

*Ф. Аббаспур, Х. Арвин**

Faculty of Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran

**АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТЫХ
МИКРОПЛАСТИН С ПЛАСТИНКАМИ ГРАФЕНА
И ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ЛИЦЕВЫМИ СЛОЯМИ,
ПОКОЯЩИХСЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ
И ПОДВЕРЖЕННЫХ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ НАГРУЗКАМ¹**

*F. Abbaspour and H. Arvin**

**A FREE VIBRATION ANALYSIS OF LAMINATED MICROPLATES
REINFORCED BY GRAPHENE PLATELETS INTEGRATED
WITH PIEZOELECTRIC FACESHEETS, RESTING ON AN ELASTIC
FOUNDATION, AND SUBJECTED TO THERMOELECTRICAL LOADS**

Keywords: free vibrations, graphene, Ritz technique, scale factor, sandwich composite microstructures.

Microelectromechanical systems (MEMS) have attracted researchers' attention due to their various applications. Microplates with piezoelectric face sheets are the impending choice for MEMS. Hence, in this paper, an analysis of free vibrations of such microplates reinforced with graphene platelets resting on an elastic foundation and subjected to an external voltage in a thermal ambient is performed. The first-order shear deformation theory and a modified couple stress theory are employed to derive their kinetic and strain energies. The thermomechanical features of the core layer, reinforced with graphene platelets, are determined using the Halpin—Tsai micromechanical model. The Ritz technique is used to find the associated natural frequencies for different boundary conditions. The impact of geometry of graphene platelets, their weight fraction, temperature increment, external voltage, and boundary conditions on the outcomes are examined. The results obtained showed that decrement of the fundamental natural frequency of the microplates depend on the increment of temperature.

*Автор, с которым следует вести переписку: hadi.arvin@sku.ac.ir
Corresponding author: hadi.arvin@sku.ac.ir

¹Перевод с англ.

Ключевые слова: колебания свободные, графен, метод Ритца, фактор масштабный, микроструктуры сандвич-композита

Выполнен анализ свободных колебаний микропластин, армированных пластинками графена, опирающихся на упругое основание и подверженных электрическому напряжению в условиях термической окружающей среды. Для вычисления их кинетической энергии и энергии деформирования использовали теорию сдвигового деформирования первого порядка и модифицированную теорию моментных напряжений. Термомеханические характеристики слоя сердцевины, армированного пластинками графена, определены с помощью микромеханической модели Халпина—Цая. Для нахождения соответствующих собственных частот при разных граничных условиях использовали метод Ритца. Исследовано влияние геометрии пластинок графена, их массового содержания, приращения температуры, электрического напряжения и граничных условий на характеристики свободных колебаний. Полученные результаты показали, что декремент основной собственной частоты микропластин зависит от приращения температуры.

Введение

Микросхемы проекционных дисплеев, головки дисководов компьютеров, оптические переключатели, головки струйных принтеров, датчики тонометров, микроклапаны, биосенсоры и акселерометры для датчиков подушек безопасности — это лишь некоторые примеры применения микроэлектромеханических систем (МЭМС). Цель настоящей работы — разработка метода расчета и анализ свободных колебаний пьезоэлектрических микропластин, армированных графеновыми пластинками (GPL) и подвергнутых электрическому напряжению.

Некоторые исследователи изучали влияние армирования на механический отклик макросандвич-конструкций с пьезолистами. В [1], используя теорию сдвигового деформирования первого порядка, разработали математическую модель для исследования свободных колебаний пластин, армированных углеродными нанотрубками (УНТ), с двумя пьезоэлектрическими лицевыми слоями и установили, что в замкнутом контуре пластина всегда жестче, чем в условиях открытого контура и поэтому имеет более высокую основную собственную частоту.

Многочисленные исследования посвящены механическому анализу композитных макроструктур. В [2] проанализировали амплитуду потери устойчивости и закритическое поведение пластин из полимерного композита при механических нагрузках и оценили влияние армирующих волокон на полученные результаты. В [3] использовали метод возмущения для изучения расслоения при потере устойчивости слоистых пластин, подвергнутых двухосному нагружению. Критическую силу потери устойчивости опре-

делили с учетом начальных несовершенств. В [4] исследовали расслоение вязкоупругих композитных пластин с трещинами при потере устойчивости. Потерю устойчивости и закритическое поведение пластин с пластинками графена изучали в [5] и показали важность распределения пластинок графена для предсказываемых численных результатов. В [6] исследовали расслоение при потере устойчивости ортотропных толстых пластин, подверженных сжимающей нагрузке. В [7] выполнили анализ колебаний и устойчивости пористых пластин, армированных пластинками графена и подверженных аэродинамическим нагрузкам. Установили, что пластины с А-картиной распределения пластинок графена более устойчивы, чем с другими типами распределения. В [8] изучали расслоение пьезоэлектрических сэндвич-пластин с краевыми трещинами при потере устойчивости. В [9] исследовали потерю устойчивости функционально-градиентных пластин при нагрузке, линейно изменяющейся в плоскости.

Некоторые исследователи рассматривали размерную зависимость микроструктур. В [10] для моделирования изотропной микропластины использовали теорию пластин Миндлина и модифицированную теорию моментных напряжений (МТМН). Оценили влияние масштабного параметра длины материала на собственную частоту микропластины. Для изучения влияния пьезоэлектрических слоев на механические свойства микропластин в [11] в рамках допущений МТМН разработали определяющие уравнения шарнирно опертых микропластин с изотропной сердцевинной и пьезоэлектрическими лицевыми слоями. Установили, что положительное электрическое напряжение уменьшает механические и термические критические нагрузки потери устойчивости. В [12] посредством МТМН исследовали свободные колебания микропластин из функционально-градиентного материала с двумя интегрированными пьезоэлектрическими слоями. В [13] использовали согласованную теорию моментных напряжений для изучения свободных и вынужденных колебаний и термической потери устойчивости тонких симметричных шарнирно опертых микропластин. В [14] для изучения динамики микропластины использовали метод Навье. В [15] для исследования осевых вынужденных колебаний стержней, подверженных разным видам гармонических и негармонических нагрузок, применили теорию нелокального градиента деформации. Установили, что нелокальная постоянная уменьшает собственные частоты.

Несколько работ посвящены пьезоэлектрическим микропластинам с пластинками графена. Рассматривали тонкие микропластины с ограниченным отношением толщины к длине при граничных условиях шарнирного опирания. В [16, 17] свободные и вынужденные колебания и термомеханическую потерю устойчивости шарнирно опертых тонких микропластин, армированных пластинками графена, исследовали используя теорию пластин Кирхгофа и МТМН. Термомеханические свойства слоя сердцевинны определяли с помощью микромеханической модели Халпина—Цая.

Согласно данным опубликованной литературы, анализ свободных колебаний пьезоэлектрических микропластин с пластинками графена, имеющих большой потенциал для применения в качестве датчиков и других

МЭМС, не проводили с учетом общих граничных условий. В настоящей работе пьезоэлектрические микропластины, армированные пластинками графена, проектировали согласно теории сдвигового деформирования первого порядка и МТМН. Термомеханические свойства слоев, армированных пластинками графена, определяли на основе микромеханической модели Халпина—Цая. На микропластину воздействуют равномерное приращение температуры и постоянное электрическое поле. Для определения собственных частот микропластин с разными граничными условиями использовали метод Ритца для решения определяющих уравнений в слабой форме. Исследовали влияние свойств пластинок графена, электрического напряжения и увеличения температуры на характеристики колебаний микропластин.

1. Механическое и математическое моделирование

Схематическое изображение микропластины, армированной пластинками графена и соединенной с двумя пьезоэлектрическими слоями, подверженными одинаковому электрическому напряжению V , и опирающейся на основание Винклера—Пастернака, показана на рис. 1. Прямоугольная система координат O, x, y, z расположена в срединной плоскости слоя сердцевины, ось y не видна; длина микропластины по осям x и y равна a и b (не показаны), толщина по оси z равна h ; толщина верхнего и нижнего лицевых слоев h_3 и h_1 соответственно, толщина слоя сердцевины h_2 .

Согласно теории сдвигового деформирования первого порядка перемещения материальной частицы в направлениях x, y, z в момент времени t в местоположении (x, y, z) равны [18])

$$u_1 = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y, t), \quad u_2 = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y, t), \quad u_3 = w(x, y), \quad (1)$$

где u_0 и v_0 — перемещения в плоскости частицы в местоположении $(x, y, 0)$ на срединной плоскости сердцевины в направлении осей x и y соответ-

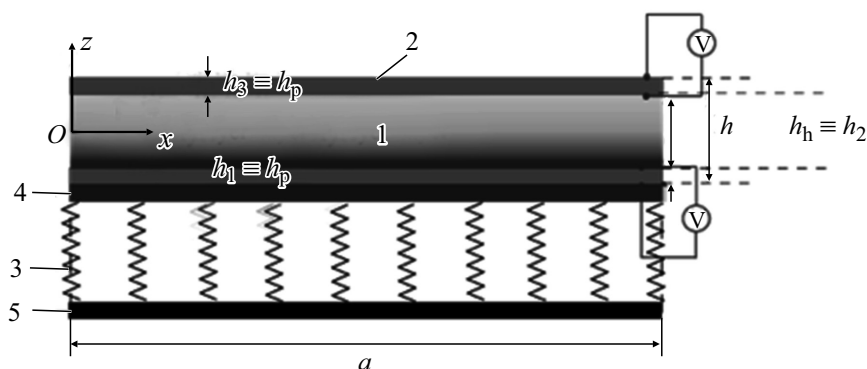


Рис. 1. Схема микропластины с сердцевиной (1), содержащей пластинки графена и склеенной с двумя пьезоэлектрическими лицевыми слоями (2), подверженными электрическому напряжению V , и покоящейся на основании Винклера (3)—Пастернака (4); 5 — жесткий слой.

ственно; w — поперечное перемещение частицы в направлении оси z ; φ_x и φ_y — повороты вокруг осей y и x соответственно.

Лагранжевы деформации в перемещениях имеют вид [18]

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 [u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}], \quad (2)$$

где запятая означает производную по переменной после запятой. При малых деформациях и умеренных поворотах к деформациям Лагранжа применим допущения фон Кармана относительно деформаций—перемещений [18]:

$$\{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}\} = \{\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \gamma_{xy}^0, \gamma_{yz}^0, \gamma_{xz}^0\} + z \{k_{xx}, k_{yy}, k_{xy}, k_{yz}, k_{xz}\}, \quad (3)$$

где ε_{xx} , ε_{yy} и γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{xz} — нормальные и сдвиговые деформации соответственно. Верхний индекс 0 означает мембранные деформации; k — кривизны. Соответствующие соотношения определим как

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial_x u_0 + 1/2(\partial_x w)^2 \\ \partial_y v_0 + 1/2(\partial_y w)^2 \\ \partial_y u_0 + \partial_x v_0 + \partial_x w \partial_y w \\ \varphi_y + \partial_y w \\ \varphi_x + \partial_x w \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \\ k_{yz} \\ k_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial_x \varphi_x \\ \partial_y \varphi_y \\ \partial_y \varphi_x + \partial_x \varphi_y \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

Уравнение состояния, связывающее тензор напряжений Коши при плоском напряженном состоянии с тензором деформаций для пьезоэлектрического материала, находящегося под действием электрического поля и градиента температуры ΔT , имеет вид [1, 11]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{32} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{e}_{24} & 0 \\ \bar{e}_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\alpha}_{11} \Delta T \\ \bar{\alpha}_{22} \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

где Q_{ij} и \bar{e}_{ij} — приведенные жесткости и приведенные пьезоэлектрические

постоянные; $\bar{\alpha}_{ii}$ — приведенные коэффициенты термического расширения, указанные в Приложении.

Уравнение состояния для тензора моментных напряжений в терминах ассоциированного тензора кривизны (тензор вращения) определим как [19]

$$m_{ij} = 2\mu l^2 \chi_{ij}, \quad (6)$$

где μ — модуль сдвига; l — масштабный параметр длины материала. Тензор кривизны запишем как [19]

$$\chi_{ij} = 1/2(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}), \quad (7)$$

где θ_i — вектор вращения, равный [19]

$$\theta_i = 1/2\varepsilon_{ijk}u_{k,j}, \quad (8)$$

ε_{ijk} — тензор перестановки. Компоненты тензора вращения найдем, подставив уравнения (1) в (8):

$$\begin{aligned} \theta_x &= 1/2(\partial_y w - \varphi_y), \theta_y = 1/2(\varphi_x - \partial_x w), \\ \theta_z &= 1/2\left[\partial_x v_0 - \partial_y u_0 + z(\partial_x \varphi_y - \partial_y \varphi_x)\right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Компоненты тензора кривизны найдем, подставив уравнение (9) в уравнение (7):

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= 1/2(\partial_{xy} w - \partial_x \varphi_y), \chi_{12} = \chi_{21} = 1/4(\partial_{yy} w - \partial_{xx} w - \partial_y \varphi_y + \partial_x \varphi_x), \\ \chi_{13} = \chi_{31} &= \left[\chi_{13}^0\right] + z\left\{\chi_{13}^1\right\} = \left[1/4(\partial_{xx} v_0 - \partial_{xy} u_0)\right] + z\left[1/4(\partial_{xx} \varphi_y - \partial_{xy} \varphi_x)\right], \\ \chi_{23} = \chi_{32} &= \left[\chi_{23}^0\right] + z\left\{\chi_{23}^1\right\} = \left[1/4(\partial_{xy} v_0 - \partial_{yy} u_0)\right] + z\left[1/4(\partial_{xy} \varphi_y - \partial_{yy} \varphi_x)\right], \\ \chi_{22} &= 1/2(-\partial_{xy} w + \partial_y \varphi_x). \quad \chi_{33} = 1/2(-\partial_y \varphi_x + \partial_y \varphi_x). \end{aligned} \quad (10)$$

Изменение запасенной энергии в пьезоэлектрической микропластине, занимающей объем в рамках МТМН, равно [1, 19]

$$\delta U = \int_{\forall} (\Gamma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + m_{ij} \delta \chi_{ij} - D_i \delta E_i) dV, \quad (11)$$

где D_i — вектор электрического смещения; E_i — вектор напряженности электрического поля. Электрические смещения выразим посредством компонент деформаций и напряженности электрического поля и изменения температуры ΔT [18, 20]:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{15} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{24} & 0 \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{p}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{p}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p}_3 \end{bmatrix} \Delta T, \end{aligned} \quad (12)$$

где \bar{k}_{ii} и \bar{p}_i — диэлектрические и пьезоэлектрические постоянные при плоском напряженном состоянии соответственно. Вектор напряженности электрического поля связан с электрическим потенциалом Φ как [1]

$$E_i = -\Phi_{,i}. \quad (13)$$

Для удовлетворения уравнений Максвелла рассмотрим простое гармоническое распределение электрического потенциала по толщине пьезоэлектрического слоя вдоль оси z [21]. Функции электрического потенциала для нижнего и верхнего пьезоэлектрических слоев, подверженных одинаковому электрическому напряжению, равны

$$\Phi_1(x, y, z) = \psi_1(z)\phi_1(x, y) + Vf_1(z), \quad (14)$$

$$\Phi_3(x, y, z) = \psi_3(z)\phi_3(x, y) + Vf_3(z), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1(z) &= -\cos\left[\pi\left(\frac{2z+h_2+h_1}{2h_1}\right)\right], \quad \psi_3(z) = -\cos\left[\pi\left(\frac{2z-h_2-h_3}{2h_3}\right)\right], \\ f_1(z) &= \frac{2z+h_2}{2h_1}, \quad f_3(z) = \frac{2z-h_2}{2h_3} \end{aligned}$$

распределения электрических потенциалов в направлении толщины; $\phi_1(x, y)$ и $\phi_3(x, y)$ — распределения электрического потенциала в плоскости на верхнем и нижнем лицевых слоях пьезоэлектрического элемента соответственно.

Подставив уравнения (3), (5)—(7) в (11), определим изменение энергии деформирования пьезоэлектрической микропластины:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_A \left(N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^0 + M_{xx} \delta k_{xx} + M_{xy} \delta k_{xy} + M_{yy} \delta k_{yy} + \right. \\ &\left. + Q_{yz} \delta \gamma_{yz}^0 + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^0 + Y_{xx} \delta \chi_{xx} + Y_{yy} \delta \chi_{yy} + Y_{zz} \delta \chi_{zz} + 2Y_{xy} \delta \chi_{xy} + \right. \end{aligned}$$

$$+2Y_{yz}\delta\chi_{yz}^0 + 2R_{yz}\delta\chi_{yz}^1 + 2Y_{xz}\delta\chi_{xz}^0 + 2R_{xz}\delta\chi_{xz}^1) dA - \\ \int_{\forall} (D_{1x}\delta E_{1x} + D_{1y}\delta E_{1y} + D_{1z}\delta E_{1z} + D_{3x}\delta E_{3x} + D_{3y}\delta E_{3y} + D_{3z}\delta E_{3z}) d\forall, \quad (16)$$

где N_{ij} и Q_{ij} — результирующие мембранные и сдвиговые силы; M_{ij} — результирующие моменты; Y_{ij} и R_{ij} — результирующие моменты высокого порядка, приведенные в Приложении.

На основе гипотезы Винклера—Пастернака изменение энергии, запасенной в линейно-упругом основании, имеет вид [22]

$$\delta U_f = \int_A (k_w w \delta w + k_f (\partial_x w) \delta (\partial_x w) + k_f (\partial_y w) \delta (\partial_y w)) dA, \quad (17)$$

где A — площадь микропластины в плоскости xy ; k_w и k_f — постоянные основания Винклера и Пастернака соответственно.

Изменение кинетической энергии микропластины запишем как [23]

$$\delta T = \int_{\forall} \left(\rho \sum_{i=1}^3 \dot{u}_i \delta \dot{u}_i \right) d\forall, \quad (18)$$

где ρ — массовая плотность; точка над переменной означает производную по времени. Подставив уравнение (1) в (18), определим изменение кинетической энергии.

Таким образом, принцип Гамильтона для временного интервала $[t_1, t_2]$, т.е. $\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U - \delta U_f) dt = 0$ [23], характеризует слабую форму определяющих уравнений.

2. Термомеханические свойства композитного слоя с пластинками графена

Общее объемное содержание пластинок графена V_{GPL}^* в слоистом композите связано с их общим массовым содержанием W_{GPL} следующим образом [5]:

$$V_{GPL}^* = \frac{W_{GPL}}{W_{GPL} + \left(\frac{\rho^{GPL}}{\rho^m} \right) (1 - W_{GPL})}, \quad (19)$$

где нижний GPL и верхний m индексы означают принадлежность к пластинкам графена и матрице соответственно.

Рассмотрим N_L -слойный композит, армированный пластинками графена. На рис. 2 показаны четыре картины распределения пластинок графена. Величину $V_{GPL}^{[k]}$ в k -м слое определяем следующим образом [5]:

$$U\text{-картина} — V_{GPL}^{[k]} = V_{GPL}^*, \quad (20)$$

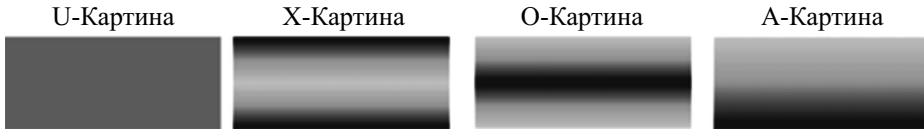


Рис. 2. U-, X-, O-, A-картины распределения пластинок графена.

$$\text{X-картина} \text{ — } V_{GPL}^{[k]} = 2V_{GPL}^* (|2k - N_L - 1| / N), \quad (21)$$

$$\text{O-картина} \text{ — } V_{GPL}^{[k]} = 2V_{GPL}^* (1 - |2k - N_L - 1| / N_L), \quad (22)$$

$$\text{A-картина} \text{ — } V_{GPL}^{[k]} = V_{GPL}^* (|2k - 1| / N_L). \quad (23)$$

Коэффициент Пуассона ν и коэффициент термического расширения α k -го слоя слоистого композита с пластинками графена определяем по правилу смесей [5]:

$$\nu^{[k]} = V_{GPL}^{[k]} \nu^{GPL} + V_m^{[k]} \nu^m, \quad (24)$$

$$\alpha^{[k]} = V_{GPL}^{[k]} \alpha^{GPL} + V_m^{[k]} \alpha^m, \quad (25)$$

где $V_m^{[k]}$ — объемное содержание матрицы в k -м слое слоистого композита с пластинками графена, связанное с объемным содержанием пластинок графена в k -м слое соотношением [5]

$$V_{GPL}^{[k]} + V_m^{[k]} = 1. \quad (26)$$

Модуль упругости k -го слоя слоистого композита с пластинками графена легко найти как [5]

$$E^{[k]} = 3/8 \frac{1 + \xi_L \eta_L V_{GPL}^{[k]}}{1 - \eta_L V_{GPL}^{[k]}} E_m + 5/8 \frac{1 + \xi_T \eta_T V_{GPL}^{[k]}}{1 - \eta_T V_{GPL}^{[k]}} E_m, \quad (27)$$

где η_L и η_T равны [5]

$$\eta_L = \frac{E_{GPL} / E_m - 1}{E_{GPL} / E_m + \xi_L}, \quad \eta_T = \frac{E_{GPL} / E_m - 1}{E_{GPL} / E_m + \xi_T}. \quad (28)$$

Величины ξ_L и ξ_T определяют геометрические свойства пластинок графена [5]:

$$\xi_L = 2 \frac{a_{GPL}}{t_{GPL}}, \quad \xi_T = 2 \frac{b_{GPL}}{t_{GPL}}. \quad (29)$$

Соответствующий модуль сдвига $G^{[k]}$, связанный с k -м слоем слоистого композита с пластинками графена, вычислим [5] как

$$G^{[k]} = \frac{E^{[k]}}{2(1+\nu^{[k]})}.$$

Проинтегрировав по толщине всех N_L слоев с пластинками графена и суммировав полученные соотношения, определим искомую величину.

3. Применение метода Ритца к слабой форме определяющих уравнений

Для анализа свободных колебаний используем метод Ритца. Функции, которые введем для оценки перемещений, должны удовлетворять граничным условиям [23]. Переменные перемещений дискретизируем во времени и пространстве [1]:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= R^u(x, y) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} U_{ij}(t) P_i(x) P_j(y), \\ v_0(x, y) &= R^v(x, y) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} V_{ij}(t) P_i(x) P_j(y), \\ w(x, y) &= R^w(x, y) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} W_{ij}(t) P_i(x) P_j(y), \\ \varphi_x(x, y) &= R^{\varphi_x}(x, y) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} X_{ij}(t) P_i(x) P_j(y), \\ \varphi_y(x, y) &= R^{\varphi_y}(x, y) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} Y_{ij}(t) P_i(x) P_j(y), \\ \phi_1(x, y) &= R^{\phi_1}(x, y) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \mathcal{K}_{1ij}(t) P_i(x) P_j(y), \\ \phi_3(x, y) &= R^{\phi_3}(x, y) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \mathcal{K}_{3ij}(t) P_i(x) P_j(y), \end{aligned} \quad (30)$$

где U_{ij} , V_{ij} , W_{ij} , X_{ij} , Y_{ij} , \mathcal{K}_{1ij} и \mathcal{K}_{3ij} — обобщенные координаты; P — ортогональные функции в количестве N_x и N_y в направлениях x и y соответственно. Здесь использованы полиномы Чебышева первого поряд-

ка. В рассматриваемом случае рекуррентная формула генерирует следующие полиномы [24]:

$$\begin{aligned}
 P_1(x) &= 1, \quad P_1(y) = 1, \quad P_2(x) = 2x/a, \quad P_2(y) = 2y/b, \\
 P_i(x) &= \frac{2x}{a} P_{i-1}(x) - P_{i-2}(x), \quad i = 3, \dots, N_x, \\
 P_j(y) &= \frac{2y}{b} P_{j-1}(y) - P_{j-2}(y), \quad j = 3, \dots, N_y,
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

R — функции, предлагаемые для аппроксимации перемещений, обеспечивают удовлетворение граничных условий. Общий вид функций для упомянутых пластин следующий [1]:

$$R^\alpha(x, y) = (1 + 2x/a)^p (1 - 2x/a)^q (1 + 2y/b)^r (1 - 2y/b)^s, \tag{32}$$

где параметры p, q, r, s , определяемые исходя из соответствующего граничного условия, могут быть равными нулю или единице. Подробности описаны в [1].

Подставив уравнение (30) в слабую форму определяющих уравнений и используя метод Рэлея—Ритца, запишем дискретизированные определяющие уравнения

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \mathcal{K} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{uk} \\ \mathbf{K}_{ku} & \mathbf{K}_{kk} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathcal{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где $\mathbf{U} = [U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, X_{ij}, Y_{ij}]^T$ и $\mathcal{K} = [\mathcal{K}_{1ij}, \mathcal{K}_{3ij}]^T$; $\mathbf{K}_{uu}, \mathbf{K}_{uk} = \mathbf{K}_{ku}^T$ и \mathbf{K}_{kk} — упругая, пьезоэлектрическая и диэлектрическая матрицы соответственно; \mathbf{M}_{uu} — матрица масс. Для краткости ни одну из перечисленных матриц не приводим в силу их громоздкости.

Если электрическое напряжение к лицевым слоям пьезоэлектрического элемента не приложено, то вектор обобщенных координат пьезоэлектрического элемента равен нулю, т.е. $\mathcal{K} = \mathbf{0}$ и, следовательно,

$$\mathbf{M}_{uu} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} = \mathbf{0}. \tag{34}$$

При решении соответствующей задачи на собственные значения находим собственные частоты и собственные векторы, которые можно подставить в уравнение (30) для определения соответствующей моды колебаний.

Если микропластина подвержена воздействию электрического напряжения, вектор обобщенных координат пьезоэлектрического элемента отличен от нуля и может быть определен из второй строки уравнения (33). Подставив его в первую строку уравнения (33), получим

$$\mathbf{M}_{uu} \ddot{\mathbf{U}} + \left(\mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{uk} \mathbf{K}_{kk}^{-1} \mathbf{K}_{ku} \right) \mathbf{U} = \mathbf{0}. \tag{35}$$

4. Результаты и обсуждение

4.1. Подтверждение правильности. Для проверки разработанной формулировки рассмотрим квадратную пластину с пластинками графена, склеенную с двумя пьезоэлектрическими лицевыми слоями [25]. Матрица слоя сердцевины изготовлена из меди с модулем упругости $E = 130$ ГПа, плотностью $\rho = 8960$ кг/м³ и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,34$. Характеристики графена: $E = 1010$ ГПа, $\rho = 1062,5$ кг/м³, $\nu = 0,186$. Лицевые слои изготовлены из пьезокерамики PZT-4 с электромеханическими постоянными $E = 81,3$ ГПа, $G_{12} = 30,6$ ГПа, $\rho = 7600$ кг/м³, $\nu = 0,33$, $e_{31} = e_{32} = -1,22 \cdot 10^{-10}$ К/м², $k_{11} = k_{22} = 1475\epsilon_0$ Ф/м, $k_{33} = 1300\epsilon_0$ Ф/м и $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{12}$ Ф/м. Размеры пластины с пластинками графена $a = b = 1$ м, $h_2 = 50$ мм, $h_1 = h_3 = 1$ мм, размеры пластинок графена: $a_{GPL} = 2,5$ мкм, $b_{GPL} = 1,5$ мкм, $t_{GPL} = 1,5$ нм. Значения основной собственной частоты для трех картин распределения при разном массовом содержании пластинок графена W_{GPL} приведены в табл. 1 [25]. Установлено хорошее согласование результатов настоящей работы с опубликованными в [25].

Вторую проверку выполнили для определения способности предложенного решения правильно оценить эффекты, зависящие от размера. Модель представляла собой квадратную микропластину из эпоксидной смолы [10] со следующими характеристиками материала: $E = 1,44$ ГПа, $\rho = 1220$ кг/м³, $\nu = 0,38$, $l = 17,6$ мкм. Значения первых трех собственных частот микропластины с размерами $a = b$ и $a/h = 10$ при $h/l = 1, 1,5, 2$ в сравнении с опубликованными в [10] представлены в табл. 2.

Для проверки результатов настоящей работы, полученных при разных граничных условиях (защемленные (C), шарнирно опертые (S) и свободные (F)),

Табл. 1

Значения основной собственной частоты (Гц) квадратной пластины с пластинками графена, склеенной с двумя пьезоэлектрическими лицевыми слоями

Картина	Источник	$W_{GPL}, \%$	
		0,5	1,0
U	Настоящая работа	211,199	233,778
	[25]	212,810	235,351
	Разность, %	0,76	0,67
X	Настоящая работа	226,171	259,917
	[25]	227,663	261,217
	Разность, %	0,66	0,50
A	Настоящая работа	211,307	230,580
	[25]	212,937	232,228
	Разность, %	0,76	0,71

Табл. 2

Значения первых трех собственных частот (МГц) квадратной микропластины

Мода	Источник	h/l		
		1	1,5	2
1-я	Настоящая работа	1,2414	0,6285	0,4035
	[10]	1,2431	0,6295	0,4042
	Разность, %	0,14	0,16	0,17
2-я	Настоящая работа	2,8941	1,4849	0,9573
	[10]	2,8989	1,4889	0,9603
	Разность, %	0,17	0,27	0,31
3-я	Настоящая работа	4,3742	2,2657	1,4644
	[10]	4,3947	2,2773	1,4720
	Разность, %	0,47	0,51	0,52

исследовали квадратную пластину из Ti-6Al-4V с пьезоэлектрическими лицевыми слоями G1195-N в замкнутой цепи. Геометрические параметры пластины: $a = 0,4$ м, $h_2 = 5$ мм, $h_1 = h_3 = 0,1$ мм [1]. Свойства материала сердцевины: $E = 105,7$ ГПа, $\nu = 0,298$, $\rho = 4429$ кг/м³. Характеристики материала пьезоэлектрических лицевых слоев: $E = 63$ ГПа, $\nu = 0,3$, $\rho = 7600$ кг/м³, $e_{31} = e_{32} = 22,86$ К/м², $e_{15} = e_{24} = 0$, $k_{11} = k_{22} = 0$, $k_{33} = 1,5 \cdot 10^{-8}$ Ф/м. Значения первых трех собственных частот, представленные в табл. 3, свидетельствуют об отличном согласовании с результатами [1].

4.2. Рассмотренный случай. После проверки разработанной формулировки, включая представленное решение, провели всестороннее исследование

Табл. 3

Значения первых трех собственных частот (Гц) квадратной пластины из Ti-6Al-4V с пьезоэлектрическими лицевыми слоями из G1195-N

Мода	Источник	Граничные условия		
		CCCC	CFFF	SSSS
1-я	Настоящая работа	264,77	25,60	145,35
	[1]	264,71	25,57	145,37
	Разность, %	0,02	0,11	0,01
2-я	Настоящая работа	539,37	62,72	364,13
	[1]	539,13	62,58	363,09
	Разность, %	0,04	0,22	0,29
3-я	Настоящая работа	539,37	156,95	364,13
	[1]	539,13	156,70	363,09
	Разность, %	0,04	0,16	0,29

дование для оценки влияния разных геометрических и материальных свойств пластинок графена на свободные колебания. Рассмотрели пьезоэлектрическую микропластину с пластинками графена со следующими геометрическими характеристиками: $a/b=1$, $a/h_h=20$, $h_h/l=1$, $h_p=h_h/8$, $h_h=17,6$ мкм. Сердцевина сделана из эпоксидной смолы, армированной пластинками графена. Термомеханические параметры следующие: эпоксидная смола — $E=3$ ГПа, $\rho=1200$ кг/м³, $\nu=0,34$, $\alpha=60 \cdot 10^{-6}$ 1/К, пластинки графена — $E=1010$ ГПа, $\rho=1062,5$ кг/м³, $\nu=0,186$, $\alpha=5 \cdot 10^{-6}$ 1/К [5]. Размеры пластинок графена: $a_{GPL}=2,5$ мкм, $b_{GPL}=1,5$ мкм, $t_{GPL}=1,5$ нм. Общее массовое содержание пластинок графена W_{GPL} в сердцевине слоистого композита 0,3% [5]. Пьезоэлектрические лицевые слои изготовлены из пьезокерамики PZT-5A с одинаковыми геометрическими и термомеханическими свойствами. Термомеханические характеристики PZT-5A: $E=63$ ГПа, $G_{12}=24,2$ ГПа, $\rho=7600$ кг/м³, $\nu=0,35$, $\alpha=0,9 \cdot 10^{-6}$ 1/К, $e_{31}=e_{32}=-7,209$ К/м², $e_{24}=e_{15}=12,322$ К/м², $k_{11}=k_{22}=1,53 \cdot 10^{-8}$ Ф/м, $k_{33}=1,5 \cdot 10^{-8}$ Ф/м [26]. Упругие постоянные основания приняли равными нулю. Приложенное напряжение и увеличение температуры также приняли равными нулю: $V=0$ и $\Delta T=0$.

Для определения количества слоев с пластинками графена, необходимых для получения сердцевины с непрерывными термомеханическими характеристиками, исследовали влияние количества слоев на основную собственную частоту и представили полученные результаты в табл. 4. Видно, что изменение количества слоев с 6 до 10 привело к незначительному изменению значения основной собственной частоты микропластины. Поэтому далее рассматривали микропластину с 10-слойной сердцевиной с пластинками графена.

Также установили, что когда приложенное электрическое напряжение положительное (отрицательное), значение основной собственной частоты ω_1 уменьшается (увеличивается). Это явление может быть обусловлено влиянием пьезоэлектрической постоянной $e_{31}=e_{32}$ и уравнением (А.1) (см. Приложение). Пьезокерамика PZT-5 имеет $e_{31}=e_{32}=-7,9$ К/м². Поэтому согласно уравнению (А.1) положительное электрическое напряжение вместе

Табл. 4

Значения основной собственной частоты ω_1 (МГц) квадратной микропластины при разных картинах распределения пластинок графена с граничными условиями SSSS

Картина	$N_L=2$			$N_L=6$			$N_L=10$		
	$V=50В$	$V=0В$	$V=-50В$	$V=50В$	$V=0В$	$V=-50В$	$V=50В$	$V=0В$	$V=-50В$
U	0,8941	0,9373	0,9787	0,8941	0,9373	0,9787	0,8941	0,9373	0,9787
X	0,8942	0,9374	0,9788	0,8980	0,9410	0,9823	0,8982	0,9413	0,9825
O	0,8939	0,9372	0,9785	0,8901	0,9335	0,9751	0,8898	0,9332	0,9748

Табл. 5

Значения основной собственной частоты ω_1 (МГц) квадратной микропластины при разных картинах распределения пластинок графена, разных безразмерных постоянных упругого основания $(K_1, K_2) = (0, 0)$ и разных граничных условиях

Граничные условия	Картина								
	U	X	O	U	X	O	U	X	O
	$(K_1, K_2) = (0, 0)$			$(K_1, K_2) = (100, 0)$			$(K_1, K_2) = (100, 10)$		
SSSS	0,9373	0,9413	0,9332	0,9397	0,9438	0,9357	0,9446	0,9486	0,9406
CCCC	1,4837	1,4895	1,4779	1,4852	1,4911	1,4794	1,4885	1,4943	1,4827
SCSC	1,2414	1,2465	1,2364	1,2433	1,2483	1,2383	1,2471	1,2521	1,2421
CFCF	0,9345	0,9387	0,9302	0,9369	0,9412	0,9327	0,9397	0,9439	0,9354
SCSF	0,6427	0,6456	0,6398	0,6463	0,6492	0,6435	0,6508	0,6537	0,6480
CSCF	1,0046	1,0089	1,0003	1,0069	1,0112	1,0026	1,0100	1,0143	1,0056
CCCF	1,0363	1,0407	1,0319	1,0386	1,0430	1,0341	1,0416	1,0460	1,0372
CFFF	0,1623	0,1632	0,1614	0,1761	0,1769	0,1752	0,1819	0,1827	0,1811

с отрицательной пьезоэлектрической постоянной создают отрицательную осевую силу (сжатие) и уменьшают собственную частоту.

Влияние постоянных упругого основания на величину ω_1 для картин распределения пластинок графена при разных граничных условиях на кромках иллюстрируют данные табл. 5. Безразмерные упругие постоянные основания $K_1 = \frac{k_w b^4}{D_0}$ и $K_2 = \frac{k_f b^2}{D_0}$ (где $D_0 = \frac{E_m h_2^3}{12(1-\nu_m^2)}$) характеризуют жесткость при изгибе только слоя сердцевины без графена. Наблюдали усиливающее влияние постоянных основания Винклера и Пастернака на величину ω_1 , причем наибольшее — при граничных условиях CFFF и O-картине распределения пластинок графена, обусловивших наименьшую собственную частоту микропластины. Отметим, что O-картина распределения пластинок графена всегда обуславливает наиболее слабую структуру, а X-картина — наиболее сильную.

Влияние отношения толщины слоя сердцевины и масштабного параметра длины материала h_h / l на величину ω_1 рассматриваемой микропластины при граничных условиях SSSS показано на рис. 3. Отметим, что увеличение этого отношения сопровождалось монотонным уменьшением значения собственной частоты.

Исследовали влияние параметров пластинок графена, включая их ширину, длину и массовое содержание, на основную собственную частоту ω_1 рассматриваемой микропластины с граничными условиями SSSS при трех значениях приложенного электрического напряжения. Данные рис. 4 свидетельствуют о том, что увеличение ширины пластинок графена увеличивает собственную частоту микропластины. Кроме того, положительное (отрицательное) электрическое напряжение уменьшает (увеличивает)

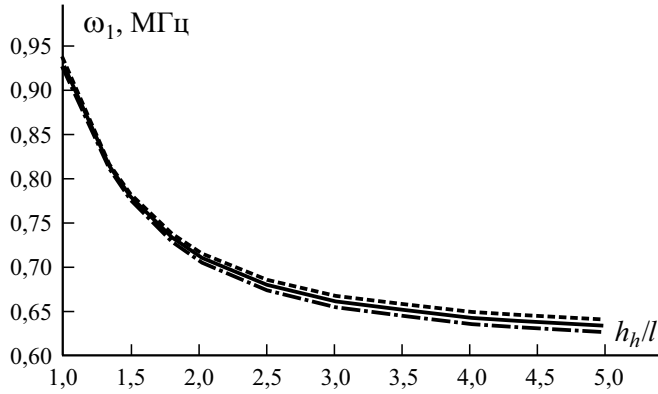


Рис. 3. Зависимость основной собственной частоты ω_1 квадратной пьезоэлектрической микропластины с граничными условиями SSSS и $(K_1, K_2) = (0, 0)$ от отношения толщины ее слоя к масштабному параметру длины материала h_h/l : (—) — U-; (- -) — X-; (- · -) — O-картина распределения пластинок графена.

значение ω_1 , поскольку в силу уравнения (A.1) положительное электрическое напряжение приводит к отрицательной (сжимающей) осевой силе, смягчающей микроструктуру.

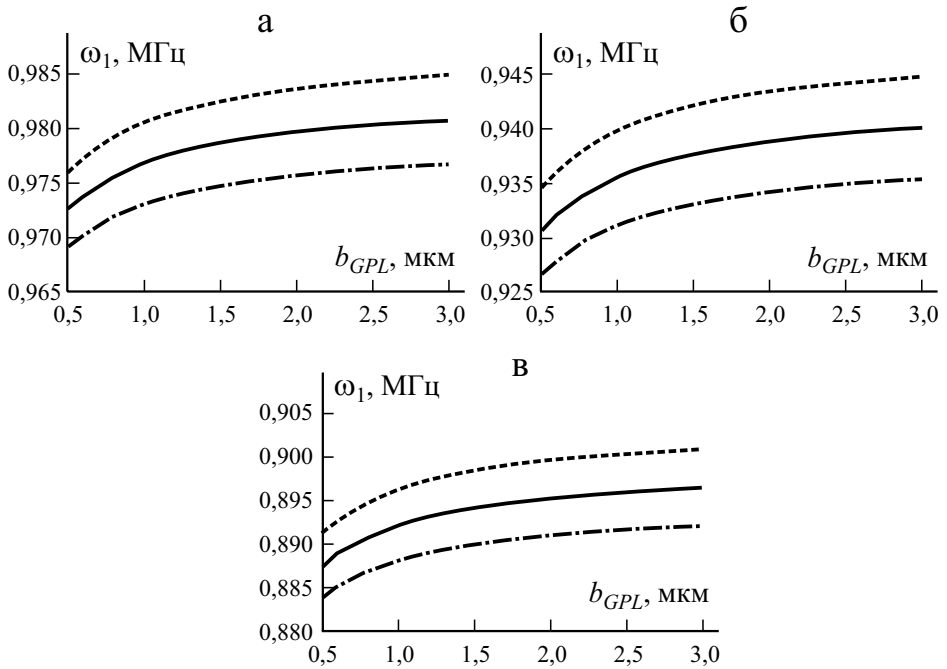


Рис. 4. Зависимость величины ω_1 рассматриваемой микропластины с граничными условиями SSSS от ширины пластинок графена b_{GPL} при $V = -50$ (а), 0 (б), 50 В (в) и $(K_1, K_2) = (0, 0)$. Обозначения те же, что на рис. 3.

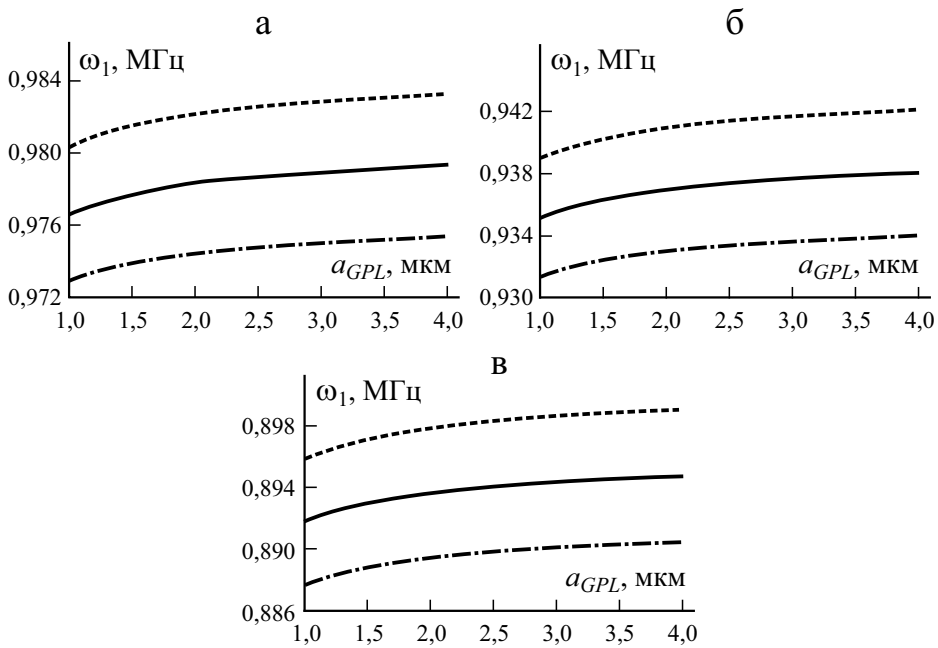


Рис. 5. Зависимость величины ω_1 рассматриваемой микропластины с граничными условиями SSSS от длины пластинок графена a_{GPL} с X-картиной распределения при $V = -50$ (а), $V = 0$ (б), $V = 50$ В (в) и $(K_1, K_2) = (0, 0)$: (—) — U-; (- -) — X-; (- · -) — O-картина распределения пластинок графена.

Ужесточающий эффект влияния длины пластинок графена на основную собственную частоту квадратной пьезоэлектрической микропластины с граничными условиями SSSS иллюстрируют данные рис. 5.

Сравнение данных рис. 4 и 5 свидетельствует о том, что увеличение ширины пластинок графена оказало большее влияние на собственную частоту микропластины, чем увеличение длины в идентичном масштабе.

Данные рис. 6 иллюстрируют влияние массового содержания пластинок графена W_{GPL} на величину ω_1 рассматриваемой микропластины с граничными условиями SSSS. Как и ожидали, влияние картины распределения пластинок графена на собственную частоту микропластины возрастало по мере увеличения их массового содержания.

Первая линейная мода колебаний квадратной пьезоэлектрической микропластины с X-картиной распределения пластинок графена в замкнутой цепи при разных граничных условиях показана на рис. 7.

Оценили влияние повышения температуры на величину ω_1 квадратной пьезоэлектрической микропластины с O-картиной распределения пластинок графена в замкнутой цепи. Уменьшение основной собственной частоты микропластины при трех разных граничных условиях с увеличением приращения температуры иллюстрируют данные рис. 8—а.

Влияние масштабного фактора l/h_1 на величину ω_1 микропластины с граничными условиями CCCC и O-картиной распределения пластинок

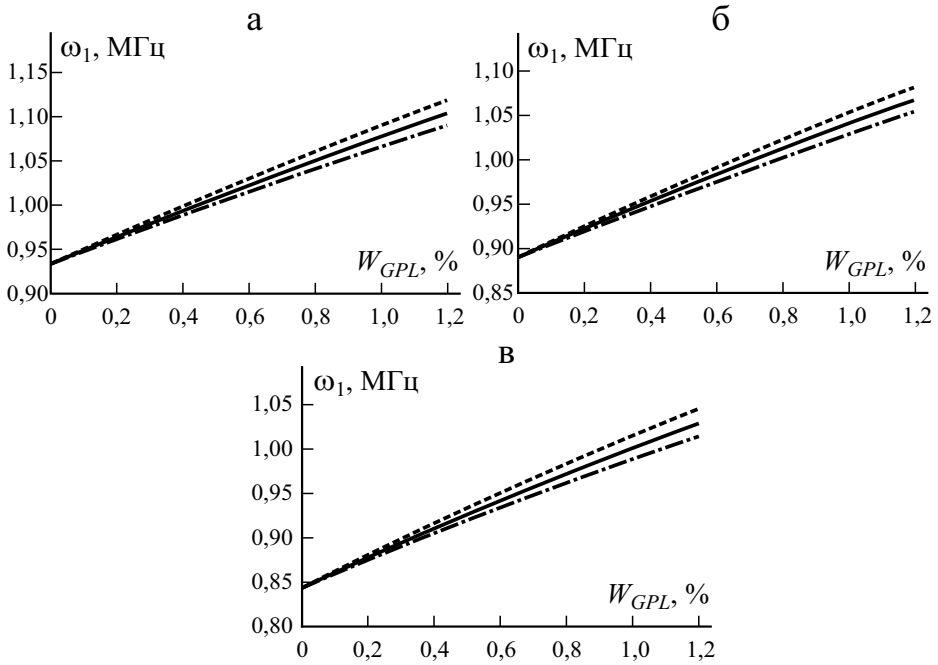


Рис. 6. Зависимость величины ω_1 рассматриваемой микропластины с граничными условиями SSSS от массового содержания пластинок графена W_{GPL} . Остальные обозначения и условия те же, что на рис. 5.

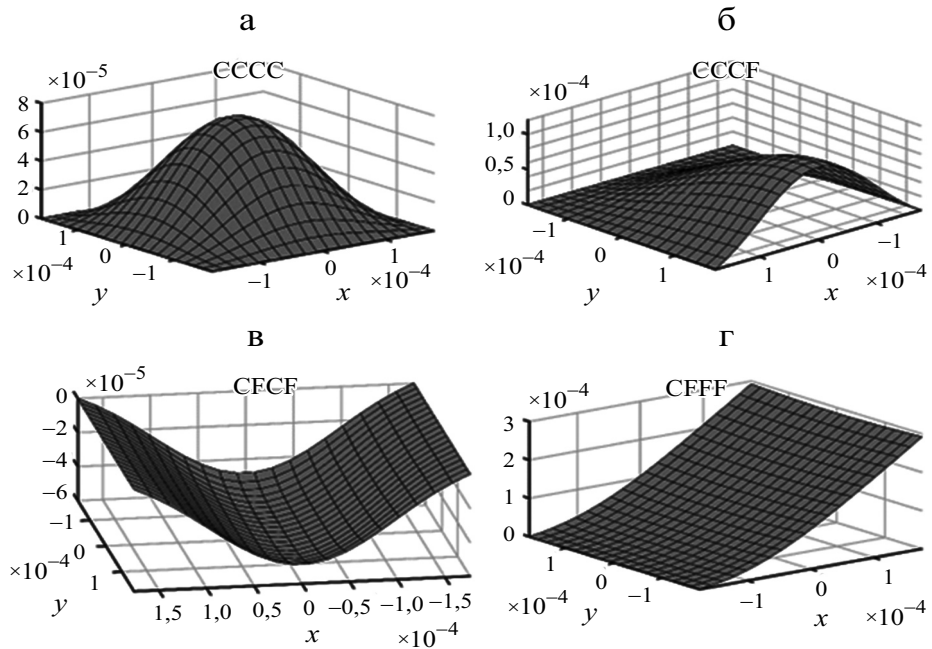


Рис. 7. Первая линейная нормальная мода колебаний рассматриваемой микропластины с пластинками графена с разными граничными условиями при $V=0$, $(K_1, K_2)=(0,0)$.

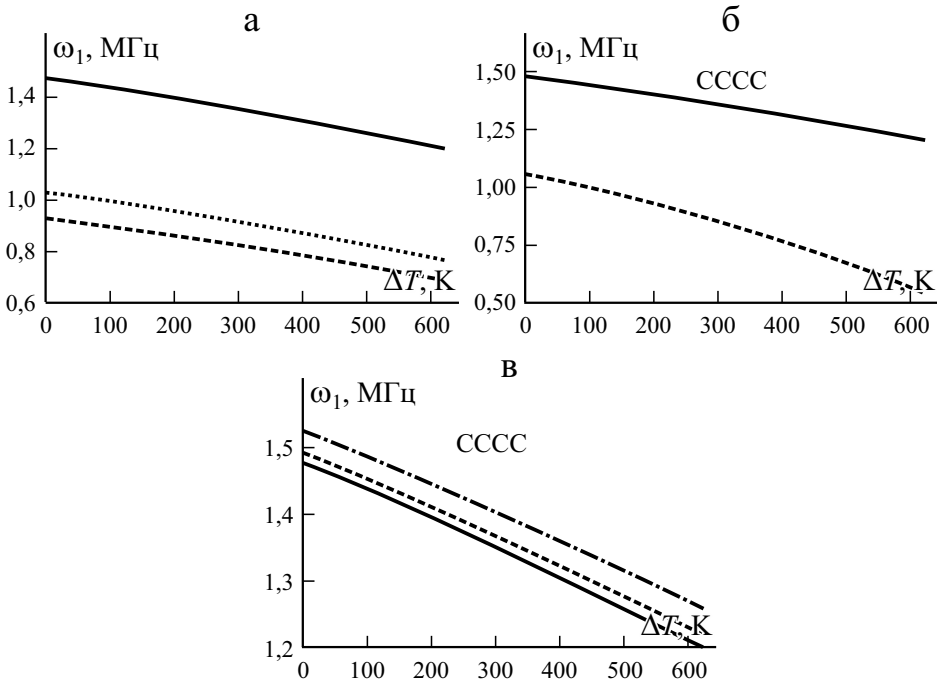


Рис. 8. Влияние типа граничных условий CCCC (—), CFCF (- - -) и CCCF (· · ·) (а); масштабного фактора $l/h_h = 1$ (—) и 0 (- - -) (б); параметров упругого основания $K_1 = 0, K_2 = 0$ (—), $K_1 = 1000, K_2 = 0$ (- - -), $K_1 = 1000, K_2 = 100$ (- · -) (в) с повышением температуры ΔT на величину ω_1 рассматриваемой микропластины с О-картиной распределения пластинок графена.

графена отражают данные рис. 8—б. Видно, что значения ω_1 , предсказанные без учета масштабного фактора, в большей степени зависели от приращения температуры. Кроме того, учет масштабного фактора привел к более жесткой конструкции.

Данные рис. 8—в иллюстрируют влияние параметров упругого основания на величину ω_1 микропластины с граничными условиями CCCC и О-картиной распределения пластинок графена. Увеличение параметров упругого основания усиливало микроструктуру и увеличивало основную собственную частоту.

Заключение

Смоделировали микропластины, состоящие из изотропного слоя сердцевины, армированного пластинками графена и подверженного термоэлектрическим нагрузкам, и двух пьезоэлектрических лицевых слоев. Пластины опираются на упругое основание. Для определения энергии деформирования и кинетической энергии была применена теория сдвигового деформирования первого порядка и модифицированная теория моментных напряжений.

Для определения эффективных термомеханических свойств слоя сердцевинны использовали микромеханическую модель Халпина—Цая. Для оценки собственных частот с помощью слабой формы определяющих уравнений использовали метод Ритца. Исследовали влияние внешнего электрического напряжения, приращения температуры, характеристик пластинок графена и масштабного параметра длины материала на основную собственную частоту. Результаты продемонстрировали важность соотношения между массовым содержанием пластинок графена и их геометрическими характеристиками на изменения основной собственной частоты. Кроме того, влияние повышения температуры на основную собственную частоту оценивали при разных граничных условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kiani Y.* Free vibration of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates integrated with piezoelectric layers // *Comput. Math. Appl.* — 2016. — Vol. 72, No. 9. — P. 2433—2449.
2. *Duc N. D., Quan T. Q., and Nam D.* A nonlinear stability analysis of imperfect three-phase polymer composite plates // *Mech. Compos. Mater.* — 2013. — Vol. 49, No. 4. — P. 345—358.
3. *Akbarov S. D.* Buckling delamination of elastic and viscoelastic composite plates with cracks. Survey I: solution method and problems related to the plane strain state // *Mech. Compos. Mater.* — 2013. — Vol. 48, No. 6. — P. 681—692.
4. *Akbarov S. D., Yahnioglu N., and Tekin A.* Buckling delamination of a rectangular sandwich plate containing inner cracks under biaxial loading // *Mech. Compos. Mater.* — 2013. — Vol. 49, No. 5. — P. 537—550.
5. *Wu H., Kitipornchai S., and Yang J.* Thermal buckling and postbuckling of functionally graded graphene nanocomposite plates // *Mater. Des.* — 2017. — Vol. 132. — P. 430—441.
6. *Karataş E. E.* Buckling delamination of a rectangular orthotropic thick plate with an embedded rectangular crack subjected to an axial compressive force // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 55, No. 5. — P. 643—654.
7. *Saidi A. R., Bahaadini R., and Majidi-Mozafari K.* On vibration and stability analysis of porous plates reinforced by graphene platelets under aerodynamical loading // *Composites: Part B.* — 2019. — Vol. 164. — P. 778—799.
8. *Aylikci F., Akbarov S. D., and Yahnioglu N.* 3D FEM analysis of buckling delamination of a piezoelectric sandwich rectangular plate with interface edge cracks // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 55, No. 6. — P. 797—810.
9. *Uymaz B.* Buckling characteristics of FGM plates subjected to linearly varying in-plane loads // *Mech. Compos. Mater.* — 2021. — Vol. 57, No. 1. — P. 69—80.
10. *Ke L. L., Wang Y. S., Yang J., and Kitipornchai S.* Free vibration of size-dependent Mindlin microplates based on the modified couple stress theory // *J. Sound Vib.* — 2012. — Vol. 331, No. 1. — P. 94—106.
11. *Lou J., He L., Du J., and Wu H.* Buckling and post-buckling analyses of piezoelectric hybrid microplates subject to thermo—electro—mechanical loads based on the modified couple stress theory // *Compos. Struct.* — 2016. — Vol. 153. — P. 332—344.
12. *Arefi M., Kiani M., and Zenkour A. M.* Size-dependent free vibration analysis of a three-layered exponentially graded nano-/microplate with piezomagnetic face sheets resting

on Pasternak's foundation via MCST // *J. Sandwich Struct. Mater.* — 2020. — Vol. 22, No. 1. — P. 55—86.

13. *Abbaspour F. and Arvin H.* Vibration and thermal buckling analyses of three-layered centrosymmetric piezoelectric microplates based on the modified consistent couple stress theory // *J. Vib. Control.* — 2020. — Vol. 26, Nos. 15—16. — P. 1253—1265.

14. *Babaei A.* Forced vibration analysis of non-local strain gradient rod subjected to harmonic excitations // *Microsystem Technol.* — 2021. — Vol. 27, No. 3. — P. 821—831.

15. *Babaei A.* Forced vibrations of size-dependent rods subjected to: impulse, step, and ramp excitations // *Archive Appl. Mech.* — 2021. — Vol. 91, No. 5. — P. 2211—2223.

16. *Abbaspour F. and Arvin H.* Vibration analysis of piezoelectric graphene platelets microplates // *AUT J. Mech. Eng.* — 2021. — Vol. 5, No. 3. doi: 10.22060/ajme.2021.18655.5911

17. *Abbaspour F. and Arvin H.* Buckling treatment of piezoelectric functionally graded graphene platelets microplates // *Steel Compos. Struct.* — 2021. — Vol. 38, No. 3. — P. 337—353.

18. *Reddy J. N.* *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory And Analysis.* — 2nd ed. — Florida: CRC Press, 2003.

19. *Arvin H.* The flapwise bending free vibration analysis of micro-rotating Timoshenko beams using the differential transform method // *J. Vib. Control.* — 2018. — Vol. 24, No. 20. — P. 4868—4884.

20. *Bodaghi M., Damanpack A. R., Aghdam M. M., and Shakeri M.* Geometrically non-linear transient thermo-elastic response of FG beams integrated with a pair of FG piezoelectric sensors // *Compos. Struct.* — 2014. — Vol. 107. — P. 48—59.

21. *Wang Q.* On buckling of column structures with a pair of piezoelectric layers // *Eng. Struct.* — 2002. — Vol. 24, No. 2. — P. 199—205.

22. *Shams S., Soltani B., and Memar A. M.* The effect of elastic foundations on the buckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments using a meshfree method // *J. Solid Mech.* — 2016. — Vol. 8, No. 2. — P. 262—279.

23. *Meirovitch L.* *Principles and Techniques of Vibrations.* — N. Y.: McGraw Hill, 1997.

24. *Mason J. C. and Handscomb D. C.* *Chebyshev Polynomials.* — CRC Press, 2002.

25. *Nguyen N. V., Lee J., and Nguyen-Xuan H.* Active vibration control of GPLs-reinforced FG metal foam plates with piezoelectric sensor and actuator layers // *Composites: Part B.* — 2019. — Vol. 172. — P. 769—784.

26. *Shariyat, M.* Dynamic buckling of imperfect laminated plates with piezoelectric sensors and actuators subjected to thermo-electro-mechanical loadings, considering the temperature-dependency of the material properties // *Compos. Struct.* — 2009. — Vol. 88, No. 2. — P. 228—239.

Приложение

Результирующие мембранные и сдвиговые силы и моменты —

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(k)} \\ \sigma_{yy}^{(k)} \\ \sigma_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = K_s \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz}^{(k)} \\ \sigma_{yz}^{(k)} \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(k)} \\ \sigma_{yy}^{(k)} \\ \sigma_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} z dz. \quad (\text{A.2})$$

Результирующие моменты высокого порядка —

$$\begin{Bmatrix} Y_{xx}, Y_{yy}, Y_{zz}, Y_{xy}, Y_{xz}, Y_{yz} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} m_{xx}^{(k)}, m_{yy}^{(k)}, m_{zz}^{(k)}, m_{xy}^{(k)}, m_{xz}^{(k)}, m_{yz}^{(k)} \end{Bmatrix} dz,$$

$$\begin{Bmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \end{Bmatrix} = K_s \sum_{k=1}^3 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} m_{xz}^{(k)} \\ m_{yz}^{(k)} \end{Bmatrix} z dz. \quad (\text{A.3})$$

Приведенные пьезоэлектрические, диэлектрические, пироэлектрические и термического расширения коэффициенты —

$$\bar{e}_{3i} = \frac{(e_{33}v_{21}v_{3j} + e_{33}v_{3i})E_{ii}}{(v_{12}v_{21} - 1)E_{33}} + \frac{e_{3i}v_{21}v_{21} - e_{3i}}{v_{12}v_{21} - 1}, i \neq j,$$

$$\bar{k}_{33} = k_{33} + \frac{(v_{12}v_{23}v_{31} + v_{13}v_{21}v_{32} + v_{21}v_{21} + v_{13}v_{31} + v_{23}v_{32} - 1)e_{33}^2}{(v_{12}v_{21} - 1)E_{33}}, \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{p}_3 = p_3 + \alpha_{33}e_{33} - \frac{\alpha_{22}e_{33}(v_{21}v_{13} + v_{23})}{v_{12}v_{21} - 1} - \frac{\alpha_{11}e_{33}(v_{12}v_{23} + v_{13})}{v_{12}v_{21} - 1},$$

$$\bar{\alpha}_{11} = -\frac{(\alpha_{22}v_{21} + \alpha_{11})}{v_{12}v_{21} - 1}, \bar{\alpha}_{22} = -\frac{(\alpha_{11}v_{12} + \alpha_{22})}{v_{12}v_{21} - 1}.$$

Поступила в редакцию 26.05.2021

Окончательный вариант поступил 06.09.2021

Received May 26, 2021 (Sept. 6, 2021)