

*В. Н. Паймушин<sup>а,б\*</sup>, Р. К. Газизуллин<sup>а</sup>, С. А. Холмогоров<sup>а</sup>, М. А. Шишов<sup>а</sup>*

*<sup>а</sup>Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева,  
420111 Россия*

*<sup>б</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008 Россия*

## **МЕХАНИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕСТ-ОБРАЗЦОВ ИЗ СЛОИСТЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ СО СТРУКТУРОЙ $[\pm 45^\circ]$ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ**

### **1. ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК И ПАРАМЕТРОВ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ**

*V. N. Paimushin<sup>\*</sup>, R. K. Gazizullin, S. A. Kholmogorov, and M. A. Shishov*

### **DEFORMATION MECHANICS OF FIBER-REINFORCED PLASTIC SPECIMENS IN TENSILE AND COMPRESSION TESTS**

#### **1. THEORETICAL AND EXPERIMENTAL METHODS FOR DETERMINING THE MECHANICAL CHARACTERISTICS AND THE PARAMETERS OF STRESS-STRAINS STATE**

**Keywords:** laminated fiber composite, specimen, angle-ply lay-up, tension, compression, experiment

The theoretical and experimental methods for determining the mechanical characteristics of fiber-reinforced plastics (FRPs) based on tensile and compression tests of flat specimen with  $[0]_s$ ,  $[90]_s$ ,  $[\pm 45]_{2s}$  lay-ups are analyzed. For  $[\pm 45]_{2s}$  lay-ups, relations are derived for determining the components of lamina strains and stresses in the orthotropy axes the FRPs in terms of axial strains and Poisson ratios of specimens measured in experiments. They are based on an analysis of geometric strain patterns and physical relations under the assumption that, in a cross-ply FRP, two adjacent layers with  $[\pm \varphi]$  structures can be considered as one symmetrically reinforced layer with orthotropic properties. Numerical experiments for determining

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [vpaimushin@mail.ru](mailto:vpaimushin@mail.ru)  
Corresponding author: [vpaimushin@mail.ru](mailto:vpaimushin@mail.ru)

the parameters of the stress-strain state of specimens consisting of two laminas of a unidirectional fiber-reinforced plastics with a  $[\pm 45]_2$  lay-up were performed in the linear formulation of 2- and 3-D problems in the ANSYS finite-element system. The cases of tension of elongated and compression of short specimens was considered, and an analysis of the stress components forming along the fibers located in the central part and in the vicinity of specimens corner points was performed. Tensile experiments were performed on flat fiber composite specimens with a  $[\pm 45]_{2s}$  lay-up to determine the strain state using a contactless strain measurement system. The results obtained made it possible to indicate the zones in which, during loading, the realization and a continuous change of the internal nonclassical buckling modes of the structural elements of FRP are possible, which is apparently one of the reasons for the physically nonlinear behavior of specimens with the  $[\pm 45]_{2s}$  lay-up in tension and compression. The results obtained allowed us to point out the areas where strains localize during loading and the failure of test specimens begins. It is shown that, in tension (compression) of the specimens with a  $[\pm 45]_{2s}$  lay-up, the fibers in the composite are under not only tangential, but also axial tensile (compressive) stresses. It is found that, in the orthotropy axes of each lamina, the axial tensile stresses significantly exceed in magnitude the transverse ones, which can be neglected.

**Ключевые слова:** композит волокнистый слоистый, тест-образец, армирование косоугольное, растяжение, сжатие, эксперимент

Проведен анализ теоретико-экспериментальных методов определения механических характеристик слоистых волокнистых композитных материалов (ВКМ) при испытаниях на растяжение и сжатие плоских тест-образцов со структурами  $[0^\circ]_s$ ,  $[90^\circ]_s$ ,  $[\pm 45^\circ]_{2s}$ . Для ВКМ со структурой  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  выведены соотношения для нахождения деформаций и напряжений в осях ортотропии материала отдельного монослоя ВКМ через измеряемые в эксперименте осевую деформацию и коэффициент Пуассона образца. Они основаны на построении соотношений, исходя из рассмотрения геометрической картины деформирования и анализа известных кинематических и физических соотношений теории упругости, составленных для каждого монослоя композита в предположении о формировании в нем плоского напряженно-деформированного состояния. Проведены упрощения последних в предположении о том, что в косоугольно армированном ВКМ два смежных слоя со структурами  $[\pm \varphi]$  допустимо считать как один симметрично армированный слой с ортотропными свойствами. В линейной постановке двух- и трехмерных задач в программной системе конечно-элементного анализа ANSYS прове-

дены численные эксперименты по определению параметров напряженно-деформированного состояния образцов, состоящих из двух и четырех жестких монослоев однонаправленного волокнистого композитного материала со структурой  $[\pm 45^\circ]_{2s}$ , путем введения в рассмотрение между смежными жесткими слоями менее жестких адгезионных слоев малой толщины, состоящих только из материала связующего. Рассмотрены случаи растяжения удлинённых и сжатия коротких тест-образцов, проведен анализ формирующихся компонент напряжений вдоль волокон, расположенных в центральной части и в окрестностях угловых точек образцов. Проведены эксперименты на растяжение плоских тест-образцов из волокнистого композита со схемой укладки  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  по определению деформированного состояния с использованием системы бесконтактного измерения деформаций. Полученные результаты позволяют указать области, в которых в процессе нагружения происходит локализация деформаций и начинается разрушение тест-образцов. Показано, что в случае растяжения (сжатия) тест-образцов со структурой  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  волокна в композите находятся под действием не только касательных, но и осевых растягивающих (сжимающих) напряжений. Установлено, что в осях ортотропии каждого монослоя осевые растягивающие напряжения по величине значительно превосходят поперечные, которыми можно пренебречь.

### Введение

Экспериментальное определение физико-механических характеристик композитных материалов (КМ) на основе проведения тех или иных испытаний является неотъемлемой частью в технологическом процессе проектирования и изготовления с их применением конструкций того или иного назначения. Для волокнистых композитных материалов (ВКМ) на полимерной основе в соответствии с существующими стандартами испытания проводят, как правило, на плоских тест-образцах толщиной  $h$  и с той или иной ориентацией расположенных в матрице волокон.

Наиболее просты в реализации испытания на растяжение образцов толщиной  $h$  со структурами  $[0^\circ]_s$  и  $[90^\circ]_s$  (значение  $s$  — небольшое) с волокнами, расположенными вдоль и поперек к направлению действующей нагрузки. Такие испытания, как известно, предназначены для определения механических характеристик отдельного монослоя ВКМ в осях его ортотропии  $x_1, x_2$ . Соответствующие им диаграммы деформирования для однонаправленного ВКМ на основе углеродных волокон допустимо считать линейными вплоть до разрушения образцов (см., например, [1]), что позволяет для монослоя композита в осях его ортотропии определить модули упругости первого рода  $E_1^+$  (в направлении волокон),  $E_2^+$  (в направлении поперек волокон) и коэффициент Пуассона  $\nu_{21}^+$ , а при их ис-

пользовании вычислить другой коэффициент Пуассона  $\nu_{12}^+$  из зависимости  $E_1^+ \nu_{12}^+ = E_2^+ \nu_{21}^+$ . Определяют также предельные напряжения  $\sigma_1^{+*}, \sigma_2^{+*}$  в направлениях осей ортотропии  $x_1, x_2$ , по достижении которых в условиях растяжения происходит разрушение образца.

Более сложные в реализации — испытания на сжатие тест-образцов со структурами  $[0^\circ]_s, [90^\circ]_s$  в силу их возможной потери устойчивости по той или иной форме и наблюдаемого продольно-поперечного изгиба (хотя и малого, особенно при выдержке тест-образца под нагрузкой в течение длительного времени). Соответствующие диаграммы деформирования  $\sigma_1^- = \sigma_1^-(\varepsilon_1), \sigma_2^- = \sigma_2^-(\varepsilon_2)$  с точностью, достаточной для практического использования, также допустимо считать линейно-упругими (см., например, [1]) вплоть до их разрушения. Но определяемое при таких испытаниях значение  $E_1^-$ , как правило, оказывается ниже значения  $E_1^+$ , т.е. проявляется свойство разномодульности. Последнее, главным образом, может быть обусловлено реализацией возможных форм потери устойчивости (ФПУ) структурных элементов композита (волокна, пучка волокон или монослоя, состоящего из пучков волокон), расположенных внутри или на периферии тест-образца. Ввиду того что различие значений  $E_1^-$  и  $E_1^+$  оказывается незначительным, то определяемые модули упругости  $E_1^-, E_2^-$  и коэффициенты Пуассона  $\nu_{12}^-, \nu_{21}^-$  допустимо считать совпадающими со значениями  $E_1^+, E_2^+, \nu_{12}^+, \nu_{21}^+$ . В то же время определяемое в условиях сжатия предельное напряжение  $\sigma_1^{-*}$ , по достижении которого происходит разрушение образца, оказывается намного ниже значения  $\sigma_1^{+*}$ . Исследованиям перечисленных особенностей деформирования до настоящего времени была посвящена обширная научная литература. Было установлено [2—10], что предельное напряжение  $\sigma_1^{-*}$  для тест-образца со структурой  $[0^\circ]_s$  допустимо считать соответствующим его потере устойчивости по чисто поперечно-сдвиговой форме с образованием полосы сдвига [11] при касательном модуле поперечного сдвига  $\tilde{G}_{13}^{-*}$  материала в поперечном сечении тест-образца, равном  $\tilde{G}_{13}^{-*} = k\sigma_1^{-*}$  ( $k$  — экспериментально определяемый поправочный коэффициент, близкий к единице). Такой вид разрушения образца реализуется только при соответствующей немалой его толщине  $h$  и короткой рабочей длине  $a$  между захватами.

В соответствии со стандартом [12] ASTM D3518 для определения модуля сдвига  $G_{12}$  в осях ортотропии  $x_1, x_2$  отдельного монослоя ВКМ проводятся испытания на растяжение и сжатие тест-образцов со структурой  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  с четным числом (немалым для исключения искривления образца в направлении оси  $y$  (рис.1)) монослоев  $2s$ . Их результатом, в частности, при однократном растяжении до разрушения всегда является физически нелинейная диаграмма деформирования, дающая зависимость  $\sigma_x^+ = \sigma_x^+(\varepsilon_x^+)$  между нормальным напряжением  $\sigma_x^+$  и соответствующей

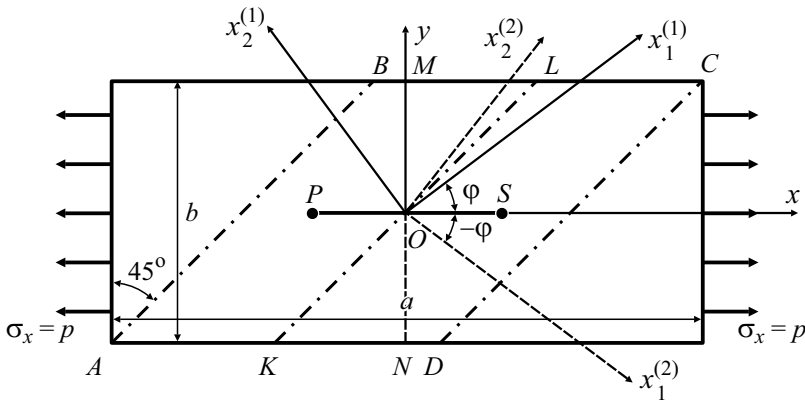


Рис. 1. Схема армирования в первых двух монослоях тест-образца из ВКМ со структурой  $[\pm\varphi]_{2s}$ , находящегося в условиях растяжения напряжением  $\sigma_x = p$ .

осевой деформацией  $\varepsilon_x^+$  в направлении растяжения, коэффициент Пуассона  $\nu_{xy}^+ = -\varepsilon_y^+ / \varepsilon_x^+$ . При построении такой диаграммы априори предполагаем, что формирующееся в центральном поперечном сечении  $x = \text{const}$  осреднённое напряжение  $\sigma_x^+(\varepsilon_x^+)$  постоянно как по толщине, так и по ширине образца (кроме участков, примыкающих к захватам), а материал в силу структуры монослоёв  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  по толщине образца в соответствии с принятыми положениями в механике волокнистых композитов допустимо считать ортотропным.

При проведении экспериментальных исследований в работе [1] фиксацию деформации  $\varepsilon_x^+$  осуществляли контактным экстензометром с базой измерения  $PS = 25$  мм, а деформации  $\varepsilon_y$  — с базой измерения  $MN = b$  (см. рис. 1). Последняя может быть осуществлена также и с применением тех или иных бесконтактных оптических систем, что будет изложено далее. Определяемые в таком приближении величины  $\varepsilon_x = \varepsilon_x^+$ ,  $\varepsilon_y = \varepsilon_y^+$  являются истинными деформациями и при их малых значениях с точностью  $2 + \varepsilon_x \approx 2$  могут быть отождествлены с компонентами  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  тензора деформаций. По правилам их преобразования при повороте осей компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{11}$ ,  $2\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{22}$  в осях ортотропии  $x_1, x_2$  оказываются равными

$$\varepsilon_{11} = \frac{1 - \nu_{xy}}{2} \varepsilon_{xx}, \quad 2\varepsilon_{12} = (1 + \nu_{xy}) \varepsilon_{xx}. \tag{1}$$

В ходе эксперимента определяем также предельное напряжение  $\sigma_x^{+*}$ , по достижении которого происходит разрушение образца. Исходя из такой диаграммы деформирования образца устанавливаются зависимости между секущим  $\tilde{E}_x^+$  (касательным  $\tilde{E}_x^+$ ) модулем упругости и осевой деформа-

цией  $\varepsilon_x^+$  в осях образца. При использовании выведенных в [13, 14] соотношений

$$\sigma_{12}^+ = \frac{\sigma_x^+}{2}, \quad \gamma_{12}^+ = \frac{2(1+v_{xy}^+)}{2 + \varepsilon_x^+(1-v_{xy}^+)} \varepsilon_x^+ \approx (1+v_{xy}^+) \varepsilon_x^+, \quad (2)$$

из которых второе соотношение с принятой степенью точности совпадает со второй формулой (1), строим диаграмму деформирования при сдвиге  $\sigma_{12}^+ = \sigma_{12}^+(\gamma_{12}^+)$ , дающую зависимость между касательным напряжением  $\sigma_{12}^+$  и соответствующей сдвиговой деформацией  $\gamma_{12}^+$  в осях ортотропии  $x_1, x_2$ , а при использовании последней — зависимости  $\widehat{G}_{12}^+ = \widehat{G}_{12}^+(\gamma_{12}^+)$ ,  $\widetilde{G}_{12}^+ = \widetilde{G}_{12}^+(\gamma_{12}^+)$  между секущим ( $\widehat{G}_{12}^+$ ), касательным ( $\widetilde{G}_{12}^+$ ) модулями сдвига и сдвиговой деформацией  $\gamma_{12}^+$ .

Найденные описанными методами характеристики далее в приближении

$$E_1 = E_1^+, \quad E_2 = E_2^+, \quad \widehat{G}_{12} = \widehat{G}_{12}^+, \quad v_{21} = v_{21}^+, \quad v_{12} = v_{12}^+$$

позволяют записать для  $k$ -го монослоя ВКМ физические соотношения в осях его ортотропии

$$\sigma_{11}^{(k)} = E_1^* \left( \varepsilon_{11}^{(k)} + v_{12} \varepsilon_{22}^{(k)} \right), \quad \sigma_{22}^{(k)} = E_2^* \left( \varepsilon_{22}^{(k)} + v_{21} \varepsilon_{11}^{(k)} \right), \quad \sigma_{12}^{(k)} = \widehat{G}_{12} \left( \gamma_{12}^{(k)} \right) \gamma_{12}^{(k)}, \quad (3)$$

где  $E_i^* = E_i / (1 - v_{12}v_{21})$ ;  $\sigma_{ij}^{(k)}$  — компоненты тензора обобщенных (по терминологии [15]) напряжений, в случае малых деформаций отождествляемые с компонентами истинных (по терминологии [15]) напряжений;  $\varepsilon_{ij}^{(k)}, \gamma_{12}^{(k)} = 2\varepsilon_{12}^{(k)}$  — приращения компонент первого метрического тензора, принимаемые в случае малых деформаций за их компоненты.

Результаты экспериментов показывают, что поведение тест-образца из ВКМ со структурой  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  при сжатии достаточно сильно отличается от поведения в условиях растяжения. Такое различие, а также физическая нелинейность диаграмм деформирования могут быть обусловлены, главным образом, тем, что в слоях связующего, в которых формируется преимущественно сдвиговое напряженно-деформированное состояние, а в волокнах и пучках волокон — преимущественно одноосное напряженно-деформированное состояние растяжения или сжатия, происходят структурные изменения в композите, связанные (судя по ранее полученным результатам [13, 16]) с возможной частичной деградацией связующего (преимущественно реализацией внутренних микро- и мезомасштабных [13, 14, 17] ФПУ волокон и пучков волокон), а также формированием [16, 18—20] как необратимых деформаций ползучести

на этапах нагружения и выдержки под нагрузкой, так и обратимых вязкоупругих деформаций ползучести, исчезающих на этапах разгрузки.

В механике композитов задачам о внутренних и поверхностных ФПУ структурных элементов до настоящего времени была посвящена достаточно обширная научная литература. Такие задачи важны в связи с тем, что при построении теорий прочности композитных материалов в качестве возможного механизма разрушения принимают и потерю устойчивости структуры композита. Большой цикл исследований в этом направлении был проведен (начиная со второй половины прошлого столетия) А. Н. Гузем, его учениками и последователями (см., например, [21]), результаты которых нашли отражение во многих научных статьях и монографиях (см., например, обзоры [22, 23]), В. В. Болотиным (см., например, [24]) и др. К этому же направлению следует отнести работы [25—32], посвященные экспериментальному и теоретическому изучению механизмов разрушения элементов структуры волокнистых композитов при испытаниях тест-образцов в соответствии с разработанными стандартами. Упомянутые работы относятся, главным образом, к рассмотрению лишь случая формирования в волокнах или пучках волокон одноосных напряжений сжатия, задачи об устойчивости которых можно отнести к классическим (в отличие от рассмотренных, например, в [33], названных неклассическими).

### 1. Теоретический анализ полей напряжений и деформаций, формирующихся в монослоях тест-образца из ВКМ со структурой $[\pm 45^\circ]_{2s}$ при растяжении и сжатии

Для исследования возможности реализации в монослоях тест-образца из ВКМ со структурой  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  при его растяжении или сжатии тех или иных внутренних разномасштабных ФПУ на первом этапе в дополнение к исследованиям [1, 13, 14, 17, 34] целесообразно провести более детальный анализ формирующихся в них напряжений и деформаций.

Исходя из результатов [35], для двух смежных монослоев при  $k = 1, k = 2$ , волокна которых расположены под углами  $\varphi_{(1)} = 45^\circ, \varphi_{(2)} = -45^\circ$  к оси образца  $x$  (рис. 2), компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{yy}^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}$  в осях образца с компонентами  $\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}$  в осях ортотропии можно связать зависимостями (здесь и далее верхние индексы относятся к первому, а нижние — ко второму слою)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)} &= \frac{1}{2} \left( \sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} \right) \mp \sigma_{12}^{(k)}, & \sigma_{yy}^{(k)} &= \frac{1}{2} \left( \sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} \right) \pm \sigma_{12}^{(k)}, \\ \sigma_{xy}^{(k)} &= \pm \frac{1}{2} \left( \sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

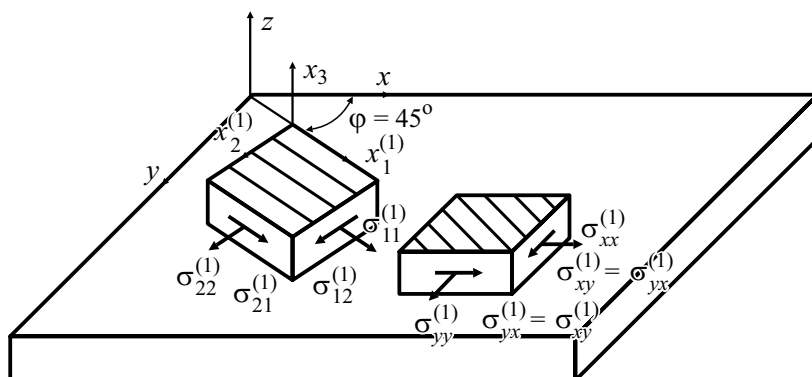


Рис. 2. Элементы первого однонаправленного монослоя КМ в осях ортотропии  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ , связанных с направлениями армирования, и в осях  $x, y, z$  тест-образца.

Входящие в (3) компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  через компоненты  $\varepsilon_{xx}^{(k)}, \varepsilon_{yy}^{(k)}, \gamma_{xy}^{(k)} = 2\varepsilon_{xy}^{(k)}$  в осях образца находим по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(k)} &= \frac{1}{2} \left( \varepsilon_{xx}^{(k)} + \varepsilon_{yy}^{(k)} \right) \pm \frac{1}{2} \gamma_{xy}^{(k)}, & \varepsilon_{22}^{(k)} &= \frac{1}{2} \left( \varepsilon_{xx}^{(k)} + \varepsilon_{yy}^{(k)} \right) \mp \frac{1}{2} \gamma_{xy}^{(k)}, \\ \gamma_{12}^{(k)} &= \pm \left( \varepsilon_{yy}^{(k)} - \varepsilon_{xx}^{(k)} \right). \end{aligned} \tag{5}$$

Исходя из (3)—(5), устанавливаем физические соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)} &= A_{11}\varepsilon_{xx}^{(k)} + A_{12}\varepsilon_{yy}^{(k)} \pm A_{13}\gamma_{xy}^{(k)}, & \sigma_{yy}^{(k)} &= A_{12}\varepsilon_{xx}^{(k)} + A_{22}\varepsilon_{yy}^{(k)} \pm A_{13}\gamma_{xy}^{(k)}, \\ \sigma_{xy}^{(k)} &= \pm A_{13}\varepsilon_{xx}^{(k)} \pm A_{23}\varepsilon_{yy}^{(k)} + A_{33}\gamma_{xy}^{(k)}, \end{aligned} \tag{6}$$

в которых при  $\varphi = \pm 45^\circ$  соответствующие коэффициенты определяем по формулам

$$\begin{aligned} A_{11} = A_{22} &= C + \widehat{G}_{12}, & A_{12} &= C - \widehat{G}_{12}, & C &= \frac{E_1^* + E_2^*}{4} + \frac{E_1^* \nu_{12}}{2}, \\ A_{13} = A_{23} &= \frac{E_1^* - E_2^*}{4}, & A_{33} &= \frac{E_1^* + E_2^*}{4} - \frac{E_1^* \nu_{12}}{2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Известно [35], что в слоистых ВКМ слою с углом армирования  $+\varphi$ , как правило, соответствует такой же слой с углом армирования  $-\varphi$ . В частности, с такой структурой  $[\pm 45^\circ]_2$  изготавливают и тест-образцы для испытаний в соответствии со стандартом ASTM D3518, что при анализе



их напряжённно-деформированного состояния (НДС) позволяет считать два таких слоя как один симметрично армированный слой с ортотропными свойствами. Физические соотношения для такого слоя при введении осредненных напряжений

$$\sigma_{xx} = \langle \sigma_{xx} \rangle = \left( \sigma_{xx}^{(1)} + \sigma_{xx}^{(2)} \right) / 2, \quad \sigma_{yy} = \langle \sigma_{yy} \rangle = \left( \sigma_{yy}^{(1)} + \sigma_{yy}^{(2)} \right) / 2, \quad (8)$$

$$\sigma_{xy} = \langle \sigma_{xy} \rangle = \left( \sigma_{xy}^{(1)} + \sigma_{xy}^{(2)} \right) / 2$$

и деформаций

$$\varepsilon_{xx} = \langle \varepsilon_{xx} \rangle = \left( \varepsilon_{xx}^{(1)} + \varepsilon_{xx}^{(2)} \right) / 2, \quad \varepsilon_{yy} = \langle \varepsilon_{yy} \rangle = \left( \varepsilon_{yy}^{(1)} + \varepsilon_{yy}^{(2)} \right) / 2, \quad (9)$$

$$\gamma_{xy} = \langle \gamma_{xy} \rangle = \left( \gamma_{xy}^{(1)} + \gamma_{xy}^{(2)} \right) / 2$$

в случае  $\varphi = \pm 45^\circ$  в силу  $A_{11} = A_{22}$ ,  $\nu_{xy} = \nu_{yx}$  следуют из (6) в виде зависимостей

$$\sigma_{xx} = A_{11} (\varepsilon_{xx} + \nu_{xy} \varepsilon_{yy}), \quad \sigma_{yy} = A_{11} (\nu_{xy} \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \quad \sigma_{xy} = A_{33} \gamma_{xy} = 2A_{33} \varepsilon_{xy}, \quad (10)$$

где  $\nu_{xy} = \nu_{yx} = A_{12} / A_{11}$ .

Наряду с осредненными по толщине двух смежных слоев напряжениями (8) и деформациями (9) введем в рассмотрение напряжения и деформации

$$\sigma_{xx}^{(-)} = \frac{\sigma_{xx}^{(1)} - \sigma_{xx}^{(2)}}{2}, \quad \sigma_{yy}^{(-)} = \frac{\sigma_{yy}^{(1)} - \sigma_{yy}^{(2)}}{2}, \quad \sigma_{xy}^{(-)} = \frac{\sigma_{xy}^{(1)} - \sigma_{xy}^{(2)}}{2}, \quad (11)$$

$$\varepsilon_{xx}^{(-)} = \frac{\varepsilon_{xx}^{(1)} - \varepsilon_{xx}^{(2)}}{2}, \quad \varepsilon_{yy}^{(-)} = \frac{\varepsilon_{yy}^{(1)} - \varepsilon_{yy}^{(2)}}{2}, \quad \gamma_{xy}^{(-)} = \frac{\gamma_{xy}^{(1)} - \gamma_{xy}^{(2)}}{2},$$

которые приводят к соотношениям

$$\sigma_{xx} = A_{11} \varepsilon_{xx} + A_{12} \varepsilon_{yy} + A_{13} \gamma_{xy}^{(-)}, \quad \sigma_{yy} = A_{12} \varepsilon_{xx} + A_{22} \varepsilon_{yy} + A_{23} \gamma_{xy}^{(-)}, \quad (12)$$

$$\sigma_{xy} = A_{13} \varepsilon_{xx}^{(-)} + A_{23} \varepsilon_{yy}^{(-)} + A_{33} \gamma_{xy},$$

$$\sigma_{xx}^{(-)} = A_{11} \varepsilon_{xx}^{(-)} + A_{12} \varepsilon_{yy}^{(-)} + A_{13} \gamma_{xy}, \quad \sigma_{yy}^{(-)} = A_{12} \varepsilon_{xx}^{(-)} + A_{22} \varepsilon_{yy}^{(-)} + A_{23} \gamma_{xy}, \quad (13)$$

$$\sigma_{xy}^{(-)} = A_{13} \varepsilon_{xx} + A_{23} \varepsilon_{yy} + A_{33} \gamma_{xy}^{(-)}.$$

Составленные соотношения (12) сводятся к соотношениям (10) лишь при введении предположений  $\varepsilon_{xx}^{(-)} = \varepsilon_{yy}^{(-)} = \gamma_{xy}^{(-)} = 0$ , в силу которых соотношения (13) принимают вид

$$\sigma_{xx}^{(-)} = A_{13}\gamma_{xy}, \quad \sigma_{yy}^{(-)} = A_{23}\gamma_{xy}, \quad \sigma_{xy}^{(-)} = A_{13}\varepsilon_{xx} + A_{23}\varepsilon_{yy}. \quad (14)$$

Заметим, что для установления степени точности соотношений (10) и предположений  $\varepsilon_{xx}^{(-)} = \varepsilon_{yy}^{(-)} = \gamma_{xy}^{(-)} = 0$  целесообразным представляется проведение специальных экспериментальных исследований в дополнение к полученным ранее [1] и анализа НДС, формирующегося в тест-образцах со структурой  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  при их растяжении (сжатии), на основе известных численных методов с использованием известных коммерческих пакетов прикладных программ.

При растяжении образца со структурой  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  осреднённым напряжением  $p$  предполагаем, что имеют место равенства

$$\sigma_x \approx \sigma_{xx} = p, \quad \sigma_y = 0, \quad \gamma_{xy} = 0, \quad \varepsilon_y^{(k)} = \varepsilon_y = -\nu_{xy}\varepsilon_x, \quad (15)$$

а в силу симметрии относительно оси  $Ox$  для компонент деформаций слоев справедливы соотношения

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{22}^{(1)} = \varepsilon_{22}^{(2)} = \varepsilon_{11}. \quad (16)$$

Поэтому из (5) при учете (16) следуют зависимости

$$\gamma_{12}^{(k)} = \mp(1 + \nu_{xy})\varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{11}^{(k)} = \frac{1 - \nu_{xy}}{2}\varepsilon_{xx}, \quad (17)$$

в соответствии с которыми в приближении  $\nu_{xy} = \nu_{yx} \approx 1$ , имеющем место при  $\varphi = \pm 45^\circ$  только в случае абсолютно жёстких волокон КМ и рекомендуемых в механике ВКМ [36], приходим к равенствам  $\gamma_{12}^{(k)} = \mp 2\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_{11}^{(k)} = 0$ . Но последнее из этих равенств противоречит приведенным далее экспериментальным данным и является, в частности, следствием описанной процедуры осреднения напряжений и деформаций по толщине двух смежных слоев. В то же время первая формула в (17) с большой степенью точности совпадает со второй формулой (2) и при ее использовании вполне допустимо использование и равенства  $\nu_{xy} = \nu_{yx} \approx 1$ .

Следует отметить, что по определению [15] величины  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ , являющиеся компонентами симметричного тензора деформаций, не являются мерами истинных деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , вычисляемых по формуле  $\varepsilon_i = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii}} - 1$  и фиксируемых в ходе проведения экспериментов, а линии  $AB$  и  $CD$ , показанные на рис. 3, в образцах относятся к двум разным смежным монослоям. Поэтому вычисляемый исходя из геометрической картины деформирования

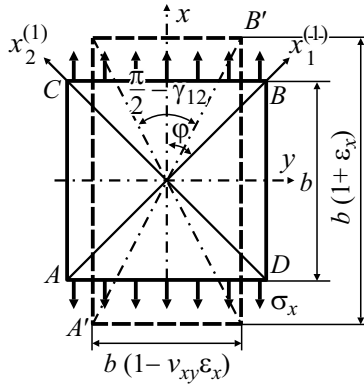


Рис. 3. Геометрическая картина деформированного и недеформированного состояний образца.

(см. рис. 3) и определяемый по формуле (2) угол  $\gamma_{12}$  является углом между линиями  $AB$  и  $CD$ , принадлежащим двум разным смежным монослоям.

В соответствии с геометрической картиной деформирования (см. рис. 3), на которой отрезки волокон  $AB$  и  $CD$  расположены в двух смежных монослоях композита, для вычисления величины  $\epsilon_i$  можно записать формулу

$$\epsilon_1 = \frac{A'B'}{AB} - 1 = \sqrt{\frac{(1 - \nu_{xy}\epsilon_x)^2 + (1 + \epsilon_x)^2}{2}} - 1 = \epsilon_2, \tag{18}$$

которая с точностью  $2 + \epsilon_1 \approx 2$  представима в упрощенном виде как

$$\epsilon_1 \approx \frac{1 - \nu_{xy}}{2} \epsilon_x + \frac{1 + \nu_{xy}^2}{4} \epsilon_x^2. \tag{19}$$

Заметим, что при  $\nu_{xy} = 1$  из формулы (18), принимающей вид  $(2 + \epsilon_1)\epsilon_1 = \epsilon_x^2$ , с точностью  $2 + \epsilon_1 \approx 2$ , как и из (19), следует приближенное равенство  $\epsilon_1 \approx \epsilon_x^2/2$ , указывающее на малость величины  $\epsilon_1$  в сравнении с величиной  $\epsilon_x$ . Поэтому при  $\nu_{xy} = 1$  вполне допустимо считать  $\epsilon_1 \approx 0$  с принятой ранее степенью точности.

Альтернативными соотношению (18) являются соотношения ( $k = 1, 2$ )

$$\epsilon_1^{(k)} = \sqrt{1 + 2\epsilon_{11}^{(k)}} - 1 = \sqrt{1 + \epsilon_{xx}^{(k)} + \epsilon_{yy}^{(k)} \pm \frac{1}{2}\gamma_{xy}^{(k)}} - 1 = \epsilon_2^{(k)}, \tag{20}$$

имеющие место для каждого  $k$ -го слоя композита и составленные при использовании формул (5) для преобразования компонент их тензоров деформаций. Если в (20) вместо компонент тензора деформаций  $\epsilon_{xx}^{(k)}$ ,  $\epsilon_{yy}^{(k)}$ ,  $\gamma_{xy}^{(k)}$

внести зависимости  $\varepsilon_{xx}^{(k)} = \varepsilon_{xx} \pm \varepsilon_{xx}^{(-)}$ ,  $\varepsilon_{yy}^{(k)} = \varepsilon_{yy} \pm \varepsilon_{yy}^{(-)}$ ,  $\gamma_{xy}^{(k)} = \gamma_{xy} \pm \gamma_{xy}^{(-)}$ , следующие из (11), то получим

$$\left(1 + \varepsilon_1^{(k)}\right)^2 = 1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \pm \left(\varepsilon_{xx}^{(-)} + \varepsilon_{yy}^{(-)}\right) \pm \frac{1}{2}\gamma_{xy}^{(-)}. \quad (21)$$

Примем далее равенства  $\sigma_{yy} = 0$ ,  $\sigma_{xy} = 0$ ,  $\gamma_{xy} = 0$ , имеющие место при растяжении тест-образца. Тогда, исходя из (13), при учете равенств  $A_{13} = A_{23}$ ,  $A_{22} = A_{11}$  и в силу  $A_{12} \neq 0$  получим

$$\varepsilon_{xx}^{(-)} + \varepsilon_{yy}^{(-)} = 0, \quad \gamma_{xy}^{(-)} = -\frac{A_{12}}{A_{23}}\varepsilon_{xx} - \frac{A_{11}}{A_{23}}\varepsilon_{yy}. \quad (22)$$

Следовательно, соотношения (21) при использовании (22) могут быть приведены к виду

$$\left(1 + \varepsilon_1^{(k)}\right)^2 = 1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \mp \frac{1}{2}\left(\frac{A_{12}}{A_{23}}\varepsilon_{xx} + \frac{A_{22}}{A_{23}}\varepsilon_{yy}\right),$$

которые с точностью  $2 + \varepsilon_1^{(k)} \approx 2$  принимают вид

$$\varepsilon_1^{(k)} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \mp \frac{1}{4}\left(\frac{A_{12}}{A_{23}}\varepsilon_{xx} + \frac{A_{22}}{A_{23}}\varepsilon_{yy}\right). \quad (23)$$

Если через  $u, v$  обозначить компоненты вектора перемещений и считать их постоянными в направлении толщины образца, то в приближении плоской задачи в силу  $v_{,x} = 0$  для определения величины  $\varepsilon_{xx}$  будут иметь место строгие кинематические соотношения

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x} + \frac{1}{2}u^2, \quad \varepsilon_1 + 1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} = \sqrt{1 + 2u_{,x} + u^2} = 1 + u_{,x}.$$

Следовательно, в рабочей части образца вдали от закрепленных краев  $\varepsilon_x = u_{,x}$  и  $\varepsilon_{xx} \neq \varepsilon_x$ . Поэтому соотношение (23) при использовании зависимости  $\varepsilon_{yy} = -v_{,xy}\varepsilon_{xx}$ , с точностью  $2 + \varepsilon_x \approx 2$  эквивалентной зависимости  $\varepsilon_y = -v_{,xy}\varepsilon_x$ , преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(k)} &= \left[ \frac{1 - v_{,xy}}{2} \mp \frac{1}{4} \left( \frac{A_{12} - v_{,xy}A_{22}}{A_{23}} \right) \right] \left( \varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_x^2 \right) = \\ &= \left[ \frac{1 - v_{,xy}}{2} \pm \frac{(1 + v_{,xy})\widehat{G}_{12} - (1 - v_{,xy})C}{E_1^* - E_2^*} \right] \left( \varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_x^2 \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Заметим, что соотношения (19) и (24) имеют одинаковую структуру, но разные коэффициенты при  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_x^2$ . Первое из них получено исключительно исходя из рассмотрения геометрической картины деформирования, а второе — исходя из кинематических соотношений с использованием компонент соответствующих тензоров деформаций. Так как  $E_2^* \ll E_1^*$  и  $\widehat{G}_{12} \ll E_1^*$ , то соотношения (24) допустимо записать в упрощенном виде

$$\varepsilon_1^{(1)} = \varepsilon_1^{(2)} = \varepsilon_1 = \frac{(1-\nu_{xy})}{2} \left( \varepsilon_x + \frac{1}{2} \varepsilon_x^2 \right) = \varepsilon_2, \quad (25)$$

следующем с принятой степенью точности из соотношения

$$\varepsilon_1 = -1 + \sqrt{1 + (1-\nu_{xy}) \varepsilon_{xx}} = \varepsilon_2, \quad (26)$$

плоской задачи теории упругости при произвольных деформациях.

Как соотношения (18), (19), так и соотношение (24) является некорректным в предположении  $\nu_{xy} = 1$ , так как приводит к неравенству  $\varepsilon_1 \neq 0$  как при растяжении, так и при сжатии тест-образца. Из этих соотношений соотношения (18), (19) допустимо считать вполне корректными с точностью  $\varepsilon_x^2/2 \approx 0$ . Необходимым условием непротиворечивости и корректности соотношений как (18), (19), так и (24) является выполнение условий  $\nu_{xy} \neq 1$  и  $\nu_{xy} < 1$ , подтверждающихся приведёнными далее результатами экспериментов тест-образцов на растяжение. Более близкими к ним оказались теоретические результаты, соответствующие использованию соотношений (18) и (19), чем соотношений (24) и тем более (25).

И, наконец, исходя из (15), первую формулу из (10) в приближении  $\sigma_{xx} \approx \sigma_x$ ,  $\varepsilon_{xx} \approx \varepsilon_x$  перепишем в виде

$$\sigma_x = \frac{A_{11}^2 - A_{12}^2}{A_{11}} \varepsilon_x.$$

Отсюда в силу того, что  $\sigma_x/\varepsilon_x = \widehat{E}_x^\pm$ , где  $\widehat{E}_x^\pm$  — секущий модуль упругости, определяемый исходя из данных экспериментов на растяжение (знак “+”) или сжатие (знак “-”), при использовании (10) следует формула

$$\widehat{G}_{12}^\pm = \frac{\widehat{E}_x^\pm C}{4C - \widehat{E}_x^\pm}, \quad (27)$$

служащая для построения зависимости  $\widehat{G}_{12}^\pm = \widehat{G}_{12}^\pm(\gamma_{12})$  при найденной экспериментальной величине  $C$  и построенной экспериментальной зависимости  $\widehat{E}_x^\pm = \widehat{E}_x^\pm(\varepsilon_x)$ . Заметим, что в формулу (27) вообще не входит определяемый из эксперимента коэффициент Пуассона  $\nu_{xy}$ . Поэтому точность определения секущего модуля сдвига  $\widehat{G}_{12}$  не зависит от точности

определения коэффициента  $\nu_{xy}$ , влияющего в силу второй формулы в (2) лишь на вид физически нелинейной зависимости  $\widehat{G}_{12}^{\pm} = \widehat{G}_{12}^{\pm}(\gamma_{12})$ .

При растяжении осредненным напряжением  $\sigma_x = p$  тест-образца со структурой  $[\pm 45^{\circ}]_{2s}$  в каждом монослое смежной пары слоев одинаковой толщины в сечениях  $x_1^{(1)} = \text{const}$  ( $x_2^{(2)} = \text{const}$ ),  $x_2^{(1)} = \text{const}$  ( $x_1^{(2)} = \text{const}$ ) (см. рис. 1) формируются напряжения  $\sigma_{ij}^{(k)}$ , удовлетворяющие уравнениям равновесия

$$\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(2)} = p, \quad \sigma_{22}^{(1)} + \sigma_{11}^{(2)} = p, \quad \sigma_{12}^{(1)} + \sigma_{12}^{(2)} = p. \quad (28)$$

Заменив в (3) величины  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  на  $\varepsilon_i^{(k)}$  (что при малых деформациях допустимо в соответствии с известными [15] результатами, в силу равенств

$$\varepsilon_1^{(1)} = \varepsilon_1^{(2)} = \varepsilon_2^{(1)} = \varepsilon_2^{(2)} = \varepsilon_1, \quad \gamma_{12}^{(1)} = \gamma_{12}^{(2)} = \gamma_{12},$$

составленных с учетом симметрии параметров деформированного состояния относительно оси  $Ox$  и их совместности, приходим к зависимостям

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= E_1^* (\varepsilon_1 + \nu_{12} \varepsilon_2) = E_1^* (1 + \nu_{12}) \varepsilon_1, \\ \sigma_{22}^{(1)} &= E_2^* (\varepsilon_2 + \nu_{21} \varepsilon_1) = E_2^* (1 + \nu_{21}) \varepsilon_1, \\ \sigma_{11}^{(2)} &= \sigma_{22}^{(1)} = E_2^* (\varepsilon_2 + \nu_{21} \varepsilon_1) = E_2^* (1 + \nu_{21}) \varepsilon_1, \\ \sigma_{22}^{(2)} &= \sigma_{11}^{(1)} = E_1^* (\varepsilon_1 + \nu_{12} \varepsilon_2) = \\ &= E_1^* (1 + \nu_{12}) \varepsilon_1, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{12} = \widehat{G}_{12}(\gamma_{12}) \gamma_{12}, \end{aligned} \quad (29)$$

имеющим место вплоть до разрушения образца. В силу того, что  $E_1^* \gg E_2^*$  (для рассматриваемого в данной работе ВКМ ЭЛУР-П, как установлено в [1],  $E_1^* \approx 100$  ГПа,  $E_2^* \approx 5-6$  ГПа), в соответствии с (28) и (29) приходим к формулам

$$\sigma_{11}^{(1)} \approx \varkappa p, \quad \sigma_{22}^{(1)} \approx (1 - \varkappa) p, \quad \sigma_{12}^{(1)} = p/2, \quad (30)$$

где  $\varkappa$  — величина, мало отличающаяся от единицы.

## 2. Экспериментальные и численные исследования полей напряжений и деформаций, формирующихся в монослоях тест-образца из ВКМ со структурой $[\pm 45^\circ]_{2s}$ при растяжении и сжатии

В работе [1] получены экспериментальные зависимости  $\varepsilon_y \approx \varepsilon_y(\varepsilon_x)$  для волокнистого композита из однонаправленной углеленты марки ЭЛУР-П и полимерной смолы холодного отверждения ХТ-118, которые для четырех разных тест-образцов со структурой  $[\pm 45^\circ]_4$  при их растяжении представлены на рис. 4. Геометрические размеры образцов этой серии испытаний (первой) следующие:  $a = 110$  мм,  $b = 25$  мм,  $h = 0,52$  мм (параметры  $\lambda = a/b = 4,4$ ,  $h_0 = a/h = 196$ ). Определение деформации  $\varepsilon_x$  в [1] осуществляли в окрестности точки  $O$  образца (см. рис. 1) на базе 25 мм, деформацию  $\varepsilon_y = \Delta b/b$  определяли непрерывной фиксацией приращения ширины  $\Delta b$  с помощью высокоточного навесного экстензометра с базой  $b = 25$  мм.

Принимая линейную аппроксимацию экспериментальных кривых, можно найти значения коэффициента Пуассона  $\nu_{xy}$  для каждого из четырех образцов: 0,92 (образец 1), 1,09 (образец 2), 0,86 (образец 3), 0,98 (образец 4). Видно, что значения  $\nu_{xy}$  лежат в диапазоне  $\nu_{xy} = 0,86—1,09$ , среднее значение  $\nu_{xy} = 0,96$  является весьма близким к единице. Казалось бы, при малых деформациях оно вполне соответствует описанному ранее теоретическому значению  $\nu_{xy} = 1$ . Именно в этой связи в работе [1] для исследуемого композита было принято приближенное равенство  $\nu_{xy} \approx 1$ , в силу которого вместо формулы (2) для определения деформации использовали приближенную формулу  $\gamma_{12} \approx (1 + \nu_{xy})\varepsilon_x$ . Сравнив ее с формулой (17), установили, что  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \ll \gamma_{12}$ .

В дополнение к [1] были проведены испытания на сжатие тест-образцов со структурой  $[\pm 45^\circ]_{36}$  из того же ВКМ, что и в [1], но с геометрическими размерами  $a = 25$  мм,  $b = 25$  мм,  $h = 4,25$  мм и параметрами

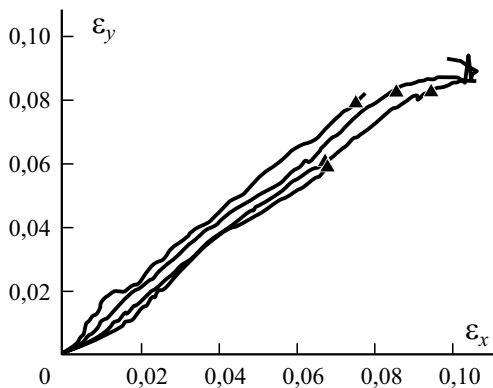


Рис. 4. Зависимости поперечных деформаций от осевых, полученные при растяжении четырех образцов со структурой  $[\pm 45^\circ]_{2s}$ .

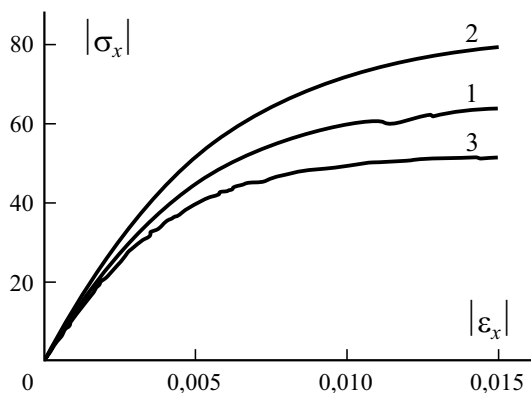


Рис. 5. Диаграммы деформирования: 1 — растяжение длинных образцов ( $\lambda = 4,4$ ,  $h_0 = 196$ ); 2 — сжатие коротких образцов ( $\lambda = 1$ ,  $h_0 = 5,7$ ); 3 — сжатие длинных образцов ( $\lambda = 2,8$ ,  $h_0 = 37$ ).

$\lambda = 1$ ,  $h_0 = 5,7$  (вторая серия экспериментов);  $a = 80$  мм,  $b = 30$  мм,  $h = 2,14$  мм со структурой  $[\pm 45^\circ]_4$  и параметрами  $\lambda = 2,8$ ,  $h_0 = 37$  (третья серия экспериментов). Для реализации третьей серии экспериментов на основе метода испытаний пластмасс на сжатие в соответствии с ГОСТ 9550—81 были применены накладки для предотвращения изгиба рабочей области образца длиной 80 мм. Накладки представляют собой стальные пластины с вырезом для установки на одну из сторон образца экстензометра. Пластины крепятся с двух лицевых сторон рабочей части образца болтами, затягиваемые тарированным моментом.

На рис. 5 представлены диаграммы растяжения и сжатия тест-образцов  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  в виде зависимостей  $\sigma_x^+ = f_x^+(\varepsilon_x)$ ,  $\sigma_x^- = f_x^-(\varepsilon_x)$ , исходя из которых могут быть определены секущие модули упругости  $\hat{E}_x^+$ ,  $\hat{E}_x^-$ , входящие в формулу (27). Видно, что зависимости сильно нелинейные, причем диаграмма растяжения располагается ниже диаграммы сжатия. Следует указать, что такое различие обусловлено прежде всего тем, что испытаниям на растяжение и сжатие подвергаются тест-образцы разной относительной длины и толщины:  $\lambda = a/b = 4,4$ ,  $h_0 = a/h = 196$  — при растяжении;  $\lambda = 1$ ,  $h_0 = 5,7$  — при сжатии коротких и  $\lambda = 2,8$ ,  $h_0 = 37$  — при сжатии длинных образцов. Ввиду различия значений  $\lambda$  измеряемые в центре рабочей части образцов деформации  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  должны существенно различаться в условиях растяжения и сжатия. В [1] предполагали, что различие диаграмм  $\hat{G}_{12}^+ = \hat{G}_{12}^+(\gamma_{12})$  и  $\hat{G}_{12}^- = \hat{G}_{12}^-(\gamma_{12})$  может быть обусловлено также и различием формирующихся в композите полей напряжений и деформаций — при сжатии тест-образцов  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  волокна находятся под действием касательных напряжений  $\sigma_{12}$  и напряжения сжатия в поперечном направлении, в то время как при растяжении они находятся под



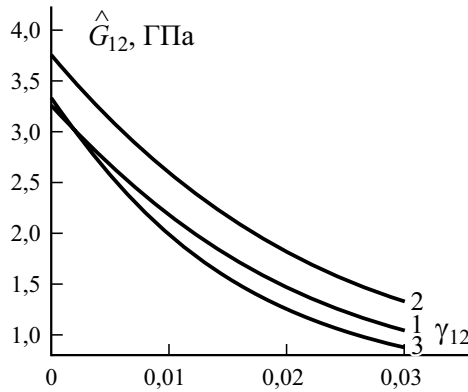


Рис. 6. Зависимости  $\hat{G}_{12}^{\pm} = \hat{G}_{12}^{\pm}(\gamma_{12})$ : Обозначения те же, что на рис. 5.

действием напряжений  $\sigma_{12}$  и напряжения растяжения в поперечном направлении.

На рис. 6 представлены зависимости  $\hat{G}_{12}^{\pm} = \hat{G}_{12}^{\pm}(\gamma_{12})$ , полученные на основе диаграмм деформирования рис. 5 и соотношений (2), (27), приводящим к практически совпадающим результатам. При найденной зависимости  $\hat{G}_{12}^{\pm} = \hat{G}_{12}^{\pm}(\gamma_{12})$  значения напряжения  $\sigma_{12}$  определяются по формуле (3).

Кроме исследований, упомянутых ранее и в работе [1], были проведены дополнительные экспериментальные исследования на растяжение образцов из однонаправленного композита ЭЛУР-П на основе связующего холодного отверждения с перекрёстной схемой укладки  $[\pm 45^{\circ}]_{2s}$ . Для испытаний были изготовлены образцы согласно ГОСТ 25.601—80 (международный аналог ASTM D3518) со схемой укладки  $[\pm 45^{\circ}]_4$ , общей длиной  $L = 180$  мм, длиной рабочей части  $a = 110$  мм, шириной  $b = 25$  мм, средней толщиной  $h = 0,56$  мм. Испытания проводили на электромеханической испытательной машине Instron 5884, на которую установлен динамометр с пределом измерения  $\pm 150$  кН.

Замеры компонент деформаций  $\varepsilon_x^*$ ,  $\varepsilon_y^*$ ,  $\varepsilon_1^*$  (звездочки указывают на принадлежность к одной из лицевых поверхностей образца) проводили с помощью системы бесконтактного измерения деформаций Vic 3D. Такая система состоит из двух видеокамер, направленных на образец под разными углами, обрабатывающего устройства (контроллера) и программного обеспечения. Использование двух камер позволяет получить стереоскопическое изображение, с помощью обработки которого можно получить поле деформаций в плоскости образца. В соответствии с технологией проведения испытаний до эксперимента через трафарет на образец (рис. 7—а) наносят поле контрольных точек, изменение рассто-

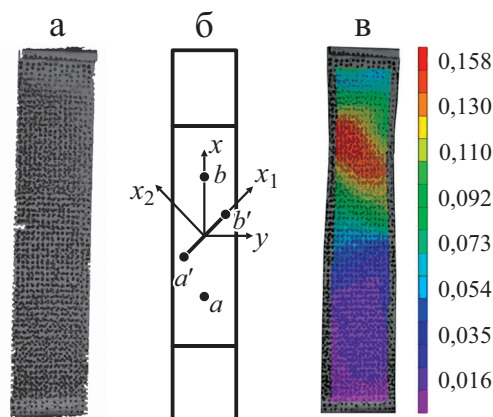


Рис. 7. Вид образца с нанесённым полем контрольных меток (а), системы координат образца (б), распределение осевых деформаций  $\varepsilon_x$  перед разрушением при  $\sigma_x \approx 68$  МПа (в).

яния между которыми является основой для вычисления поля деформаций. Образец устанавливают в клиновые захваты и нагружают кинематическим способом до разрушения с постоянной скоростью перемещения траверсы 15 мм/мин.

С помощью программного обеспечения, входящего в комплекс Vic 3D, возможно вычисление деформаций вдоль заданных линий на заданной базе измерения. Осевые деформации в осях образца вычислены на базе 25 мм вдоль линии  $ab$  (рис.7—б). Анализ зависимости осевых напряжений в осях образца  $\sigma_x$  от деформаций  $\varepsilon_x^*$ , отождествлённых с осреднёнными деформациями  $\varepsilon_x$ , показывает, что она практически точно соответствует диаграммам, построенным в работах [1, 34] и полученным с применением контактного экстензометра (см. кривую 1 рис. 5).

Программное обеспечение Vic 3D позволяет визуализировать поле перемещений в каждый момент времени нагружения, на основе которого происходит вычисление параметров плоского напряженного состояния тест-образца.

Поле деформаций  $\varepsilon_x$  получено и визуализировано на основных этапах нагружения. В начальный момент нагружения значения осевых деформаций  $\varepsilon_x$  имеют порядок  $10^{-5}$  и лежат в пределах погрешности измерения системы. Далее на этапе, деформированное состояние которого соответствует  $\sigma_x \approx 18$  МПа,  $\varepsilon_x = 0,00035$ , наблюдается формирование областей концентрации осевых деформаций в районе закрепления, а также на торцевых краях образца вдоль оси  $x_2$ . При  $\sigma_x \approx 60$  МПа,  $\varepsilon_x = 0,0074$  становится заметно, как осевые деформации локализуются в верхней половине образца, когда краевой эффект начинает проявляться более явно. Начинается формирование двух линий в направлении осей  $x_1$  и  $x_2$  в зонах, в которых деформации  $\varepsilon_x$  принимают максимальные значения.

Далее развитие осевых деформаций сосредоточивается в полосе, соединяющей места концентрации напряжений на начальных этапах нагружения, в то время как деформации в нижней половине образца практически прекратили свой рост. На следующем этапе можно наблюдать утонение образца в области формирования наибольших деформаций. Такой процесс можно сравнить с образованием шейки при растяжении металлических образцов. В этот момент осевые деформации продолжают рост в центре образца. Рис. 7—*в* соответствует деформированному состоянию непосредственно перед потерей несущей способности при  $\sigma_x \approx 68$  МПа,  $\varepsilon_x = 0,061$ . Замечено, что осевые деформации в средней части образца растут быстрее, чем на продольных краях, тогда как поле деформаций на остальной части образца практически не меняется.

Особо следует отметить, что коэффициент Пуассона  $\nu_{xy}$ , полученный при обработке экспериментальных данных с использованием бесконтактной системы измерения, во всём диапазоне деформаций  $\varepsilon_x$  в центре рабочей части оказался равным  $\nu_{xy} = 0,85$  и практически совпал со значением  $\nu_{xy}$  только для образца 3, но ниже найденного среднего значения  $\nu_{xy} = 0,96$ . С целью установления причины такого расхождения было проведено исследование структуры перекрёстно армированного композита ЭЛУР-П с помощью оптического микроскопа Carl Zeiss Stemi 2000, которое позволило установить характер распределения связующего в монослоях и между ними. Для этого методом вакуумного формования была изготовлена пластина со структурой  $[\pm 45^\circ]_2$ , а из неё изготовлен образец, позволяющий исследовать поперечное сечение композита (рис. 8). Толщина пластины согласно масштабной линейке на рис. 8 0,29 мм. В поперечном сечении можно заметить неоднородность структуры: сверху и снизу расположены жесткие монослои, содержащие армирующие волокна (их толщина в среднем равна 0,13 мм), а между ними расположена отмеченная красными линиями прослойка связующего

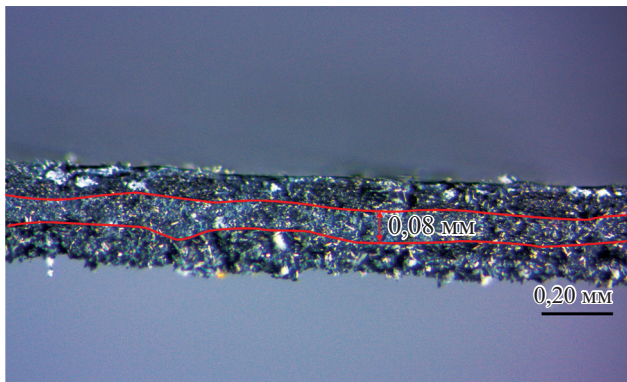


Рис. 8. Поперечное сечение пластины со структурой  $[\pm 45^\circ]_2$  из композита ЭЛУР-П.

толщиной 0,07—0,08 мм (адгезионный слой). В среднем слое, как видно на фотографии, практически отсутствуют волокна композита, поэтому его можно считать однородным и изотропным с модулем упругости  $E = 2,7$  ГПа, значительно меньшим, чем модули  $E_1$  и  $E_2$  [1].

Необходимо отметить, что основной отличительной особенностью поведения относительно тонких тест-образцов со структурами  $[\pm 45^\circ]_2$  и  $[\pm 45^\circ]_4$  при растяжении является наблюдаемый в экспериментах их изгиб в плоскости  $yOz$ . Такой изгиб приводит к тому, что контактным поперечным экстензометром замеряется не деформация  $\varepsilon_y^*$  на лицевой поверхности, а длина хорды изогнутого поперечного сечения. В результате определяемое с помощью экстензогра значение  $\varepsilon_y$ , а следовательно, и  $\nu_{xy} = -\varepsilon_y / \varepsilon_x$  оказывается завышенным в сравнении с  $\nu_{xy} = 0,85$ , полученным оптическим методом. Такая особенность их механического поведения в наибольшей степени проявляется у образцов со структурой  $[\pm 45^\circ]_2$ . Для таких образцов теоретическое описание процесса деформирования с приемлемой степенью точности требует применения трехслойной модели деформирования, изложению которой будет посвящена отдельная статья.

Исходя из результатов экспериментов на растяжение плоских тест-образцов, описанных в работе [1] и изображенных на рис. 5, по формуле (19) были вычислены осевые деформации  $\varepsilon_1$  в осях ортотропии монослоя (см. рис. 7—б), а также найдены экспериментальные значения  $\varepsilon_1$  на базе  $a' b'$ , равной 20 мм. Эти результаты на рис. 9 приведены в виде зависимостей осевых деформаций  $\varepsilon_1$  в осях ортотропии от осевых деформаций  $\varepsilon_x$  в осях образца при разных значениях коэффициента Пуассона  $\nu_{xy}$ . Сплошные линии — зависимости  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon_x)$ , вычисленные по формуле (19) с использованием замеренных деформаций  $\varepsilon_x$  при разных значениях коэффициента Пуассона, темные кружки — зависимость, построенная на основе экспериментально замеренных осевых

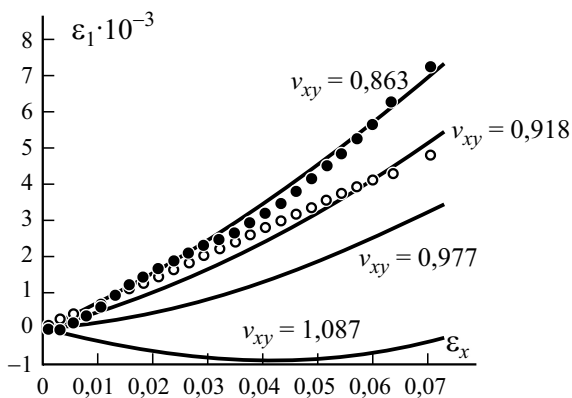


Рис. 9. Зависимость осевых деформаций  $\varepsilon_1$ . Пояснения в тексте.

деформаций  $\varepsilon_1$  вдоль волокон монослоя, а светлые кружки — зависимость, построенная на основе наиболее упрощенной в сравнении с (19) формулы  $\varepsilon_1^{(k)} \approx \varepsilon_{11}^{(k)} = (1 - \nu_{xy}) \varepsilon_{xx} / 2$  при  $\nu_{xy} = 0,86$ . Как видно из данного рисунка, зависимость осевых деформаций  $\varepsilon_1$  при  $\nu_{xy} = 0,86$  практически совпала с экспериментальными значениями, а все три приведенные кривые можно считать практически совпадающими до  $\varepsilon_x \approx 0,02$ , в то время как для рассматриваемого композита значение  $\varepsilon_x \approx 0,015$  превышает предельно допустимые эксплуатационные значения. Если же в расчетах принять значение  $\nu_{xy} = 1$ , то экспериментальные значения и значения по формуле (19) будут сильно различаться, а при  $\nu_{xy} = 1,08$  значения  $\varepsilon_1$  вообще перестают соответствовать какому-либо реальному физическому смыслу.

Анализируя полученные результаты, следует отметить, что принятое в [1] приближенное равенство  $\nu_{xy} \approx 1$ , рекомендуемое известными стандартами испытаний на растяжение перекрёстно армированных тест-образцов со структурой  $[\pm 45^\circ]_{2s}$ , не приводит к значительным погрешностям при определении деформации сдвига  $\gamma_{12}$ , в то время как при вычислении деформации  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  оно является абсолютно некорректным. Данный вывод следует также и из анализа формул (10) и (15).

Используя физические соотношения (29), определили нормальные и касательные напряжения в осях ортотропии монослоя. На рис. 10 они приведены в виде зависимостей нормальных напряжений в направлении волокон  $\sigma_{11} = \sigma_{11}(\sigma_x)$ , нормальных напряжений поперёк волокон  $\sigma_{22} = \sigma_{22}(\sigma_x)$  и касательных напряжений  $\sigma_{12} = \sigma_{12}(\sigma_x)$  первого монослоя от нормальных напряжений в осях образца  $\sigma_x$ . Можно видеть, что нормальные напряжения, найденные на основе экспериментальных данных,

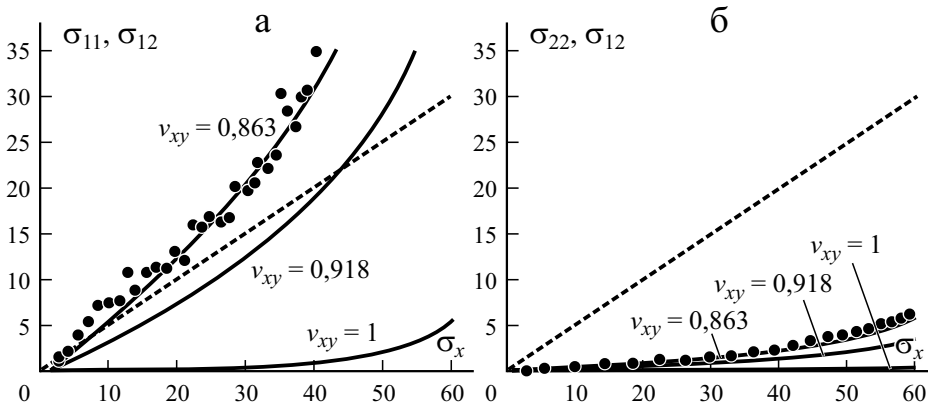


Рис. 10. Зависимость нормальных (—)  $\sigma_{11} = \sigma_{11}(\sigma_x)$  (а) и  $\sigma_{22} = \sigma_{22}(\sigma_x)$  (б) и касательных (---) напряжений  $\sigma_{12} = \sigma_{12}(\sigma_x)$  в осях ортотропии от напряжений  $\sigma_x$ . (●) — эксперимент.

хорошо согласуются с экспериментально-теоретическими значениями. Следует также отметить, что напряжения  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{12}$  на рис. 10—*a* практически совпадают до значений  $\sigma_{11} = 5$  МПа, что согласуется, как будет установлено далее, и с результатами конечно-элементного решения задачи в линейной постановке. При дальнейшем увеличении напряжений  $\sigma_x$  наблюдается существенно нелинейное поведение напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$ . Как видно из рис. 10, при использовании приближенного равенства  $\nu_{xy} = 1$  эти компоненты напряжений, найденные по описанной методике, значительно ниже экспериментальных значений нормальных напряжений.

И, наконец, в силу (15), (29) в приближении  $\gamma_{xy} = 0$ ,  $\varepsilon_x^{(k)} \approx \varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y^{(k)} \approx \varepsilon_y \approx 0$ , но  $\gamma_{xy}^{(-)} \neq 0$  из соотношений (6) следует формула

$$\sigma_{xy}^{(k)} = \pm A_{13} (1 - \nu_{xy}) \varepsilon_x \mp \frac{A_{33}}{A_{13}} (A_{12} - \nu_{xy} A_{11}) \varepsilon_x. \quad (31)$$

Она указывает на то, что в монослоях поперечного сечения образца  $x = \text{const}$  при  $\nu_{xy} < 1$  наряду с напряжениями  $\sigma_x^{(k)} \approx \sigma_x$  формируются также не равные нулю касательные напряжения  $\sigma_{xy}^{(k)}$ . В свою очередь они эквивалентны формирующемуся в поперечном сечении погонному крутящему моменту  $M_{xy} = H_* \sigma_{xy}^{(1)}$ , где  $H_*$  — расстояние между срединными поверхностями первого ( $k = 1$ ) и последнего ( $k = N$ ) монослоев ВКМ.

*Конечно-элементный анализ.* Для определения сдвиговой механической характеристики  $G_{12}(\gamma_{12})$  волокнистых композитных материалов из них, как правило, изготавливают плоские тест-образцы шириной  $b$ , с длиной рабочей части  $a$  и состоящие из конечного числа монослоев, уложенных под углами  $\pm 45^\circ$  к оси  $Ox$  (см. рис. 1). Их крепление в захватах при испытаниях на растяжение и сжатие позволяет осуществить кинематическое нагружение путем задания перемещения  $u$  сечения  $x = a/2$  в направлении оси  $x$  при неподвижном сечении  $x = -a/2$ .

В дополнение к приведенным экспериментальным результатам в конечно-элементном комплексе ANSYS в линейно-упругом приближении было проведено и численное исследование напряженно-деформированного состояния тест-образцов длиной  $a = 110$  мм и шириной  $b = 25$  мм (см. рис. 1). Исследованы два типа образцов: состоящие из двух монослоев, толщина каждого из которых  $t = 0,12$  мм, углы укладки  $+45^\circ$  и  $-45^\circ$ , а также образцы, состоящие из четырех монослоев со структурой  $[\pm 45^\circ]_4$ . Исходя из микромасштабного анализа структуры поперечного сечения образцов (см. рис. 8), проведенного с помощью оптического микроскопа, для более точного моделирования процесса деформирования образцов между смежными жесткими монослоями введены в рассмотрение менее жесткие адгезионные слои толщиной  $t = 0,07$  мм. Расчетные значения эффективных упругих характеристик материалов монослоев следующие:  $E_1 = 105$  ГПа (в направле-

нии волокон),  $E_3 = E_2 = 5,7$  ГПа (в направлении поперёк волокон),  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3,2$  ГПа,  $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,34$ , материал адгезионных слоев в соответствии с результатами работы [1] принят изотропным с упругими характеристиками  $E = 2,5$  ГПа,  $\nu = 0,3$ . Растяжения тест-образца моделировали кинематическим нагружением, задавая перемещение края  $x = a/2$  в направлении оси  $x$  на величину  $u = 0,01a$  при неподвижном крае  $x = -a/2$ . Анализ проводили, моделируя каждый слой образца трехмерными элементами SOLID186 с одним элементом по толщине каждого из слоев. Результаты сравнивали с полученными при плоской постановке задачи с использованием двухмерного элемента PLANE183 (предполагали, что пластина находится в плосконапряженном состоянии) при значениях жесткостных коэффициентов материала образца, осредненных по его толщине. Значения осредненных жесткостных коэффициентов в осях образца ( $xOy$ ) вычисляли по формулам (7), дополненным соотношениями  $\sigma_{xz} = G_{13}\gamma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz} = G_{23}\gamma_{yz}$ , использованными в приближении  $G_{13} = G_{12}$  и  $G_{23} \approx G_{13}$ . При проведении расчетов перемещение  $u$  для расчетных случаев 1) и 2) нормировали также из условий выполнения равенств

$$\frac{1}{b} \sum_{k=1}^2 \int_{y=-b/2}^{b/2} \sigma_x^{(k)}(y) dy = 2p \text{ при } x = 0.$$

При анализе параметров НДС, сформированных в слоях образцов из двух и четырех слоев ( $N = 2$  и  $N = 4$ ) волокнистого материала, выявлены следующие закономерности для компонент напряжений:

$$\sigma_x^{(1)}(x, y) = \sigma_x^{(N)}(x, -y), \quad \sigma_y^{(1)}(x, y) = \sigma_y^{(N)}(x, -y),$$

$$\sigma_{xy}^{(1)}(x, y) = -\sigma_{xy}^{(N)}(x, -y), \quad \forall y \in [-b/2, b/2],$$

$$\sigma_x^{(1)}(x, y) = \sigma_x^{(N)}(-x, y), \quad \sigma_y^{(1)}(x, y) = \sigma_y^{(N)}(-x, y),$$

$$\sigma_{xy}^{(1)}(x, y) = -\sigma_{xy}^{(N)}(-x, y), \quad \forall x \in [-a/2, a/2].$$

В ходе анализа результатов установлены наличие ярко выраженных граничных эффектов вблизи угловых точек, малая изменчивость компонент напряжений в центральной зоне образцов, а вдали от центра образцов (в окрестностях сечений  $x = \pm a/4$ ) — незначительная несимметрия значений напряжений в слое относительно оси  $x$ . Как и следовало ожидать, во всех слоях нормальные напряжения  $\sigma_y$  пренебрежимо малы в сравнении с напряжениями  $\sigma_x$ , а в каждом монослое формируются также касательные напряжения  $\sigma_{xy}^{(k)}$ , практически постоянные по ширине каждого монослоя образца, из которых напряжения  $\sigma_{xy}^{(1)}$  и  $\sigma_{xy}^{(N)}$ , как уже было

отмечено (см. формулу (31)), преимущественно и формируют погонный крутящий момент  $M_{xy}$  в поперечном сечении  $x = \text{const}$ , вызывающий его изгиб в плоскости  $yOz$ . В наибольшей степени такой изгиб проявляется в двухслойных образцах, учет наличия между ними менее жесткого адгезионного слоя (см. рис. 8) может заметно повлиять и на точность результатов теоретических расчетов, основанных на использовании математических моделей деформирования той или иной степени точности. Пересчет напряжений в осях ортотропии слоев показал, что в центральной зоне образца с большой степенью точности выполняются приближенные равенства  $\sigma_{11}^{(1)} \approx \sigma_{22}^{(N)} \approx \pm p$ ,  $\sigma_{22}^{(1)} \approx \sigma_{11}^{(N)} \approx 0$ ,  $\sigma_{12}^{(1)} \approx \sigma_{12}^{(N)} \approx \pm p/2$  (формулы (30)). Такие зависимости для образцов из однонаправленного композита при симметричной укладке слоёв под углами  $\pm 45^\circ$  обусловлены высокой жесткостью слоя лишь в направлении одной из осей ( $x_1$  — для слоев с углом укладки  $\varphi = 45^\circ$  к оси  $Ox$  и  $x_2$  — для слоев с углом укладки  $\varphi = -45^\circ$ ). При этом напряжение в направлении поперек волокон перераспределяется на соседний слой, увеличивая значение осевого нормального напряжения в волокне.

Проведено сравнение результатов, полученных при разных значениях  $G_{12}$  для двух расчетных случаев:

1)  $G_{13} = G_{12} = 3,450$  ГПа — при сжатии образца;  $G_{13} = G_{12} = 2,920$  ГПа — при растяжении образца (данные значения касательных модулей сдвига соответствуют начальным этапам нагружения образцов при малых сдвиговых деформациях [1]);

2)  $G_{13} = G_{12} = 459$  МПа — как при растяжении, так и при сжатии образцов (данное значение касательного модуля сдвига соответствует предельному напряжению сжатия образцов вдоль волокон и их разрушению из-за потери устойчивости по сдвиговой форме).

Установлена существенная зависимость компонент напряжений от модуля сдвига  $G_{12}$  лишь вблизи линий  $AB$  и  $CD$  (см. рис. 1). Как следствие, для длинных образцов законы изменения компонент напряжений вдоль центральной линии  $KL$  для расчетных случаев 1) и 2) практически идентичны. Для коротких образцов изменение модуля сдвига по мере нагружения оказывает существенное влияние на определяемые компоненты напряжений во всей рабочей области образца.

Полученные результаты расчетов показали большую точность определения касательных напряжений  $\sigma_{xy}^{(k)}$  по формуле (31). Вторая формула в (2) и первая формула в (17) остаются справедливыми с погрешностью менее 0,01% по всей длине образцов. Исключением являются только угловые точки и только при плоской постановке задачи, погрешность при такой постановке задачи может достигать 10%. Отсюда следует вывод о том, что изложенная теоретико-экспериментальная методика построения зависимости  $\hat{G}_{12} = \hat{G}_{12}(\gamma_{12})$ , основанная на формулах (2), (7), (15) и (20), имеет достаточную степень точности в центральной зоне образца со структурой  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  при  $s \geq 2$ .



### Заключение

В работе [16], исходя из результатов серии экспериментальных исследований на растяжение, проведенных на тест-образцах из косоугольно армированных волокнистых композитов со структурой  $[\pm 45^\circ]_{2s}$ , было установлено, что полную осевую деформацию  $\varepsilon_x$  можно представить в виде суммы четырех составляющих:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_0} + \varepsilon_\partial^r(\sigma_x, t) + \varepsilon^v(\sigma_x, t) + \varepsilon^{nel} + \varepsilon^R(\sigma_x), \quad (32)$$

включающих мгновенную остаточную (необратимую) деформацию  $\varepsilon^R(\sigma_x)$ , нелинейную обратимую деформацию  $\varepsilon^{nel}$ , необратимую деформацию ползучести  $\varepsilon_\partial^r(\sigma_x, t)$  и обратимую деформацию ползучести  $\varepsilon^v(\sigma_x, t)$  из-за вязкоупругих свойств матрицы. Были рассмотрены вопросы выбора соотношений для описания составляющих деформаций и задачи идентификации входящих в них параметров.

Как следует из выражений (2) и (11),  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \ll \gamma_{12}$ , а  $\gamma_{12} = (1 + \nu_{xy})\varepsilon_x$ . Поэтому в формуле (32) все составляющие деформации  $\varepsilon_x$  представляют собой, главным образом, соответствующие составляющие сдвиговой деформации  $\gamma_{12}$  с нормирующим коэффициентом  $(1 + \nu_{xy})$ . По-видимому, допустимо предположить, что из них две последние составляющие при однократном нагружении образца до разрушения формируются, главным образом, из-за потери устойчивости структурных элементов композита по микро- и минимасштабным формам [34]. Как будет показано во второй части статьи, из-за различий механизмов их реализации в условиях растяжения и сжатия тест-образцов, по-видимому, в значительной степени различными оказались и результаты, приведенные на рис. 5 и рис. 6.

Полученные теоретические и экспериментальные результаты показывают, что точность определения модуля сдвига  $\tilde{G}_{12}$  исходя из экспериментально устанавливаемой зависимости  $\sigma_{12} = \sigma_{12}(\gamma_{12})$  достаточно высока и она в меньшей степени зависит от точности определения коэффициента Пуассона  $\nu_{xy}$ , чем точность определения компонент напряжений  $\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}$  в осях ортотропии  $k$ -го монослоя ВКМ. Последняя, как следует из формулы (19), весьма чувствительна к точности определения коэффициента Пуассона  $\nu_{xy}$ . Более того, она обусловлена также и тем, какая же мера деформаций используется для вычисления величин  $\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}$ . В этой связи необходимо отметить, что более корректными и физически содержательными представляются соотношения (14), полученные заменой в соотношениях (3) величин  $\varepsilon_{ii}^{(k)}$  на величины  $\varepsilon_i^{(k)}$ .

Работа выполнена за счет средств Российского научного фонда (проект № 19-79-10018, раздел 2, проект № 19-19-00059, раздел 1) и за счёт средств

Программы стратегического академического лидерства Казанского (При-  
волжского) федерального университета (“ПРИОРИТЕТ-2030”) (Введение).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Paimushin V. N., Kholmogorov S. A.* Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder // *Mech. Compos. Mater.* — 2018. — Vol. 54, No. 1. — P. 2—12.
2. *Jumahat A., Soutis C., Jones F. R., Hodzic A.* Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading // *Compos. Struct.* — 2010. — Vol. 92. — P. 295—305.
3. *Hapke J., Gehrig F., Huber N., Schulte K., Lilleodden E. T.* Compressive failure of UD-CFRP containing void defects: In situ SEM microanalysis // *Compos. Sci. Technol.* — 2011. — Vol. 71. — P. 1242—1249.
4. *Niu K., Talreja R.* Modeling of compressive failure in fiber reinforced composites // *Int. J. Solids Struct.* — 2000. — Vol. 37, No. 17. — P. 2405—2428.
5. *Naik N. K., Kumar R. S.* Compressive strength of unidirectional composites: evaluation and comparison of prediction models // *Compos. Struct.* — 1999. — Vol. 46. — P. 299—308.
6. *Davidson P., Waas A. M.* Mechanics of kinking in fiber-reinforced composites under compressive loading // *Math. Mech. Solids.* — 2016. — Vol. 21, No. 6. — P. 667—684.
7. *Prabhakar P., Waas A. M.* Interaction between kinking and splitting at the compressive failure of unidirectional fiber reinforced laminated composites // *Compos. Struct.* — 2013. — Vol. 98. — P. 85—92.
8. *Pimenta S., Gutkin R., Pinho S. T., Robinson P.* A micromechanical model for kink-band formation: Part I — Experimental study and numerical modelling // *Compos. Sci. Technol.* — 2009. — Vol. 69, Nos. 7—8. — P. 948—955.
9. *Kondratiev A. V., Gaidachuk V. E., Kharchenko M. E.* Relationships between the ultimate strengths of polymer composites in static bending, compression, and tension // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 55, No. 2. — P. 367—378.
10. *Allix O., Feld N., Baranger E., Guimard J.-M., Ha-Minh C.* The compressive behaviour of composites including fiber kinking: modelling across the scales // *Mechanica.* — 2014. — Vol. 49, No. 11. — P. 2571—2586.
11. *Полилов А. Н.* Этюды по механике композитов. — М.: Физматлит, 2015. — 320 с.
12. D3518/3518M-94 (Reapproved 2001). Standard Test Method for In-Plane Shear Response of Polymer Matrix Composite Materials by Tensile Test of a  $\pm 45^\circ$  Laminate, Vol. 15.03, Space Simulation; Aerospace and Aircraft; Composite Materials. ASTM International, West Conshohocken, PA (2005).
13. *Paimushin V. N., Polykova N. V., Kholmogorov S. A., Shishov M. A.* Buckling modes of structural elements of off-axis fiber-reinforced plastics // *Mech. Compos. Mater.* — 2018. — Vol. 54, No. 2. — P. 133—144.
14. *Paimushin V. N., Gazizullin R. K., Shishov M. A.* Flat internal buckling modes of fibrous composite elements under tension and compression at the mini- and microscale // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* — 2019. — Vol. 60, No. 3. — P. 548—559.
15. *Новожилов В. В.* Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958. — 369 с.

16. *Paimushin V. N., Kayumov R. A., Kholmogorov S. A.* Deformation features and models of  $[\pm 45]_{2s}$  cross-ply fiber-reinforced plastics in tension // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 55, No. 2. — P.141—154.

17. *Paimushin V. N., Gazizullin R. K., Shishov M. A.* Spatial buckling modes of a fiber (fiber bundle) of composites with a  $[\pm 45]_{2s}$  stacking sequence under the tension and compression of test specimens // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 55, No. 6. — P.743—760.

18. *Hajlane A., Varna J.* Identification of a model of transverse viscoplastic deformation for a UD composite from curvature changes of unsymmetric cross-ply specimens // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 55, No. 3. — P. 519—552.

19. *Giannadakis K., Mannberg P., Joffe R., Varna J.* The sources of inelastic behavior of glass fibre/vinylester non-crimp fabric  $[\pm 45]_s$  laminates // *J. Reinf. Plast. Compos.* — 2011. — Vol. 30, No. 12. — P.1015—1028.

20. *Giannadakis K., Varna J.* Analysis of nonlinear shear stress-strain response of unidirectional GF/EP composite // *Composites: Part A.* — 2014. — No. 62. — P. 67—76.

21. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. — Киев: Наукова думка, 1973. — 270 с.

22. *Гузь А. Н., Декрет В. А.* Модель волокон конечных размеров в трехмерной теории устойчивости композитных материалов (обзор) // *Прикл. механика.* — 2016. — Т. 52, № 1. — С. 3—77.

23. *Гузь А. Н.* О построении основ механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор) // *Прикл. механика.* — 2014. — Т. 50, № 1. — С. 5—89.

24. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. — М.: Машиностроение, 1980. — 375 с.

25. *Rosen B. W.* Mechanics of composite strengthening // *Fibre Composite Materials / Proc. Am. Soc. Metals, USA: 1965.* — P. 574—586.

26. *Budiansky, B., Fleck, N. A.* Compressive failure of fibre composites // *J. Mech. Phys. Solids.* — 1993. — Vol. 41, No. 1. — P. 183—211.

27. *Li Xu Yong, Reifsnider K. L.* Micromechanical modeling of composite compressive strength // *J. Compos. Mater.* — 1993. — Vol. 27, No. 6. — P. 572—588.

28. *Abrosimov N. A., Elesin A. V., Igumnov L. A.* Numerical simulation of the process of loss of stability of composite cylindrical shells under combined quasi-static and dynamic actions // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 55, No. 1. — P. 61—76.

29. *Zhang G., Latour Jr. R. A.* An analytical and numerical study of fiber microbuckling // *Compos. Sci. Techn.* — 1994. — Vol. 51, No. 1. — P. 95—109.

30. *Naik N. K., Kumar R. S.* Compressive strength of unidirectional composites: evaluation and comparison of prediction models // *Compos. Struct.* — 1999. — Vol. 46, No. 3. — P. 299—308.

31. *Jumahat A., Soutis C., Jones F. R., Hodzic A.* Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading // *Compos. Struct.* — 2010. — Vol. 92, No. 2. — P. 295—305.

32. *Paimushin V. N., Kholmogorov S. A., Gazizullin R. K.* Mechanics of unidirectional fiber-reinforced composites: buckling modes and failure under compression along fibers // *Mech. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 53, No. 6. — P. 737—752.

33. *Паймушин В. Н., Шалашилин В. И.* О соотношениях теории деформаций в квадратичном приближении и проблемы построения уточненных вариантов геометрически нелинейной теории слоистых элементов конструкций // *Прикл. математика и механика.* — 2005. — Т. 69, № 5. — С. 861—881.

34. *Paimushin V. N., Kholmogorov S. A., Makarov M. V., Tarlakovskii D. V., Lukasiewicz A.* Mechanics of fiber composites: forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests // *Z. Angew. Math. Mech.* — 2019. — Vol. 99, No. 1. art. No. e201800063. doi: 10.1002/zamm.201800063

35. *Васильев В. В.* Механика конструкций из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1988. — 272 с.

36. *Rosen B. W.* A Simple procedure for experimental determination of the longitudinal shear modulus of unidirectional composites // *J. Compos. Mater.* — 1972. — Vol. 6. — P. 552—554.

Поступила в редакцию 16.07.2020

Окончательный вариант поступил 05.01.2022

Received July 16, 2020 (Jan. 5, 2022)

---