1. Результаты, полученные с использованием предложенной в настоящей работе СМДОП и полученные в работе [7] с использованием МПУП, показали точность оценок примерно одного уровня. При этом следует отметить значительно более низкую трудоемкость расчетных оценок с использованием СМДОП.

2. Использование СМДОП с параметром  $k_1$ , найденным без привлечения экспериментальных данных по остаточной прочности рассматриваемых образцов, позволяет получать консервативные оценки остаточной прочности, что в некоторых случаях может считаться вполне приемлемым.

3. Сравнение результатов расчетных оценок с использованием предложенной модели и МДНП позволяет отметить преимущества и практическую значимость предложенной модели.

В качестве рекомендации для дальнейших исследований отметим необходимость увеличения объема верификации предложенных соотношений СМДОП. Очевидно, что при наличии необходимых данных ключевые соотношения (2) и (8) предложенной модели могут быть использованы при *регулярном* циклическом нагружении *с постоянной амплитудой* при разных коэффициентах асимметрии циклических напряжений.

При *переменных режимах нагружения* с переменными амплитудами процедура оценки деградации остаточной прочности значительно усложняется. В этом случае подобная процедура может быть предложена в следующем виде.

1. Рассматривают некий блок переменных нагрузок циклического нагружения.

2. Определяют так называемые эквивалентные напряжения, равные по повреждаемости рассматриваемому блоку нагрузок. Процедура расчетно-экспериментальной оценки эквивалентных напряжений, в частности, представлена, например, в работе [18]. Некоторые рекомендации по экспертным оценкам таких напряжений представлены в работе [19].

3. Для расчетной оценки деградации остаточной прочности необходимо знание двух соотношений: уравнения (2) в виде

$$\sigma_{a\,eqv}^{R=-1} = AN^m, \quad (10)$$

где  $\sigma_{a\,eqv}^{R=-1}$  амплитуда *одного* симметричного цикла напряжения, *эквивалентного* по вносимому повреждению рассматриваемому блоку напряжений;  $N$  — усталостная долговечность элемента;  $A$  и  $m$  — параметры уравнения (10);

соотношения (8) в виде

$$\sigma_{RS} = \sigma_{UCS} \left( 1 - k_1 \left( \frac{\sigma_{a\,eqv}^{R=-1}}{\sigma_{UCS}} \right)^{k_2} n \right), \quad (11)$$

где  $\sigma_{UCS}$  предел прочности рассматриваемого элемента при сжатии.

Процедура определения значений параметров  $k_1$  и  $k_2$  соотношения (11) схожа с определением по соотношению (8).

К сожалению, ввиду практического отсутствия экспериментальных данных по остаточной прочности слоистых композитов при переменных режимах нагружения выполнить в настоящее время верификацию предложенной модели с использованием соотношений (10) и (11) не представляется возможным.

### Заключение

С целью достижения приемлемой точности и трудоемкости инженерных оценок остаточной прочности при циклическом нагружении слоистых композитов предложена специальная модель деградации остаточной прочности.

Проведена верификация соотношений предложенной модели на примере расчетных оценок остаточной прочности образцов со свободным отверстием из углепластика AS4/3501-6  $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_{s4}$  при циклическом растяжении и сжатии. Проведено сравнение результатов расчетных оценок с использованием предложенной модели и модели деградации нормализованной прочности и модели прогрессивного усталостного повреждения. Отмечены преимущества и практическая значимость предложенной модели.

Очевидно, что предложенная модель имеет определенные возможности для дальнейшего развития и совершенствования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Composite Aircraft Structure. Advisory Circular No: 20-107B. U.S. Department of Transportation. Federal Aviation Administration. URL: [http://www1.airweb.faa.gov/Regulatory\\_and\\_Guidance\\_Library/rgAdvisoryCircular.nsf](http://www1.airweb.faa.gov/Regulatory_and_Guidance_Library/rgAdvisoryCircular.nsf) (дата обращения: 21.01.2022)
2. Schaff J. R. and Davidson B. D. A life prediction methodology for composite structures. Part I: Constant amplitude and two stress level fatigue loading; Part II: Spectrum fatigue loading // J. Compos. Mater. — 1997. — Vol 31, No. 2 — P. 128—181.
3. Post N. L., Lesko J. J. and Case S. W. Residual strength fatigue theories for composite materials // Fatigue life prediction of composites and composite structures / Ed. by A. P. Vassilopoulos. - Woodhead Publ. Ltd and CRC Press LLC, 2010.
4. Adam T., Dickson R. F., Fernando G., Harris B. and Reiter H. The fatigue behavior of Kevlar/carbon hybrid composites // IMechE Conf. Publ. (Institute of Mechanical Engineers). — 1986. — Vol. 2. — P. 329—335.
5. Adam T., Dickson R. F., Jones C. J., Reiter H. and Harris B. A power law fatigue damage model for fiber-reinforced plastic laminates // Proc. Institution Mech. Eng. Part C: Mech. Eng. Sci. — 1986. — Vol. 200. P. 155—166.
6. Harris B. A historical review of the fatigue behavior of fiber-reinforced plastics // Fatigue in Composites / Ed. by B. Harris. — Woodhead Publ. Ltd and CRC Press LLC, 2003.
7. Shokrieh M. M. and Lessard L. B. Fatigue under multiaxial stress systems // Fatigue in Composites / Ed. by B. Harris. — Woodhead Publ. Ltd and CRC Press LLC, 2003.
8. Mandell J. F. Fatigue behaviour of fibre-resin composites // Developments in Reinforced Plastics 2/Ed. by G. Pritchard. — London: Appl. Sci. Publ., 1986. — P. 67—108.
9. Reifsnider K. Durability and damage tolerance of fibrous composite systems // Handbook of Composites / Ed. by S. T. Peters. — London: Chapman & Hall, 1998.
10. ASM Handbook. Vol. 21. Composites (The Volume was prepared under the direction of the ASM Int. Handbook Committee, 2001).
11. Nijssen R. P. L. Phenomenological fatigue analysis and life modelling // Fatigue Life Prediction of Composites and Composite Structures / Ed. by A. P. Vassilopoulos. — Woodhead Publ. Ltd and CRC Press LLC, 2010.
12. Vassilopoulos A. P., Keller T. Fatigue of Fiber-Reinforced Composites. — London: Springer-Verlag Ltd, 2011.
13. Burhan I., Kim H. S. S—N Curve models for composite materials characterisation: An evaluative review // J. Compos. Sci. — 2018. — Vol. 2 (38). DOI: 10.3390/JCS2030038
14. Strizhius V. Fatigue life prediction of CFRP laminate under quasi-random loading // 30th Symp. Int. Committee on Aeronautical Fatigue, ICAF 2019, Krakow, Poland, June 2-7 2019, Proceedings, Krakow, 2019.
15. Strizhius V. E. Fatigue life prediction of laminated composites using normalized S—N data // Mater. Sci. Power Eng. — 2020. — Vol. 26, No. 3. — P. 20—32. DOI: 10.18721/JEST.26302
16. Han H. T. and Choi S. W. The Effect of Loading Parameters on Fatigue of Composite Laminates: Part V. Report DOT/FAA/AR-01/24, June 2001.



17. Khan A. I., Venkataraman S., Miller I. Predicting fatigue damage of composites using strength degradation and cumulative damage model // J. Compos. Sci. — 2018. — Vol. 2. DOI: 10.3390/JCS2010009

18. Стрижиус В. Е. Расчет эквивалентных напряжений и эквивалентов программ усталостных испытаний элементов композитных авиаконструкций // Науч. вестн. МГТУ ГА. — 2020. — Т. 23, № 2. — С. 87—100. <https://doi.org/10.26467/2079-0619-2020-23-2-87-100>

19. Bakuckas Jr. J.G., Chadha R., Swindell P., Fleming M., Lin J.Z., Ihn J.B., Desai N., Espinar-Mick E., and Freisthler M. Bonded repairs of composite panels representative of wing structure // Proc. 30th Symp. Int. Committee on Aeronautical Fatigue, June 2—7, 2019, Krakow, Poland, p. 565—580.

Поступила в редакцию 27.01.2022

Окончательный вариант поступил 06.04.2022

Received Jan. 27, 2022 (Apr. 6, 2022)

---

*А. Е. Проценко\*, В. В. Петров*

*Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, Россия*

## **РЕЦИКЛИНГ СТЕКЛОАРМИРУЮЩИХ НАПОЛНИТЕЛЕЙ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ ЭПОКСИВИНИЛЭФИРНОГО СВЯЗУЮЩЕГО**

*A. E. Protsenko\* and V. V. Petrov*

### **RECYCLING OF FIBERGLASS FILLERS OBTAINED FROM POLYMER COMPOSITES BASED ON AN EPOXY VINYL ESTER BINDER**

**Keywords:** polymer-matrix composites, glass-fibers-reinforced plastics, recycling, fiberglass, strength

Data found from an experimental study of the possibility of recycling polymer composites on the example of a fiberglass made from a linen fiberglass and an epoxy vinyl ester binder are presented with the aim to remove the polymer matrix and obtain a recovered fiberglass not inferior in its properties to the virgin material. The solvolysis method of the composite in a methyldiethanolamine medium is considered. The solvolysis time and the concentration of alkali metal hydroxide in the reaction medium in relation to the strength of recovered glass fibers is established. The solvolysis at a temperature of 180°C and a catalyst concentration of 5% for 6 h was accepted as the optimal regime. As a result, a regime that allowed us to recover fibers with a tensile strength equal to 92% of that of virgin fibers was determined. The recovered fabrics were studied by a thermal analysis and the scanning electron microscopy. GFRP samples were obtained from the recovered fabrics by the VaRTM method. The flexural strength of composites made from the secondary filler was 8.5% lower than that of the same material based on a virgin fabric.

**Ключевые слова:** композит с полимерной матрицей, стеклопластик, переработка вторичная, стекловолокно, прочность

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [protsenko.ae@yandex.ru](mailto:protsenko.ae@yandex.ru)  
Corresponding author: [protsenko.ae@yandex.ru](mailto:protsenko.ae@yandex.ru)

Представлены данные экспериментального исследования возможности рециклинга полимерных композитов на примере стеклопластика из полотняной стеклоткани и эпоксивинилэфирного связующего. Цель рециклинга — удаление полимерной матрицы и получение восстановленного стекловолокна, не уступающего по свойствам первичному материалу. Рассмотрен метод сольволиза композита в среде метилдиэтанолamina. Установлена зависимость влияния времени сольволиза и содержания гидроксида щелочного металла в реакционной среде на прочность восстановленных стеклянных волокон. Оптимальным принят режим сольволиза при температуре 180 °С и концентрации катализатора 5% в течение 6 ч. В результате определен режим, позволяющий получать волокна с разрывной прочностью 92% прочности первичных волокон. Восстановленные ткани исследованы методами термического анализа и растровой электронной микроскопии. Из восстановленных тканей получены образцы стеклопластиков методом VaRTM. Прочность при трехточечном изгибе композитов из вторичного наполнителя на 8,5% ниже, чем такого же материала на основе первичной ткани.

## Введение

Высокая востребованность полимерных композитных материалов (ПКМ) обусловлена их уникальными свойствами. Однако большой спрос на изделия из полимерных композитов способствует развитию такой проблемы, с которой многие высокоразвитые страны уже столкнулись: накопление техногенных неразлагаемых трудно перерабатываемых отходов (рис. 1) [1].

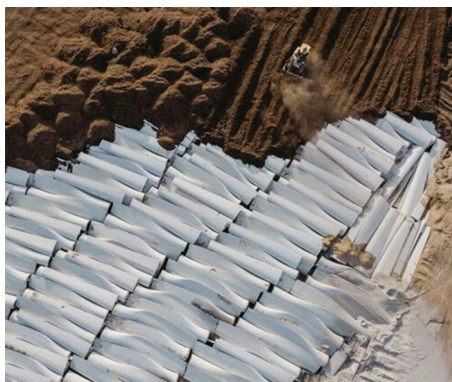


Рис. 1. Полигон захоронения отработанных лопастей ветрогенераторов в США [1].

Как известно, композиты — это гетерогенные структуры, в которых воздействию внешних агрессивных факторов в наибольшей степени подвержена полимерная матрица. Несмотря на то что жизненный цикл полимерных композитов значительно больше, чем обычных материалов, и может составлять от 25 до 50 лет в зависимости от назначения, в результате естественного старения происходит ухудшение эксплуатационных свойств изделий из них [2—4].

Ввиду длительного жизненного цикла изделий проблема рециклинга не стоит остро, однако с каждым годом мощности композитных производств растут и к 2024 г. по прогнозам достигнут 14 млн т/год [5]. Поэтому разработка высокоэффективных способов рециклинга полимерных композитных материалов на основе термореактопластов с целью возврата их в производственный цикл и расширения сырьевой базы производства полимерных композитных материалов является актуальной задачей.

В настоящее время в мире испытаны и пытаются использовать три основных метода утилизации ПКМ, не считая простого захоронения: физический, термический и химический. Самым распространенным методом утилизации армированных пластиков на сегодняшний день является пиролиз [6, 7]. Недостаток этого метода — уничтожение наиболее ценных составляющих ПКМ и высокая вероятность выброса вредных веществ в окружающую среду.

Среди физических методов механический — самый распространенный. Главными достоинствами являются сравнительная простота технологического оформления и универсальность, а также отсутствие вредных выбросов и испарений — он применим для любых ПКМ и полимеров, при этом происходит одновременная переработка волокон наполнителя и полимерного связующего. К недостаткам механического способа следует отнести высокую энергоемкость, сложность регулирования размеров измельченных пластиков, снижение механических свойств получаемого вторичного сырья и его дальнейшее ограниченное использование [8—12].

Исследования по утилизации ПКМ с использованием химических методов основаны на химическом разрушении полимерного связующего, продуктом на выходе является волокно.

Наиболее перспективным способом утилизации в настоящее время считается сольволиз, так как разложение полимерной матрицы в ПКМ происходит при сравнительно “мягких” условиях (давлении от 1 до нескольких атмосфер и при температуре от 25 до 400 °C).

## Материалы и методы

**Материалы.** Исследовали композитные материалы на основе эпоксидвинилэфирного связующего Derakane 411-350 (Ashland) и полотняной

стеклоткани 1250-T30-290 (Umatex). Данные материалы и их аналоги находят широкое применение в различных отраслях промышленности, например, авиации и судостроении. Образцы композитов изготавливали из девяти слоев стеклоткани с углом армирования  $0^\circ$  методом вакуумной инфузии (VaRTM) с использованием установки SVI-20-43 (MSH Techno). В качестве растворителя использовали метилдиэтаноламин 99% (Sigma-Aldrich).

**Методы.** Сольволиз проводили в лабораторном реакторе, представляющем круглодонную колбу, сообщенную с обратным холодильником. В колбу наливали 50 г метилдиэтанолamina (МДЭА), помещали образец композита массой 5 г и вводили катализатор (NaOH). Смесь перемешивали магнитной мешалкой и нагревали до  $180^\circ\text{C}$ . Сольволиз продолжался до достижения полного разделения матрицы и наполнителя.

*Термоанализ образцов* выполняли на приборе синхронного термического анализа STA 409 PC Luxx (NetzschGeraetebau GmbH). В процессе эксперимента проводили регистрацию данных термогравиметрии и дифференциальной сканирующей калориметрии. Анализ выполняли в тиглях из корундовой керамики. Нагрев осуществлялся со скоростью 10 К/мин в воздушной атмосфере.

*Структурные исследования* проводили на сканирующем электронном микроскопе Hitachi S-3400N, оснащенном электронной пушкой с вольфрамовым катодом, при ускоряющем напряжении 5 кВ с использованием детектора вторичных электронов (SE).

*Испытание стеклопластиков на изгиб.* Образцы испытывали на трехточечный изгиб по ГОСТ Р 56810—2015 (ASTM D790-10) на универсальной испытательной машине Instron 3382. Размер образца  $60 \times 15 \times 2$  мм. Для испытаний использовали опоры радиусом 2 мм, установленные на расстоянии 32 мм. Скорость нагружения 1 мм/мин.

*Испытание стекловолокна на разрыв.* Оценка прочности элементарных стеклянных волокон осуществлена в соответствии с ГОСТ Р 57063—2017 (ASTM C1557-14).

## Результаты и обсуждение

Рассмотрена возможность рециклинга стеклопластика методом сольволиза в среде метилдиэтанолamina (МДЭА). Проведение сольволиза композита в присутствии МДЭА в диапазоне температур от 150 до  $200^\circ\text{C}$  приводит только к незначительному набуханию образцов и проявлению ими большей пластичности. Полной деполимеризации связующего не наблюдали (рис. 2).

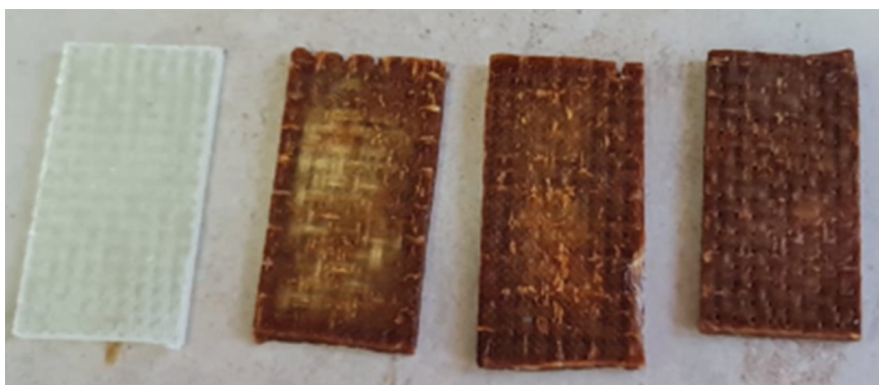


Рис. 2. Фото образцов, выдержанных в среде МДЭА при температуре 200 °С в течение 0, 2, 10, 24 ч (слева направо).

Для повышения эффективности деструкции полимерного связующего в качестве катализатора использовали гидроксид щелочного металла Na. Значительная каталитическая активность этого соединения в процессе деструкции полимерных термореактивных систем отмечена в [13]. Исследовали каталитические системы, содержащие 2, 4, 5 и 10% гидроксида Na.

Использование таких систем позволило получить регенерированную стеклоткань и жидкость, содержащую продукты распада эпоксивинилэфирного связующего (рис. 3).

Волокна, полученные на разных этапах эксперимента, исследовали методом термогравиметрического анализа для установления глубины деполимеризации связующего (рис. 4).

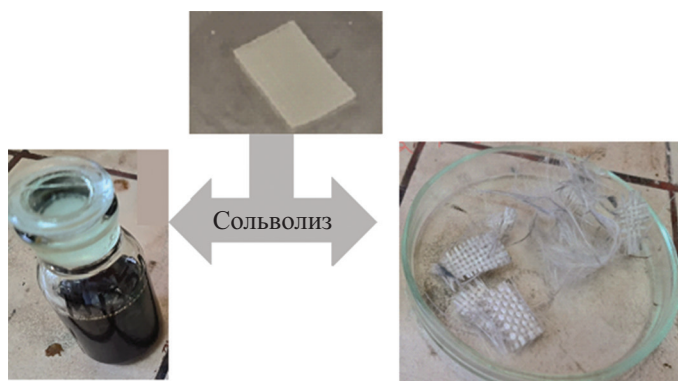


Рис. 3. Продукты сольволиза.

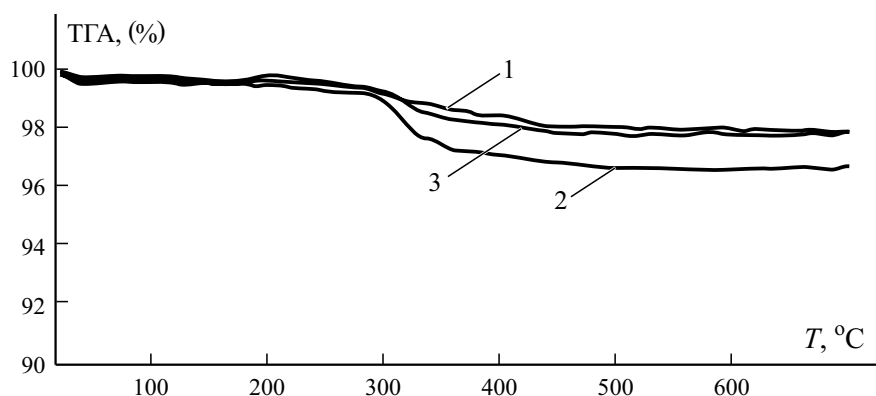


Рис. 4. Термогравиметрические кривые стеклонитей, восстановленных в среде МДЭА в присутствии 5% NaOH: 1 — первичное волокно; 2 — сольволиз 2 ч; 3 — сольволиз 6 ч.

В результате 6-часовой обработки в МДЭА (по данным рис. 4) в присутствии 5% NaOH удалось получить волокна, идентичные исходному

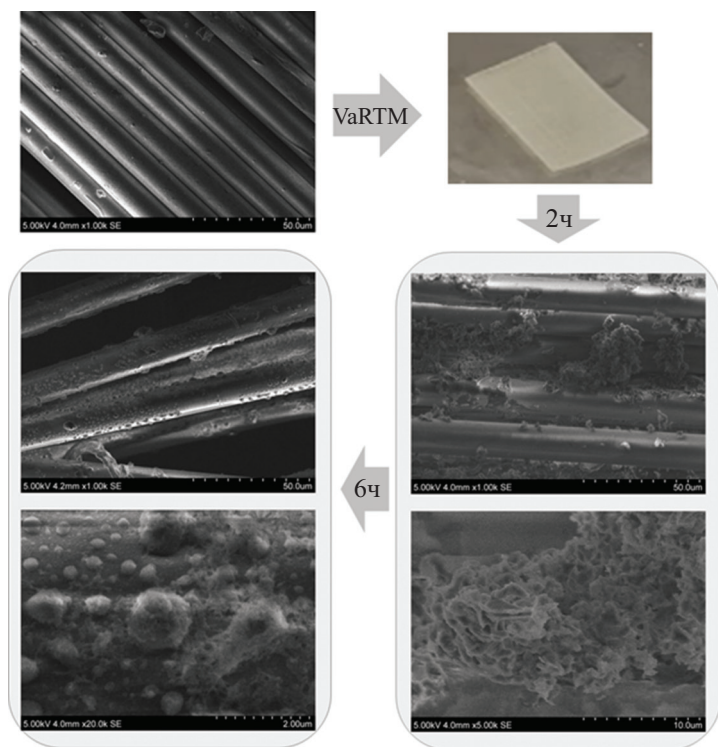


Рис. 5. Микроструктура волокон.



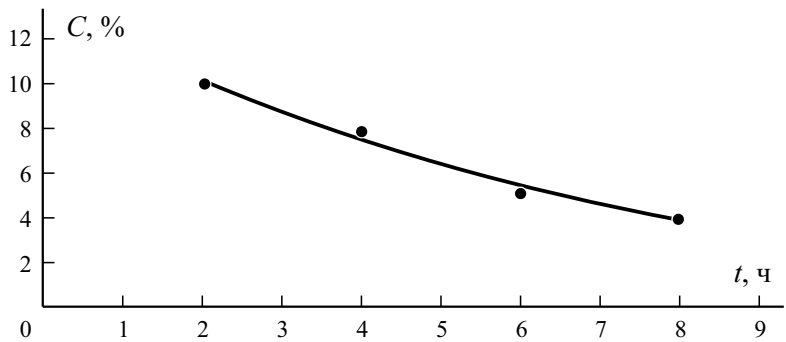


Рис. 6. Зависимость времени сольволиза  $t$  от концентрации  $C$  катализатора NaOH.

стекловолокну. Об этом также свидетельствуют изображения, полученные с помощью СЭМ (рис. 5). После 2 ч сольволиза на волокнах стеклоткани наблюдали значительное количество остатков органической матрицы, а после 6 ч экспозиции на поверхности волокон видны только мелкие частицы размером от 1,3 мкм до 120 нм.

По данным экспериментальных исследований получена зависимость времени сольволиза  $t$  до достижения полной деградации связующего в образцах стеклопластиков от концентрации катализатора  $C$  (рис. 6). Установлено, что с увеличением доли гидроксида NaOH в реакционной среде существенно снижается время сольволиза. Значительный интерес представляет оценка влияния концентрации NaOH  $C$  и времени сольволиза  $t$  на механическую прочность получаемых волокон, которую оценивали пределом прочности при разрыве  $\sigma_b$  (рис. 7). Испытания про-

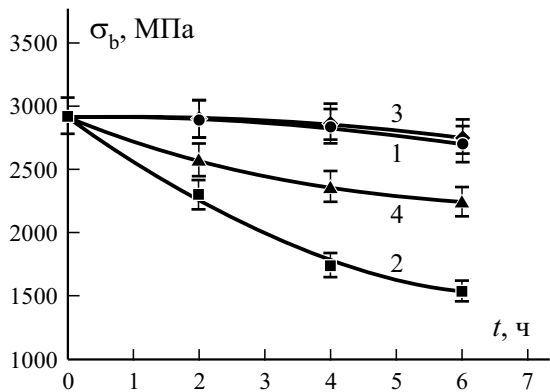


Рис. 7. Зависимость прочности волокон  $\sigma_b$  от времени обработки  $t$  при концентрации катализатора  $C = 5$  (1); 10 (2); 4 (3); 8% (4).



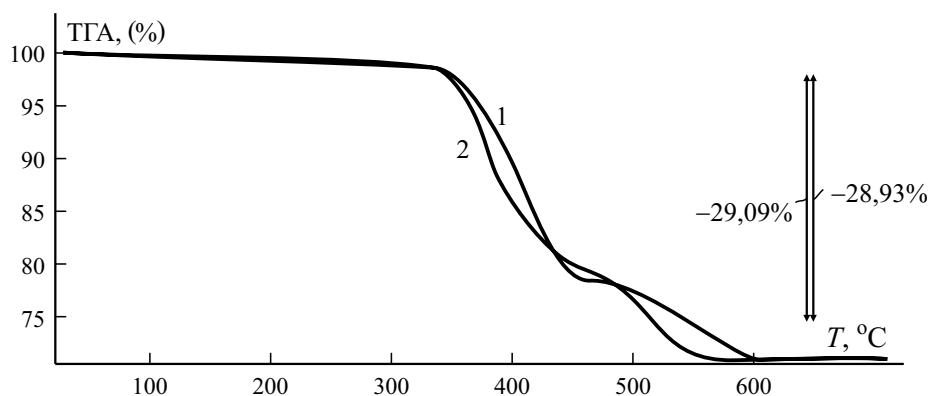


Рис. 8. Термогравиметрические кривые ПКМ из первичного волокна (1) и восстановленного волокна (2).

водили в соответствии с ГОСТ Р 56810—2015 на элементарных волокнах с использованием динамометра с чувствительностью 0,01 Н. Наиболее приемлемые результаты получены с использованием состава, содержащего 5% NaOH.

Таким образом, можно создать условия, при которых прочность волокон в результате рециклинга снижается только на 8%. При этом применение термических методов рециклинга позволяет получать волокна с прочностью, не превышающей 80% от исходной [14,15].

С использованием метода VaRTM были получены образцы ПКМ на основе связующего Derakane 411-350 из исходной стеклоткани и восстановленной при температуре 180 °C и концентрации катализатора 5%. Идентичность составов образцов ПКМ, полученных на основе восстановленного и исходного стекловолокна контролировали с помощью данных термогравиметрии (рис. 8). Соотношение волокно / матрица в полученных образцах составляло 70/30. Предел прочности при трехточечном изгибе композита на основе первичной стеклоткани — 482 МПа, прочность стеклопластика на основе стеклоткани, восстановленной в среде МДЭА в присутствии 5% NaOH в течение 6 ч, — 441 МПа, композита на основе стеклоткани, восстановленной в присутствии 10% NaOH в течение 2-часовой обработки, — 364 МПа. Эти данные свидетельствуют об эффективности использования МДЭА в качестве сольвента при рециклинге ПКМ на основе эпоксивинилэфирного связующего. Прочность стеклопластика из восстановленной ткани на 8,5% ниже, чем на основе первичной ткани. Полученные результаты коррелируют с данными прочности стеклянных волокон (см. рис. 7).

В некоторых исследованиях с использованием в качестве среды сольволиза суб- и сверхкритической воды также удавалось удалить от

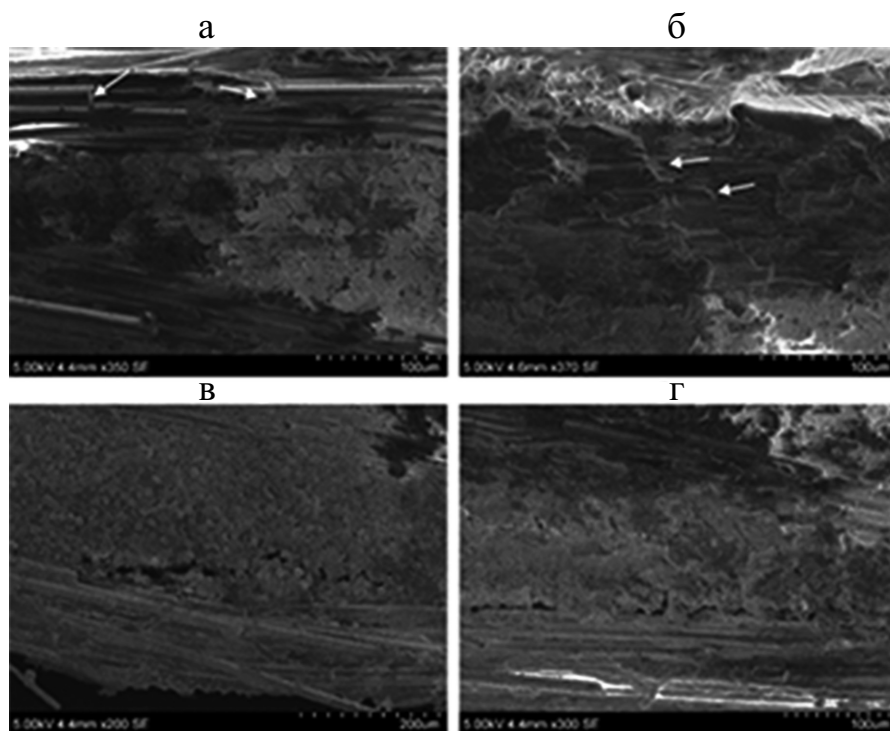


Рис. 9. Структура изломов образцов композитов из первичного (а, в) и восстановленного (б, г) волокон.

79 до 97% полимерной матрицы [16—18]. Прочность восстановленных таким методом стеклянных нитей достигает только 60% от прочности исходного волокна [16]. Хорошие результаты показали и системы на основе сверхкритических спиртов и кетонов [19, 20]. Главный недостаток такого метода рециклинга — необходимость наличия специального оборудования, способного работать при высоких давлении и температуре, а также длительность процесса.

Преимущество использования МДЭА заключается в возможности проведения процесса при атмосферном давлении, что коррелирует с результатами [21] в среде моноэтаноламина.

Структура и характер изломов образцов композитов (рис. 9) также подтверждают идентичность свойств полученных материалов. На рис. 9—а, б представлены области мест растяжения на изгибаемых образцах. На снимках наблюдаются места разрыва волокон, сопровождаемого его адгезионным отрывом от матрицы, в результате чего образуется соответствующий ложемент. В зоне сжатия изгибаемого образца (рис. 9—в, г) формируется трещина, которая провоцирует

расслоение. Формирование трещины в обоих случаях происходит по месту контакта утка и основы ткани. В образце композита из восстановленной стеклоткани торцы нитей имеют правильную округлую форму, расслоение идет по границе контакта волокно—матрица. Когезионного разрушения волокон не наблюдали, что свидетельствует о хорошей остаточной прочности нитей.

### Заключение

Результаты исследования использования МДЭА в качестве среды в процессе рециклинга стеклопластиков на основе эпоксивинилэфирного связующего показало, что оно эффективно только в присутствии гидроксида натрия. Введение NaOH способствует значительному ускорению деструкции полимерной матрицы. Волокна стеклоткани, восстановленной в среде МДЭА, содержащей 5% NaOH, обладают практически такими же прочностными характеристиками, как и исходные волокна.

Таким образом, рассмотренный способ и исследованный состав среды сольволиза позволяют удалять связующее из композита с сохранением большинства свойств армирующего наполнителя. В сравнении с существующими данный метод рециклинга позволяет получать композиты, незначительно уступающие по свойствам аналогичным материалам из исходного сырья.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-79-00246.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Martin C.* Wind Turbine Blades Can't Be Recycled, So They're Piling Up in Landfills. — Bloomberg, 2020. URL: <https://www.bloomberg.com/news/features/2020-02-05/wind-turbine-blades-can-t-be-recycled-so-they-re-piling-up-in-landfills> (дата обращения 27.01.2022)
2. *Chen J. Z., Li Z., Zhu S. R., Li Z. Q., Kong Y. L.* Prediction of long-term properties of fiberglass pipe based on the shift factors method // *Adv. Mater. Res.* — 2013. — Vol. 748. — P. 411—415.
3. *Bogner B.* Survey of long term durability of fiberglass reinforced plastics tanks and pipes // *Reinforced Plastics Durability.* — 1999. — P. 267—281.
4. *Каблов Е. Н., Старцев О. В., Кротов А. С., Кириллов В. Н.* Климатическое старение композитных материалов авиационного назначения. I. Механизмы старения // *Деформация и разрушение материалов.* — 2010. — №. 11. — С. 7—19

5. Дориомедов М. С. Российский и мировой рынок полимерных композитов (обзор) // Тр. ВИАМ. — 2020. — №. 6—7 (89). — С. 29—37.
6. Meyer L. O, Schulte K., Grove-Nielsen E. CFRP-recycling following a pyrolysis route: process optimization and potentials // J. Compos. Mater. — 2009. — Vol. 43, No. 9. — P. 1121—1132.
7. Schwarz S., Höftberger T., Burgstaller C., Hackl A., Schwarzwinger C. Pyrolytic recycling of carbon fibers from prepregs and their use in polyamide composites // Open J. Compos. Mater. — 2020. — Vol. 10. — P. 92—105.
8. Howarth J., Mareddy S. S. R., Mativenga P. T. Energy intensity and environmental analysis of mechanical recycling of carbon fibre composite // J. Clean. Prod. — 2014. — Vol. 81. — P. 46—50.
9. Longana M. L., Ondra V., Yu H., Potter K. D., Hamerton I. Reclaimed carbon and flax fibre composites: manufacturing and mechanical properties // Recycl. — 2018. — Vol. 3, No. 4. — P. 52.
10. Palmer J., Ghita O. R., Savage L., Evans K. E. Successful closed-loop recycling of thermoset composites // Composites: Part A. — 2009. — Vol. 40, No. 4. — P. 490 — 498.
11. Ogi K., Nishikawa T., Okano Y., Taketa I. Mechanical properties of ABS resin reinforced with recycled CFRP // Adv. Compos. Mater. — 2007. — Vol. 16, No. 2. — P. 181—94.
12. Conroy A., Halliwell S., Reynolds T. Composite recycling in the construction industry // Composites: Part A. — 2006. — Vol. 37, No. 8. — P. 1216—1222
13. Yang P., Zhou Q., Yuan X. X., Van Kasteren J. M. N., Wang Y. Z. Highly efficient solvolysis of epoxy resin using poly(ethylene glycol)/NaOH systems // Polym. Degrad. Stab. — 2012. — Vol. 97, No. 7. — P. 1101—1106.
14. Protsenko A. E., Pimenova E. D., Petrov V. V. Recycling of glass fibers sheets from thermoset reinforced plastic using thermolysis method // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. — IOP Publ., 2020. — Vol. 734, No. 1. — P. 012185.
15. Ginder R. S., Ozcan S. Recycling of commercial e-glass reinforced thermoset composites via two temperature step pyrolysis to improve recovered fiber tensile strength and failure strain // Recycl. — 2019. — Vol. 4, No. 2(24). — P. 1—12.
16. Kao C. C., Ghita O. R., Hallam K. R., Heard P. J., Evans K. E. Mechanical studies of single glass fibres recycled from hydrolysis process using sub-critical water // Composites: Part A. — 2012. — Vol. 43, No. 3. — P. 398—406.
17. Bai Y., Wang Z., Feng L. Chemical recycling of carbon fibers reinforced epoxy resin composites in oxygen in supercritical water // Mater. Des. — 2010. — Vol. 31, No. 2. — P. 999—1002.
18. Piñero-Hernanz R., Dodds C., Hyde J., García-Serna J., Poliakov M., Lester E., ... Wong K. H. Chemical recycling of carbon fibre reinforced composites in nearcritical and supercritical water // Composites: Part A. — 2008. — Vol. 39, No. 3. — P. 454—461.
19. Okajima I., Sako T. Recycling fiber-reinforced plastic using supercritical acetone // Polym. Degrad. Stab. — 2019. — Vol. 163. — P. 1—6.

20. *Piñero-Hernanz R., García-Serna J., Dodds C., Hyde J., Poliakoff M., Cocero M. J., ... Lester E.* Chemical recycling of carbon fibre composites using alcohols under subcritical and supercritical conditions // *J. Supercritical Fluids.* — 2008. — Vol. 46, No. 1. — P. 83—92

21. *Vallee M., Tersac G., Destais-Orvoen N., Durand G.* Chemical recycling of class A surface quality sheet-molding composites // *Ind. Eng. Chem. Res.* — 2004. — Vol. 43, No. 20. — P. 6317—6324

Поступила в редакцию 20.01.2022

Received Jan. 20, 2022

---

Ч. Ш. Чен<sup>a</sup>, Х. Ван<sup>b</sup>, Цз. И. Као<sup>a</sup>, В. Р. Чен<sup>c\*</sup>

<sup>a</sup>*Department of Mechanical Engineering, Lunghwa University of Science and Technology,  
Guishan Shiang 33306, Taiwan*

<sup>b</sup>*Department of Mechanical Engineering, Ming Chi University of Technology, Tai-Shan 24301, Taiwan*

<sup>c</sup>*Department of Mechanical Engineering, Chinese Culture University, Taipei 11114, Taiwan*

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПУЛЬСИРУЮЩИХ НАГРУЗКАХ НА ОСНОВЕ ТЕОРИЙ ПЛАСТИН ВЫСОКОГО ПОРЯДКА<sup>1</sup>

*C. S. Chen, H. Wang, J. Y. Kao, and W. R. Chen\**

### INVESTIGATING THE INSTABILITY OF PARAMETRIC VIBRATIONS OF COMPOSITE PLATES UNDER ARBITRARY PULSATING LOADS BASED ON HIGH-ORDER PLATE THEORIES

**Keywords:** excitation frequency, dynamic instability index, Mathieu-type motion, Bolotin's method

The instability of composite plates subjected to an arbitrary periodic dynamic loading is investigated based on Lo's high-order shear-deformation plate theory. The differential equations of motion of Mathieu-type are formed by Hamilton's principle and employing the Galerkin method. Using Bolotin's method, the excitation frequencies of composite plates are evaluated to determine their dynamic stability region and dynamic instability index. Omitting the high-order terms of Lo's displacement field, the system equations can be simplified to governing equations in the first-order plate theory. The dynamic instability determined by the present theory is compared with results of the first-order plate theory. Results show that high order terms have a significant impact on the dynamic instability of composite plates.

**Ключевые слова:** частота возбуждения, индекс неустойчивости динамической, движение типа Матье, метод Болотина

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [wrcen@faculty.pccu.edu.tw](mailto:wrcen@faculty.pccu.edu.tw)  
Corresponding author: [wrcen@faculty.pccu.edu.tw](mailto:wrcen@faculty.pccu.edu.tw)

<sup>1</sup>Перевод с англ.

Неустойчивость композитных пластин, подверженных произвольной периодической динамической нагрузке, исследована с помощью теории сдвигового деформирования высокого порядка. Дифференциальные уравнения движения типа Матье получены с применением принципа Гамильтона и метода Галеркина. С помощью метода Болотина оценили частоты возбуждения композитных пластин для определения их области неустойчивости и индекса динамической неустойчивости. Игнорируя члены высокого порядка поля перемещений, систему определяющих уравнений пластин можно упростить до теории первого порядка. Результаты динамической неустойчивости композитных пластин, определенные с помощью предложенной теории, сравнили с рассчитанными по теории пластин первого порядка. Анализ показал, что члены высокого порядка оказывают существенное влияние на динамическую неустойчивость композитных пластин.

## Введение

Композитные пластины, способные обеспечить большую удельную прочность и жесткость, чем традиционные металлические пластины, широко используют во многих областях техники. Динамическая нестациональность пластин — явление, требующее особого внимания при проектировании конструктивных элементов. Неустойчивость в виде параметрического резонанса может возникнуть, когда конструкция подвергается периодическому динамическому нагружению. Точное определение области динамической неустойчивости пластин — очень важная проблема для практических приложений. Комплексное исследование задач динамической устойчивости при периодических нагрузках выполнено в [1]. В [2] изучали динамическую неустойчивость тонких цилиндрических оболочек, подверженных действию плоских нагрузок при синусоидальном кинематическом возбуждении. Линейная теория изгиба, использованная в данном анализе, оказалась пригодна для предсказания начала их динамической неустойчивости.

Динамический резонанс — один из важнейших объектов при изучении характеристик динамической неустойчивости конструкций. В [3] представлен широкий обзор работ по динамическому поведению композитных оболочек. В [4], используя два варианта метода конечных полос, исследовали динамическую неустойчивость конструкций из слоистых композитов, подверженных осевым гармоническим нагрузкам. Результаты показали, что представленная модель способна предсказать параметрический резонанс конструкций. В [5] методом конечных полос также исследовали параметрическую неустойчивость композитных криволинейных панелей при неоднородных осевых нагрузках. Статическую и динамическую составляющие нагрузки изменяли согласно параболической функции. Метод Болотина использовали для оценки влияния нагрузки и геометрических параметров



на области неустойчивости. В [6] метод Болотина применили для исследования динамической неустойчивости сэндвич-панелей с пенопластовой сердцевинной при периодическом нагружении. При оценке влияния разных параметров на поведение динамической устойчивости пластины использовали индекс динамической неустойчивости. В [7] с помощью теории первого порядка рассматривали динамическую неустойчивость композитных пластин, подверженных периодическим нагрузкам. Метод Болотина использовали для решения дифференциальных уравнений Матье—Хилла при определении области динамической неустойчивости. В [8] исследовали нелинейную динамическую неустойчивость композитных пластин при гармонических нагрузках. Нелинейные уравнения Матье—Хилла получили с помощью метода Галеркина. Затем методом Болотина определили области динамической неустойчивости и амплитуды неустойчивых колебаний. Динамическую неустойчивость сэндвич-пластин из слоистых композитов исследовали в [9] с помощью теории зигзага, учитывающей нелинейное распределение поперечных касательных напряжений. Для изучения динамической неустойчивости разработали эффективный метод конечных элементов (МКЭ). Границы частот возбуждения основных областей неустойчивости определили методом Болотина. Динамическую неустойчивость композитных пластин переменной жесткости при периодических нагрузках исследовали в [10]. Набор уравнений движения Матье—Хилла получили методом модального преобразования и решили методом кратных масштабов для определения областей динамической неустойчивости, связанных с разными типами резонанса. В [11] с помощью МКЭ, основанного на теории сдвигового деформирования пластин первого порядка, исследовали динамическую неустойчивость расслоившихся композитных пластин при периодических нагрузках. Метод Болотина применили также для оценки границ зон неустойчивости. Результаты показали, что увеличивающееся расслоение сдвигает область неустойчивости в более низкие частоты возбуждения.

Однако классическая теория пластин и теории пластин первого порядка не способны адекватно смоделировать поведение композитных конструкций. Поэтому для повышения точности предложили разные теории пластин высокого порядка. В [12] с помощью теории пластин высокого порядка проанализировали динамическую устойчивость косоугольных пластин из слоистых композитов при периодических нагрузках. Методом Болотина определили режимы динамической неустойчивости и обсудили влияние пульсирующей нагрузки на индекс динамической неустойчивости. В [13] исследовали динамическую неустойчивость сэндвич-пластин с лицевыми слоями, армированными углеродными нанотрубками, под действием периодических сил. Оценили влияние объемного содержания углеродных нанотрубок и толщины слоя сердцевинной на область неустойчивости и частоту возбуждения. С помощью теорий первого и высокого порядков в [14] исследовали динамическую неустойчивость композитных пластин при однородных, линейных и параболических динамических нагрузках.



Методом Болотина определили области динамической неустойчивости при разных периодических нагрузках, оценили влияние типов нагрузки, отношение длин сторон и граничных условий. В [15] с помощью теории пластин высокого порядка рассмотрена динамическая неустойчивость расслоившихся косоугольных композитных пластин, подверженных периодическим нагрузкам. Границы неустойчивых областей определены методом Болотина. Оценено влияние углов скашивания и ориентации волокон, длины расслоения, а также факторов статической и динамической нагрузки на характеристики динамической неустойчивости. В [16] динамическую устойчивость косоугольных композитных пластин при параболических и линейных периодических нагрузках изучали с помощью теории пластин высокого порядка. Следуя методу Болотина, динамические неустойчивые области определили с помощью метода аппроксимации высокого порядка. Исследовали влияние разных геометрических параметров, типов нагружения и граничных условий. С помощью полиномиальной теории пластин высокого порядка в [17] исследовали динамическую неустойчивость композитных пластин при периодических нагрузках с разными неоднородными распределениями. Уравнения типа Матье решили методом Болотина для определения областей динамической неустойчивости. Исследовали влияние разных видов неоднородной гармонической нагрузки на параметрическую неустойчивость пластин.

Динамическую неустойчивость композитных пластин изучали многие, но исследований при произвольных периодических нагрузках с изгибными и нормальными напряжениями с применением теории пластин высокого порядка выполнено мало. Поэтому настоящая работа посвящена изучению динамической вибрационной неустойчивости композитных пластин, подверженных произвольной периодической нагрузке, с помощью теории пластин высшего порядка [18]. Принцип Гамильтона использовали для вывода определяющих дифференциальных уравнений движения в частных производных, затем сведенных к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью метода Галеркина. Используя метод Болотина, решили систему обыкновенных дифференциальных уравнений типа Матье—Хилла для определения частот возбуждения композитных пластин, с помощью которых определили область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости композитных пластин. Оценили различие областей и индексов динамической неустойчивости, предсказанных теориями пластин высокого и первого порядка.

## 1. Основная постановка

Используя принцип Гамильтона, описанный Брюнелем [19], получим определяющее динамическое уравнение композитной пластины при общем состоянии под действием изменяющейся во времени внешней силы:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (U_S - K_t - W_i - W_e) dt = 0, \quad (1)$$

где

$$U_s = \int_{V_0} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV, \quad K_t = \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho \dot{v}_i \dot{v}_i dV, \quad W_i = \int_{V_0} X_i v_i dV, \quad W_e = \int_{S_0} p_i v_i dS;$$

$\delta$  — вариация функции;  $U_s$  и  $K_t$  — потенциальная и кинетическая энергии соответственно;  $W_i$  и  $W_e$  — внутренняя и внешняя работа соответственно;  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  — поле напряжений и деформаций соответственно;  $\rho$  и  $v_i$  — массовая плотность и перемещения;  $X_i$  — массовая сила на единицу начального объема;  $p_i$  — поверхностная сила на единицу площади;  $V_0$  и  $S_0$  — объем и ограничивающая поверхность. Подставив интегральные формы  $U_s$ ,  $W_i$  и  $W_e$  в уравнение (1), выполнив вариационные операции и предположив, что  $\delta v_i$  обращается в нуль в моменты времени  $t_0$  и  $t_1$ , получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{V_0} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - X_i \delta v_i - \rho \ddot{v}_i \delta v_i) dV - \int_{S_0} (p_i \delta v_i) dS \right] dt = 0. \quad (2)$$

Согласно теории, описанной в [18], предположим инкрементальные перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$  в любом местоположении в виде

$$u(x, y, z, t) = u_x(x, y, t) + z \varphi_x(x, y, t) + z^2 \xi_x(x, y, t) + z^3 \phi_x(x, y, t), \quad (3)$$

$$v(x, y, z, t) = u_y(x, y, t) + z \varphi_y(x, y, t) + z^2 \xi_y(x, y, t) + z^3 \phi_y(x, y, t), \quad (4)$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) + z \varphi_z(x, y, t) + z^2 \xi_z(x, y, t). \quad (5)$$

Уравнения (3)—(5) получены путем разложения перемещений  $u$ ,  $v$  и  $w$  в ряды Тейлора с учетом переменной  $z$  по толщине для учета параболического изменения поперечных сдвиговых и нелинейного изменения поперечных нормальных деформаций по толщине пластины. В теории, предложенной в [18], перемещения в плоскости с помощью рядов Тейлора представили в виде кубических функций от переменной по толщине, а поперечное перемещение — в виде квадратной функции. В поле перемещений учтены 11 неизвестных, включая изгибные деформации высокого порядка. Теории, основанные на аппроксимациях поля перемещений с другой степенью зависимости от координаты по толщине, содержат другое количество неизвестных. Самая простая из них — теория сдвигового деформирования первого порядка с пятью неизвестными [20, 21]. Теории сдвигового деформирования высокого порядка с семью и девятью неизвестными представлены в [22] и [23] соответственно. Кроме того, в [24, 25] разработали теорию сдвигового деформирования третьего порядка с пятью неизвестными, используя требование обращения в нуль поперечных сдвиговых напряжений на верхней и нижней поверхностях пластины, уменьшившее количество неизвестных в поле перемещений с девяти до пяти. Далее теорию высокого порядка с поперечными сдвиговыми и нор-

мальными деформациями, разработанную в [18], обозначим как HSNT. Игнорируя нормальные деформации высокого порядка в уравнениях (3) и (4) и поперечные сдвиговые деформации в уравнении (5), получим поле перемещений в простой теории сдвигового деформирования первого порядка (FSDT). Зависимость между напряжениями и деформациями  $k$ -го слоя композитной пластины, изготовленной из моноклинного материала, можно записать, как

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Предположим, что система внешних сил, приложенных к композитной пластине, изменяется со временем как

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^n + \frac{2z}{h} \sigma_{ij}^m = \left( \sigma_{ij}^S + \sigma_{ij}^D \cos \tilde{\omega} t \right) + 2z \left( \sigma_{ij}^{Sm} + \sigma_{ij}^{Dm} \cos \tilde{\omega} t \right) \quad (i, j = x, y, z). \quad (7)$$

Здесь  $\sigma_{ij}^n$  — периодическое нормальное или сдвиговое напряжение;  $\sigma_{ij}^S$  и  $\sigma_{ij}^D$  — соответствующие статические и динамические составляющие;  $\sigma_{ij}^m$  — периодическое напряжение чистого изгиба или кручения;  $\sigma_{ij}^{Sm}$  и  $\sigma_{ij}^{Dm}$  — соответствующие статические и динамические компоненты;  $\tilde{\omega}$  — возмущающая частота периодического нагружения. Подставив уравнения (3)—(7) в уравнение (2), выполнив интегрирование по частям, удалив производные от вариации перемещений и сгруппировав члены по вариациям перемещений  $\delta u_x, \delta u_y, \delta w, \delta \varphi_x, \delta \varphi_y$ , получим определяющие уравнения композитной пластины

$$Q_{1,x} + Q_{2,y} + (R_1 + R_5 + R_{17})_{,x} + (S_1 + S_6 + S_{17})_{,y} + f_x = I_1 \ddot{u}_x + I_3 \ddot{\xi}_x, \quad (8)$$

$$Q_{2,x} + Q_{3,y} + (R_9 + R_{13} + R_{21})_{,x} + (S_9 + S_{13} + S_{21})_{,y} + f_y = I_1 \ddot{u}_y + I_3 \ddot{\xi}_y, \quad (9)$$

$$Q_{4,x} + Q_{5,y} + (R_{30} + R_{33} + R_{25})_{,x} + (S_{30} + S_{33} + S_{25})_{,y} + f_z = I_1 \ddot{w} + I_3 \ddot{\xi}_z, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & Q_{6,x} + Q_{7,y} - Q_4 + (R_2 + R_6 + R_{18})_{,x} + (S_2 + S_6 + S_{18})_{,y} - \\ & - (U_1 + U_5 + W_1) + m_x = I_3 \ddot{\phi}_x + I_5 \ddot{\phi}_x, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & Q_{7,x} + Q_{8,y} - Q_5 + (R_{10} + R_{14} + R_{22})_{,x} + (S_{10} + S_{14} + S_{22})_{,y} - \\ & - (U_9 + U_{13} + W_5) + m_y = I_3 \ddot{\phi}_y + I_5 \ddot{\phi}_y, \end{aligned} \quad (12)$$

$$Q_{9,x} + Q_{10,y} - Q_{11} + (R_{31} + R_{34} + R_{36})_{,x} + (S_{31} + S_{34} + S_{36})_{,y} - \\ - (V_1 + V_4 + W_9) + m_z = I_3 \ddot{\phi}_z, \quad (13)$$

$$Q_{12,x} + Q_{13,y} - 2Q_9 + (R_3 + R_7 + R_{19})_{,x} + (S_3 + S_7 + S_{19})_{,y} - \\ - 2(U_2 + U_6 + W_2) + n_x = I_3 \ddot{u}_x + I_5 \ddot{\xi}_x, \quad (14)$$

$$Q_{13,x} + Q_{14,y} - 2Q_{10} + (R_{11} + R_{15} + R_{23})_{,x} + \\ + (S_{11} + S_{15} + S_{23})_{,y} + n_y = I_3 \ddot{u}_y + I_5 \ddot{\xi}_y, \quad (15)$$

$$Q_{15,x} + Q_{16,y} - 2Q_{17} + (R_{32} + R_{35} + R_{27})_{,x} + (S_{32} + S_{35} + S_{27})_{,y} - \\ - 2(V_2 + V_5 + W_{10}) + n_z = I_3 \ddot{w} + I_5 \ddot{\xi}_z, \quad (16)$$

$$Q_{18,x} + Q_{19,y} - 3Q_{15} + (R_4 + R_8 + R_{20})_{,x} + (S_4 + S_8 + S_{20})_{,y} - \\ - 3(U_3 + U_7 + W_3) + q_x = I_5 \ddot{\phi}_x + I_7 \ddot{\phi}_x, \quad (17)$$

$$Q_{19,x} + Q_{20,y} - 3Q_{16} + (R_{12} + R_{16} + R_{24})_{,x} + (S_{12} + S_{16} + S_{24})_{,y} - \\ - 3(U_{11} + U_{15} + W_7) + q_y = I_5 \ddot{\phi}_y + I_7 \ddot{\phi}_y, \quad (18)$$

где  $Q$  связывают деформации и перемещения композитной пластины; члены  $R, S, U, V, W$  — произвольные внешние силы, связанные с начальными напряжениями;  $I$  — величины, связанные с моментами инерции;  $f_x, f_y, f_z, m_x, m_y, m_z, n_x, n_y, n_z, q_x, q_y$  — объемные силы и поперечные нагрузки. Более подробная информация о соответствующих параметрах в уравнениях (8)—(18) дана в Приложении, взятом из [26].

## 2. Процедура решения

Трудно предоставить результаты для всех возможных случаев, поскольку на динамическое поведение композитной пластины, изучаемой в настоящей работе, влияет слишком много параметров. Исследуем динамику свободно опертой пластины из ортогонально армированного композита, подверженную пространственно однородной периодической системе напряжений в плоскости, включающей пульсирующее одноосное напряжение и напряжения чистого изгиба. Боковую внешнюю нагрузку и силу тяжести не учитываем. Таким образом, система уравнений (7) с периодической системой напряжений принимает вид

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^n + \frac{2z\sigma_{xx}^m}{h} = \sigma_n + 2z\sigma_m / h. \quad (19)$$

Здесь  $\sigma_n = \sigma^S + \sigma^D \cos \tilde{\omega} t$  и  $\sigma_m = \sigma^{Sm} + \sigma^{Dm} \cos \tilde{\omega} t$  — нормальные и изгибающие напряжения соответственно;  $\sigma^S$ ,  $\sigma^{Sm}$  и  $\sigma^D$ ,  $\sigma^{Dm}$  — соответствующие статические динамические составляющие, которые считаем постоянными. Ненулевые периодические нагрузки —  $N_{xx} = h\sigma_n$ ,  $M_{xx} = Sh^2\sigma_m / 6$ ,  $M_{xx}^* = h^3\sigma_n / 12$ ,  $P_{xx} = Sh^4\sigma_n / 40$ ,  $P_{xx}^* = h^5\sigma_n / 80$ ,  $R_{xx} = Sh^6\sigma_n / 224$  и  $R_{xx}^* = h^7\sigma_n / 448$ ,  $S = \sigma_m / \sigma_n$  — отношение периодического изгибающего напряжения к нормальному.

Для композитной пластины со свободно опертыми кромками поле перемещений (20), удовлетворяющее геометрическим граничным условиям, можно записать как

$$\begin{aligned} u_x &= \sum \sum h U_{mn} \cos(m\pi x / a) \sin(n\pi y / b), \\ u_y &= \sum \sum h V_{mn} \sin(m\pi x / a) \cos(n\pi y / b), \\ w &= \sum \sum h W_{mn} \sin(m\pi x / a) \sin(n\pi y / b), \\ \varphi_x &= \sum \sum \psi_{xmn} \cos(m\pi x / a) \sin(n\pi y / b), \\ \varphi_y &= \sum \sum \psi_{ymn} \sin(m\pi x / a) \cos(n\pi y / b), \\ \varphi_z &= \sum \sum \psi_{zmn} \sin(m\pi x / a) \sin(n\pi y / b), \\ \xi_x &= \sum \sum (\zeta_{xmn} / h) \cos(m\pi x / a) \sin(n\pi y / b), \\ \xi_y &= \sum \sum (\zeta_{ymn} / h) \sin(m\pi x / a) \cos(n\pi y / b), \\ \xi_z &= \sum \sum (\zeta_{zmn} / h) \sin(m\pi x / a) \sin(n\pi y / b), \\ \phi_x &= \sum \sum (\Phi_{xmn} / h^2) \cos(m\pi x / a) \sin(n\pi y / b), \\ \phi_y &= \sum \sum (\Phi_{ymn} / h^2) \sin(m\pi x / a) \cos(n\pi y / b). \end{aligned} \quad (20)$$

Подставив поле перемещений и периодические нагрузки в определяющие уравнения (8)—(18), используя метод Галеркина и сгруппировав коэффициенты, получим определяющее матричное уравнение движения в виде

$$[M] \ddot{\Delta} + \{[C] + [G]\} \Delta = 0, \quad (21)$$

$$\{\Delta\} = \left[ U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, \psi_{xmn}, \psi_{ymn}, \psi_{zmn}, \zeta_{xmn}, \zeta_{ymn}, \zeta_{zmn}, \Phi_{xmn}, \Phi_{ymn} \right]^T,$$

где  $\Delta$  — зависящий от времени вектор перемещений в HSNT. Зависящий от времени вектор перемещений в FSDT —  $\left[ U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, \psi_{xmn}, \psi_{ymn} \right]^T$ ;  $[M]$ ,

$[C]$  и  $[G]$  — матрицы инерции, упругой и геометрической жесткости соответственно. Матричное уравнение (21) можно использовать для анализа задач на собственные значения свободных колебаний, статической потери устойчивости и динамической неустойчивости.

Пренебрегая внешними нагрузками в плоскости и матрицей  $[G]$  и подставив  $\Delta(t) = \Delta e^{i\omega t}$  в уравнение (21), сведем его к виду

$$\{[C] - \omega^2 [M]\} [\Delta] = 0, \quad (22)$$

представляющему уравнение на собственные значения, связанные со свободными колебаниями композитной пластины. Условие существования ненулевого решения — равенство нулю определителя матрицы коэффициентов

$$|[C] - \omega^2 [M]| = 0, \quad (23)$$

из которого можно найти собственную частоту  $\omega$ .

Для анализа статической потери устойчивости матрицу инерционных членов уравнения (21) предположим равной нулю. Уравнение собственных значений для статической нагрузки потери устойчивости  $N_{xx}$  имеет вид

$$\{[C] + N_{xx} [G]^*\} [\Delta] = 0. \quad (24)$$

Аналогичным образом нагрузку статической потери устойчивости можно получить, приравняв нулю определитель матрицы коэффициентов уравнения (24). Ненулевую периодическую нагрузку найдем, проинтегрировав уравнение (19):

$$N_{xx} = h\sigma_n = h(\sigma^S + \sigma^D \cos \tilde{\omega} t) = \alpha_S P_{cr} + \alpha_D P_{cr} \cos \tilde{\omega} t, \quad (25)$$

где  $P_{cr}$ ,  $\alpha_S$  и  $\alpha_D$  — нагрузка потери устойчивости и параметры статической и динамической нагрузок соответственно. Подстановка уравнения (25) в (21) приводит к соотношению

$$[M] \ddot{\Delta} + \{[C] + \alpha_S P_{cr} [G] + \alpha_D P_{cr} [G] \cos \tilde{\omega} t\} [\Delta] = 0, \quad (26)$$

являющемуся обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка типа Матье—Хилла. Затем методом Болотина определяем границы между устойчивой и неустойчивой областями параметрически возбужденной конструкции, используя периодические решения в рядах Фурье с периодом  $T$  и  $2T$ , где  $T = 2\pi / \omega$ . Периодические решения  $\Delta$  уравнения (26) с периодом  $T$  и  $2T$  можно найти, используя следующие ряды Фурье:

$$\Delta = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( a_k \sin \frac{k\tilde{\omega} t}{2} + b_k \cos \frac{k\tilde{\omega} t}{2} \right), \quad (27)$$

$$\Delta = \sum_{k=0,2,4,\dots}^{\infty} \left( a_k \sin \frac{k\tilde{\omega}t}{2} + b_k \cos \frac{k\tilde{\omega}t}{2} \right), \quad (28)$$

где  $a_k$  и  $b_k$  — произвольные постоянные, не зависящие от времени. Подставив разложения (27) и (28) в уравнение (26) и сгруппировав члены с синусами и косинусами, получим два набора линейных алгебраических уравнений с  $a_k$  и  $b_k$ . Как правило, первичная область неустойчивости, определяемая решением с периодом  $2T$ , намного больше вторичной области неустойчивости, определяемой решением с периодом  $T$ . Поэтому область первичной неустойчивости с периодом  $2T$  имеет наибольшее практическое значение и обеспечивает достаточно точное решение. Поскольку приближение первого порядка для  $a_1$  и  $b_1$  области первичной неустойчивости может быть получено с достаточной точностью, то решение первого порядка для неё можно записать как

$$[C] + \alpha_S P_{cr} [G] \pm \frac{1}{2} \alpha_D P_{cr} [G] - \frac{1}{4} \tilde{\omega}^2 [M] = 0. \quad (29)$$

### 3. Анализ и обсуждение

С помощью теории пластин высокого порядка исследуем динамическую неустойчивость композитных пластин со следующими свойствами:  $E_x / E_y =$  варьируем,  $E_y = E_z$ ,  $G_{xy} = G_{xz} = 0,6 E_y$ ,  $G_{yz} = 0,5 E_y$ ,  $\nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu_{yz} = 0,25$ . Предложенный вариант теории HSNT можно упростить до FSDT, пренебрегая членами более высокого порядка и введя коэффициент коррекции сдвига в результирующие сдвиговые напряжения. Затем результаты, полученные с помощью HSNT и FSDT, сопоставим для демонстрации различий между двумя теориями. В последующем исследовании используем безразмерный параметр частоты возбуждения  $\Omega = \tilde{\omega} b^2 / (h \sqrt{\rho / E_y})$  и индекс динамической неустойчивости  $\Omega_{DI} = 100 \Delta \Omega / (\omega_{nf} / P_{cr})$ . При этом  $\omega_{nf} = \omega b^2 / (h \sqrt{\rho / E_y})$  и  $P_{cr} = 10 \sigma_n b^2 / E_y h^4$  — основная собственная частота и критическая нагрузка потери устойчивости соответственно;  $\Delta \Omega = \Omega^U - \Omega^L$  — ширина области неустойчивости, ограниченной верхней  $\Omega^U$  и нижней  $\Omega^L$  частотой возбуждения. Индекс динамической неустойчивости  $\Omega_{DI}$  количественно определяет меру неустойчивости посредством области неустойчивости, собственной частоты и нагрузки потери устойчивости.

Для проверки точности предложенной модели проанализировали некоторые репрезентативные примеры. Во-первых, рассмотрели свободные колебания антисимметричных ортогонально армированных пластин с использованием FSDT и HSNT. В табл. 1 представлены значения собственной частоты ортогонально армированных пластин с разным количеством слоев и отношением модулей упругости. Значения частоты, рассчитанные

Табл. 1

Значения собственной частоты квадратных пластин из антисимметричных ортогонально армированных композитов при разном количестве слоев и отношении модулей упругости ( $a/b = 1$ ,  $a/h = 5a/b = 1$ ,  $a/h = 5$ )

Композит	Теория	$E_x/E_y$			
		10	20	30	40
(0°/90°)	FSDT	6,9301	7,6934	8,3052	8,8142
	[27]	6,9156	7,6922	8,3112	8,8255
	HSNT	6,9802	7,7188	8,2815	8,7305
	[28]	6,9741	7,7140	8,2775	8,7272
(0°/90°) <sub>2</sub>	FSDT	8,1590	9,6627	10,5857	11,2298
	[27]	8,1363	9,6729	10,6095	11,2635
	HSNT	8,1563	9,4760	10,2819	10,8306
	[28]	8,1482	9,4675	10,2733	10,8221
(0°/90°) <sub>3</sub>	FSDT	8,4015	9,9148	10,8460	11,4825
	[27]	8,3883	9,9266	10,8723	11,5189
	HSNT	8,3939	9,8430	10,7196	11,3131
	[28]	8,3852	9,8346	10,7113	11,3051

по представленной модели, хорошо согласуются с приведенными в [27, 28]. Из данных табл. 1 видно, что значение частоты возрастает с увеличением отношения  $E_x / E_y$  и количества слоев в композите. Во-вторых, изучили динамическую устойчивость пластин из симметричного четырех-

Табл. 2

Значения частот возбуждения четырехслойных пластин из симметричных ортогонально армированных композитов с разными параметрами статической и динамической нагрузки

$\alpha_S$	$\alpha_D$	[29]		FSDT [30]		HSNT	
		$\Omega^U$	$\Omega^L$	$\Omega^U$	$\Omega^L$	$\Omega^U$	$\Omega^L$
0	0	144,57	144,57	144,36	144,36	144,97	144,97
0	0,3	155,03	133,29	155,64	133,79	155,45	133,67
0	0,6	164,83	120,95	165,12	121,45	165,27	121,32
0	0,9	174,08	107,21	174,43	107,63	174,53	107,56
0	1,2	182,87	91,43	183,21	91,86	183,33	91,76
0	1,5	191,25	72,28	191,75	72,62	191,73	72,60
0,2	0,06	131,71	126,86	132,12	127,26	132,09	127,23
0,4	0,12	117,45	106,24	117,96	106,82	117,80	106,58
0,6	0,18	101,20	80,49	101,84	81,10	101,53	80,81
0,8	0,24	81,78	40,89	82,31	41,32	82,10	41,27



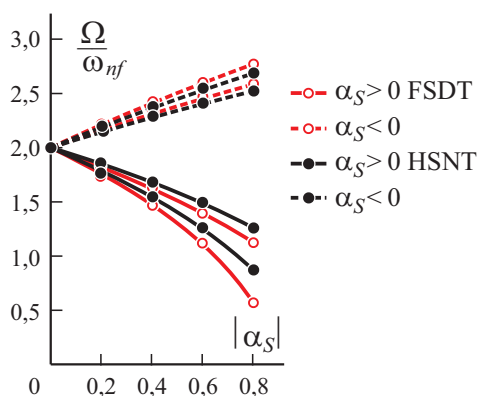


Рис. 1. Влияние статической нагрузки на величину  $\Omega / \omega_{nf}$ :  $a/b = 1$ ,  $a/h = 10$ ,  $n = 1$ ,  $\alpha_D / |\alpha_S| = 0,3$ ,  $S = 0$ ,  $\alpha_S < 0$  (растяжение) и  $\alpha_S > 0$  (сжатие).

слойного ортогонально армированного композита при разных статических и динамических нагрузках. В табл. 2 приведены значения верхней и нижней частот возбуждения композитной пластины, рассчитанные с помощью HSNT и сопоставленные с полученными в [29] и с помощью FSDT в [30]. Численные значения HSNT хорошо согласуются с рассчитанными посредством FSDT. Как видно из данных табл. 2, с увеличением параметра динамической нагрузки  $\alpha_D$  (при  $\alpha_S = 0$ ) значения верхней частоты возбуждения возрастают, а нижней — уменьшаются. Кроме того, значения верхней и нижней частот возбуждения уменьшаются по мере одновременного увеличения статических и динамических нагрузок. Результаты, полученные с помощью предложенного метода, хорошо согласуются с результатами других исследований, что доказывает надежность и точность разработанной компьютерной программы.

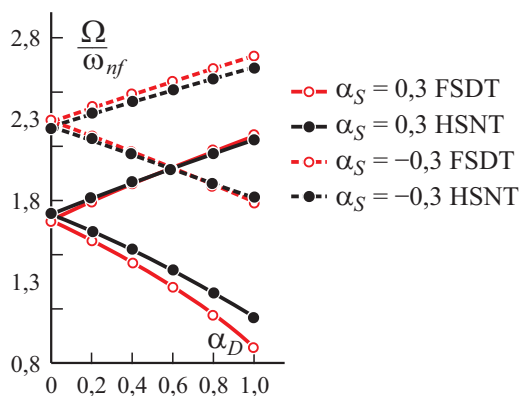


Рис. 2. Влияние динамической нагрузки на величину  $\Omega / \omega_{nf}$ :  $a/b = 1$ ,  $a/h = 10$ ,  $n = 1$ ,  $S = 0$ ,  $\alpha_D / |\alpha_S| = 0,3$ .

Данные рис. 1 иллюстрируют влияние статической нагрузки на отношение частот возбуждения  $\Omega / \omega_{nf}$ . Из графика следует, что частота возбуждения сначала появляется при  $\Omega / \omega_{nf} = 2$  ( $\alpha_S = \alpha_D = 0$ ). Видно, что по мере увеличения сжимающей статической нагрузки ( $\alpha_S > 0$ ) отношение верхней и нижней частот возбуждения уменьшается. Увеличение растягивающей статической нагрузки ( $\alpha_S < 0$ ) приводит к обратному эффекту. Ширина между границами обоих отношений частот возбуждения возрастает с увеличением параметра статической нагрузки. Между тем, статическая сжимающая нагрузка, уменьшающая жесткость пластины, оказывает более значительное влияние на ширину границы, чем статиче-

Табл. 3

Значения частот возбуждения, области неустойчивости и индекса динамической неустойчивости пластин (графа А) из антисимметричных ортогонально армированных композитов с разным количеством слоев и отношением модулей упругости ( $a/b = 1$ ,  $a/h = 5$ ,  $\alpha_S = 0,5$ ,  $\alpha_D/\alpha_S = 0,3$ )

Композит	А	Теория	$E_x/E_y$				
			10	20	30	40	
$(0^\circ/90^\circ)$	$\Omega^U$	FSDT	10,5100	11,6677	12,5955	13,3674	
		HSNT	10,8081	12,0573	13,0216	13,7978	
	$\Omega^L$	FSDT	9,0358	10,0310	10,8287	11,4924	
		HSNT	9,4476	10,6102	11,5145	12,2460	
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	1,4743	1,6367	1,7668	1,8751	
		HSNT	1,3605	1,4471	1,5071	1,5518	
	$\Omega_{DI}$	FSDT	1,0929	0,8868	0,7610	0,6756	
		HSNT	1,0471	0,8462	0,7286	0,6512	
	$(0^\circ/90^\circ)_2$	$\Omega^U$	FSDT	12,4496	14,6543	16,0539	17,0309
			HSNT	12,3692	14,3698	15,5911	16,4225
		$\Omega^L$	FSDT	10,7032	12,5987	13,8020	14,6419
			HSNT	10,6338	12,3532	13,4026	14,1169
$\Delta\Omega^U$		FSDT	1,7464	2,0556	2,2520	2,3890	
		HSNT	1,7354	2,0166	2,1885	2,3057	
$\Omega_{DI}$		FSDT	3,1158	2,2488	1,8737	1,6650	
		HSNT	3,1566	2,3391	1,9872	1,7912	
$(0^\circ/90^\circ)_3$		$\Omega^U$	FSDT	12,7415	15,0365	16,4488	17,4141
			HSNT	12,7296	14,9267	16,2554	17,1548
		$\Omega^L$	FSDT	10,9542	12,9273	14,1415	14,9714
			HSNT	10,9437	12,8321	13,9740	14,7468
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	1,7873	2,1092	2,3073	2,4427	
		HSNT	1,7859	2,0945	2,2814	2,4080	
	$\Omega_{DI}$	FSDT	2,9746	2,1359	1,7848	1,5925	
		HSNT	2,9803	2,1677	1,8280	1,6414	

ская растягивающая. Влияние динамических нагрузок на отношение частот возбуждения области неустойчивости показано на рис. 2. При сжимающей статической нагрузке начальное отношение частот возбуждения меньше двух (при  $\alpha_D = 0$ ), а при растягивающей статической нагрузке — больше двух. Увеличение параметра динамической нагрузки  $\alpha_D$  увеличивает/уменьшает отношение для верхней/нижней частоты возбуждения и увеличивает ширину области неустойчивости. Параметр динамической нагрузки имеет большее влияние на отношение частот

Табл. 4

Влияние отношения модулей упругости  $E_x / E_y$  на частоты возбуждения, области неустойчивости и индекс динамической неустойчивости (графа А) композитных пластин при разных статических нагрузках ( $a/b = 1$ ,  $a/h = 5$ ,  $n = 1$ ,  $S = 0$ ,  $\alpha_D/\alpha_S = 0,3$ )

$E_x/E_y$	А	Теория	$\alpha_S$					
			0	0,2	0,4	0,6	0,8	Раз- ность*, %
10	$\Omega^U$	FSDT	13,8602	12,6273	11,2601	9,7022	7,8405	6,27
		HSNT	13,9604	12,7930	11,5078	10,0597	8,3646	
	$\Omega^L$	FSDT	13,8602	12,1623	10,1852	7,7170	3,9202	22,93
		HSNT	13,9604	12,3547	10,5064	8,2541	5,0868	
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	0,4650	1,0750	1,9851	3,9203	19,60
		HSNT	0	0,4383	1,0014	1,8057	3,2778	
	$\Omega_{DI}$	FSDT	0	0,3447	0,7969	1,4717	2,9063	15,20
		HSNT	0	0,3374	0,7708	1,3898	2,5228	
	$\Omega^U$	FSDT	15,3869	14,0181	12,5003	10,7708	8,7041	8,05
		HSNT	15,4376	14,1825	12,8050	11,2601	9,4665	
20	$\Omega^L$	FSDT	15,3869	13,5019	11,3070	8,5670	4,3520	28,58
		HSNT	15,4376	13,7121	11,7356	9,3503	6,0935	
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	0,5162	1,1934	2,2038	4,3521	29,03
		HSNT	0	0,4704	1,0693	1,9099	3,3730	
	$\Omega_{DI}$	FSDT	0	0,2797	0,6466	1,1941	2,3582	19,57
		HSNT	0	0,2750	0,6253	1,1168	1,9723	
	$\Omega^U$	FSDT	17,6284	16,0603	14,3214	12,3399	9,9722	9,60
		HSNT	17,4611	16,0961	14,6042	12,9414	11,0306	
	$\Omega^L$	FSDT	17,6284	15,4689	12,9542	9,8151	4,9862	33,96
		HSNT	17,4611	15,5859	13,4518	10,9078	7,5506	
40	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	0,5914	1,3672	2,5248	4,9860	43,27
		HSNT	0	0,5103	1,1524	2,0335	3,4801	
	$\Omega_{DI}$	FSDT	0	0,2131	0,4926	0,9097	1,7966	23,03
		HSNT	0	0,2141	0,4836	0,8533	1,4603	

\* Абсолютное значение (FSDT-HSNT)/HSNT при  $\alpha_S = 0,8$ .

возбуждения, чем параметр статической нагрузки. Из данных рис. 1 и 2 видно, что ширина области неустойчивости, предсказываемая с помощью FSDT, больше, чем при использовании HSNT, особенно при сжимающей статической нагрузке.

Влияние количества слоев и отношения модулей упругости на частоты возбуждения, область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости пластин (см. графу А) из антисимметричного ортогонально армированного композита при  $\alpha_S = 0,5$  и  $\alpha_D/\alpha_S = 0,3$  иллюстрируют данные табл. 3. При увеличении отношения модулей упругости значения частот

Табл. 5

Влияние отношения модулей упругости  $E_x/E_y$  на частоты возбуждения, область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости (графа А) композитных пластин при разных динамических нагрузках ( $a/b = 1$ ,  $a/h = 5$ ,  $n = 1$ ,  $S = 0$ ,  $\alpha_S = 0,1$ )

$E_x/E_y$	А	Теория	$\alpha_D$					Разность*, %
			0	0,4	0,8	1,2	1,6	
10	$\Omega^U$	FSDT	13,1490	14,5368	15,8031	16,9753	18,0716	0,48
		HSNT	13,2861	14,6036	15,8116	16,9337	17,9859	
	$\Omega^L$	FSDT	13,1490	11,5963	9,8007	7,5916	4,3830	19,37
		HSNT	13,2861	11,8228	10,1506	8,1420	5,4360	
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	2,9404	6,0025	9,3837	13,6886	9,07
		HSNT	0	2,7808	5,6610	8,7917	12,5499	
	$\Omega_{DI}$	FSDT	0	2,1799	4,4499	6,9566	10,1480	5,06
		HSNT	0	2,1403	4,3570	6,7666	9,6592	
	$\Omega^U$	FSDT	14,5973	16,1379	17,5438	18,8450	20,0621	1,41
		HSNT	14,7123	16,1304	17,4335	18,6457	19,7838	
20	$\Omega^L$	FSDT	14,5973	12,8736	10,8801	8,4277	4,8657	24,47
		HSNT	14,7123	13,1421	11,3568	9,2326	6,4424	
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	3,2643	6,6636	10,4173	15,1964	13,90
		HSNT	0	2,9883	6,0766	9,4131	13,3414	
	$\Omega_{DI}$	FSDT	0	1,7688	3,6107	5,6446	8,2342	5,55
		HSNT	0	1,7473	3,5532	5,5042	7,8012	
40	$\Omega^U$	FSDT	16,7238	18,4888	20,0995	21,5903	22,9846	3,47
		HSNT	16,6717	18,2163	19,6397	20,9668	22,2147	
	$\Omega^L$	FSDT	16,7238	14,7490	12,4652	9,6555	5,5747	29,43
		HSNT	16,6717	14,9686	13,0450	10,7836	7,8994	
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	3,7398	7,6343	11,9348	17,4099	21,62
		HSNT	0	3,2477	6,5947	10,1832	14,3153	
	$\Omega_{DI}$	FSDT	0	1,3628	2,7508	4,5004	6,4732	6,11
		HSNT	0	1,3458	2,7051	4,3868	6,1005	

\* Абсолютное значение (FSDT-HSNT)/HSNT при  $\alpha_D = 1,6$ .

возбуждения и области неустойчивости возрастают, а индекса динамической неустойчивости — уменьшаются. С увеличением количества слоев значения частоты возбуждения и области неустойчивости также возрастают, а индекса динамической неустойчивости сначала возрастают, а затем уменьшаются. Для пластин с разным количеством слоев и отношением модулей упругости нет очевидной разницы между значениями частоты возбуждения, области неустойчивости и индекса динамической неустойчивости, рассчитанными с помощью HSNT и FSDT, за исключением области неустойчивости двухслойной пластины с большим отношением модулей упругости. Размер области неустойчивости, рассчитанный с помощью FSDT, больше предсказываемого HSNT, и эта разница возрастет с увеличением отношения модулей упругости и уменьшением количества слоев.

Данные табл. 4 и 5 иллюстрируют влияние статических  $\alpha_S$  и динамических  $\alpha_D$  нагрузок на характеристики динамической неустойчивости пластин из слоистых композитов с разным отношением модулей упругости. Видно, что при увеличении статической или динамической нагрузки увеличиваются как область, так и индекс динамической неустойчивости. Таким образом, композитная пластина, подверженная большой статической или динамической нагрузке, более динамически неустойчива. Увеличение отношения модулей упругости увеличивает жесткость композитной пластины, уменьшает индекс динамической неустойчивости и делает ее более динамически устойчивой. Повышение статической или динамической нагрузки увеличивает разницу между результатами, рассчитанными с помощью FSDT и HSNT, что наиболее очевидно при низких частотах возбуждения. Из данных табл. 4 и 5 видно, что разница результатов, предсказываемых FSDT и HSNT при действии сжимающей статической нагрузки, значительно больше, чем при динамической. Это обусловлено тем, что при изучении влияния динамической нагрузки приложенная статическая нагрузка была относительно небольшой (см. табл. 5). При действии боль-

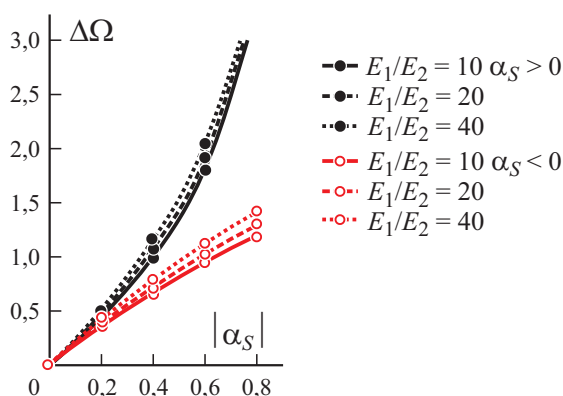


Рис. 3. Влияние отношения  $E_1 / E_2$  на область неустойчивости при разных статических нагрузках:  $a / b = 1$ ,  $a / h = 5$ ,  $n = 1$ ,  $S = 0$ ,  $\alpha_D / |\alpha_S| = 0,3$ .

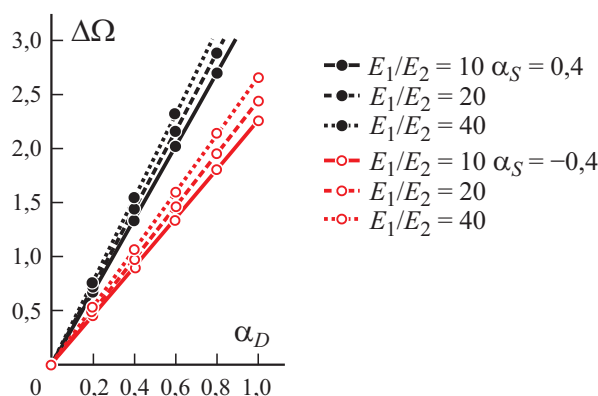


Рис. 4. То же при разных динамических нагрузках:  $a/b = 1$ ,  $a/h = 5$ ,  $n = 1$ ,  $S = 0$ .

шой статической нагрузки возрастающая динамическая нагрузка также увеличивает разницу между результатами FSDT и HSNT.

Зависимости на рис. 3 и 4 иллюстрируют влияние отношения модулей упругости  $E_1/E_2$  на область неустойчивости композитных пластин при разных статических и динамических нагрузках, рассчитанные с помощью HSNT. Независимо от того, находится ли композитная пластина под действием растягивающей или сжимающей статической нагрузки, увеличение отношения модулей упругости всегда увеличивает область неустойчивости. Область неустойчивости в композитной пластине при действии сжимающей нагрузки больше, чем при растягивающей, и по мере увеличения приложенной нагрузки эта разница возрастает.

Влияние отношения модулей упругости  $E_1/E_2$  на индекс динамической неустойчивости  $\Omega_{DI}$  иллюстрируют данные рис. 5 и 6. Видно, что увеличение отношения  $E_1/E_2$  снижает значения  $\Omega_{DI}$ , что противоположно влиянию этого отношения на область неустойчивости. Влияние статиче-

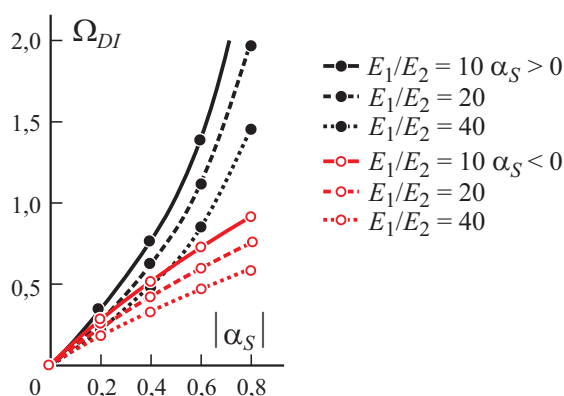


Рис. 5. Влияние отношения  $E_1/E_2$  на величину  $\Omega_{DI}$  при разных статических нагрузках:  $a/b = 1$ ,  $a/h = 5$ ,  $n = 1$ ,  $S = 0$ ,  $\alpha_D/|\alpha_S| = 0.3$ .

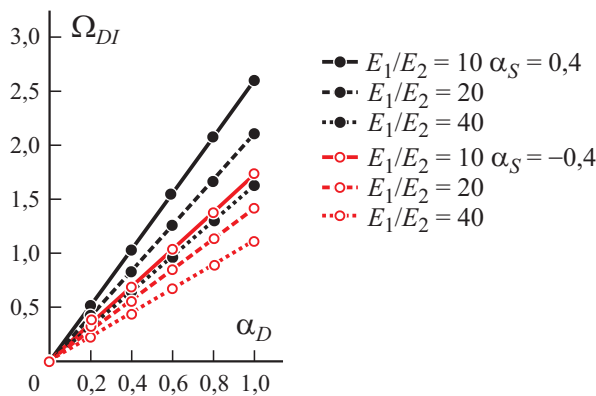


Рис. 6. Влияние отношения  $E_1/E_2$  на величину  $\Omega_{DI}$  при разных динамических нагрузках:  $a/b = 1$ ,  $a/h = 5$ ,  $n = 1$ ,  $S = 0$ .

Табл. 6

Влияние параметра нагрузки на частоты возбуждения, области неустойчивости и индекс динамической неустойчивости композитных пластин при разных статических нагрузках ( $a/b = 1$ ,  $a/h = 5$ ,  $n = 1$ ,  $S = 0$ ,  $E_x/E_y = 40$ )

$\alpha_D/\alpha_S$	A	Теория	$\alpha_S$			
			-0,6	-0,3	0,3	0,6
0,2	$\Omega^U$	FSDT	22,7126	20,3301	15,0617	11,9562
		HSNT	21,9708	19,8444	15,2362	12,6252
	$\Omega^L$	FSDT	21,8763	19,8662	14,4295	10,2791
		HSNT	21,2222	19,4329	14,6961	11,2723
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0,8363	0,4639	0,6322	1,6771
		HSNT	0,7485	0,4116	0,5401	1,3529
	$\Omega_{DI}$	FSDT	0,3014	0,1671	0,2278	0,6043
		HSNT	0,3141	0,1727	0,2266	0,5677
	$\Omega^U$	FSDT	23,3202	20,6711	15,5190	13,0736
		HSNT	22,5159	20,1476	15,6290	13,5516
0,5	$\Omega^L$	FSDT	21,2274	19,5111	13,9365	8,8143
		HSNT	20,6430	19,1184	14,2777	10,1398
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	2,0928	1,1601	1,5825	4,2593
		HSNT	1,8728	1,0293	1,3514	3,4118
	$\Omega_{DI}$	FSDT	0,7541	0,4180	0,5702	1,5347
		HSNT	0,7859	0,4319	0,5671	1,4317
	$\Omega^U$	FSDT	24,2991	21,2274	16,2526	14,7490
		HSNT	23,3961	20,6430	16,2627	14,9686
	$\Omega^L$	FSDT	20,0995	18,9044	13,0736	5,5747
		HSNT	19,6397	18,5824	13,5516	7,8994
1	$\Delta\Omega^U$	FSDT	4,1996	2,3230	3,1790	9,1743
		HSNT	3,7564	2,0606	2,7111	7,0693
	$\Omega_{DI}$	FSDT	1,5132	0,8371	1,1455	3,3057
		HSNT	1,5763	0,8647	1,1377	2,9664

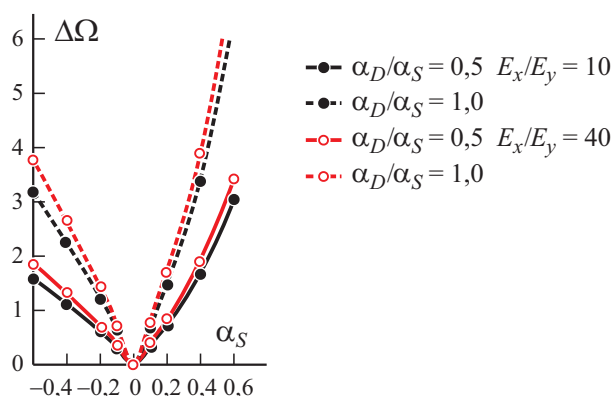


Рис. 7. Влияние параметра нагрузки на область неустойчивости при разных статических нагрузках:  $a/b = 1$ ,  $a/h = 5$ ,  $n = 1$ ,  $S = 0$ .

ской нагрузки на величину  $\Omega_{DI}$  аналогично таковому на область неустойчивости (см. рис. 3 и 4). Кроме того, сжимающая статическая нагрузка увеличивает индекс динамической неустойчивости больше, чем растягивающая, т.е. сжимающая нагрузка увеличивает неустойчивость композитной пластины больше, чем растягивающая.

Влияние отношения параметров нагрузки  $\alpha_D/\alpha_S$  на частоту возбуждения, область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости пластин из слоистых композитов при разных статических нагрузках иллюстрируют данные табл. 6. По мере увеличения отношения параметров нагрузки верхняя частота возбуждения, область неустойчивости и индекс динамический неустойчивости увеличиваются, а нижняя частота возбуждения демонстрирует обратную тенденцию. При увеличении сжимающей или растягивающей статической нагрузки область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости увеличиваются. Из данных табл. 6 видно, что разница между результатами FSDT и HSNT возрастает с уве-

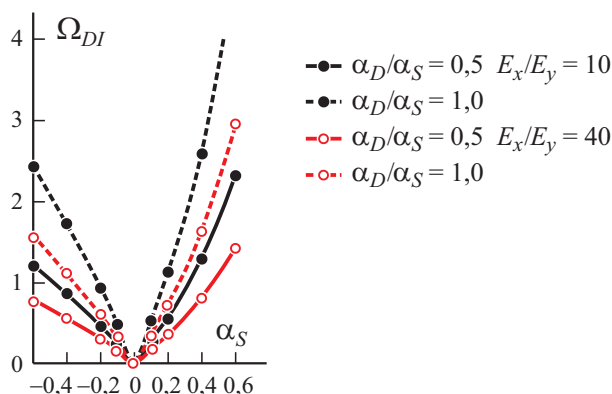


Рис. 8. Влияние параметра нагрузки на величину  $\Omega_{DI}$  при разных статических нагрузках:  $a/b = 1$ ,  $a/h = 5$ ,  $n = 1$ ,  $S = 0$ .



Табл. 7

Влияние параметра изгибного напряжения на частоты возбуждения, область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости композитных пластин при разных сжимающих нагрузках ( $a/b = 1$ ,  $a/h = 5$ ,  $n = 1$ ,  $E_x/E_y = 40$ ,  $\alpha_D/\alpha_S = 0,3$ )

S	A	Теория	$\alpha_S$				
			0	0,15	0,3	0,45	0,6
0	$\Omega^U$	FSDT	17,6284	16,4663	15,2157	13,8526	12,3399
		HSNT	17,4611	16,4480	15,3683	14,2067	12,9414
	$\Omega^L$	FSDT	17,6284	16,0361	14,2671	12,2451	9,8151
		HSNT	17,4611	16,0752	14,5580	12,8630	10,9078
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	0,4303	0,9486	1,6075	2,5248
		HSNT	0	0,3728	0,8103	1,3437	2,0335
	$\Omega_{DI}$	FSDT	0	0,1550	0,3418	0,5792	0,9097
		HSNT	0	0,1564	0,3400	0,5638	0,8533
5	$\Omega^U$	FSDT	17,6284	16,4644	15,2075	13,8325	12,2996
		HSNT	17,4611	16,4401	15,3317	14,1153	12,7599
	$\Omega^L$	FSDT	17,6284	16,0325	14,2511	12,2033	9,7219
		HSNT	17,4611	16,0598	14,4858	12,6749	10,5051
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	0,4319	0,9564	1,6292	2,5777
		HSNT	0	0,3803	0,8459	1,4404	2,2548
	$\Omega_{DI}$	FSDT	0	0,1556	0,3446	0,5870	0,9288
		HSNT	0	0,1596	0,3550	0,6044	0,9462
10	$\Omega^U$	FSDT	17,6284	16,4588	15,1830	13,7715	12,1768
		HSNT	17,4611	16,4138	15,2157	13,8275	12,1843
	$\Omega^L$	FSDT	17,6284	16,0219	14,2031	12,0758	9,4325
		HSNT	17,4611	16,0099	14,2587	12,0776	9,1641
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	0,4369	0,9799	1,6957	2,7444
		HSNT	0	0,4040	0,9570	1,7500	3,0202
	$\Omega_{DI}$	FSDT	0	0,1574	0,3531	0,6110	0,9889
		HSNT	0	0,1695	0,4016	0,7343	1,1674

личением статической нагрузки. При действии большой сжимающей статической нагрузки и большом отношении  $\alpha_D/\alpha_S$  расхождение результатов, предсказываемых обеими теориями, становится более явным. Тенденции изменения области неустойчивости и индекса динамической неустойчивости от действия статических нагрузок на композитные пластины с разным отношением параметров нагрузки и модулей упругости, рассчитанных с помощью HSNT, иллюстрируют данные рис. 7 и 8 соответственно. При разном отношении  $\alpha_D/\alpha_S$  влияние сжимающей нагрузки на область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости больше, чем растягивающей. Независимо от отношения параметров нагрузки

Табл. 8

Влияние параметра изгибного напряжения на частоты возбуждения, область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости композитных пластин при разных динамических нагрузках ( $a/b = 1$ ,  $a/h = 5$ ,  $n = 1$ ,  $E_x/E_y = 40$ ,  $\alpha_S = 0,3$ )

$S$	A	Теория	$\alpha_D$				
			0	0,2	0,4	0,6	0,8
0	$\Omega^U$	FSDT	14,7490	15,0617	15,3681	15,6685	15,9632
		HSNT	14,9686	15,2362	15,4992	15,7578	16,0122
	$\Omega^L$	FSDT	14,7490	14,4295	14,1028	13,7683	13,4254
		HSNT	14,9686	14,6961	14,4185	14,1354	13,8466
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	0,6322	1,2654	1,9002	2,5378
		HSNT	0	0,5401	1,0807	1,6224	2,1657
	$\Omega_{DI}$	FSDT	0	0,2278	0,4559	0,6847	0,9144
		HSNT	0	0,2266	0,4535	0,6812	0,9088
	$\Omega^U$	FSDT	14,7374	15,0525	15,3610	15,6631	15,9593
		HSNT	14,9160	15,1947	15,4673	15,7340	15,9953
5	$\Omega^L$	FSDT	14,7374	14,4151	14,0852	13,7471	13,4003
		HSNT	14,9160	14,6309	14,3390	14,0397	13,7328
	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	0,6374	1,2758	1,9160	2,5590
		HSNT	0	0,5638	1,1283	1,6943	2,2625
	$\Omega_{DI}$	FSDT	0	0,2297	0,4597	0,6904	0,9221
		HSNT	0	0,2366	0,4735	0,7110	0,9494
	$\Omega^U$	FSDT	14,7023	15,0247	15,3394	15,6470	15,9477
		HSNT	14,7501	15,0632	15,3656	15,6579	15,9406
	$\Omega^L$	FSDT	14,7023	14,3716	14,0322	13,6833	13,3243
		HSNT	14,7501	14,4255	14,0887	13,7388	13,3746
10	$\Delta\Omega^U$	FSDT	0	0,6531	1,3072	1,9636	2,6234
		HSNT	0	0,6377	1,2769	1,9191	2,5660
	$\Omega_{DI}$	FSDT	0	0,2353	0,4710	0,7075	0,9453
		HSNT	0	0,2676	0,5358	0,8053	1,0768

увеличение отношения  $E_1/E_2$  увеличивает область неустойчивости, но уменьшает индекс динамической неустойчивости.

Данные табл. 7 и 8 иллюстрируют влияние отношения  $S = \sigma_m / \sigma_n$  (изгибающего напряжения к нормальному) на динамическую неустойчивость композитных пластин, подверженных разным статическим и динамическим нагрузкам. С увеличением значения  $S$  частота возбуждения уменьшается, а область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости возрастают. Влияние отношения  $S$  невелико. Видно, что с увеличением значения  $S$  разница между результатами, рассчитанными с помощью FSDT

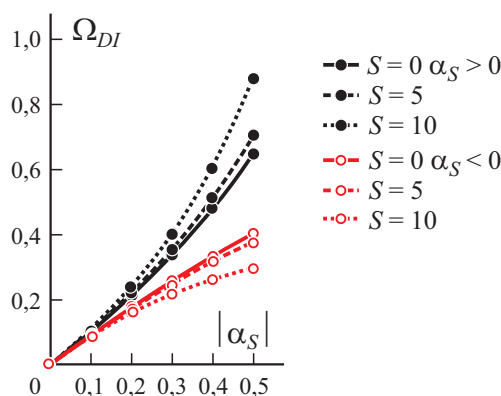


Рис. 9. Влияние параметра изгибного напряжения на величину  $\Omega_{DI}$  при разных статических нагрузках:  $a/b = 1$ ,  $a/h = 5$ ,  $E_x/E_y = 40$ ,  $n = 1$ ,  $\alpha_D/|\alpha_S| = 0,3$ .

и HSNT, уменьшается для частоты возбуждения и области неустойчивости и возрастает для индекса динамической неустойчивости. При этом, чем больше значение  $S$ , тем очевиднее разница между результатами FSDT и HSNT для индекса динамической неустойчивости. Например, для композитных пластин с отношением  $S=10$  при  $\alpha_D/\alpha_S=0,3$  и  $\alpha_S \geq 0,3$  или  $\alpha_S=0,3$  и  $\alpha_D \geq 0,2$  разница между индексами динамической неустойчивости, рассчитанными с помощью FSDT и HSNT, превышает 10%. Зависимости индекса динамической неустойчивости  $\Omega_{DI}$  композитных пластин от параметра статической  $|\alpha_S|$  и динамической  $\alpha_D$  нагрузки при разном значении параметра  $S$ , рассчитанные с помощью HSNT, приведены на рис. 9 и 10 соответственно. Результаты свидетельствуют о том, что сжимающая статическая нагрузка на композитную пластину с большим значением параметра  $S$  оказывает большее упрочняющее влияние на индекс динамической неустойчивости; растягивающая статическая нагрузка

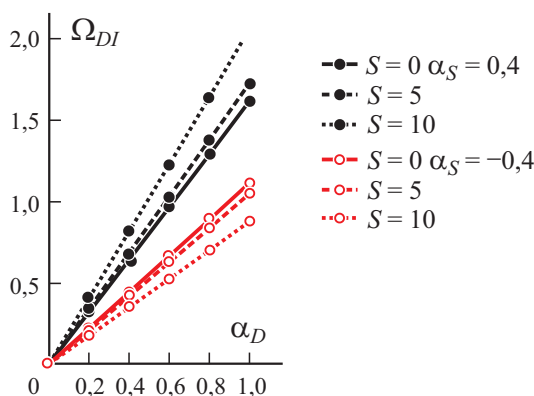


Рис. 10. То же при разных динамических нагрузках:  $a/b = 1$ ,  $a/h = 5$ ,  $E_x/E_y = 40$ ,  $n = 1$ ,  $\alpha_S = 0,1$ .

имеет обратный эффект. Кроме того, установлено, что разница между результатами, рассчитанными при одинаковой по модулю растягивающей и сжимающей статической нагрузке, возрастает с увеличением значения параметра  $S$ . Композитная плита, подверженная растягивающей нагрузке с большим значением параметра изгиба  $S$ , динамически более устойчива.

### Заключение

С помощью теории пластин высокого порядка исследовано и описано динамическое поведение пластин из слоистых композитов, подверженных периодической нагрузке. Из полученных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Статические и динамические нагрузки и отношение модулей упругости оказывают значительное влияние на частоту возбуждения, область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости. Напряжение изгиба оказывает на них незначительное влияние.

2. По мере уменьшения отношения модулей упругости область неустойчивости при действии статической растягивающей или сжимающей нагрузки увеличивается, а индекс динамической неустойчивости уменьшается. При действии статической сжимающей нагрузки изгибающее напряжение увеличивает область неустойчивости и индекс динамической неустойчивости; статическая растягивающая нагрузка оказывает противоположный эффект.

3. При увеличении статической и динамической нагрузки, а также отношения модулей упругости разница между результатами, рассчитанными с помощью FSDT и HSNT, становится более заметной. Это особенно важно для пластин из слоистых композитов, подверженных сжимающей статической нагрузке. Применение теории HSNT, учитывающей члены высокого порядка поля перемещений, обеспечивает надежную оценку области неустойчивости и динамической неустойчивости композитных пластин, особенно при большом отношении модулей упругости, параметре изгиба, а также больших статических и динамических нагрузках.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bolotin V. V. The Dynamic Stability of Elastic Systems. — San Francisco: Holden-Day, 1964.
2. Vijayaraghavan A. and Evan-Iwanowski R. M. Parametric instability of circular cylindrical shells // J. Appl. Mech. — 1967. — Vol. 34. — P. 985—990.
3. Mohamad S., Rani Q., Sullivan W., and Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000-2009 // Compos. Struct. — 2010. — Vol. 93. — P. 14—31.
4. Fazilati J. and Ovesy H. R. Dynamic instability analysis of composite laminated thin-walled structures using two versions of FSM // Compos. Struct. — 2010. — Vol. 92. — P. 2060—2065.

5. *Ovesy H. R. and Fazilati J.* Parametric instability analysis of laminated composite curved shells subjected to non-uniform in-plane load // *Compos. Struct.* — 2014. — Vol. 108. — P. 449—455.
6. *Kao J. Y., Chen C. S., and Chen W. R.* Parametric vibration response of foam-filled sandwich plates under periodic loads // *Mech. Compos. Mater.* — 2012. — Vol. 48. — P. 525—538.
7. *Chen W. R., Chen C. S., and Shyu J. H.* Stability of parametric vibrations of laminated composite plates // *Appl. Math. Comput.* — 2013. — Vol. 223. — P. 127—138.
8. *Darabi M. and Ganesan R.* Nonlinear dynamic instability analysis of laminated composite thin plates subjected to periodic in-plane loads // *Nonlinear Dynamics.* — 2018. — Vol. 91. — P. 187—215.
9. *Sahoo R. and Singh B. N.* Assessment of dynamic instability of laminated composite-sandwich plates // *Aerospace Sci. Technol.* — 2018. — Vol. 81. — P. 41—52.
10. *Rasool M. and Singha M. K.* Stability behavior of variable stiffness composite panels under periodic in-plane shear and compression // *Composites: Part B.* — 2019. — Vol. 172. — P. 472—484.
11. *Mohanty J., Sahu S. K., and Parhi P. K.* Parametric instability of delaminated composite plates subjected to periodic in-plane loading // *J. Vib. Control.* — 2015. — Vol. 21. — P. 419—434.
12. *Lee S. Y.* Finite element dynamic stability analysis of laminated composite skew plates containing cutouts based on HSDT // *Compos. Sci. Technol.* — 2010. — Vol. 70. — P. 1249—1257.
13. *Sankar A., Natarajan S., and Ganapathi M.* Dynamic instability analysis of sandwich plates with CNT reinforced facesheets // *Compos. Struct.* — 2016. — Vol. 146. — P. 187—200.
14. *Ramachandra L. S. and Panda S. K.* Dynamic instability of composite plates subjected to non-uniform in-plane loads // *J. Sound Vib.* — 2012. — Vol. 331. — P. 53—65.
15. *Noh M. H. and Lee S. Y.* Dynamic instability of delaminated composite skew plates subjected to combined static and dynamic loads based on HSDT // *Composites: Part B.* — 2014. — Vol. 58. — P. 113—121.
16. *Kumar R. A. and Panda S. K.* Parametric resonance of composite skew plate under non-uniform in-plane loading // *Struct. Eng. Mech.* — 2015. — Vol. 55. — P. 435—459.
17. *Adhikari B. and Singh B. N.* Parametric instability analysis of laminated composite plate subject to various types of non-uniform harmonic in-plane edge load // *Appl. Math. Comput.* — 2020. — Vol. 373. — P. 125026.
18. *Lo K. H., Christensen R. M., and Wu E. M.* A high-order theory of plate deformation, part 2: Laminated plates // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* — 1977. — Vol. 44. — P. 669—676.
19. *Brunell E. J. and Robertson S. R.* Vibrations of an initially stressed thick plate // *J. Sound Vib.* — 1976. — Vol. 45. — P. 405—416.
20. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* — 1945. — Vol. 12, No. 2. — P. 69—77.
21. *Mindlin R. D.* Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* — 1951. — Vol. 18, No. 1. — P. 31—38.
22. *Essenborge F.* On the significance of the inclusion of the effect of transverse normal strain in problem involving beams with surface constraints // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* — 1975. — Vol. 42. — P. 127—132.

23. *Pandya B. N. and Kant T.* Finite element stress analysis of laminated composite plates using higher order displacement model // *Compos. Sci. Technol.* — 1988. — Vol. 32. — P. 137—155.

24. *Levinson M.* An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates // *Mech. Res. Commun.* — 1980. — Vol. 7, No. 6. — P. 343—350.

25. *Reddy J. N.* A simple high-order theory for laminated composite plates // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* — 1984. — Vol. 51, No. 4. — P. 745—752.

26. *Chen C. S., Hsu C. Y., and Tzou G. J.* Vibration and stability of functionally graded plates based on a high-order deformation theory // *J. Reinf. Plast. Compos.* — 2009. — Vol. 28. — P. 1215—1234.

27. *Whitney J. M. and Pagano N. J.* Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* — 1970. — Vol. 37, No. 4. — P. 1031—1036.

28. *Kant T. and Swaminathan K.* Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a high-order refined theory // *Compos. Struct.* — 2001. — Vol. 53. — P. 73—85.

29. *Wang S. and Dawe D. J.* Dynamic instability of composite laminated rectangular plates and prismatic plate structures // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* — 2002. — Vol. 191. — P. 1791—1826.

30. *Chen W. R., Chen C. S., and Shyu J. H.* Stability of parametric vibrations of laminated composite plates // *Appl. Math. Comput.* — 2013. — Vol. 223. — P. 127—138.

## Приложение

Выражения для  $Q$

$$\begin{bmatrix} [X_1] \\ [X_2] \\ Q_{11} \\ [X_3] \\ Q_{17} \\ [X_4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_1] & [B_1] & [A_2] & [D_1] & 2[B_2] & [E_1] \\ [B_1] & [D_1] & [B_2] & [E_1] & 2[D_2] & [F_1] \\ [A_3] & [B_3] & A_{33} & [D_3] & 2B_{33} & [E_3] \\ [D_1] & [E_1] & [D_2] & [F_1] & 2[E_2] & [G_1] \\ [B_3] & [D_3] & B_{33} & [E_3] & 2D_{33} & [F_3] \\ [E_1] & [F_1] & [E_2] & [G_1] & 2[F_2] & [H_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T_1] \\ [T_2] \\ [\varphi_z] \\ [T_3] \\ [\xi_z] \\ [T_4] \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} [X_5] \\ [X_6] \\ [X_7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_4] & [A_4] & [B_4] & 2[B_4] & [D_4] & 3[D_4] \\ [B_4] & [B_4] & [D_4] & 2[D_4] & [E_4] & 3[E_4] \\ [D_4] & [D_4] & [E_4] & 2[E_4] & [F_4] & 3[F_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [X_8] \end{bmatrix},$$

где

$$[X_1] = [Q_1 Q_2 Q_3]^T, [X_2] = [Q_6 Q_7 Q_8]^T, [X_3] = [Q_{12} Q_{13} Q_{14}]^T,$$

$$[X_4] = [Q_{18} Q_{19} Q_{20}]^T, [X_5] = [Q_4 Q_5]^T, [X_6] = [Q_9 Q_{10}]^T,$$

$$\begin{aligned}
 [X_7] &= [Q_{15} Q_{16}]^T, \quad [X_8] = [T_5][T_6][T_7][T_8][T_9][T_{10}]^T, \\
 [T_1] &= [u_{x,x} \ u_{x,y} \ u_{y,x} \ u_{y,y}]^T, \quad [T_2] = [\varphi_{x,x} \ \varphi_{x,y} \ \varphi_{y,x} \ \varphi_{y,y}]^T, \\
 [T_3] &= [\xi_{x,x} \ \xi_{x,y} \ \xi_{y,x} \ \xi_{y,y}]^T, \quad [T_4] = [\phi_{x,x} \ \phi_{x,y} \ \phi_{y,x} \ \phi_{y,y}]^T, \\
 [T_5] &= [w_{,x} \ w_{,y}]^T, \quad [T_6] = [\varphi_x \ \varphi_y]^T, \quad [T_7] = [\varphi_{z,x} \ \varphi_{z,y}]^T, \\
 [T_8] &= [\xi_x \ \xi_y]^T, \quad [T_9] = [\xi_{z,x} \ \xi_{z,y}]^T, \quad [T_{10}] = [\phi_x \ \phi_y]^T.
 \end{aligned}$$

Матрицы  $[A_i]$ ,  $[B_i]$ ,  $[D_i]$ ,  $[E_i]$ ,  $[F_i]$ ,  $[G_i]$  и  $[H_i]$  можно получить с помощью выражений

$$\begin{aligned}
 [\Gamma_1] &= \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{16} & \Gamma_{16} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{16} & \Gamma_{66} & \Gamma_{66} & \Gamma_{26} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{26} & \Gamma_{26} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = A, B, D, E, F, G^*, H, \\
 [\Gamma_2] &= [\Gamma_{13} \ \Gamma_{36} \ \Gamma_{23}]^T, \quad \Gamma = A, B, D, E, F, \\
 [\Gamma_3] &= [\Gamma_{13} \ \Gamma_{36} \ \Gamma_{36} \ \Gamma_{23}], \quad \Gamma = A, B, D, E, F, \\
 [\Gamma_4] &= \begin{bmatrix} \Gamma_{55} & \Gamma_{45} \\ \Gamma_{45} & \Gamma_{55} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = A, B, D, E, F,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}) &= \int C_{ij} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) dz \\
 (i, j &= 1, 2, 3, 4, 5, 6).
 \end{aligned}$$

Здесь  $C_{ij}$  — компоненты матрицы жесткости;  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}$  — разные матрицы жесткости слоистого композита. Выражения для членов  $R, S, U, V, W$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 \{O_1\} &= [\Sigma_{xx}] \{\Delta_{xx}\}, \{O_2\} = [\Sigma_{xy}] \{\Delta_{xy}\}, \{O_3\} = [\Sigma_{xx}] \{\Delta_{yx}\}, \\
 \{O_4\} &= [\Sigma_{xy}] \{\Delta_{yy}\}, \{O_5\} = [\Sigma_{yy}] \{\Delta_{xy}\}, \{O_6\} = [\Sigma_{xy}] \{\Delta_{xx}\}, \\
 \{O_7\} &= [\Sigma_{yy}] \{\Delta_{yy}\}, \{O_8\} = [\Sigma_{xy}] \{\Delta_{yx}\}, \{O_9\} = [\Sigma_{xz}] \{\Delta_{zx}\}, \\
 \{O_{10}\} &= [\Sigma_{yz}] \{\Delta_{zx}\}, \{O_{11}\} = [\Sigma_{xz}] \{\Delta_{zy}\}, \{O_{12}\} = [\Sigma_{yz}] \{\Delta_{zy}\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{O_{13}\} &= [\gamma_{xx}] \{\Delta_x\}, \{O_{14}\} = [\gamma_{xy}] \{\Delta_y\}, \{O_{15}\} = [\gamma_{xy}] \{\Delta_x\}, \\ \{O_{16}\} &= [\gamma_{yy}] \{\Delta_y\}, \{O_{17}\} = [\Omega_{xz}] \{\pi_z\}, \{O_{18}\} = [\Omega_{yz}] \{\pi_z\}, \\ \{O_{19}\} &= [\Sigma_{zx}] \{\Delta_{xx}\}, \{O_{20}\} = [\Sigma_{zy}] \{\Delta_{xy}\}, \{O_{21}\} = [\Sigma_{zz}] \{\Delta_{zx}\}, \\ \{O_{22}\} &= [\Sigma_{zx}] \{\Delta_{yx}\}, \{O_{23}\} = [\Sigma_{zy}] \{\Delta_{yy}\}, \{O_{24}\} = [\Sigma_{zz}] \{\Delta_{zy}\}, \\ \{O_{25}\} &= [\gamma_{zx}] \{\Delta_x\}, \{O_{26}\} = [\gamma_{zy}] \{\Delta_y\}, \{O_{27}\} = [\Omega_{zz}] \{\pi_z\},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\{O_1\} &= \{R_1, R_2, R_3, R_4\}, \{O_2\} = \{R_5, R_6, R_7, R_8\}, \{O_3\} = \{R_9, R_{10}, R_{11}, R_{12}\}, \\ \{O_4\} &= \{R_{13}, R_{14}, R_{15}, R_{16}\}, \{O_5\} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}, \{O_6\} = \{S_5, S_6, S_7, S_8\}, \\ \{O_7\} &= \{S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}\}, \{O_8\} = \{S_{13}, S_{14}, S_{15}, S_{16}\}, \\ \{O_9\} &= \{R_{17}, R_{18}, R_{19}, R_{20}\}, \{O_{10}\} = \{S_{17}, S_{18}, S_{19}, S_{20}\}, \\ \{O_{11}\} &= \{R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24}\}, \{O_{12}\} = \{S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24}\}, \\ \{O_{13}\} &= \{R_{30}, R_{31}, R_{32}\}, \{O_{14}\} = \{R_{33}, R_{34}, R_{35}\}, \{O_{15}\} = \{S_{30}, S_{31}, S_{32}\}, \\ \{O_{16}\} &= \{S_{33}, S_{34}, S_{35}\}, \{O_{17}\} = \{R_{25}, R_{26}, R_{27}\}, \{O_{18}\} = \{S_{25}, S_{26}, S_{27}\}, \\ \{O_{19}\} &= \{U_1, U_2, U_3, U_4\}, \{O_{20}\} = \{U_5, U_6, U_7, U_8\}, \\ \{O_{21}\} &= \{W_1, W_2, W_3, W_4\}, \{O_{22}\} = \{U_9, U_{10}, U_{11}, U_{12}\}, \\ \{O_{23}\} &= \{U_{13}, U_{14}, U_{15}, U_{16}\}, \{O_{24}\} = \{W_5, W_6, W_7, W_8\}, \\ \{O_{25}\} &= \{V_1, V_2, V_3\}, \{O_{26}\} = \{V_4, V_5, V_6\}, \{O_{27}\} = \{W_9, W_{10}, W_{11}\}, \\ \{\Delta_{ij}\} &= \{u_{i,j} \ \varphi_{i,j} \ \xi_{i,j} \ \phi_{i,j}\}^T, (i, j = x, y), \{\Delta_{zi}\} = \{\varphi_i \ 2\xi_i \ 3\phi_i\}^T, (i = x, y), \\ \{\pi_i\} &= \{\varphi_i \ 2\xi_i\}^T, (i = x, y), \{\Delta_i\} = \{w_{,i} \ \varphi_{z,i} \ \xi_{z,i}\}^T, (i = x, y),\end{aligned}$$



$$[\Sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} N_{ij} & M_{ij} & M_{ij}^* & P_{ij} \\ M_{ij} & M_{ij}^* & P_{ij} & P_{ij}^* \\ M_{ij}^* & P_{ij} & P_{ij}^* & R_{ij} \\ P_{ij} & P_{ij}^* & R_{ij} & R_{ij}^* \end{bmatrix} \quad (i = x, y, z; j = x, y),$$

$$[\Sigma_{iz}] = \begin{bmatrix} N_{iz} & M_{iz} & M_{iz}^* \\ M_{iz} & M_{iz}^* & P_{iz} \\ M_{iz}^* & P_{iz} & P_{iz}^* \\ P_{iz} & P_{iz}^* & R_{iz} \end{bmatrix} \quad (i = x, y, z),$$

$$[\gamma_{ij}] = \begin{bmatrix} N_{ij} & M_{ij} & M_{ij}^* \\ M_{ij} & M_{ij}^* & P_{ij} \\ M_{ij}^* & P_{ij} & P_{ij}^* \end{bmatrix} \quad (i = x, y, z; j = x, y),$$

$$[\Omega_{iz}] = \begin{bmatrix} N_{iz} & M_{iz} \\ M_{iz} & M_{iz}^* \\ M_{iz}^* & P_{iz} \end{bmatrix} \quad (i = x, y, z).$$

Здесь  $N_{ij}$ ,  $M_{ij}$  и  $M_{ij}^*$ ,  $P_{ij}$ ,  $P_{ij}^*$ ,  $R_{ij}$ ,  $R_{ij}^*$  — результирующие напряжения, связанные с произвольными периодическими напряжениями, определяемые как

$$(N_{ij}, M_{ij}, M_{ij}^*, P_{ij}, P_{ij}^*, R_{ij}, R_{ij}^*) = \int \sigma_{ij} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) dz \quad (i, j = x, y, z),$$

где результирующие высокого порядка означают моменты и сдвиговые силы высокого порядка. Следует отметить, что результирующие высокого порядка — чисто математические термины и не могут быть заданы на физических границах. Величины  $f_x, f_y, f_z, m_x, m_y, m_z, n_x, n_y, n_z, q_x, q_y$  — нагрузки, включающие боковые нагрузки на верхней и нижней поверхностях пластины и силу тяжести, определенные далее. Верхние индексы + и – относятся к напряжениям, вычисляемым на верхней и нижней поверхностях пластины соответственно:

$$f_x = \int_{-h/2}^{h/2} (\overline{X_x} + \Delta X_x) dz + \sigma_{zx}^+ - \sigma_{zx}^-,$$

$$\begin{aligned}
 f_y &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_y + \Delta X_y) dz + \sigma_{zy}^+ - \sigma_{zy}^-, \\
 f_z &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_z + \Delta X_z) dz + (\sigma_{zx}^+ - \sigma_{zx}^-) (w_{,x} + z\varphi_{z,x} + z^2\xi_{z,x}) + \\
 &\quad + (w_{,y} + z\varphi_{z,y} + z^2\xi_{z,y}) (\sigma_{zy}^+ - \sigma_{zy}^-) + \sigma_{zz}^+ - \sigma_{zz}^-, \\
 m_x &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_x + \Delta X_x) z dz + h (\sigma_{zx}^+ - \sigma_{zx}^-) / 2, \\
 m_y &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_y + \Delta X_y) z dz + h (\sigma_{zy}^+ - \sigma_{zy}^-) / 2, \\
 m_z &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_z + \Delta X_z) z dz + (\sigma_{zx}^+ + \sigma_{zx}^-) (hw_{,x} + z^3\xi_{z,x} / 8) + \\
 &\quad + (h^2 / 4) \varphi_{z,x} (\sigma_{zx}^+ - \sigma_{zx}^-) + (hw_{,y} + z^3\xi_{z,y} / 8) (\sigma_{zy}^+ + \sigma_{zy}^-) + \\
 &\quad + (h^2 / 4) \varphi_{z,y} (\sigma_{zy}^+ - \sigma_{zy}^-) + z (\sigma_{zz}^+ - \sigma_{zz}^-) / 2, \\
 n_x &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_x + \Delta X_x) z^2 dz + h^2 (\sigma_{zx}^+ - \sigma_{zx}^-) / 4, \\
 n_y &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_y + \Delta X_y) z^2 dz + h^2 (\sigma_{zy}^+ - \sigma_{zy}^-) / 4, \\
 n_z &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_z + \Delta X_z) z^2 dz + (\sigma_{zx}^+ + \sigma_{zx}^-) (h^2 w_{,x} / 4 + z^4 \xi_{z,x} / 16) + \\
 &\quad + (h^3 / 8) \varphi_{z,x} (\sigma_{zx}^+ - \sigma_{zx}^-) + (h^2 w_{,y} / 4 + z^4 \xi_{z,y} / 16) (\sigma_{zy}^+ + \sigma_{zy}^-) + \\
 &\quad + (h^3 / 8) \varphi_{z,y} (\sigma_{zy}^+ + \sigma_{zy}^-) + z^2 (\sigma_{zz}^+ - \sigma_{zz}^-) / 4, \\
 q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{X}_x + \Delta X_x) z^3 dz + h^3 (\sigma_{zx}^+ - \sigma_{zx}^-) / 8,
 \end{aligned}$$

$$q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \left( \bar{X}_y + \Delta X_y \right) z^3 dz + h^3 \left( \sigma_{zy}^+ - \sigma_{zy}^- \right) / 8 .$$

Термины, связанные с инерцией, определены как

$$(I_1, I_3, I_5, I_7) = \int \rho \left( 1, z^2, z^4, z^6 \right) dz .$$

Поступила в редакцию 02.02.2021

Окончательный вариант поступил 27.08.2021

Received Feb.2, 2021 (Aug. 27, 2021)

---

*Н. Т. Нгуен\*, Т. К. Нгуен, Д. Х. Ду, Д. Н. Нгуен*

*Faculty of Building and Industrial Construction, Hanoi University of Civil Engineering, Hanoi, Vietnam*

## **КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК, УПРОЧНЕННЫХ U-ОБРАЗНЫМИ ОБМОТКАМИ ВОЛОКНИСТО-АРМИРОВАННОГО УГЛЕПЛАСТИКА<sup>1</sup>**

*N. T. Nguyen\*, T. K. Nguyen, D. H. Du, and D. N. Nguyen*

### **FINITE-ELEMENT ANALYSIS OF RC BEAMS STRENGTHENED WITH CFRP U-WRAPS**

**Keywords:** reinforced concrete beams, shear strengthening, carbon-fiber-reinforced polymer (CFRP), U-wraps

Three-dimensional finite-element models for the material properties of a carbon-fiber-reinforced polymer and concrete were constructed and validated using experimental data for two RC beam specimens. Their failure mechanism is represented as shifting from the shear-tension in the control beam to the shear-compression in the strengthening beam. Parametric studies were performed to determine the effect of the number of CFRP layers and CFRP U-wraps on the overall shear performance and compressive strength of the RC beams.

**Ключевые слова:** балки железобетонные, упрочнение сдвиговое, углепластик волокнисто-армированный, обмотки U-образные

Разработаны трехмерные конечно-элементные модели для двух железобетонных балок, упрочненных волокнисто-армированным углепластиком, достоверность применения которых проверена с помощью экспериментальных данных. Механизм разрушения представлен как переход от разрушения сдвиг—растяжение в контрольной балке к сдвиг—сжатие в упрочненных балках. Для определения влияния количества слоев в U-образной углепластиковой обмотке и количества обмоток на сдвиговые характери-

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [tannn@huce.edu.vn](mailto:tannn@huce.edu.vn)  
Corresponding author: [tannn@huce.edu.vn](mailto:tannn@huce.edu.vn)

<sup>1</sup>Перевод с англ.

стики и прочность при сжатии железобетонных балок выполнены параметрические исследования.

## Введение

Методы и приемы упрочнения (например, увеличение сечения, приклеивание стальных пластин, натяжение арматуры на бетон и внешнее приклеивание композитных материалов) все чаще изучают для продления срока службы существующих конструкций и модернизации поврежденных элементов конструкции [1—3]. Здания, поврежденные в силу снижения прочности из-за чрезмерных нагрузок или стихийных бедствий, часто подвергают упрочнению. Одна из наиболее перспективных технологий упрочнения железобетонных конструкций — использование волокнисто-армированных полимерных материалов (ВАПМ) в виде листов, полос, стержней или слоистых пластин. Эти материалы завоевали популярность благодаря таким превосходным качествам, как высокая удельная прочность, высокая коррозионная стойкость и долговечность [4, 5]. Упрочнение конструкций волокнистыми композитными материалами имеет преимущества перед другими подходами, однако вызывает беспокойство отсутствие пластичности конструкций и быстрое разупрочнение при высоких температурах [6, 7].

Интерес к конструкционному поведению железобетонных конструкций, упрочненных ВАПМ, обуславливает проведение многочисленных исследований [4, 5, 8—14]. Например, экспериментальные результаты [10] показали, что использование листов из стеклопластика с разными схемами упрочнения при изгибе, сдвиге, изгибе со сдвигом не только увеличивает нагрузку растрескивания, максимальную несущую способность, общую жесткость и пластичность железобетонных балок, но и позволяет управлять развитием трещин в бетоне. Этот вывод также согласуется с результатами [5]. Однако расслоение или потеря сцепления листов стеклопластика, обуславливающие преждевременное разрушение конструкционных элементов, упрочненных снаружи композитными материалами [15—18], представляет значительную проблему, несмотря на существенное увеличение общих конструктивных характеристик упрочненных балок. Поэтому поиск метода оценки или предотвращения такого разрушения имеет решающее значение для правильного проектирования сдвигового и изгибного упрочнения с использованием ВАПМ.

Метод упрочнения ВАПМ особенно целесообразен в случае балок, чувствительных к сдвиговым нагрузкам в силу их несоответствия требованиям армирования при сдвиге или коррозии арматуры в результате воздействия суровых условий окружающей среды. В связи с тем, что мода разрушения и конструкционные характеристики поврежденных балок могут существенно отличаться от расчетных в силу уменьшения площади поперечного сечения как в бетоне, так и в арматуре, а также уменьшения прочности сцепления между бетоном и арматурой [19, 20],

они особенно чувствительны к сдвиговому деформированию. В [21—25] рассмотрели несколько аналитических подходов, учитывающих внешнее приклеивание ВАПМ, для оценки сопротивления упрочненных железобетонных балок сдвиговому деформированию. Применение U-образных обмоток из ВАПМ — одна из наиболее популярных схем упрочнения в силу таких преимуществ, как сдвиговое упрочнение и анкерное воздействие. Например, результаты исследований [21, 26] свидетельствуют о том, что использование надлежащих концевых анкеров, в том числе U-образных, замедлило или даже предотвратило потерю сцепления волокнисто-армированного углепластика (CFRP) и способствовало значительному увеличению прочности при сдвиге. Однако большинство предыдущих исследований проведено на образцах балок с довольно ограниченной площадью поперечного сечения. Детальное изучение научной литературы показало, что исследований влияния размеров балки, особенно для образцов высотой более 400 мм, выполнено очень мало [27]. Поэтому недавние экспериментальные исследования [5, 11, 12, 25, 28] были посвящены оценке сопротивления сдвигу крупных или полноразмерных образцов балки, упрочненных U-образными обмотками из ВАПМ. Например, в ходе испытаний [5] выявили увеличение несущей способности упрочненных балок на 53% по сравнению с контрольными. Согласно данным [29] влияние критического размера балки можно описать зависимостью между требуемой необходимой эффективной длиной сцепления и эффективной деформацией ВАПМ, а также сопротивлением бетона сдвигу [30]. Следствие этого вывода заключается в том, что при конструкционном анализе следует уделять больше внимания влиянию размеров на конструкционные характеристики железобетонных балок, чувствительных к сдвигу.

Метод конечных элементов (МКЭ) при разработке балок, упрочненных ВАПМ, — эффективный инструмент для анализа параметров, влияющих на их поведение. Большинство исследований, выполненных с применением МКЭ, посвящены образцам упрочненной балки, нагруженной изгибом [2—4]. В последние годы выполнили несколько численных исследований, связанных с балками, упрочненными ВАПМ при сдвиге [25, 27, 31—34]. Несмотря на то что конечно-элементная модель дала хорошие результаты с точки зрения оценки несущей способности, начальной жесткости и мод разрушения, результаты численных исследований не были окончательными. Такие проектно-ориентированные параметры, оказывающие существенное влияние на сопротивление железобетонных балок сдвигу, как схемы упрочнения и количество слоев ВАПМ, тщательно не изучены.

Экспериментальные данные исследовательского проекта [9] обобщили и использовали для построения конечно-элементной модели для сдвигового упрочнения железобетонных балок углепластиком. Испытания провели на двух образцах балок 120×300×2000 мм. Один образец использовали в качестве контрольной балки, а другой упрочнили на

сдвиг с помощью U-образных обмоток в соответствии со стандартом АСІ 440.2R-17 [35]. Для проверки достоверности построенной конечно-элементной модели, учитывающей поведение на поверхности раздела углепластика и бетона, несущую способность, картины трещин и моды разрушения, полученные в ходе расчетов МКЭ, сравнили с данными эксперимента. Кроме того, после обоснования модели провели параметрические исследования для оценки влияния кратного количества слоев в U-образных обмотках, прочности бетона при сжатии, разных схем сдвигового упрочнения и количества U-образных обмоток на конструкционные характеристики упрочненных железобетонных балок.

## 1. Описание образцов балки

**1.1. Образцы балки.** На рис. 1 показаны конфигурации двух образцов железобетонной балки с поперечным сечением 120×300 мм, испытанных при статической нагрузке. Балки длиной 2000 мм с пролетом в свету 1800 мм подвергли испытанию на трехточечный изгиб до разрушения. Шесть стальных арматурных стержней с номинальным диаметром 18 мм в нижнем слое ( $\rho = 4,71\%$ ) и два стальных стержня с номинальным диаметром 10 мм в верхнем слое использовали для упрочнения двух балок, чувствительных к сдвигу. Арматурные хомуты с номинальным диаметром 6 мм расположили с интервалом 200 мм.

Балку, обозначенную, как B2S, упрочнили на сдвиг U-образными обмотками из CFRP с аналогичными размерами (шириной 50 мм и толщиной

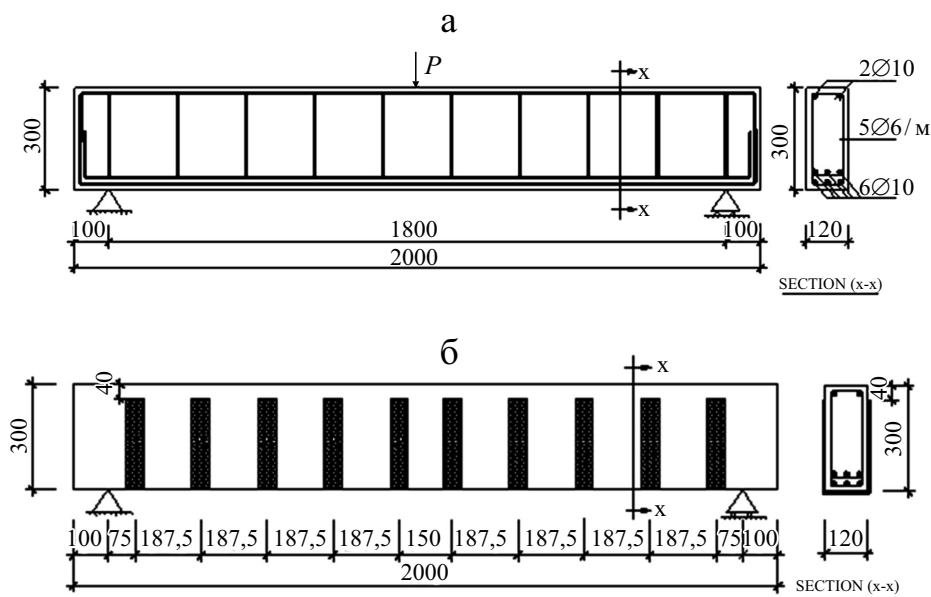


Рис. 1. Проектная схема контрольной балки B2 [9] (а) и местоположение листов CFRP на упрочненной балке B2S [9] (б).

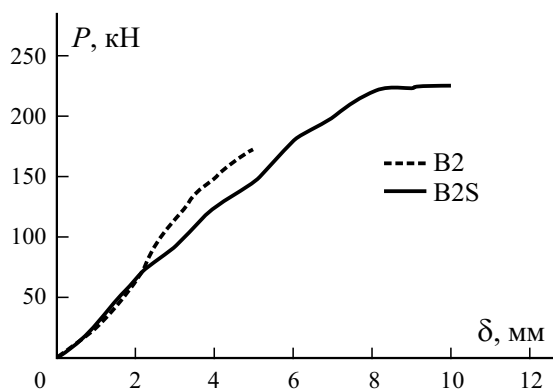


Рис. 2. Экспериментальные кривые нагрузка—прогиб  $P$ — $\delta$  образцов балок B2 и B2S.

0,176 мм), расположенными с интервалом 187,5 мм по всей зоне постоянного сдвига. Контрольная балка B2 имела конфигурацию армирования, аналогичную балке B2S. U-образные обмотки также расширили вертикально на глубину 40 мм ниже верхних волокон.

**1.2. Свойства материала.** Все продольные стальные арматурные стержни изготовлены из высококачественной деформированной стали с пределом текучести 400 МПа и пределом прочности при растяжении 600 МПа. Для изготовления хомутов использовали стержни из обычной мягкой гладкой стали с пределом текучести и прочностью при растяжении 290 и 420 МПа соответственно. Модуль упругости всей стальной арматуры конструкции 200 ГПа. Образцы балок отлили в деревянной опалубке; среднюю прочность бетона при сжатии 39,5 МПа определили на кубических образцах через 28 дней после изготовления образцов балок. В спецификациях производителя указано, что толщина одного слоя листа CFRP 0,176 мм, предел прочности при растяжении 3800 МПа, модуль Юнга 240 ГПа.

**1.3. Экспериментальные результаты исследования** обобщены на рис. 2 и в табл. 1, включая нагрузку растрескивания  $P_{cr}$ , предельную нагрузку  $P_u$ , прогиб растрескивания  $f_{cr}$ , предельный прогиб  $f_u$  и модуль разрушения. Результаты эксперимента свидетельствуют о том, что сдвиговое упрочнение приводит в основном к равномерным изгибным трещинам с большей концентрацией в балке B2S, чем в балке B2. При использовании U-образных обмоток предельная нагрузка на упрочненную балку

Табл. 1

Экспериментальные результаты

Балка	$P_{cr}$ , кН	$P_u$ , кН	$f_{cr}$ , мм	$f_u$ , мм	Мода разрушения
B2	24,1	174	0,91	4,95	Сдвиг—растяжение
B2S	25,7	225	0,96	9,98	Сдвиг—сжатие



B2S на 29,3% больше, чем на контрольную B2. Предельный прогиб балки B2S более чем в два раза больше, чем балки B2. Этот факт также свидетельствует о том, что стратегия сдвигового упрочнения сдвигает хрупкие моды разрушения растяжение—сдвиг в балке B2 на более пластичный механизм разрушения сдвиг—сжатие в балке B2S.

## 2. Разработка и проверка достоверности конечно-элементных моделей

В настоящей работе конечно-элементную программу DIANA [36] использовали для распространения экспериментального исследования [9] путем применения нелинейного МКЭ с контролируемым перемещением. Для моделирования конструкционных характеристик двух образцов балки выполнили трехмерные нелинейные расчеты МКЭ.

Разработали трехмерные конечно-элементные модели, включающие бетонную балку, листы углепластика, продольную и поперечную арматуру, а также жесткие стальные пластины, поставленные в местах приложения нагрузки и опор для уменьшения концентрации напряжений. Конечные элементы выбрали исходя из механических свойств материалов, определенных в ходе испытаний. Для достижения хорошего баланса между временем и точностью вычислений выбрали размер сетки конечных элементов  $30 \times 30 \times 30$  мм. Дискретизация конечно-элементной сетки и граничные условия показаны на рис. 3. На основании экспериментальных данных [9], расчетов по формулам fib Model Code 2010 [37] и упрощенной модели сцепление—скольжение CFRP/бетон [15] с помощью конечно-элементной модели определили механические свойства бетона, стальной арматуры, CFRP и прочность сцепления CFRP/бетон (табл. 2).

Кроме того, для воспроизведения хода испытаний на трехточечный изгиб нагружающую силу задавали исходя из деформации, соответствующей перемещению 1 мм под силой на каждом шаге нагружения. При анализе узловых напряжений и деформаций конечных элементов в ходе нагружения с контролируемым перемещением программа DIANA интерпретировала каждое перемещение как единичный шаг. Итерацию равновесия устано-

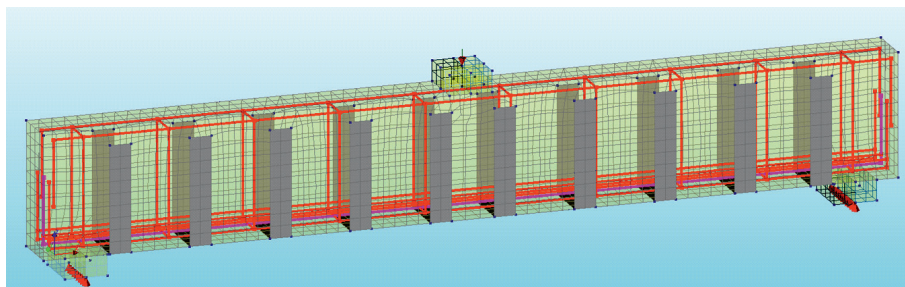


Рис. 3. Компоненты, нагрузка и граничные условия конечно-элементной модели упрочненной балки B2S-FEM: обмотки CFRP (серые), бетон (зеленые), арматурные стержни (красные).

Табл. 2

Параметры материалов, используемые при анализе МКЭ

Материал	Параметр	Балка В2	Балка В2S	Источник
Бетон	Прочность при сжатии $f_{cm}$ , МПа	39,5	39,5	[9]
	Прочность при растяжении $f_p$ , МПа	3,45	3,45	[37]
	Модуль упругости $E_c$ , ГПа	36	36	[37]
	Энергия разрушения при растяжении $G_p$ , Н·мм/мм <sup>2</sup>	0,089	0,089	[37]
	Энергия разрушения при сжатии $G_c$ , Н·мм/мм <sup>2</sup>	55,3	55,3	[38]
Сталь	Предел текучести / прочность при растяжении $f_y / f_u$ , МПа	Ø6 290 / 420	290 / 420	[9]
		Ø10 400 / 600	400 / 600	[9]
		Ø18 400 / 600	400 / 600	[9]
CFRP	Модуль упругости $E_s$ , ГПа	200	200	[9]
	Прочность при растяжении $f_u$ , МПа	-	3800	[9]
	Модуль упругости $E_f$ , ГПа	-	240	[9]
	Предельная деформация при растяжении $\varepsilon$	-	0,0155	[9]
	Прочность сцепления CFRP/бетон $\tau_{max}$ , МПа	-	3,9	[15]
	Скольжение $S_0$ , мм	-	0,037	[15]

вили методом Ньютона—Рафсона с допуском сходимости по умолчанию 0,01 для нелинейного конструкционного анализа и регистрировали данные на каждом шаге нагружения.

**2.1. Моделирование бетона.** Бетонную балку смоделировали с помощью изопараметрических твердотельных элементов CHX60, имеющих 20 узловых точек. Разработка модели вращающейся трещины с учетом общей деформации основана на идее “размазанного” разрушения (smeared fracture) бетона. Для иллюстрации поведения бетона при сжатии использовали параболическую диаграмму напряжение—деформация, позволившую учесть как модель уменьшения поперечного растрескивания, так и модель ограничения напряжения (stress confinement) [38]. При расчете прочности при растяжении, энергии разрушения при растяжении по моде I и ширины полосы растрескивания применяли модель, предложенную в [39], для описания нелинейной зависимости поведения бетона разупрочнение—деформация при растяжении.

**2.2. Моделирование стальной арматуры.** Моделирование продольной и поперечной арматуры выполнили на основе конечных элементов с упругопластическим поведением, определяемым пределом и уровнем текучести. Для оценки деформаций использовали поле перемещений, создаваемое окружающими элементами сплошной среды. В настоящем исследовании принято предположение об идеальном сцеплении, поскольку

согласно полученным результатам пришли к выводу о том, что поведение сцепления бетона и стальной арматуры типа напряжение—скольжение не является доминирующим фактором, влияющим на конструкционные характеристики представленного анализа МКЭ.

**2.3. Моделирование жестких пластин под приложенной силой и над опорами.** На рис. 3 показана конечно-элементная модель с элементами CHX60, моделирующими жесткие стальные пластины под приложенной силой и над опорами. Использовали сталь с линейно-упругими свойствами.

**2.4. Моделирование CFRP.** Листы углепластика смоделировали, используя восьмиугольные изопараметрические оболочечные конечные элементы CQ40S. Как показано в табл. 2, листы углепластика имели большую прочность при растяжении в направлении волокон (3800 МПа). Ожидали, что железобетонная балка в ходе расчета МКЭ быстро разрушится после разрушения листа углепластика по достижении максимальной деформации 0,0155.

**2.5. Моделирование поверхности раздела CFRP/бетон.** Поведение на поверхности раздела углепластик/бетон смоделировали с использованием моделей сцепления напряжение—скольжение, представленных в [15], поскольку в численных исследованиях [40—43] продемонстрировали, что упомянутые модели между локальным сдвиговым напряжением  $\tau$  и соответствующим скольжением  $S$  точно воспроизводят эксперименты. Для моделирования поверхностей раздела сцепления между бетоном и листами углепластика использовали конечные элементы CQ48I. Нелинейную зависимость сдвигового напряжения от проскальзывания описали следующим образом:

$$\tau = \tau_{\max} \sqrt{S / S_0} \quad \text{при } S \leq S_0, \quad (1)$$

$$\tau = \tau_{\max} \exp[-\alpha(S / S_0 - 1)] \quad \text{при } S \geq S_0. \quad (2)$$

С учетом прочности бетона при растяжении  $f_t$  и отношения ширины листа CFRP  $b_f$  и бетонной балки  $b_c$  максимальное сдвиговое напряжение  $\tau_{\max}$  рассчитали как

$$\tau_{\max} = 1,5\beta_w f_t, \quad (3)$$

$$\beta_w = \sqrt{\frac{(2,25 - \frac{b_f}{b_c})}{(1,25 + \frac{b_f}{b_c})}}. \quad (4)$$

Как видно из уравнения

$$S_0 = 0,0195\beta_w f_t, \quad (5)$$

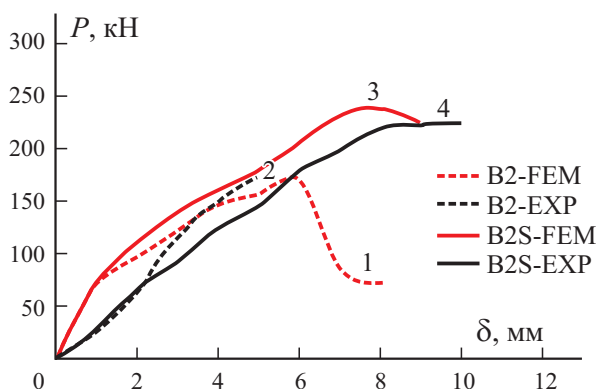


Рис. 4. Расчетные (1, 3) и экспериментальные (2, 4) кривые  $P$  —  $\delta$  образцов балок B2 (1, 2) и B2S (3, 4).

прочность бетона при растяжении и отношение ширины листа углепластика и балки также имеют некоторое влияние на величину скольжения  $S_0$ .

Коэффициент  $\alpha$  можно вычислить с помощью энергии межповерхностного разрушения  $G_f$  как

$$\alpha = 1 / \left( \frac{G_f}{\tau_{\max} S_0} - \frac{2}{3} \right). \quad (6)$$

Если общая сила сцепления на поверхности раздела CFRP—бетон превышает максимальное локальное напряжение сцепления, т. е.  $\tau_{\text{int}} > \tau_{\max}$ , то конструктивные характеристики упрочненной железобетонной балки связаны с механизмом разрушения в силу потери сцепления с CFRP.

**2.6. Проверка достоверности конечно-элементной модели.** Для оценки точности разработанной трехмерной конечно-элементной модели выполнили расчет МКЭ двух образцов балки и сравнили экспериментальные и численные результаты: диаграммы нагрузка—прогиб (рис. 4), картины образования трещин и моды разрушения в середине пролета балок на всех шагах нагружения.

В табл. 3 приведены значения расчетной  $P_{u,\text{FEM}}$  и экспериментальной  $P_{u,\text{EXP}}$  предельной нагрузки и механизм разрушения. Видно, что отноше-

Табл. 3

Сравнение предельной нагрузки  $P_u$  и моды разрушения

Балка	$P_u$ , кН		$P_{u,\text{EXP}}/P_{u,\text{FEM}}$	Мода разрушения при анализе МКЭ
	EXP	FEM		
B2	174	170,2	1,02	Сдвиг—растяжение
B2S	225	238,9	0,94	Сдвиг—сжатие

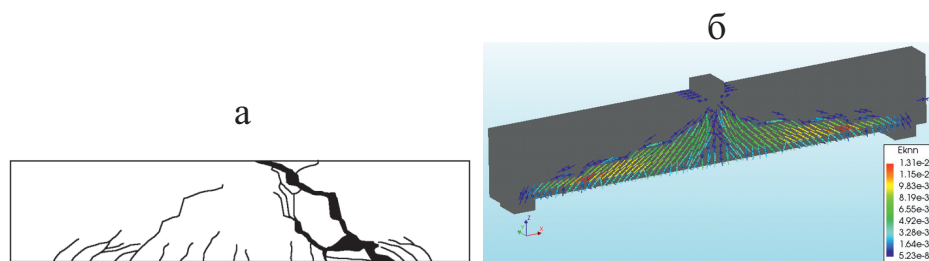


Рис. 5. Сравнение распределения трещин в реальной В2 (а) и смоделированной МКЭ контрольной балке В2-FEM (б).

ния предельных нагрузок  $P_{u,EXP} / P_{u,FEM}$  в балках В2 и В2S хорошо согласуются (различие от 2 до 6%). Кроме того, различие начальной жесткости реальной и смоделированной (в конечных элементах без трещин) балок можно объяснить местоположением на балке датчика перемещения на основе линейного регулируемого дифференциального трансформатора. Точка измерения перемещения в экспериментальной программе находилась на нижней поверхности в центре балки, тогда как прогиб определяли в точке приложения силы. В элементах с трещинами расчетные значения жесткости имели значения больше экспериментальных, что можно объяснить блокировкой напряжений в конкретной модели “размазанных” напряжений [44—46].

Трещины в балке В2 распространялись вдоль продольных арматурных стержней в результате действия изгибных растягивающих напряжений. Этот механизм определялся сдвиговым скольжением вдоль трещины и отсутствием сцепления в силу малого отношения размеров хомутов в балке В2, приводившего к неправильному механизму передачи нагрузки от бетона к стальной арматуре. На последнем этапе разрушения в результате быстрого разрушения бетона при сдвиге и резкой потери несущей способности при прогибе 6 мм в середине пролета образовалась крупная наклонная трещина, как показано на рис. 5 и 6. Этот факт подтверждает способность конечно-элементной модели фиксировать разрушение сдвиг—растяжение, наблюдаемое в эксперименте. Расчетное распределение деформаций в точках интегрирования показано на рис. 6—б. Расчетное распределение напряжений (рис. 6—а) продемонстрировало текучесть

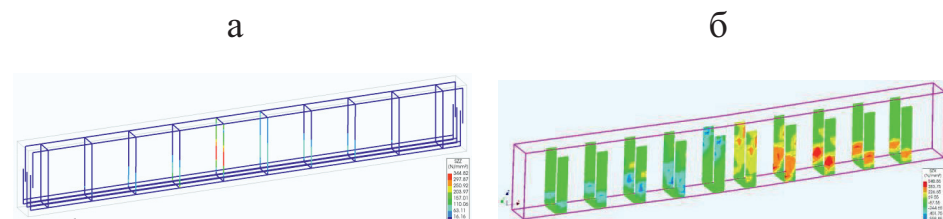


Рис. 6. Распределение напряжений в продольной арматуре и хомутах в направлении Z в балке В2-FEM (а) и листах CFRP в балке В2S-FEM (б).

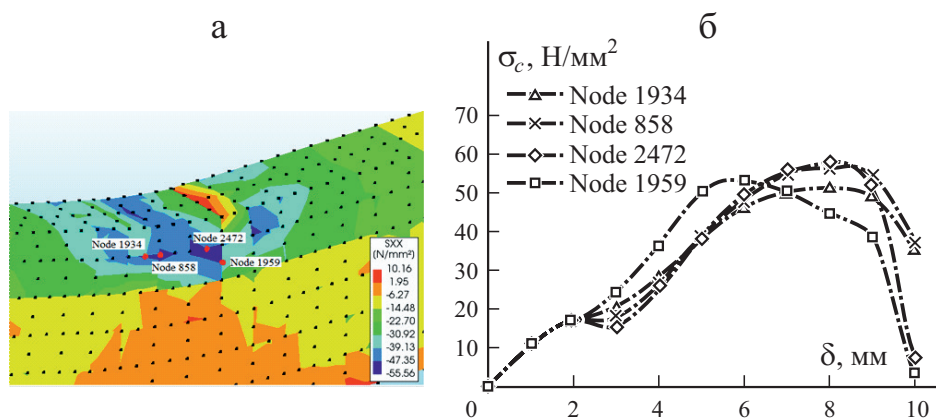


Рис. 7. Распределение напряжений Коши в верхней хорде бетона (а) и зависимости напряжения Коши—перемещение  $\sigma_c$ — $u$  в смоделированной МКЭ балке B2S-FEM (б).

хомутов на стадии разрушения в силу превышения осевым напряжением в направлении  $Z$  предела текучести 290 МПа.

Механизм разрушения, идентифицированный для балки B2S, — сдвиг — сжатие начался с дробления бетона в верхнем поясе и прогрессировал до разрушения или расслоения нескольких U-образных обмоток из CFRP, которые пересекались с трещинами в бетоне. Анализ МКЭ показал, что напряжение Коши  $\sigma_c$  в верхнем поясе бетона в балке B2S превысило прочность бетона при сжатии 39,5 МПа, что демонстрируют данные рис. 7—а, б. Данные рис. 8 также свидетельствуют о тесной связи между концентрацией трещин, образующихся вблизи точки приложения нагрузки на стадии разрушения моделируемой балки B2S-FEM, и картиной трещин в реальной балке на стадии разрушения. Распределение напряжений в U-образных обмотках из CFRP на стадии разрушения (см. рис. 6—б), также свидетельствует о том, что напряжения еще значительно меньше прочности материала. Полученные результаты демонстрируют способность разработанных конечно-элементных моделей предсказывать кон-

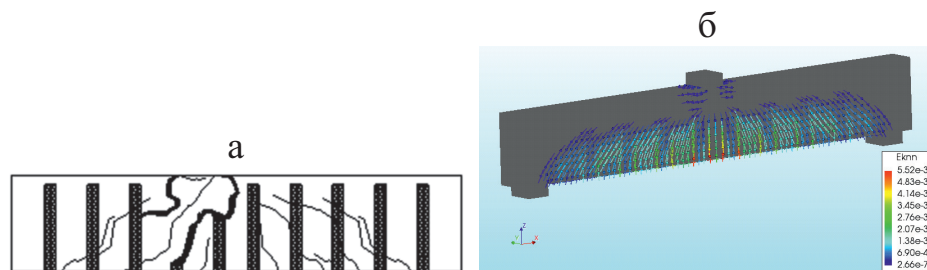


Рис. 8. Распределение трещин в реальной упрочненной балке B2S (а) и балке B2S-FEM, смоделированной МКЭ (б).

струкционные характеристики железобетонных балок с системой упрочнения листами углепластика и без нее.

### 3. Параметрическое исследование

#### 3.1. Влияние количества слоев U-образной обмотки из CFRP.

Для исследования влияния количества слоев U-образной обмотки из углепластика разработали четыре конечно-элементные модели балок B2S-FEM, B2S-L2, B2S-L3 и B2S-L5, упрочненных 1, 2, 3 и 5 слоями CFRP (рис. 9). С увеличением количества слоев U-образной обмотки несущая способность балок возросла по сравнению с контрольной на 40, 42,3, 58,2 и 58,8%. Также можно сделать вывод о том, что увеличение количества слоев U-образной обмотки повышает общую жесткость балки; при этом кривые деформирования балок, упрочненных тремя и пятью слоями U-образной обмотки, практически идентичны.

В разделе 2.6 сделан вывод о том, что разрушение упрочненной балки B2S обусловлено дроблением бетона в зоне сжатия; моды разрушения трех других упрочненных балок идентичны таковому балки B2S. Распределение напряжений в упрочненных балках с разным количеством слоев углепластика показано на рис. 6—б и 10. Эти результаты показывают, что увеличение количества приклеиваемых слоев уменьшает уровень напряжения в балке, сохраняя при этом их максимальную несущую способность. Кроме того, разрушение упрочненных балок началось в бетоне, а не в U-образной обмотке из углепластика. Таким образом, увеличение количества слоев U-образной обмотки также оказало влияние на механизм разрушения упрочненных балок.

**3.2. Влияние прочности бетона при сжатии.** Для оценки влияния прочности бетона при сжатии на сдвиговые характеристики железобетонных балок, упрочненных U-образными обмотками из листов углепластика шириной 50 мм, расположенных на расстоянии 187,5 мм (см.

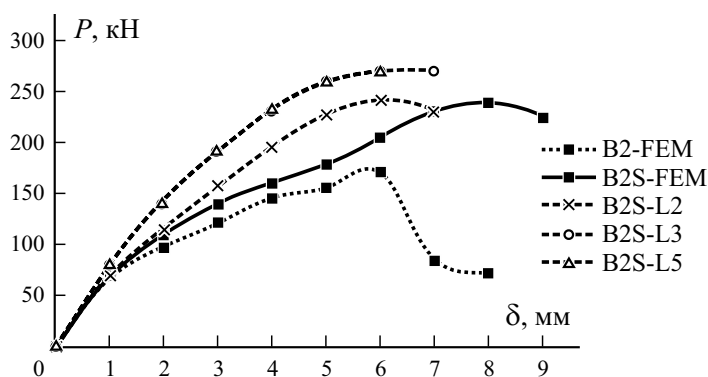


Рис. 9. Кривые нагрузка—прогиб  $P$  —  $\delta$  при разном количестве слоев в U-образных обмотках из CFRP.



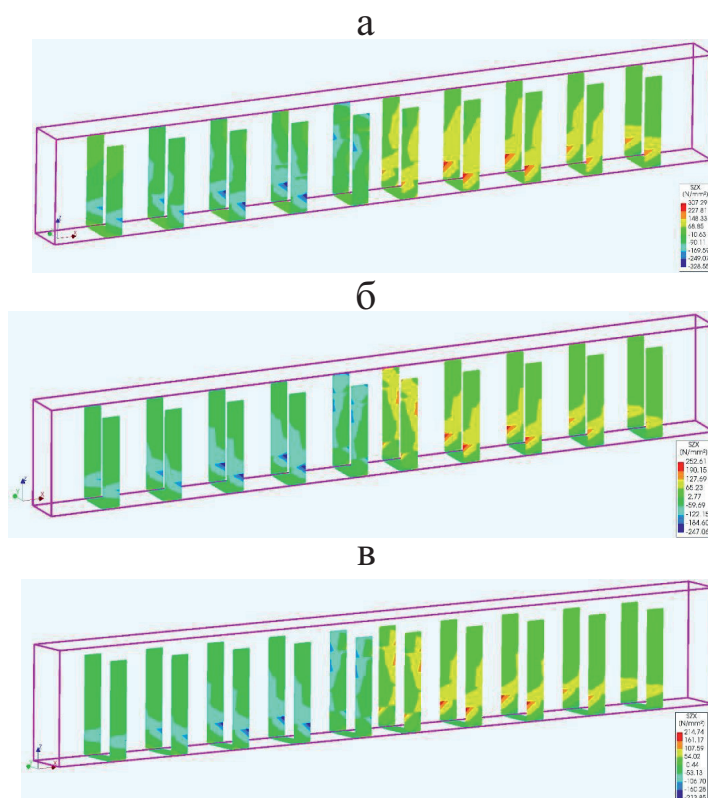


Рис. 10. Распределение напряжений в упрочненных балках с U-образными обмотками из CFRP с 2 (а), 3 (б) и 5 (в) слоями.

рис. 1—б), разработали и изучили четыре конечно-элементные модели. Исследовали четыре балки B2S-FEM, B2S-B35, B2S-B30 и B2S-B25 с прочностью бетона при сжатии 39,5, 35, 30 и 25 МПа соответственно при уменьшении прочности при растяжении с 3,45 до 3,23, 2,91 и 2,58 МПа соответственно.

Расчетные зависимости нагрузка—прогиб  $P-\delta$  балок приведены на рис. 11. Видно, что прочность бетона при сжатии оказывает существенное влияние на сдвиговую реакцию балки и ее несущую способность. Так, несущая способность балки B2S-FEM была на 8,1, 21,9 и 46,1% больше, чем балок B2S-B35, B2S-B30 и B2S-B25 соответственно. Мода разрушения балок — сдвиг—сжатие.

**3.3. Влияние схем сдвигового упрочнения на характеристики железобетонных балок с U-образными обмотками из углепластика** проанализировали с помощью конечно-элементных моделей. Данные рис. 12 иллюстрируют схемы упрочнения железобетонной балки листами углепластика. Для изучения конструктивных и экономических последствий применения выбранных схем упрочнения изготовили листы углепластика одинаковой



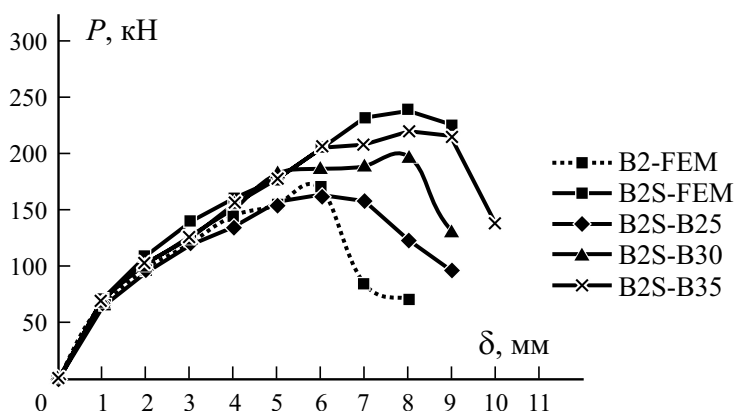


Рис. 11. Влияние прочности бетона при сжатии на сдвиговые характеристики балок.

общей площадью. Все варианты упрочненных балок смоделировали с прочностью бетона при сжатии и стальной арматурой, как в балке B2S.

Балку B2S-C1 упрочнили U-образными обмотками из углепластика, приклеенными снаружи ко всем ее поверхностям под углом  $\pm 45^\circ$  к продольной оси балки. Балку B2S-C2 упрочнили четырьмя U-образными обмотками в пролете сдвига, приклеенными под углом  $\pm 45^\circ$ . Балки B2S-C3 и B2S-C4 упрочнили не только тремя U-образными обмотками, приклеенными под углами  $\pm 45^\circ$  (B2S-C3) и  $90^\circ$  (B2S-C4), но и соединенными горизонтальными листами углепластика для предотвращения возможной потери сцепления. Общая площадь U-образных обмоток из углепластика во всех четырех балках  $0,5 \text{ м}^2$ .

Из данных рис. 13 видно, что наибольшей несущей способностью обладала балка B2S-C1 ( $P_{\max} = 231,2 \text{ кН}$ ), а наименьшей — балка B2S-C4 ( $P_{\max} = 253,4 \text{ кН}$ ). Несущая способность балки B2S-C2 была немного больше, чем балки B2S-C1. Этот результат свидетельствует о влиянии ширины U-образных лент на несущую способность балки. Рекомендуется использовать большое количество U-образных обмоток меньшей ширины вместо небольшого количества обмоток большей ширины: чем больше упрочняющее покрытие сдвигового пролета, тем больше несущая способность при сдвиге. Применение горизонтальных накладок, как в случае наклонных (балка B2S-C3), так и вертикальных (балка B2S-C4) U-образных обмоток из углепластика не только предотвратило возможное преждевременное разрушение балок в силу потери сцепления обмоток с бетоном, наблюдавшееся в экспериментальных исследованиях [10, 47], но и обеспечило наибольшую прочность при сдвиге и пластичность среди всех рассмотренных схем упрочнения листами углепластика.

Распределение деформаций растрескивания, рассчитанное с помощью МКЭ, показало, что все балки с разными стратегиями упрочнения разрушились в силу дробления бетона (рис. 14).

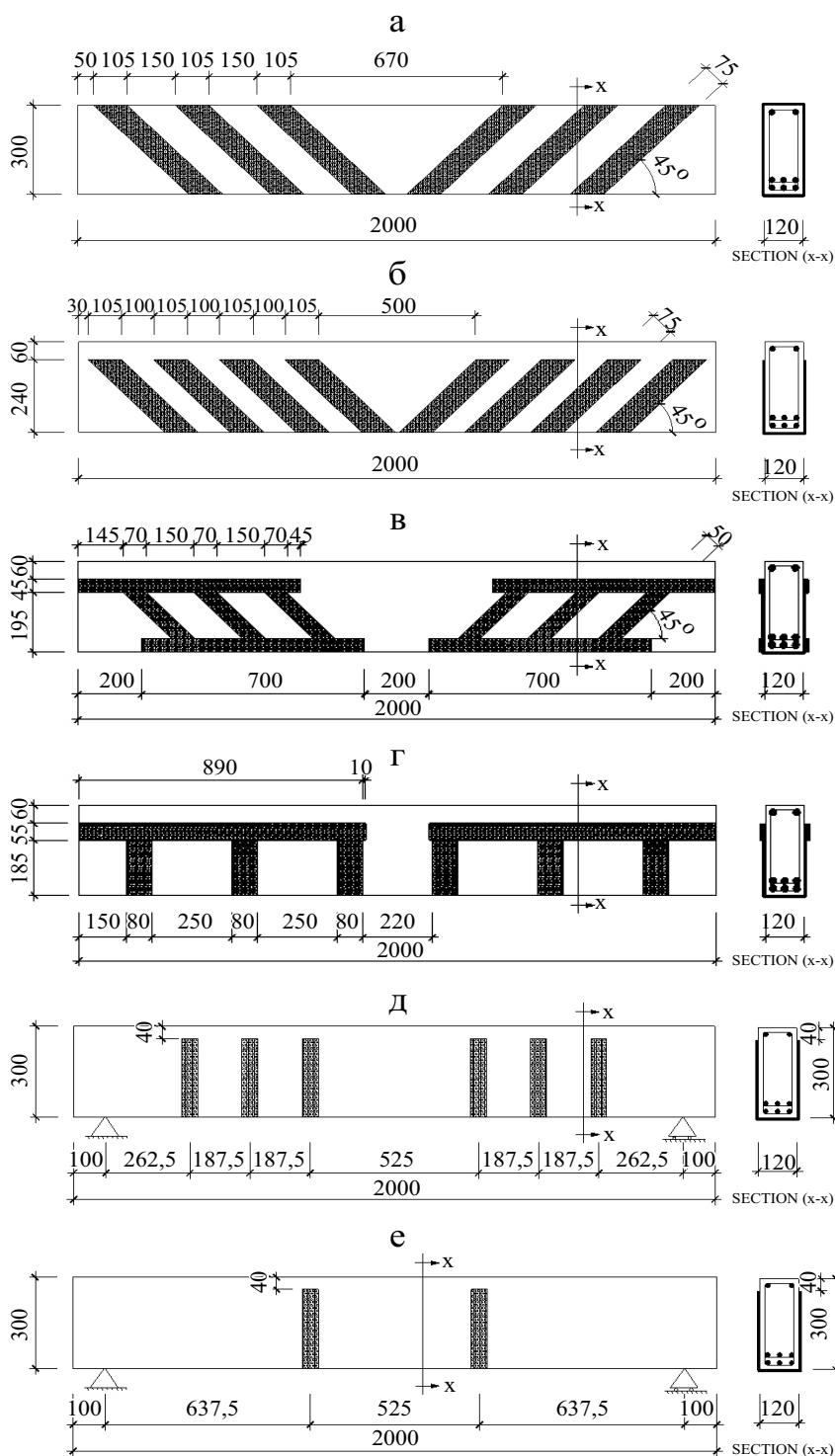


Рис. 12. Разные схемы сдвигового упрочнения балок B2S-C1 (а); B2S-C2 (б); B2S-C3 (в); B2S-C4 (г); B2S-3U (д); B2S-1U (е).

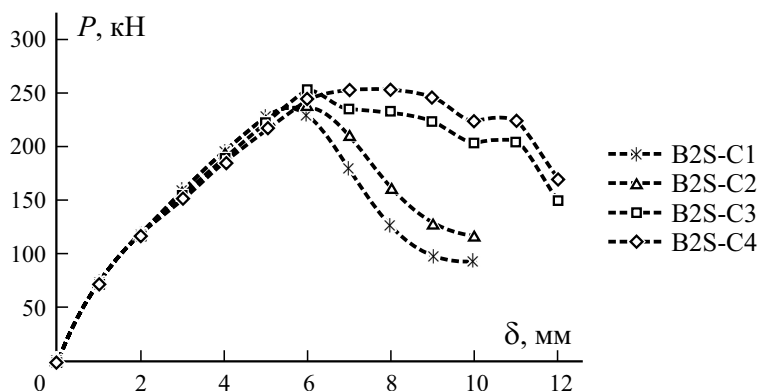


Рис. 13. Кривые нагрузка—перемещение  $P—\delta$  образцов балок с разными схемами сдвигового упрочнения.

**3.4. Влияние количества U-образных обмоток из CFRP** оценили, выполнив конечно-элементное моделирование трех балок. Распределение сдвигового напряжения при разрушении балки B2S-FEM, упрочненной пятью вертикальными U-образными обмотками с каждой стороны сдвигового пролета, приведено на рис. 10—*a*. Балки B2S-1U и B2S-3U упрочнили одной и тремя вертикальными U-образными обмотками с каждой стороны сдвигового пролета соответственно (см. рис. 12—*d, e*).

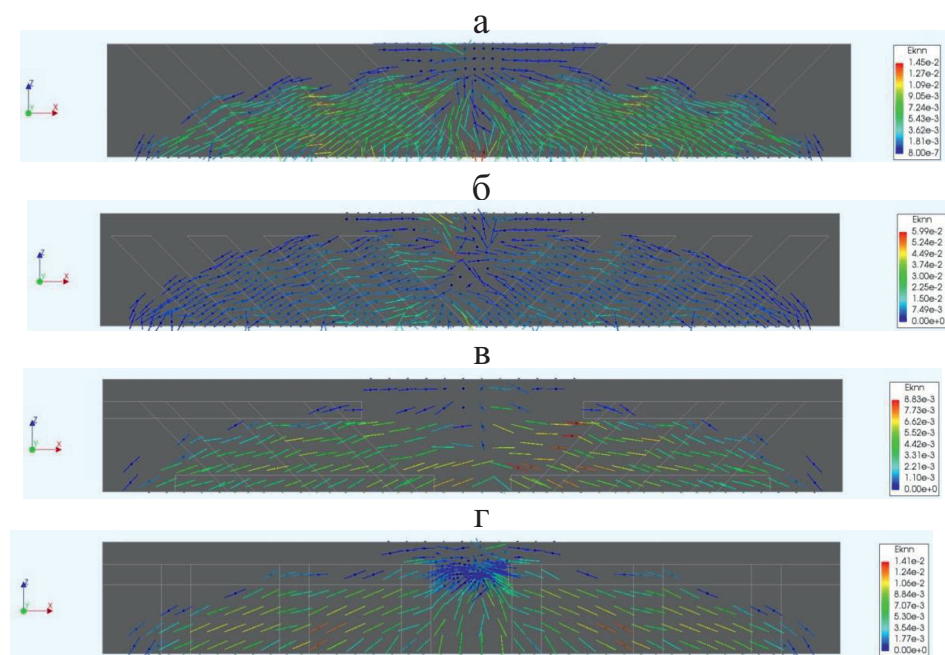


Рис. 14. Распределение трещин в балках B2S-C1 (*a*); B2S-C2 (*б*); B2S-C3 (*в*); B2S-C4 (*г*).

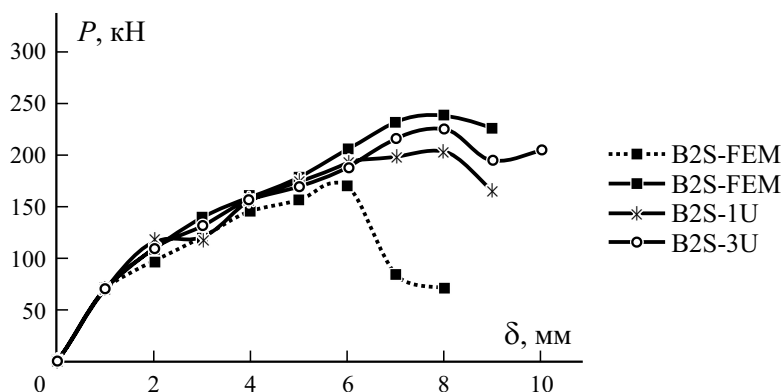


Рис. 15. Кривые нагрузка—перемещение  $P$  —  $\delta$  балок с разным количеством U-образных обмоток в сдвиговом пролете.

Из данных рис. 15 следует, что увеличение несущей способности балок B2S-FEM, B2S-3U и B2S-1U по сравнению с контрольной балкой B2-FEM составило 40, 32,5 и 19,4% соответственно. Видно, что балка B2S-FEM с пятью U-образными обмотками продемонстрировала наибольшую пластичность. Таким образом, можно сделать вывод о том, что помимо повышения несущей способности при сдвиге увеличение количества U-образных обмоток в упрочненных балках также увеличило их пластичность по сравнению с контрольной балкой, продемонстрировавшей моду разрушения сдвиг—растяжение. Однако следует отметить, что при перерезании двух U-образных обмоток в области с наименьшим распределением сдвигового напряжения наблюдали общее увеличение прочности при сдвиге лишь на ~7,5% меньшее, чем при использовании пяти листов углепластика.

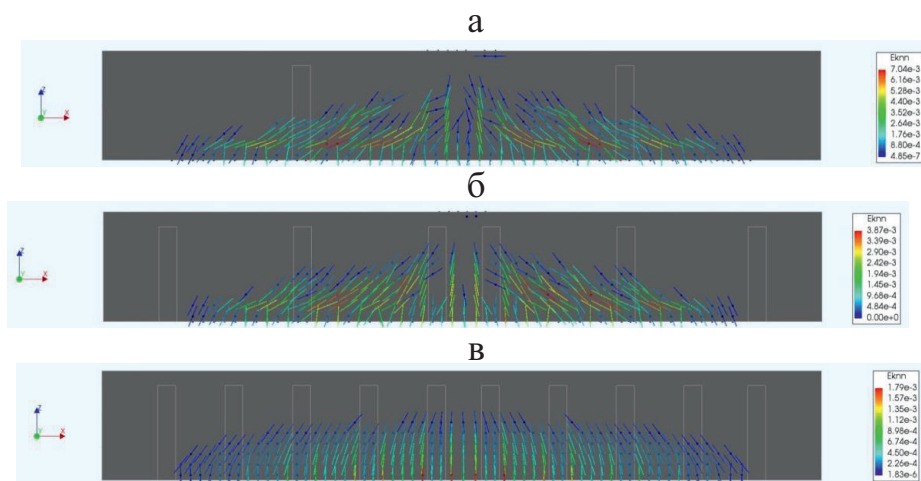


Рис. 16. Распределение деформации трещинообразования в балках B2S-1U (а); B2S-3U (б); B2S-FEM (в).

На рис. 16 показано распределение деформации при действии нагрузки, вызывающей образование трещин, при перемещении на 1 мм. Хотя у всех балок нагрузка, вызывающая растрескивание, близка к 75 кН, распределение деформации свидетельствует о том, что при использовании большего количества U-образных обмоток наклонные и вертикальные трещины, обусловленные изгибающими моментами, имеют тенденцию более равномерного распределения и медленного прорастания.

### Заключение

В настоящей работе представлены результаты применения разработанных конечно-элементных моделей для компьютерного исследования сдвигового поведения железобетонных балок, упрочненных U-образными обмотками из углепластика. Для проверки достоверности результаты конечно-элементных моделей сравнивали с экспериментальными данными по механизмам разрушения, картин растрескивания и несущей способности балок [9]. Установлена хорошая корреляция между расчетными и экспериментальными результатами на всех уровнях приложения нагрузки вплоть до разрушения. Разработанные и проверенные модели затем использовали в проектно-ориентированном параметрическом исследовании для изучения влияния количества слоев в U-образных обмотках, прочности бетона при сжатии, разных схем сдвигового упрочнения и количества U-образных обмоток в сдвиговом пролете на сдвиговое поведение упрочненных балок. Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Разрушение упрочненных балок обусловлено дроблением бетона в верхней хорде, что является одной из типичных характеристик разрушения сдвиг—сжатие. Увеличение количества слоев в U-образной обмотке с одного до пяти оказало незначительное влияние на характеристики упрочненных балок. Таким образом, увеличение количества слоев U-образной обмотки бесполезно, если упрочненная балка разрушается в результате дробления бетона.

2. Прочность бетона при сжатии оказывает значительное влияние на сдвиговые характеристики балок, упрочненных U-образными обмотками. При изменении прочности бетона при сжатии с 39,5 до 35, 30 и 25 МПа несущая способность при сдвиге и исходная жесткость уменьшались, хотя мода разрушения оставалась неизменной. Это объясняется быстрым разрушением сжатой хорды бетона.

3. Схема приклеивания листов углепластика имела значительное влияние на несущую способность и пластичность упрочненных балок. Схема упрочнения с вертикальными U-образными обмотками в сочетании с горизонтальными накладками рекомендуется для упрочненных железобетонных балок, критических к сдвигу, поскольку она обеспечивает наибольшую несущую способность и пластичность, а также предот-

вращает преждевременное разрушение упрочненной балки в результате расслоения и потери сцепления U-образных обмоток.

4. Как и предполагали, увеличение количества U-образных обмоток, наклеенных на сдвиговой пролет, повышало несущую способность и пластичность упрочненных балок, а также приводило к более равномерному распределению и медленному прорастанию трещин. Согласно результатам МКЭ распределение сдвиговых напряжений в сдвиговом пролете можно использовать для определения правильного распределения U-образных обмоток для достижения сбалансированного компромисса между экономическими и конструкционными преимуществами. Например, при параметрическом анализе установили, что удаление двух U-образных обмоток в сдвиговом пролете привело к потере  $\sim 7,5\%$  прочности при сдвиге.

*Конфликт интересов.* Авторы декларируют отсутствие конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ombres L. and Trovato A.* FRP-strengthened reinforced concrete beams: a review and the assessment of cracking and deflection models // *Mech. Compos. Mater.* — 2009. — Vol. 45, No. 6. — P. 619—630.
2. *Siddika A., Al Mamun Md. A., Alyousef R., and Amran Y. H. M.* Strengthening of reinforced concrete beams by using fiber-reinforced polymer composites: A review // *J. Build. Eng.* — 2019. — Vol. 25. — P. 100798.
3. *Naser M. Z., Hawileh R. A., and Abdalla J. A.* Fiber-reinforced polymer composites in strengthening reinforced concrete structures: A critical review // *Eng. Struct.* — 2019. — Vol. 198. — P. 109542.
4. *Obaidat Y. T., Heyden S., Dahlblom O., Abu-Farsakh G., and Abdel-Jawad Y.* Retrofitting of reinforced concrete beams using composite laminates // *Constr. Build. Mater.* — 2011. — Vol. 25. — P. 591—597.
5. *Dias S. J. E., Silva J. R. M., and Barros J. A. O.* Flexural and shear strengthening of reinforced concrete beams with a hybrid CFRP solution // *Compos. Struct.* — 2021. — Vol. 256. — P. 113004.
6. *Sayin B.* Behavior of insulated carbon-FRP-strengthened RC beams exposed to fire // *Mech. Compos. Mater.* — 2014. — Vol. 50. — P. 477—490.
7. *Di Tommaso A., Neubauer U., Pantuso A., and Rostasy F. S.* Behavior of adhesively bonded concrete-CFRP joints at low and high temperatures // *Mech. Compos. Mater.* — 2001. — Vol. 37. — P. 327—338.
8. *Aiello M. A., Valente L., and Rizzo A.* Moment redistribution in continuous reinforced concrete beams strengthened with carbon-fiber-reinforced polymer laminates // *Mech. Compos. Mater.* — 2007. — Vol. 43. — P. 453—466.
9. *El-Ghandour A. A.* Experimental and analytical investigation of CFRP flexural and shear strengthening efficiencies of RC beams // *Constr. Build. Mater.* — 2011. — Vol. 25. — P. 1419—1429.



10. Dong J., Wang Q., and Guan Z. Structural behaviour of RC beams with external flexural and flexural-shear strengthening by FRP sheets // *Composites: Part B*. — 2013. — Vol. 44. — P. 604—612.
11. Fu B., Teng J. G., Chen J. F., Chen G. M., and Guo Y. C. Concrete cover separation in FRP-plated RC beams: Mitigation using FRP U-jackets // *J. Compos. Constr.* — 2017. — Vol. 21. — P. 04016077.
12. Lavorato D., Bergami A. V., Fiorentino G., Fiore A., Santini S., and Nuti C. Experimental tests on existing RC beams strengthened in flexure and retrofitted for shear by C-FRP in presence of negative moments // *Int. J. Adv. Struct. Eng.* — 2018. — Vol. 10. — P. 211—232.
13. Al Rjoub Y. S., Ashteyat A. M., Obaidat Y. T., and Bani-Youniss S. Shear strengthening of RC beams using near-surface mounted carbon fibre-reinforced polymers // *Aust. J. Struct. Eng.* — 2019. — Vol. 20. — P. 54—62.
14. Vuković N. K., Jevrić M., and Zejak R. Experimental analysis of RC elements strengthened with CFRP strips // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 56. — P. 75—84.
15. Lu X. Z., Teng J. G., Ye L. P., and Jiang J. J. Bond-slip models for FRP sheets/plates bonded to concrete // *Eng. Struct.* — 2005. — Vol. 27. — P. 920—937.
16. Teng J. G., Yuan H., and Chen J. F. FRP-to-concrete interfaces between two adjacent cracks: Theoretical model for debonding failure // *Int. J. Solids Struct.* — 2006. — Vol. 43. — P. 5750—5778.
17. Vasseur L., Matthys S., and Taerwe L. An analytical study on the bond behaviour between an externally bonded FRP and concrete in the case of continuous beams // *Mech. Compos. Mater.* — 2008. — Vol. 44. — P. 269—278.
18. Cho D. Y., Park S. K., and Hong S. N. Bond-slip behavior of CFRP plate-concrete interface // *Mech. Compos. Mater.* — 2011. — Vol. 47. — P. 529—538.
19. Nguyen N. T. and Nguyen T. K. An experimental study on the shear capacity of corroded RC beams without shear reinforcement // *J. Sci. Technol. Civil Eng.* — 2021. — Vol. 15. — P. 55—66.
20. Nguyen N. T. and Nguyen T. K. Numerical modeling of shear behavior of reinforced concrete beams with stirrups corrosion: Finite element validation and parametric study // *Modern Mechanics and Applications* / Eds. N. Tien Khiem et al. — LNME, 2022. — P. 890—904.
21. Carolin A. and Täljsten B. Theoretical study of strengthening for increased shear bearing capacity // *J. Compos. Constr.* — 2005. — Vol. 9. — P. 497—506.
22. Sas G., Carolin A., and Täljsten B. A model for predicting the shear bearing capacity of FRP-strengthened beams // *Mech. Compos. Mater.* — 2008. — Vol. 44. — P. 245—256.
23. Pellegrino C. and Modena C. An experimentally based analytical model for the shear capacity of FRP-strengthened reinforced concrete beams // *Mech. Compos. Mater.* — 2008. — Vol. 44. — P. 231—244.
24. Bui L. V. H. and Stitmannaitum B. Prediction of shear contribution for the FRP strengthening systems in RC beams: A simple bonding-based approach // *J. Adv. Concr. Technol.* — 2020. — Vol. 18. — P. 600—617.
25. Lee J. and Lopez M. Application of frictional bond-slip model to large-scale FRP-strengthened T-beams with U-wraps // *Int. J. Concr. Struct. Mater.* — 2020. — Vol. 14. — P. 1—15.

26. *El-Maaddawy T. and Chekfeh Y.* Retrofitting of severely shear-damaged concrete T-beams using externally bonded composites and mechanical end anchorage // *J. Compos. Constr.* — 2012. — Vol. 16. — P. 693—704.
27. *Godat A., Qu Z., Lu X. Z., Labossière P., Ye L. P., and Neale K. W.* Size effects for reinforced concrete beams strengthened in shear with CFRP strips // *J. Compos. Constr.* — 2010. — Vol. 14. — P. 260—271.
28. *Kim Y., Ghannoum W. M., and Jirsa J. O.* Shear behavior of full-scale reinforced concrete T-beams strengthened with CFRP strips and anchors // *Constr. Build. Mater.* — 2015. — Vol. 94. — P. 1—9.
29. *Khalifa A. and Nanni A.* Improving shear capacity of existing RC T-section beams using CFRP composites // *Cem. Concr. Compos.* — 2000. — Vol. 22. — P. 165—174.
30. *Leung C. K. Y., Chen Z., Lee S., Ng M., Xu M., and Tang J.* Effect of size on the failure of geometrically similar concrete beams strengthened in shear with FRP strips // *J. Compos. Constr.* — 2007. — Vol. 11. — P. 487—496.
31. *Godat A., Labossière P., Neale K. W., and Chaallal O.* Behavior of RC members strengthened in shear with EB FRP: Assessment of models and FE simulation approaches // *Comput. Struct.* — 2012 — Vol. 92—93, — P. 269—282.
32. *Chen G. M., Chen J. F., and Teng J. G.* On the finite element modelling of RC beams shear-strengthened with FRP // *Constr. Build. Mater.* — 2012. — Vol. 32. — P. 13—26.
33. *Haddad R. H. and Obaidat Y. T.* A nonlinear finite element model for shear deficient heat-damaged concrete beams repaired using NSM CFRP strips // *Constr. Build. Mater.* — 2018. — Vol. 170. — P. 314—325.
34. *Hawileh R. A., Abdalla J. A., and Naser M. Z.* Modeling the shear strength of concrete beams reinforced with CFRP bars under unsymmetrical loading // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2019. — Vol. 26. — P. 1290—1297.
35. *ACI 440.2R-17.* Guide for the design and construction of externally bonded FRP systems for strengthening concrete structures, American Concrete Institute, 2017.
36. *Ferreira D. and Manie J.* DIANA Documentation release 10.3, DIANA FEA bv, The Netherlands, 2020.
37. *fib Model Code 2010.* *Fib Model Code for Concrete Structures 2010*, Ernst & Sohn, 2013, 434 p.
38. *Nakamura H. and Higai T.* Compressive fracture energy and fracture zone length of concrete // *Modeling of Inelastic Behavior of RC Structures under Seismic Loads* / Ed. B. P. Shing. — ASCE, 2001. — P.471—487.
39. *Hordijk D. A. and Reinhardt H. W.* Numerical and experimental investigation into the fatigue behavior of plain concrete // *Exp. Mech.* — 1993. — Vol. 33. — P. 278—285.
40. *Baky H. A., Ebead U. A., and Neale K. W.* Flexural and interfacial behavior of FRP-strengthened reinforced concrete beams // *J. Compos. Constr.* — 2007. — Vol. 11. — P. 629—639.
41. *Zhang S. S. and Teng J. G.* Finite element analysis of end cover separation in RC beams strengthened in flexure with FRP // *Eng. Struct.* — 2014. — Vol. 75. — P. 550—560.
42. *Mohamed O. A. and Khattab R.* Numerical analysis of reinforced concrete beam strengthened with CFRP or GFRP laminates // *Key Eng. Mater.* — 2016. — Vol. 707. — P. 51—59.
43. *Sayin B. and Manisali E.* An Investigation of interfacial stresses in reinforced concrete beams using FRP laminates // *J. Adhesion.* — 2010. — Vol. 86, No. 11. — P. 1132—1157.



44. *Rots J. G.* Smeared and discrete representations of localized fracture // *Int. J. Fract.* — 1991. — Vol. 51. — P. 45—59.

45. *Burnett D. J. and Schreyer H. L.* A mesh objective method for modeling crack propagation using the smeared crack approach // *Int. J. Numer. Methods Eng.* — 2018. — Vol. 117. — P. 574—603.

46. *Alijani-Ardeshtir M., Neya B. N., and Ahmadi M.* Comparative study of various smeared crack models for concrete dams // *Gradevinar.* — 2019. — Vol. 71. — P. 305—318.

47. *Saribiyik A., Abodan B., and Balci M. T.* Experimental study on shear strengthening of RC beams with basalt FRP strips using different wrapping methods // *Eng. Sci. Technol.* — 2021. — Vol. 24. — P. 192—204.

Поступила в редакцию 21.09.2021

Окончательный вариант поступил 07.02.2022

Received Sept. 21, 2021 (Feb. 7, 2022)

---

*H. Гунта<sup>a,б</sup>, С. Р. Хиремат<sup>a</sup>, Д. Р. Маханатра<sup>a,б\*</sup>*

<sup>a</sup>*Department of Aerospace Engineering, Indian Institute of Science, Bangalore 560012, India*

<sup>б</sup>*Department of Metallurgical and Materials Engineering, National Institute of Technology Raipur  
492010, India*

## **ВЛИЯНИЕ ПЕРЕКРЫТИЯ МИКРОТРЕЩИН НА СВОЙСТВА ЭПОКСИДНЫХ КОМПОЗИТОВ С УГЛЕРОДНЫМИ НАНОТРУБКАМИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ<sup>1</sup>**

*N. Gupta, S. R. Hiremath, and D. R. Mahapatra\**

### **MICRO-CRACK BRIDGING EFFECTS ON THE TENSILE AND COMPRESSIVE STRENGTHS OF CNT-EPOXY COMPOSITES**

**Keywords:** glass fabric, composite, micro-crack, micromechanics,  
finite element simulation

Micro-crack bridging and an optimal regime for dispersion of carbon nanotubes (CNTs) in the E-glass fabric reinforced polymer (GFRP) matrix are considered. The purpose of CNT dispersion in the glass fabric is to achieve the enhanced mechanical and tunable thermal/dielectric properties. The requirement for such conducting composites compared to high-cost carbon fabric is well recognized. The results are validated with the help of a theoretical model. The model relates to the stiffness degradation of the composites and the matrix cracks present in the composites. Finite element simulation of a representative volume element of the laminate shows the effect of CNTs on the micro-cracks and effective stiffness. The results obtained from the theoretical and finite element simulations are correlated to the experimental data and explain the increased strength due to the addition of CNT. This study shows that certain specific processing conditions in combination with the effect of dispersant agents reduce the porosity, residual stress and present a consistent dispersion strengthening effect with as low as 0.1 wt% CNT addition, resulting in improved tensile and compressive properties. The treatment of CNTs with ethanol reduces the Van der Waals forces among CNTs and decreases the

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: roymahapatra@iisc.ac.in  
Corresponding author: roymahapatra@iisc.ac.in

<sup>1</sup>Перевод с англ.

epoxy matrix viscosity. Enhancement in the CNT-GFRP stiffness and strength appears primarily due to effective micro-crack bridging and changes in the load transfer path.

**Ключевые слова:** стеклоткань, композит, микротрещина, микро-механика, моделирование конечно-элементное

Рассмотрены перекрытие микротрещин и оптимальный режим диспергирования углеродных нанотрубок (CNT) в эпоксидной матрице волокнисто-армированного стеклопластика (GFRP). Цель диспергирования CNT — достижение улучшенных механических и регулируемых тепловых/диэлектрических свойств композита. Потребность в таких электропроводящих композитах по сравнению с дорогостоящей углеродной тканью общепризнана. Результаты подтверждены с помощью теоретической модели. Модель связывает ухудшение жесткости композитов с наличием трещин в матрице композита. Моделирование представительного объемного элемента слоистого композита методом конечных элементов демонстрирует влияние CNT на микротрещины и эффективную жесткость. Результаты, полученные путем теоретического и конечно-элементного моделирования, коррелируют с экспериментальными данными и объясняют повышенную прочность благодаря добавлению CNT. Исследование показало, что определенные условия обработки в сочетании с действием диспергирующих агентов снижают пористость, остаточное напряжение и обеспечивают постоянный эффект дисперсионного упрочнения при добавлении всего лишь 0,1% по массе CNT, улучшающего свойства при растяжении и сжатии. Обработка CNT этанолом уменьшает силы Ван-дер-Ваальса между CNT и вязкость эпоксидной матрицы. Повышение жесткости и прочности стеклопластика при введении CNT происходит прежде всего за счет эффективного перекрытия микротрещин и изменения пути передачи нагрузки.

## Введение

Углеродные нанотрубки (CNT) в качестве наноразмерной арматуры в эпоксидной матрице позволяют разработать прочный, легкий, высокотемпературный и электропроводящий композит [1—4]. Композиты на основе ткани из стеклянных и углеродных волокон и бисфенол-Е-цианатного связующего с введенными в него CNT, изготовленные методом литьевого прессования с использованием вакуумной инфузии смолы, имеют перспективу применения в аэрокосмических и автомобильных конструкционных компонентах [5—8]. Влияние CNT на улучшение механических, термических и электрических свойств описано в [9—17]. Результаты исследования слоистых стеклопластиков с армирующими добавками CNT показали, что

упрочнение происходит за счет повышенной взаимной диффузии смолы и CNT, способствующей сильной межфазной адгезии [18]. Также наблюдали, что прочность при сдвиге эпоксидных композитов, содержащих CNT, лучше сохраняется во влажных условиях в силу более прочной поверхности раздела [19].

CNT обладают большей прочностью при растяжении и модулем упругости в силу сильной связи  $sp^2$ . Большое отношение размеров CNT обеспечивает хорошее межфазное сцепление (в силу большой площади поверхности) и способствует эффективной передаче нагрузки. Однако малый диаметр, большая удельная поверхность и сильные силы Ван-дер-Ваальса между CNT часто вызывают агломерацию, приводящую к образованию мест концентрации напряжений и снижению общей прочности композита. Поэтому целесообразно введение небольшого количества CNT по сравнению с другими добавками, используемыми для достижения аналогичных свойств [20, 21]. Однако введение меньшего количества CNT ограничивает их выгодное использование и лишь сохраняет жизненно важные эксплуатационные свойства эпоксидной матрицы. Поскольку запутывания CNT, вызванные агломерацией, резко снижают прочность композита, необходимо разорвать эти запутывания, чтобы добиться равномерного расположения и диспергирования многостенных CNT (MWCNT) в матрице для улучшения передачи нагрузки между матрицей и арматурой [22]. Для улучшения диспергирования CNT в матрице широко применяют механические методы, такие как ультразвуковое диспергирование и высокоскоростное сдвиговое перемешивание. Разные химические и физические методы также часто используют для модификации поверхности CNT [23, 24]. Однако эти методы имеют недостатки, связанные с обеспечением успешной модификации поверхности без ухудшения свойств как CNT, так и матрицы, а также без образования какого-либо повреждающего результирующего реакционноспособного продукта. Еще одно ограничение использования CNT — их гладкая нерекционноспособная поверхность. Функционализация CNT обычно решает эту проблему, обеспечивая лучшую дисперсию, прочность межфазной связи, гибкость, лучшую поверхностную активность и большую прочность [25, 26].

При чрезмерной деформации растяжения нанотрубки могут подвергаться пластической деформации, и часто их слабое сдвиговое взаимодействие на границе с соседней матрицей (в силу плохой адгезии) приводит к значительному снижению эффективной прочности композита. Более того, CNT деформируются под действием сжимающей нагрузки в силу своей полой структуры и большого соотношения размеров, что снижает прочность композита [27]. Поэтому, несмотря на улучшение свойств эпоксидной смолы, потенциальная эффективность эпоксидных композитов, армированных CNT, все еще ограничена. Это ограничение связано с трудностями, обусловленными диспергированием сильно запутанных (в силу малого диаметра, большого отношения размеров и сильного ван-дер-ваальсового взаимодействия) CNT в эпоксидной матрице, имеющих плохие межфаз-

ные связи друг с другом. В целом, для улучшения механических свойств эпоксидных композитов, содержащих CNT, желательна большая длина CNT с однородной дисперсией и однонаправленным выравниванием, прочная межфазная связь с матрицей для облегчения микромеханического сцепления. Для преодоления этих проблем и всестороннего использования потенциала введения CNT в эпоксидную смолу необходим новый метод их обработки.

В настоящей работе многостенные CNT (MWCNT) диспергировали в эпоксидной матрице с использованием комбинации высокоинтенсивной обработки ультразвуком и сдвигового перемешивания в этаноле. Пяти-слойные эпоксидные композиты из стеклоткани, содержащие  $x\%$  по массе MWCNT, изготавливали методом ручной выкладки. Контрольные образцы эпоксидной смолы использовали для сравнения исходных свойств с целью уточнения эффективности диспергирования и концентрации MWCNT в эпоксидной матрице. Морфологию и механические свойства композита для изучения механизма упрочнения исследовали с помощью сканирующего электронного микроскопа (СЭМ) и универсальной испытательной машины. Моделирование методом конечных элементов (МКЭ) и аналитические модели широко применяют для корреляции экспериментальных наблюдений слоистого композита [28—31]. В настоящей работе для установления корреляции между экспериментальными результатами и наблюдаемыми механизмами упрочнения использовали конечно-элементный анализ.

## 1. Материалы и метод

В смесь эпоксидной фенольно-новолачной смолы Araldite LY5052 и аминного отвердителя Aradur 5052CH (компании Huntsman International LLC, США) ввели MWCNT марки NTX3 (Nanothinx S.A.) чистотой 94%. Морфологию этих MWCNT (15—30 слоев, объемная плотность  $0,14 \text{ г/см}^3$ , диаметр 10—25 нм, длина  $\geq 10 \text{ мкм}$ , получены химическим осаждением из газовой фазы с катализатором) изучили с помощью СЭМ. Для изготовления 5-слойных эпоксидных стеклопластиков использовали однонаправленную ткань толщиной 0,3 мм и плотностью  $260 \text{ г/см}^2$  из пряжей волокон Е-стекла диаметром 9 мкм и линейной плотностью 66 текс.

Испытания на одноосное растяжение и сжатие провели на универсальной испытательной машине (MaKron 25, BiSS, Индия) при скорости перемещения traversы 1 мм/мин. Испытания на растяжение нанокомпозитов из эпоксидной смолы, наполненной  $x\%$  по массе MWCNT ( $x = 0, 0,1, 0,2, 0,3$ ), и слоистых композитов из стеклоткани, пропитанной эпоксидной смолой, наполненной  $x\%$  по массе MWCNT, провели по стандартам ASTM 638 и ASTM D3039 соответственно. Испытание на сжатие нанокомпозита из эпоксидной смолы с 0,1% по массе MWCNT выполнили по стандарту ASTM D695. Морфологию и поверхность разрушения композитов наблюдали с помощью СЭМ (ZEISS ULTRA-55) для исследования диспер-

сии MWCNT, межфазной связи между эпоксидной смолой и тканью из Е-стекла, а также траектории разрушения. Наблюдаемое поведение далее теоретически анализировали с помощью МКЭ. Рассматривали модель, учитывающую влияние условий отсутствия изонапряжения в ортогонально армированных композитах при монотонной нагрузке. В данном разделе представлена методология, использованная для изготовления нанокompозитов из эпоксидной смолы с  $x\%$  по массе MWCNT и слоистых композитов из стеклоткани, пропитанной эпоксидной смолой с  $x\%$  по массе MWCNT.

### **1.1. Нанокompозит из эпоксидной смолы с $x\%$ по массе MWCNT.**

Разное по массе количество MWCNT диспергировали в этанол (диспергатор) с использованием высокоинтенсивного ультразвука в течение 2 ч. Затем этанол испаряли из раствора с помощью вакуума до тех пор, пока в стакане его оставалось меньше одной трети. После этого в раствор (MWCNT + этанол) добавляли рассчитанное количество эпоксидной смолы и снова тщательно перемешивали с использованием высокоинтенсивного ультразвука в течение 1 ч. Полученный раствор выдерживали в вакууме в течение 24 ч для полного удаления этанола. Затем в эпоксидную смесь добавляли отвердитель в весовом соотношении 100:38 и перемешивали путем сдвига со скоростью 20 об/мин в течение 20 мин. Для изготовления нанокompозитов из эпоксидной смолы, наполненной MWCNT, смесь заливали в алюминиевые формы и отверждали при комнатной температуре в вакууме. Образцы вырезали лазером и полировали до чистоты поверхности 2 мкм. Затем образцы доотверждали при температуре 50 °C в течение 15 ч и выдержали в вакууме при комнатной температуре в течение 24 ч для получения нанокompозитов с минимальными остаточными напряжениями.

**1.2. Слоистый композит из стеклоткани, пропитанной эпоксидной смолой, наполненной  $x\%$  по массе MWCNT.** Смешивание MWCNT с эпоксидной смолой и добавление отвердителя производили в соответствии с процедурой, описанной в разделе 1.1. 5-Слойные композиты изготавливали методом ручной выкладки из слоев однонаправленной стеклоткани с использованием эпоксидной смолы, наполненной  $x\%$  по массе MWCNT ( $x = 0, 0,1, 0,2, 0,3$ ) с последующим отверждением при комнатной температуре в вакууме в течение 48 ч. После цикла постотверждения при 50 °C в течение 15 ч образцы для испытаний вырезали лазером и полировали в соответствии со стандартом ASTM D3039.

Использование вакуума позволило полностью удалить поры и улучшить цикл отверждения. Кроме того, термообработка в ходе постотверждения устранила остаточные напряжения.

## **2. Результаты и обсуждение**

Для получения хорошей дисперсии CNT и улучшения межфазной связи использовали как механические (высокоинтенсивная обработка ультразвуком и перемешивание сдвигом), так и химические (обработка этанолом)



Рис. 1. Образцы нанокompозита из эпоксидной смолы, наполненной 0,1% по массе MWCNT для испытания на растяжение по стандарту ASTM D 638, изготовленные без этанола (а) и с использованием этанола (б), демонстрирующие наличие (а) и отсутствие (б) агломератов MWCNT.

методы. Этанол как полярный растворитель/диспергатор играет важную роль в равномерном диспергировании MWCNT в эпоксидной смоле. Данные рис. 1 демонстрируют преимущество использования этанола для равномерного диспергирования MWCNT в эпоксидной матрице за счет введения полярных групп на поверхности CNT и снижения вязкости эпоксидной смолы [32, 33]. Большая площадь поверхности и сильные внутренние силы Ван-дер-Ваальса между CNT вызывают их агломерацию и препятствуют равномерному диспергированию в эпоксидной матрице.

Обработка поверхностей CNT функциональными группами в этаноле распутывает CNT, уменьшая силы притяжения между ними и создавая временную связь с эпоксидной смолой, обеспечивающую хорошее сцепление на поверхности раздела. Этанол также способствует снижению вязкости матрицы и скольжению цепей эпоксидной смолы под действием сдвиговых сил, что обеспечивает равномерное распределение CNT и хорошее сцепление поверхности раздела с эпоксидной смолой. Кроме того, низкая вязкость эпоксидной смолы способствовала эффективному удалению пор на поверхности раздела матрица—арматура, тем самым увеличивая их сцепление. В результате сильное сцепление CNT с матрицей обеспечило эффективную передачу нагрузки между ними. Наиболее равномерную дисперсию CNT наблюдали в эпоксидной смоле, наполненной 0,1% по массе MWCNT.

Кривые деформирования при растяжении нанокompозитов (эпоксидная смола, наполненная 0, 0,1, 0,2, 0,3% по массе MWCNT) показаны на рис. 2—а. Упругая деформация чистой эпоксидной смолы происходит за счет скручивания/растяжения полимерных цепей, возвращающихся в исходное положение после разгрузки. В пластическом режиме с увеличением напряжения эти движения цепей приводят к разрыву связи и в конечном



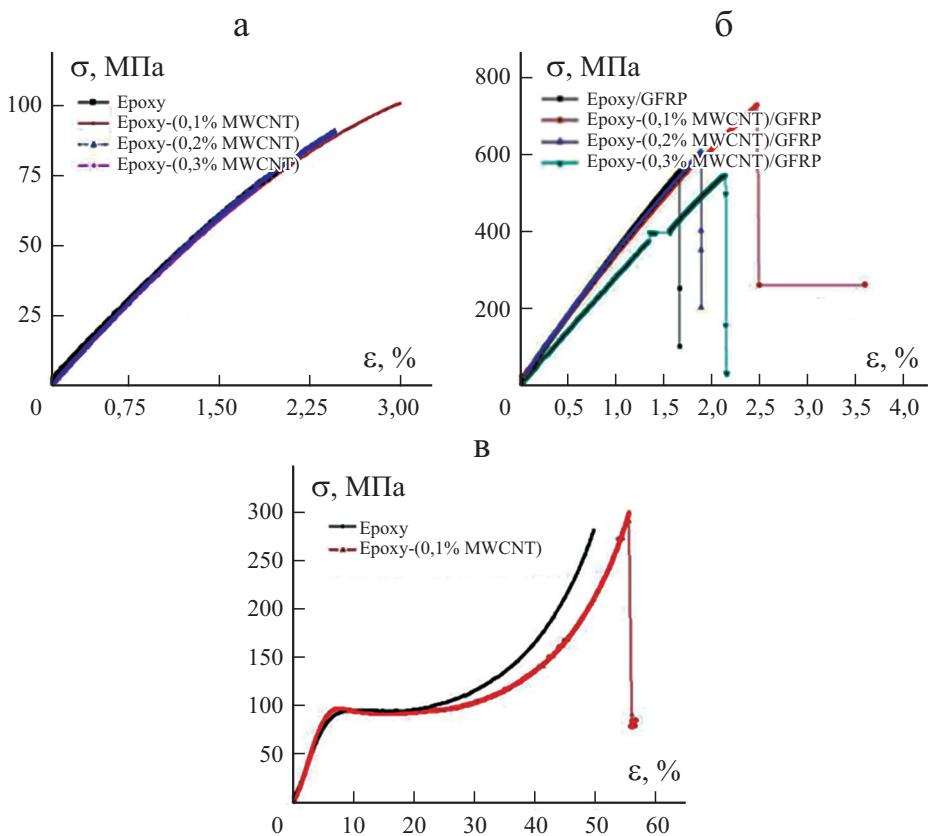


Рис. 2. Диаграммы деформирования  $\sigma - \epsilon$  при растяжении нанокомпозитов эпоксидной смолы (а); слоистых стеклопластиков с эпоксидной матрицей (б); при сжатии чистой эпоксидной смолы и нанокомпозита из эпоксидной смолы (в).

итоге к разрушению. Как хорошо установлено в [20—22] и наблюдали в настоящей работе, упрочняющий эффект от внедрения MWCNT наблюдали только до их критического содержания в матрице. Выше критического содержания MWCNT, равного 0,1% по массе, прочность нанокомпозита снижалась в основном в силу агломерации (см. рис. 2—а). У эпоксидного нанокомпозита с 0,1% по массе MWCNT наблюдали увеличение прочности при растяжении на ~ 21% и прочности при сжатии — на ~ 10% по сравнению с чистой эпоксидной смолой (см. рис. 2—в и таблицу). При этом эпоксидный нанокомпозит с содержанием 0,3% по массе MWCNT продемонстрировал значительное уменьшение значений прочности. Замечено, что чрезмерная концентрация MWCNT ( $> 0,1\%$  по массе) приводит к агломерации MWCNT с образованием пустот и неправильной полимеризации, снижая прочность межповерхностного сцепления. При введении большего количества CNT вязкость эпоксидной смолы возрастала и усугубляла проблему неравномерного распределения CNT и потери сцепления на поверхности раздела.



**Экспериментальные значения характеристик нанокompозитов и слоистых  
стеклопластиков с разным содержанием CNT**

Свойство	Смола	Нанокompозит (эпоксидная смола + MWCNT, % по массе)			Смола/GFRP	Слоистый GFRP + MWCNT (% по массе)		
		0,1	0,2	0,3		0,1	0,2	0,3
Прочность при растяжении, МПа	81,94 ± 1,97	99,8 ± 2,21 (~21,8% ↑)	91,93 ± 2,6 (~12,2% ↑)	70,46 ± 1,62 (~14% ↓)	567,7 ± 3,05	691,4 ± 3,95 (~21,9% ↑)	688,93 ± 2,18 (~21,3% ↑)	533,64 ± 2,47 (~6% ↓)
Максимальное удлинение, %	2,77 ± 0,85	4,78 ± 0,54 (~72,6% ↑)	2,45 ± 0,23 (~11,5% ↓)	1,84 ± 0,11 (~33,5% ↓)	1,83 ± 0,16	2,29 ± 0,13 (~25,1% ↑)	2,03 ± 0,17 (~11% ↑)	2,02 ± 0,11 (~10,4% ↑)
Модуль упругости при растяжении, ГПа	4,27 ± 0,32	4,14 ± 0,12 (~3% ↓)	4,40 ± 0,15 (~3% ↑)	4,34 ± 0,21 (~1,6% ↑)	31,87 ± 0,04	34,43 ± 0,17 (~8% ↑)	32,78 ± 0,03 (~2,8% ↑)	24,78 ± 1,05 (~22,2% ↓)
Прочность при сжатии, МПа	253,45 ± 2,97	278,4 ± 2,40 (~10% ↑)	—	—	—	—	—	—
Предел текучести, МПа	96,87 ± 5,35	97,06 ± 2,15	—	—	—	—	—	—
Модуль упругости при сжатии, ГПа	1,64 ± 0,07	2,00 ± 0,01 (~22% ↑)	—	—	—	—	—	—

Аналогичные количества MWCNT также использовали для изготовления слоистых стеклопластиков. Кривые напряжение—деформация при растяжении эпоксидных ( $x\%$  по массе MWCNT)/композитов из стеклоткани показаны на рис. 2—б. Данные таблицы свидетельствуют о том, что прочность при растяжении слоистых композитов, содержащих менее 0,2% по массе MWCNT, больше таковой слоистого эпоксидного композита без MWCNT. Максимальное увеличение прочности при растяжении на ~22% наблюдали при введении в смолу 0,1% по массе MWCNT. Увеличение массового содержания MWCNT в эпоксидной смоле до 3% существенно уменьшило прочность композита при растяжении. Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о том, что критическим с точки зрения увеличения механических характеристик исследуемого композита является содержание CNT 0,1% по массе.

Чтобы понять причину критического содержания MWCNT в эпоксидной смоле, с помощью СЭМ выполнили фрактографическое изучение образцов нанокompозита с разным содержанием MWCNT, результаты которого иллюстрируют данные рис. 3. Исследование продемонстрировало относительно гладкую поверхность разрушения чистой эпоксидной смолы (см. рис. 3—а), типичное хрупкое разрушение которой связано с её низкой вязкостью разрушения. У композита с содержанием MWCNT 0,1% по массе наблюдали достаточно однородную поверхность разрушения с отклонением траектории трещины (см. рис. 3—б), связанную в основном

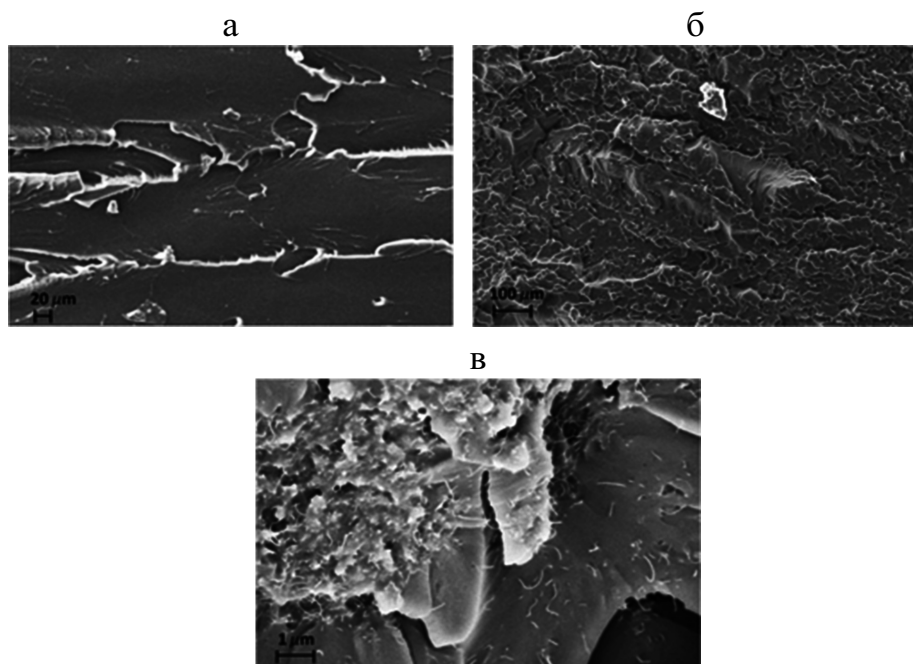


Рис. 3. Фрактограммы СЭМ после нагружения растяжением образцов чистой эпоксидной смолы (а); нанокompозитов из эпоксидной смолы, наполненной 0,1% (б) и 1% по массе (в) MWCNT.

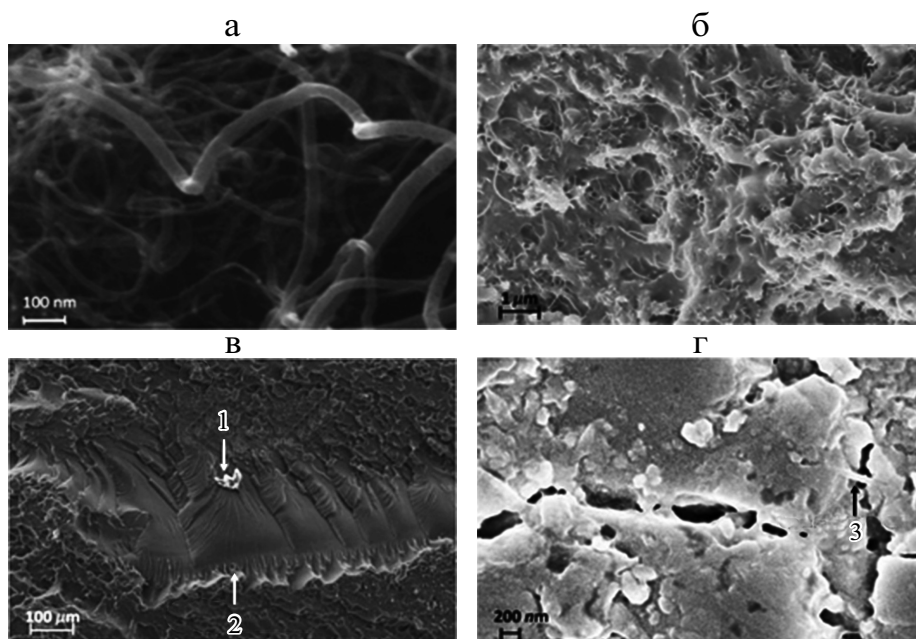


Рис. 4. Фрактограммы СЭМ нанокompозита из эпоксидной смолы, наполненной 0,1% по массе MWCNT (а, б) и после нагружения растяжением (в); после нагружения сжатием (г). 1 — зона зарождения трещины; 2 — зона распространения трещины; 3 — перекрытие трещин CNT.

с однородной дисперсией CNT в эпоксидной матрице. Увеличение содержания CNT до 1% по массе привело к образованию крупных агломератов CNT (см. рис. 3—в). Повышенная агломерация ослабила связь между CNT и эпоксидной смолой, вызвав неравномерное распределение матрицы между MWCNT и большее количество мест зарождения трещин и путей их распространения.

Фрактограммы СЭМ, полученные для эпоксидного нанокompозита с содержанием 0,1% по массе MWCNT (рис. 4), позволяют понять моду разрушения, обусловленную упрочнением композита. Сравнение фрактограмм на рис. 4—б и 4—в демонстрирует искривление пути трещины при встрече с CNT при действии растягивающей нагрузки. Кроме того, также наблюдали эффект перекрытия трещин CNT после нагружения сжатием (см. рис. 4—г), препятствующий раскрытию трещины. Это изменение траектории трещины и её перекрытие в силу введения в эпоксидную смолу CNT способствует увеличению прочности нанокompозита.

Данную оптимальную эпоксидную композицию позже использовали для изготовления слоистого эпоксидного стеклопластика с содержанием 0,1% по массе MWCNT для изучения механизмов, обуславливающих увеличение его прочности. Для лучшего понимания межповерхностного сцепления и распределения CNT в эпоксидной матрице с помощью СЭМ выполнили фрактографический анализ образцов композита. Микрофотографии GFRP композита с содержанием 0,1% по массе MWCNT (рис. 5—б,

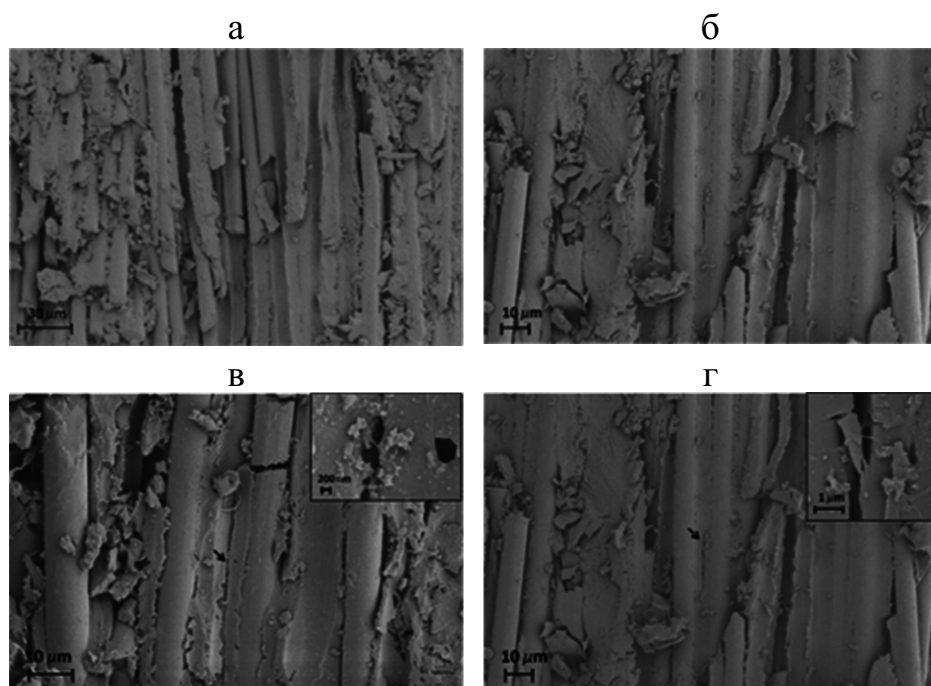


Рис. 5. Фрактограммы СЭМ эпоксидного стеклопластика без наполнения (а) и с 0,1% по массе MWCNT (б, в, г) после испытания на растяжение.

в, г) свидетельствуют о лучшей адгезии/сцеплении на поверхности раздела CNT—эпоксидная матрица, чем композита без CNT (см. рис 5—а). Кроме того, микрофотографии на рис. 5—в, г демонстрируют перекрытие трещины в матрице CNT, подтверждая позитивное влияние MWCNT на передачу механической нагрузки благодаря адекватному сцеплению между матрицей и стеклотканью и равномерному распределению CNT с использованием предложенной методологии обработки. Полученные результаты позволяют утверждать, что незначительные агломерация/кластеризация и пористость, равномерная дисперсия CNT и прочное межфазное сцепление с эпоксидной матрицей способствовали повышению прочности композитов. Для уточнения причины повышения прочности композита за счет добавления CNT и снижения свойств выше критического содержания CNT разработали численную модель и провели анализ МКЭ. Результаты показали эффект перекрытия микротрещин посредством CNT, также подтвержденный исследованиями СЭМ.

Самосогласованную модель, разработанную в [34] для изучения влияния трещин в матрице ортогонально армированных композитов, распространили на случай учета влияния условий неизонапряжения на кромках этих композитов и учета нагружения, зависящего от скорости деформирования. Согласно этой модели деградация жесткости ортогонально армированных композитов зависит от плотности трещин, возникающих в матрице этих композитов. Установлено, что численные результаты, полученные с помощью предложенных моделей, хорошо согласуются с описанными в [33].

На рис. 6—а показано схематическое изображение монотонного нагружения растягивающим напряжением  $\sigma_a$  ортогонально армированного композита, в котором развиваются перемещения  $u_{(l)}$  в слоях  $0^\circ$  с продольно ориентированными волокнами и перемещения  $u_{(t)}$  в слое  $90^\circ$  с поперечно ориентированными волокнами. Изображение на рис 6—б иллюстрирует случай монотонного нагружения ортогонально армированного композита с условием неизонапряжений на кромке, когда в верхнем и нижнем слоях  $0^\circ$  развиваются неравные перемещения  $u_l^+$  и  $u_l^-$  соответственно, а в среднем слое  $90^\circ$  — перемещения  $u_t$ .

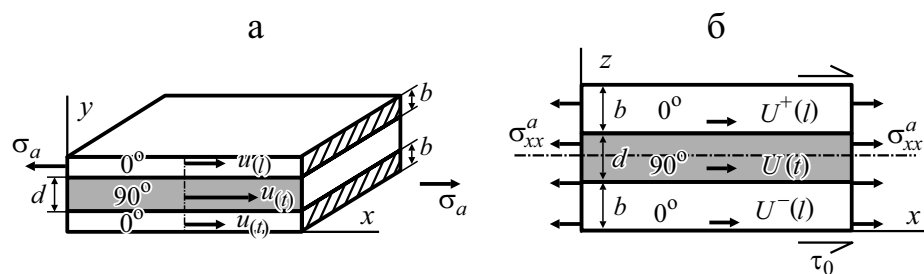


Рис. 6. Схематическое изображение ортогонально армированного композита при монотонном нагружении растяжением (а); вид поперечного сечения при монотонном нагружении с условием неизонапряжения на кромках (б).

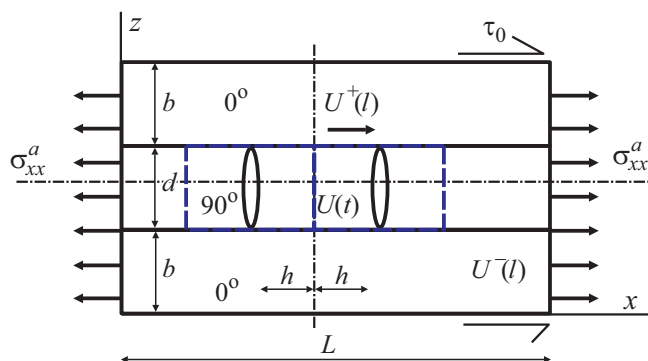


Рис. 7. Схематическое изображение растяжения ортогонально армированного композита с трещинами.

На рис. 7 показано схематическое изображение ортогонально армированного композита длиной  $L$  в направлении нагружения с трещинами в поперечном слое  $90^\circ$ , находящимися на среднем расстоянии  $2h$ . Уравнения состояния модели в напряжениях имеют вид

$$\sigma_{xx}^l = Q_{11}^l \frac{\partial u_l}{\partial x} + \sigma_{xx}^{lR} + k\varepsilon_{pl}^n + \eta \dot{\varepsilon}_{eqv}, \quad (1)$$

$$\sigma_{xx}^t = Q_{11}^t \frac{\partial u_t}{\partial x} + \sigma_{xx}^{tR} + k\varepsilon_{pt}^n + \eta \dot{\varepsilon}_{eqv}. \quad (2)$$

Верхние и нижние индексы  $t$  и  $l$  обозначают поперечное и продольное направления соответственно;  $Q_{11}^l$  и  $Q_{11}^t$  — компоненты матрицы жесткости в продольном и поперечном направлении соответственно;  $\sigma_{xx}^{lR}$  и  $\sigma_{xx}^{tR}$  — начальные напряжения;  $\varepsilon_{pl}$  и  $\varepsilon_{pt}$  — компоненты пластической деформации;  $\dot{\varepsilon}_{eqv}$  — компонента скорости деформации. При гармоническом нагружении без перекрытия трещин в ходе разгрузки в области сжатия можем рассматривать скорость деформации как комплексную переменную. При монотонном нагружении скорость деформации  $\dot{\varepsilon}_{eqv}$  можно записать как  $\varepsilon_{eqv} / \tau$ , где  $\tau$  — постоянная релаксации. Тогда при эквивалентной деформации, равной

$$\varepsilon_{eqv} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}}, \quad (3)$$

скорость эквивалентной деформации запишем как

$$\dot{\varepsilon}_{eqv} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial u}{\partial x} \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (4)$$

Матрица в слоистом композите в силу пластичности подвержена деформационному упрочнению, а волокна в силу хрупкости — только эффекту скорости деформации. Однако эти приближения не являются обобщенными для всех типов матриц и волокон. Например, волокна кевлара могут проявлять значительную пластичность. Рассмотрим уравнения равновесия слоев по отдельности:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{I+}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}^+}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xx}^t}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}^+}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xx}^{I-}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}^-}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Из условия равновесия приложенных напряжений имеем

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}^{I+}}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \sigma_{xx}^t}{\partial x^2} \frac{d}{2b}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \tau^+}{\partial x} = \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^{I+}}{\partial x^2} \left( \frac{\frac{d^2}{8} + b}{\frac{d^2}{4b} + b} \right) - \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^t}{\partial x^2} \left( \frac{b^2 + \frac{bd}{2}}{\frac{d^2}{4b} + b} \right), \quad (7)$$

а из условия равновесия слоистого композита —

$$\sigma_{xx}^{I^R} = -\frac{d}{2b} \sigma_{xx}^{t^R}, \quad (8)$$

где  $b$  и  $d$  — толщина продольного и поперечного слоев соответственно.

Посредством уравнений (6)—(8) получим окончательное дифференциальное уравнение для среднего слоя

$$p^{2+} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^t}{\partial x^2} - \xi^{2+} \sigma_{xx}^t + \xi^{2+} c^+ = 0, \quad (9)$$

где

$$\xi^{2+} = K^+ \left\{ \frac{2bQ_{22}'^t + dQ_{11}'^t}{2bbQ_{11}'^t bQ_{22}'^t} \right\}, \quad p^{2+} = z - \frac{2b(2b^2 + db)}{d^2 + 4b^2} - \frac{d}{4} \left\{ \frac{d^2 + 8b^2}{d^2 + 4b^2} \right\},$$

$$c^+ = \left\{ \sigma_{xx}^{t^R} + \sigma_a A + B \right\}, \quad A = \left( \frac{d}{4b} + \frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{2bQ_{11}'^t}{2bQ_{22}'^t + dQ_{11}'^t} \right\}, \quad (10)$$

$$B = \frac{k\varepsilon_{p_t}^n Q_{22}'^t - k\varepsilon_{p_t}^n Q_{11}'^t}{2bQ_{22}'^t + dQ_{11}'^t}.$$

Параметр сдвигового запаздывания  $K^+$  имеет вид

$$K^+ = \frac{2Q_{55}}{d \ln \left( 1 + \frac{2b}{d} \right)} \left[ 1 - \frac{2}{d} \left\{ \ln \left( \frac{d}{2} \right) \left( 1 - \frac{d}{2} \right) - 1 \right\} - \ln \left( \frac{d}{2b} \right) \right]. \quad (11)$$

Решение дифференциального уравнения (9) с граничными условиями  $\sigma_{xx}^t = 0$  при  $x = \pm h$  имеет вид

$$\sigma_{xx}^t = c^+ \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch} \left( \frac{\xi^+}{p^+} \right) x}{\operatorname{ch} \left( \frac{\xi^+}{p^+} \right) h} \right\}. \quad (12)$$

Подставив полученное решение в уравнение равновесия слоистого композита при приложенной нагрузке, получим выражение для напряжения в продольном слое  $0^\circ$

$$\sigma_{xx}^{I^+} = \sigma_a(\bar{H}) - \frac{\sigma_{xx}^{tR} d}{2b} (1 - \bar{H}_1) - \frac{Bd}{2b} (1 - \bar{H}_1), \quad (13)$$

где

$$\bar{H} = \frac{d}{2b} + \frac{1}{2} - \frac{Ad}{2b} (1 - \bar{H}_1), \quad \bar{H}_1 = \frac{\operatorname{ch} \left( \frac{\xi^+}{p^+} \right) x}{\operatorname{ch} \left( \frac{\xi^+}{p^+} \right) h}.$$

Наконец, выражение для перемещений продольного слоя получим в виде

$$u_l = \frac{\sigma_a A \bar{H}_3}{Q_{11}^t} - \frac{\sigma_{xx}^{tR} d p \operatorname{sh}(\bar{x})}{Q_{11}^t 2b \xi \operatorname{ch}(\bar{h})} + \frac{Bd \bar{H}_2}{Q_{11}^t} - \frac{k \varepsilon_p^n x}{Q_{11}^t}, \quad (14)$$

$$\bar{H}_2 = \left\{ x - \frac{p \operatorname{sh}(\bar{x})}{\xi \operatorname{ch}(\bar{h})} \right\}, \quad \bar{x} = \frac{\xi x}{p}, \quad \bar{h} = \frac{\xi h}{p}.$$

Интегральное среднее перемещение в элементарной ячейке вычислим как

$$\bar{u}_x = \frac{1}{2b + d} \left[ \int_{-h}^h \varepsilon_t dx + 2 \int \frac{b}{d} u_l dz \right]. \quad (15)$$



Теперь деформацию в слое  $90^\circ$  можно определить посредством зависимости между напряжением и деформацией

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_a A}{Q_{11}^t} (\bar{S}) - \frac{\sigma_{xx}^t}{Q_{11}^t} \left\{ \frac{\text{ch}(\bar{x})}{\text{ch}(\bar{h})} \right\} + B(\bar{S}) - \frac{k \varepsilon_p^n}{Q_{11}^t}, \quad (16)$$

где  $\bar{S} = 1 - \frac{\text{ch}(\bar{x})}{\text{ch}(\bar{h})}$ .

Деформацию, обусловленную остаточными напряжениями, не учитываем, поскольку величина пластической деформации, развивающейся в слоистом композите, мала.

Подставив уравнения (14) и (16) в (15), получим выражение для среднего перемещения

$$\bar{u}_x = \frac{\sigma_a}{2b+d} \left[ \frac{A}{Q_{11}^t} \left\{ \bar{S}_1 + \frac{b-\frac{d}{2}}{Q_{11}^l} \left( \frac{dL}{4b} + \frac{L}{2} - \bar{S}_2 \right) \right\} \right], \quad (17)$$

где  $\bar{\xi} = \frac{\xi}{2p}$ ,  $\bar{S}_1 = 1 + \frac{p\beta Q_{11}^t}{\xi b Q_{11}^l} \text{th} \left( \frac{\xi h}{p} \right)$ ,  $\bar{S}_2 = \frac{Ad}{b} \left( \frac{L}{2} - \frac{p \text{sh}(\bar{\xi} L)}{2 \text{ch}(\bar{\xi} h)} \right)$ ,  $\beta = \frac{d}{h}$  —

параметр плотности трещин.

Среднюю деформацию элементарной ячейки запишем как

$$\bar{\varepsilon}_{xx} = \frac{2\sigma_a}{L(2b+d)} \left[ \frac{A}{Q_{11}^t} \left\{ \bar{S}_1 + \frac{b-\frac{d}{2}}{Q_{11}^l} \left( \frac{dL}{4b} + \frac{L}{2} - \bar{S}_2 \right) \right\} \right]. \quad (18)$$

В силу уравнения (19) эффективный модуль Юнга  $E_{eff}^*$  элементарной ячейки можно выразить как

$$E_{eff}^* = \frac{L(2b+d)}{2} \left[ \frac{A}{Q_{11}^t} \left\{ 1 + \frac{P\beta Q_{11}^t}{\xi b Q_{11}^l} \text{th} \left( \frac{\xi h}{P} \right) \right\} + \right. \\ \left. + \frac{b-\frac{d}{2}}{Q_{11}^l} \left\{ \frac{dL}{4b} + \frac{L}{2} - \frac{Ad}{b} \left( \frac{L}{2} - \frac{P \text{sh} \left( \frac{\xi L}{2P} \right)}{\xi \text{ch} \left( \frac{\xi h}{2P} \right)} \right) \right\} \right], \quad (19)$$



где

$$A = \left( \frac{d}{4b} + \frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{2bQ'_{11}{}^t}{2bQ'_{22}{}^t + dQ'_{11}{}^t} \right\}, \quad Q'_{11}{}^t = Q'_{11} + \frac{\eta}{\tau} \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$Q'_{11}{}^t = Q'_{11} + \frac{\eta}{\tau} \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad p = \sqrt{z - \frac{2b(2b^2 + db)}{d^2 + 4b^2} - \frac{d}{4} \left\{ \frac{d^2 + 8b^2}{d^2 + 4b^2} \right\}},$$

$\eta$  — вязкоупругий коэффициент;  $z$  — толщина слоистого композита.

Выражение для эффективного модуля Юнга слоистого композита получено в виде

$$E_{eff} = E_0 \left\{ 1 + \frac{\beta d E_t}{b E_l} \operatorname{th} \left( \frac{\xi}{\beta} \right) \right\}^{-1}, \quad (20)$$

где  $E_0$  — модуль Юнга слоистого композита без поперечных трещин;  $E_t$  и  $E_l$  — модули упругости поперечного и продольного слоев соответственно.

Уравнения (19)—(20) обеспечивают прямое решение для определения эффективного модуля ортогонально армированного композита, подверженного монотонной нагрузке. В обеих аналитических моделях эффективный модуль слоистого композита — функция плотности поперечных трещин, развивающихся в матрице. Эти трещины снижают эффективный модуль упругости и прочность слоистых композитов. В модифицированную модель включили учет условий неизонапряжений. Наряду с поправками на граничные условия модель также учитывает эффект вязкоупругости посредством влияния скорости деформации на оценку эффективного модуля упругости.

Далее исследуем локальное влияние дисперсии CNT в эпоксидных волокнисто-армированных стеклопластиках с помощью моделирования МКЭ, которое невозможно проанализировать путем аппроксимации эффективных свойств, как обсуждали ранее. Представительный объемный элемент (ПОЭ) слоистого композита с однонаправленными волокнами в направлении нагружения растяжением моделировали с помощью программного обеспечения COMSOL Multiphysics. Сначала ПОЭ моделировали без микротрещин. Затем в конечно-элементную модель, повторяющую теоретическую модель снижения жесткости, ввели микротрещины. Данные рис. 8 демонстрируют распределение продольного напряжения в ПОЭ слоистого композита без трещин (см. рис 8—*a*), с трещинами, возникшими при приложенном напряжении 70 МПа (см. рис. 8—*б*), и трещинами, перекрытыми CNT при том же напряжении (см. рис. 8—*в*). Данные рис. 9 иллюстрируют концентрацию продольного напряжения в силу трещины матрицы на поверхности раздела волокно—матрица (см.

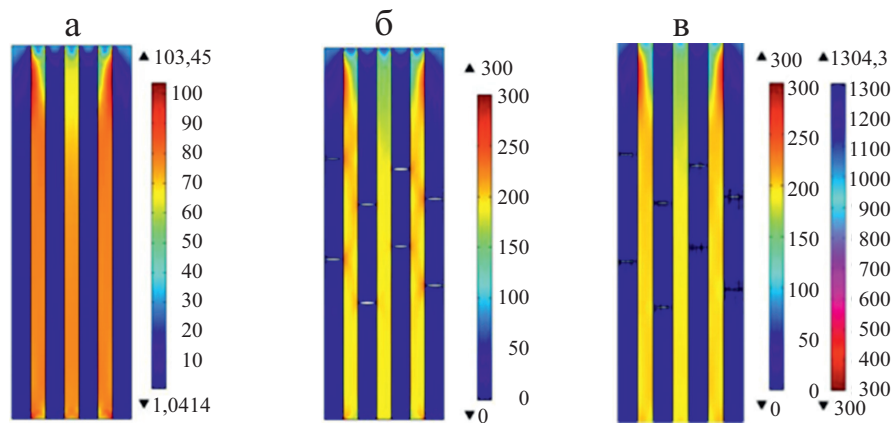


Рис. 8. Распределение продольного напряжения в стеклопластике без трещин (а); с трещинами, возникшими при растягивающей нагрузке 70 МПа в матрице без CNT (б) и наполненной CNT (в).

рис. 9—а) и снижение этой концентрации напряжения при перекрытии трещины CNT (см. рис. 9—б).

Математическая модель и моделирование МКЭ показали, что эффективный модуль упругости ортогонально армированных композитов, подверженных растягивающей нагрузке, снижается по мере увеличения плотности трещин в матрице. На основе микрофотографий СЭМ, свидетельствующих о перекрытии трещин в матрице CNT, в конечно-элементную модель ввели CNT в области трещин в матрице. Это изменило

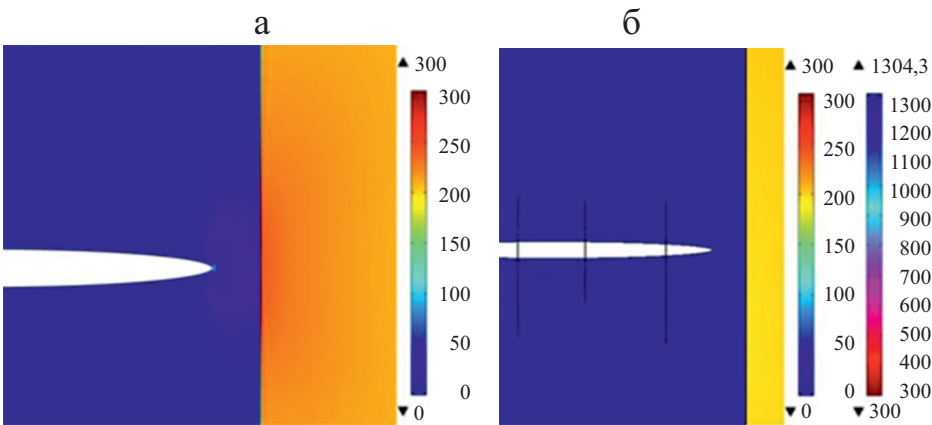


Рис. 9. Распределение продольного напряжения: концентрация напряжения в силу трещины в матрице на поверхности раздела волокно—матрица (а) и уменьшение концентрации при образовании эффекта перекрытия трещины CNT (б).

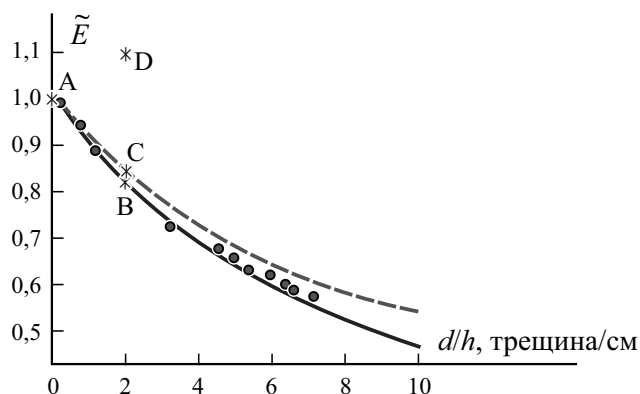


Рис. 10. Зависимость нормированного модуля Юнга  $\tilde{E}$  от плотности трещин  $d/h$ : модифицированная модель (—); модель Дворака (---)[34]; экспериментальные данные (●) [35]; A — без трещин; B — трещины при нагрузке 70 МПа в эпоксидной матрице без CNT; C — трещины при нагрузке 70 МПа в эпоксидной матрице, наполненной CNT; D — трещины в эпоксидной матрице слоистого стеклопластика с CNT.

пути передачи нагрузки в композите, поскольку часть нагрузки в начале образования трещин в матрице воспринимают CNT. Эффект перекрытия трещин за счет CNT уменьшает деградацию модуля упругости слоистого композита, обусловленную плотностью трещин, и увеличивает эффективный модуль при тех же граничных условиях. Эффективную жесткость ПОЭ нормировали с учетом расчета МКЭ по модели без трещин. Изменение нормированного модуля Юнга в зависимости от плотности трещин показано на рис. 10. Полученные результаты МКЭ подтверждают значительное повышение жесткости слоистого композита благодаря эффекту перекрытия трещин посредством CNT.

С учетом результатов, полученных с помощью математической модели, моделирования МКЭ и экспериментальных данных, можно заключить, что первая мода инициирования повреждения в слоистых стеклопластиках, наполненных CNT и подверженных растягивающей нагрузке, — образование трещин в матрице. Наличие CNT в эпоксидной матрице ограничивает рост трещин матрицы и увеличивает эффективный модуль и прочность слоистого композита по сравнению с таковыми композита без CNT. Предложенная в настоящей работе математическая модель успешно подтверждает экспериментальные результаты.

### Заключение

Оптимизированный метод обработки обеспечивает эффективное диспергирование MWCNT в эпоксидном связующем для создания электро-

проводящего и прочного композита. Метод продемонстрировал значительное повышение модуля упругости и прочности слоистого стеклопластика благодаря полному удалению пористости, остаточных напряжений, равномерному распределению MWCNT в матрице и прочной поверхности раздела арматура—матрица. Этанол способствует распутыванию CNT и уменьшает вязкость эпоксидной матрицы. Использование этанола при сдвиговом перемешивании с ультразвуком способствует равномерному диспергированию MWCNT в эпоксидной смоле. Это создает надежную поверхность раздела между ними без каких-либо нежелательных продуктов реакции. Термическое доотверждение также способствует релаксации остаточных напряжений.

Добавление 0,1% по массе MWCNT в эпоксидную матрицу повысило прочность нанокомпозита и слоистого стеклопластика при растяжении на ~ 22%. Фрактографические исследования показали выдергивание CNT и искривление трещин вблизи CNT, подтверждая активированные механизмы перекрытия и искривления микротрещин в композите в силу равномерного распределения и прочной поверхности раздела между CNT и эпоксидной матрицей. Искривление траекторий трещин и их перекрытие CNT свидетельствует об увеличении пути разрушения, тем самым повышая прочность нано- и слоистых композитов. Теоретическая модель, обсуждаемая в настоящей работе, предсказывает жесткость слоистых стеклопластиков в зависимости от плотности трещин в матрице. Показано, что количество трещин, образующихся в матрице, возрастает с увеличением нагрузки. При этом жесткость слоистого композита уменьшается с увеличением плотности трещин в матрице. Анализ МКЭ обеспечивает взаимосвязь и обоснование повышенной прочности слоистого композита GFRP—MWCNT под действием приложенных нагрузок. Теоретическая модель хорошо согласуется с экспериментальными результатами и показывает, что CNT перекрывают микротрещины в матрице, способствуя повышению прочности композита.

*Благодарность.* Авторы благодарны за финансовую поддержку в рамках программы ACECOST Phase-III Совета по исследованиям и разработкам в области аэронавтики (AR&DB), DRDO (Индия) проведения настоящего исследования в центре ACECOST при Департаменте аэрокосмической техники, IISc, а также благодарны MNCF CeNSE, IISc за проведение исследований на СЭМ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kim P., Shi L., Majumdar A., and McEuen P. L. Thermal transport measurements of individual multiwalled nanotubes // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 87. — P. 215502.
2. Thostenson E. T. and Chou T. W. On the elastic properties of carbon nanotube-based composites: modeling and characterization // J. Phys. D. Appl. Phys. — 2003. — Vol. 36, No. 5. — P. 573—582.

3. Yu M. F., Lourie O., Dyer M. J., Moloni K., Kelly T. F., and Ruoff R. S. Strength and breaking mechanism of multi-walled carbon nanotubes under tensile load // Science. — 2000. — Vol. 287, No. 5453. — P. 637—640.
4. Yu M. F., Files B. S., Arepalli S., and Ruoff R. S. Tensile loading of ropes of single-wall carbon nanotubes and their mechanical properties // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 84, No. 24. — P. 5552—5555.
5. Lee S. E., Cho S., and Lee Y. S. Mechanical and thermal properties of MWCNT-reinforced epoxy nano-composites by vacuum-assisted resin transfer molding // Carbon Lett. — 2014. — Vol. 15, No. 1. — P. 32—37.
6. Kancherla K. B., Subbappa D. B., Hiremath S. R., Raju B., and Mahapatra D. R. Enhancing mechanical properties of glass fabric composite with surfactant treated zirconia nanoparticles // Composites: Part A. — 2019. — Vol. 118. — P. 131—141.
7. Zhou Y., Wu P. X., Cheng Z. Y., Ingram J. and Jeelani S. Improvement in electrical, thermal and mechanical properties of epoxy by filling carbon nanotube // Express Polym. Lett. — 2008. — Vol. 2, No. 1. — P. 40—48.
8. Rao P. Subba, Renji K., Bhat M. R., Mahapatra D. R., and Naik G. N. Mechanical properties of CNT-Bisphenol e cyanate ester-based CFRP nano-composite developed through VARTM process // J. Reinf. Plast. Compos. — 2015. — Vol. 34, No. 12. — P. 1000—1014.
9. Ahmadi S. Amir, Ghasemi A. R., and Mohammadi M. Evaluation of thermal residual stresses of thin-walled laminated composite pipes to characterize the effects of mandrel materials and addition MWCNTs // Mech. Mater. — 2019. — Vol. 136. — P. 103083.
10. Bilisik K., Karaduman N. S., and Sapanci E. Tensile properties of nanopreg/nanostitched 3D carbon/epoxy MWCNTs composites // Mech. Mater. — 2019. — Vol. 128. — P. 11—23.
11. Kazakov I. A., Krasnovskii A. N., and Kishuk P. S. The influence of randomly oriented CNTs on the elastic properties of unidirectionally aligned composites // Mech. Mater. — 2019. — Vol. 134. — P. 54—60.
12. Krasnovskii A. N., Kazakov I. A., and Kishchuk P. S. Mechanical properties of glass fiber reinforced plastics modified with carbon nanotubes // Glass Ceram. — 2019. — Vol. 76. — P. 167—17.
13. Mahmoodi M. J., Rajabi Y., and Khodaiepour B. Electro-thermo-mechanical responses of laminated smart nano-composite moderately thick plates containing carbon nanotube. — A multi-scale modeling // Mech. Mater. — 2020. — Vol. 141, No. 7. — P. 103247.
14. Nor A. F. M., Sultan M. T. H., Shah A. U. M., Azmi A. M. R., and Ismail K. I. Carbon nanotubes (CNTs) as nanofillers in bamboo/glass hybrid composites and their effect on tensile, flexural and impact properties // AIP Conf. Proc. — 2018. — Vol. 2030. — P. 020171.
15. Sarafrazi M., Hamadani M., and Ghasemi A. R. Optimize epoxy matrix with RSM/CCD method and influence of multi-wall carbon nanotube on mechanical properties of epoxy/polyurethane // Mech. Mater. — 2019. — Vol. 138. — P. 103154.
16. Wang H., Yang L., Guo H., Zhao Y., and Zhao J. Mechanical and thermodynamic properties of unidirectional flax fiber reinforced cnt modified epoxy composites // Fibers Polym. — 2019. — Vol. 20. — P. 1266—1276.
17. Haghbin A., Liaghat G., Hadavinia H., Arabi A. M., and Pol M. H. Enhancement of the electrical conductivity and interlaminar shear strength of CNT/GFRP hierarchical composite using an electrophoretic deposition technique // Mater. — 2017. — Vol. 10, No. 10. — P. 1120.

18. Li N., Wang G. Dong, Melly S. K., Peng T., Li Y. C., Zhao Q. D., and de Ji S. Interlaminar properties of GFRP laminates toughened by CNTs buckypaper interlayer // *Compos. Struct.* — 2019. — Vol. 208, No. 36. — P. 13—22.
19. Shin P. S., Kwon D. J., Kim J. H., Lee S. I., DeVries K. L., and Park J. M. Interfacial properties and water resistance of epoxy and CNT-epoxy adhesives on GFRP composites // *Compos. Sci. Technol.* — 2017. — Vol. 142. — P. 98—106.
20. Bai J. B. and Allaoui A. Effect of the length and the aggregate size of MWNTs on the improved efficiency of the mechanical and electrical properties of nanocomposites- Experimental investigation // *Composites: Part A.* — 2003. — Vol. 34, No. 8. — P. 689—694.
21. Du J. H., Bai J. and Cheng H. M. The present status and key problems of carbon nanotube-based polymer composites // *Express Polym. Lett.* — 2007. — Vol. 1, No. 5. — P. 253—273.
22. Ma P. C., Mo S. Y., Tang B. Z., and Kim J. K. Dispersion, interfacial interaction and re-agglomeration of functionalized carbon nanotubes in epoxy composites // *Carbon.* — 2010. — Vol. 48, No. 6. — P. 1824—1834.
23. Esbati A. H. and Irani S. Effect of functionalized process and CNTs aggregation on fracture mechanism and mechanical properties of polymer nano-composite // *Mech. Mater.* — 2018. — Vol. 118. — P. 106—119.
24. Jin F. L. and Park S. J. Recent advances in carbon-nanotube-based epoxy composites // *Carbon Lett.* — 2013. — Vol. 14, No. 1. — P. 1—13.
25. Pan Y., Weng G. J., Meguid S. A., Bao W. S., Zhu Z. H., and Hamouda A. M. S. Interface effects on the viscoelastic characteristics of carbon nanotube-polymer matrix composites // *Mech. Mater.* — 2013. — Vol. 58. — P. 1—11.
26. Yang K., Gu M., Guo Y., Pan X., and Mu G. Effects of carbon nanotube functionalization on the mechanical and thermal properties of epoxy composites // *Carbon.* — 2009. — Vol. 47, No. 7. — P. 1723—1737.
27. Wang C. M., Zhang Y. Y., Xiang Y., and Reddy J. N. Recent studies on buckling of carbon nanotubes // *Appl. Mech. Rev.* — 2010. — Vol. 63, No. 3. — P. 030804.
28. Raju B., Hiremath S. R., and Mahapatra D. R. A review of micromechanics based models for effective elastic properties of reinforced polymer matrix composites // *Compos. Struct.* — 2018. — Vol. 204. — P. 607—619.
29. Ghasemi A. R., Mohammadi M. M., and Mohandes M. The role of carbon nanofibers on thermo-mechanical properties of polymer matrix composites and their effect on reduction of residual stresses // *Composites: Part B.* — 2015. — Vol. 77. — P. 519—527.
30. Ghasemi A. R. and Fesharaki M. M. Effect of carbon nanotube on the cured shape of cross-ply polymer matrix nano-composite laminates: analytical and experimental study // *Iran. Polym. J.* — 2018. — Vol. 27, No. 12. — P. 965—977.
31. Ghasemi A. R., Fesharak M. M., and Mohandes M. Three-phase micromechanical analysis of residual stresses in reinforced fiber by carbon nanotubes // *J. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 17, No. 12. — P. 1783—1794.
32. Kharissova O. V., Kharisov B. I., and de C. Ortiz E. G. Dispersion of carbon nanotubes in water and non-aqueous solvents // *RSC Adv.* — 2013. — Vol. 3. — P. 24812—24852.
33. Tajammul H. M., Gouda P. S. S., Siddhalingeswar I. G., and Kodancha K. G. Effect of alcoholic treated MWCNT on tensile behavior of epoxy composite // *Int. J. Eng. Sci. Technol.* — 2016. — Vol. 8, No. 1. — P. 57—63.

34. *Laws N. and Dvorak G. J.* Progressive transverse cracking in composite laminates // *J. Compos. Mater.* — 1988. — Vol. 22, No. 10. — P. 900—916.

35. *Wang A. S. D.* Fracture mechanics of sub laminate cracks in composite laminates // *Compos. Technol. Rev.* — 1984. — Vol. 6. — P. 45—62.

Поступила в редакцию 07.05.2021

Окончательный вариант поступил 12.01.2022

Received May 7, 2021 (Jan. 12, 2022)

---

---

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Гриняев Ю. В., Чертова Н. В., Шилько Е. В.</i> Лагранжев формализм для анализа акустических свойств двухфазных композитных материалов с дефектными межфазными границами . . . . .	649
<i>Соловьёв А. Н., До Тхань Бинь, Чебаненко В. А., Паринов И. А.</i> Изгибные колебания композитного пьезоактивного биморфа в переменном магнитном поле: прикладная теория и конечно-элементное моделирование . . . . .	675
<i>Акбаров С. Д., Анвар М. Й., Кутюг З.</i> Трёхмерная неосесимметричная локальная потеря устойчивости полого цилиндра из анизотропного вязкоупругого материала . . . . .	691
<i>Турбин Н. В., Трифионов Р. Д., Ковтунов С. С.</i> Моделирование смятия композитного материала методами вычислительной микромеханики . . . . .	715
<i>Паймушин В. Н., Газизуллин Р. К., Холмогоров С. А., Шишов М. А.</i> Механика деформирования тест-образцов из слоистых волокнистых композитов со структурой $[\pm 45^\circ]$ при испытаниях на растяжение и сжатие. 2. Исследование плоских внутренних форм потери устойчивости . . . . .	735
<i>Стрижиус В. Е.</i> Прогнозирование деградации остаточной прочности при циклическом нагружении слоистых композитов . . . . .	757
<i>Проценко А. Е., Петров В. В.</i> Рециклинг стеклоармирующих наполнителей из полимерных композитов на основе эпоксивинилэфирного связующего . . . . .	771
<i>Чен Ч. Ш., Ван Х., Као Цз. И., Чен В. Р.</i> Исследование неустойчивости параметрических колебаний композитных пластин при произвольных пульсирующих нагрузках на основе теорий пластин высокого порядка . . . . .	783
<i>Нгуен Н. Т., Нгуен Т. К., Ду Д. Х., Нгуен Д. Н.</i> Конечно-элементный анализ железобетонных балок, упрочнённых U-образными обмотками волокнисто-армированного углепластика . . . . .	813
<i>Гупта Н., Хиремат С. Р., Маханатра Д. Р.</i> Влияние перекрытия микротрещин на свойства эпоксидных композитов с углеродными нанотрубками при растяжении и сжатии . . . . .	835



---

## CONTENTS

<i>Grinyaev Y. V., Chertova N. V., and Shilko E. V.</i> Lagrangian formalism for the analysis of acoustic properties of two-phase composite materials with damaged interfaces . . . . .	649
<i>Soloviev A. N., Do B. T., Chebanenko V. A., and Parinov I. A.</i> Flexural vibrations of a composite piezoactive bimorph in an alternating magnetic field: applied theory and finite-element simulation . . . . .	675
<i>Akbarov S. D., Anwar M. Y., and Kutlig Z.</i> 3D nonaxisymmetric local stability loss of a hollow cylinder made of an anisotropic viscoelastic material . . . . .	691
<i>Turbin N. V., Trifonov R. D., and Kovtunov S. S.</i> Simulation of crumpling in composite materials via computational micromechanics . . . . .	715
<i>Paimushin V. N., Gazizullin R. K., Kholmogorov S. A., and Shishov M. A.</i> Deformation mechanics of fiber-reinforced plastic specimens with a $[\pm 45^\circ]$ lay-up in tensile and compression tests. 2. Investigation of flat internal buckling modes . . . . .	735
<i>V. Strizhius</i> Predicting the degradation of the residual strength in cyclic loading of layered composites . . . . .	757
<i>Protsenko A. E. and Petrov V. V.</i> Recycling of fiberglass fillers obtained from polymer composites based on an epoxy vinyl ester binder . . . . .	771
<i>Chen C. S., Wang H., Kao J. Y., and Chen W. R.</i> Investigating the instability of parametric vibrations of composite plates under arbitrary pulsating loads based on high-order plate theories . . . . .	783
<i>Nguyen N. T., Nguyen T. K., Du D. H., and Nguyen D. N.</i> Finite-element analysis of RC beams strengthened with CFRP U-wraps . . . . .	813
<i>Gupta N., Hiremath S. R., and Mahapatra D. R.</i> Micro-crack bridging effects on the tensile and compressive strengths of CNT-epoxy composites . . . . .	835

---



# ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

## Список некоторых планируемых конференций (Композиты и перспективные материалы)

2022—2025

### **RECOMP 2022**

#### **Reuse and Recycling of Composites**

November 23-24, 2022, AMRC, Rotherham, UK

<https://compositesuk.co.uk/events/recomp-reuse-and-recycling-composites>

### **DRMS2023**

#### **The First International Conference on Durability, Repair and Maintenance of Structures**

March 16-17, 2023, University of Porto (FEUP), Porto, Portugal

<https://web.fe.up.pt/~drms2023/>

### **Modern Materials and Manufacturing 2023**

April 25-27, Tallinn, Estonia

<https://taltech.ee/en/mmm2021>

### **ICFC9**

#### **The ninth International Conference on Fatigue of Composites**

June 21-23, 2023, University of Padova, Vicenza, Italy

<http://static.gest.unipd.it/icfc9/>

#### **The 14-th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes**

June 25-29, 2023, AGH University of Science and Technology, Krakow, Poland

<http://numiform2023.agh.edu.pl/>

### **SMART 2023**

#### **10th ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials**

July 3-6, 2023, University of Patras, Patras, Greece

<https://www.smart2023.eu/index.php>

### **ICEM20**

#### **20th International Conference on Experimental Mechanics**

July 2-7, 2023, FEUP - Faculty of Engineering, University of Porto, Portugal

<https://paginas.fe.up.pt/~icem20/>

### **AB2023**

#### **7th International Conference on Structural Adhesive Bonding**

July 13-14, 2023, University of Porto (FEUP), Porto, Portugal

<https://web.fe.up.pt/~ab2023/>

### **CICE 2023**

#### **11th International Conference on Fiber-Reinforced Polymer (FRP) Composites in Civil Engineering**

July 23-26, 2023, Rio de Janeiro, Brazil

<https://cice2023.org/>

---

## **ICCM-23**

### **International Conference on Composite Materials**

July 30 - August 4, 2023, Belfast, Ireland

<https://iccm23.org/about-the-conference/>

## **11th ECNP International Conference on Nanostructured Polymers and Nanocomposites**

August 29-31, 2023, Lodz, Poland

<http://ecnp2020.p.lodz.pl/>

## **5th Polish Congress of Mechanics**

### **25th International Conference on Computer Methods in Mechanics**

September 4-7, 2023, Gliwice, Poland

<https://pcm-cmm.com/>

## **COMPOSITES 2023**

### **9th ECCOMAS Thematic Conference on the Mechanical Response of Composites**

September 12-14, 2023, Trapani, Sicily, Italy

[https://composites2023.cimne.com/welcome\\_to\\_trapani](https://composites2023.cimne.com/welcome_to_trapani)

## **ICPIC 2023**

### **International Congress of Polymers in Concrete**

September 17-20, 2023, Warsaw University of Technology, Poland

<https://icpic2022.org/organizers/>

## **9th International Conference on Fracture of Polymers, Composites and Adhesives**

September 17-21, 2023, Eurotel Victoria, Les Diablerets, Switzerland

<https://www.elsevier.com/events/conferences/esistc4conference>

## **IUTAM Symposium Creep in Structures**

September 18-22, 2023, Magdeburg, Germany

<http://www.iutam-symposium.ovgu.de>

## **VBE2023**

### **The First International Conference on Vehicle Body Engineering**

November 2-3, 2023, University of Porto (FEUP), Porto, Portugal

<https://web.fe.up.pt/~vbe2023/>

## **MDA 2024**

### **5th International Conference on Materials Design and Applications**

July 4-5, 2024, University of Porto (FEUP), Porto, Portugal

<https://web.fe.up.pt/~mda2024/>

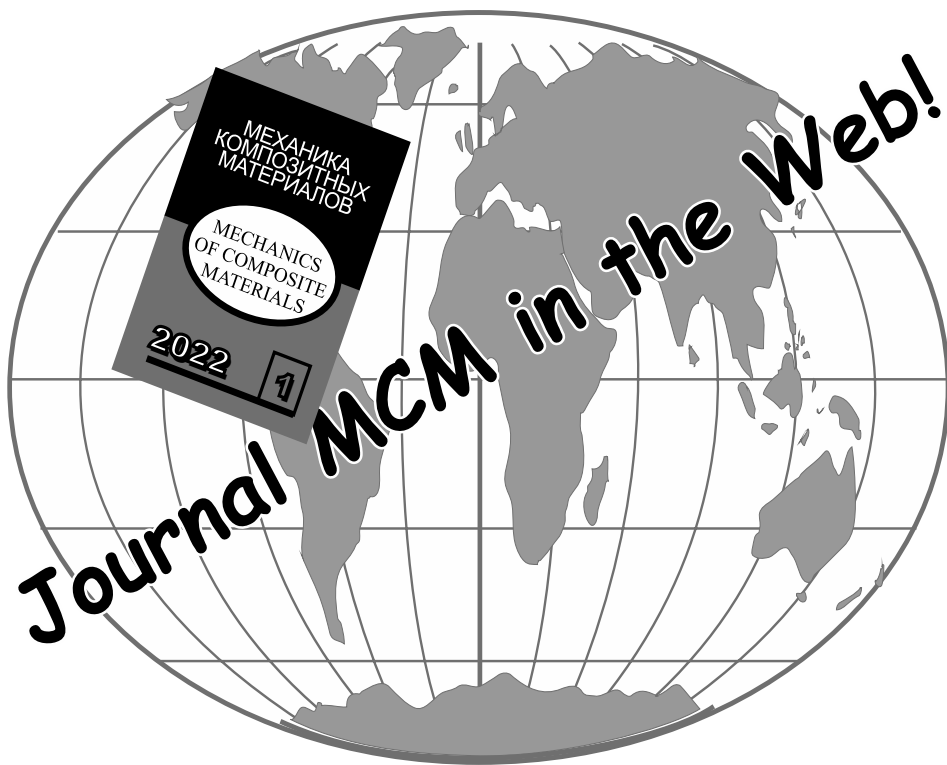
## **ICCM24**

### **The 24th International Conference on Composite Materials**

August 9-15, 2025, Baltimore, Maryland, U.S.A

<http://iccm24.com/>

---



Адрес редакции:

ул. Айзкрауклес, 23, Рига, LV-1006 Латвия  
<https://www.apgads.lu.lv/journals/mkm/>  
e-mail: [mcm@pmi.lv](mailto:mcm@pmi.lv), [tatjana.gubina@pmi.lv](mailto:tatjana.gubina@pmi.lv)

Address:

23 Aizkraukles St., Riga, LV-1006 Latvia  
<https://www.apgads.lu.lv/en/journals/mkm/>  
e-mail: [mcm@pmi.lv](mailto:mcm@pmi.lv), [tatjana.gubina@pmi.lv](mailto:tatjana.gubina@pmi.lv)

Редактор *Т. В. Губина*

Редактор английского текста *А. Лагздиньш*

Перевод для издания журнала на английском языке *В. Кулакова, А. Лагздиньша*

Компьютерная верстка *А. В. Пумпурс*

Корректор *С. А. Видинеев*

Отпечатано в типографии SIA “Eiro Print”, ул. Апес, 5А – 89, Рига, LV-1039 Латвия