

Нгуен Дин Дык^{a,б}, Зыонг Туан Мань^a, Нгуен Динь Хоа^a, Фам Динь Нгуен^a*

^a*Department of Engineering and Technology of Constructions and Transportation, VNU – Hanoi – University of Engineering and Technology (UET), 144 – Xuan Thuy – Cau Giay – Hanoi – Vietnam*

^б*NTT Institute of High Technology, Nguyen Tat Thanh University - District 4, Ho Chi Minh City, Vietnam*

МЕХАНИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ АУКСЕТИЧЕСКИХ УСЕЧЕННЫХ КОНИЧЕСКИХ САНДВИЧ-ОБОЛОЧЕК НА УПРУГИХ ОСНОВАНИЯХ¹

Nguyen Dinh Duc, Duong Tuan Manh, Nguyen Dinh Khoa, and Pham Dinh Nguyen*

MECHANICAL STABILITY OF ECCENTRICALLY STIFFENED AUXETIC TRUNCATED CONICAL SANDWICH SHELLS SURROUNDED BY ELASTIC FOUNDATIONS

Keywords: static stability, sandwich truncated conical shells, stiffeners, auxetic materials, analytical approach

The static stability of auxetic truncated conical sandwich shells reinforced by stiffeners surrounded by elastic foundations is investigated. The shells are made from two isotropic outer layers and an auxetic core layer with a negative Poisson ratio. Based on the classical shell theory, combined with the displacement and Bubnov—Galerkin methods, the governing equations of the shells are derived and solved. The critical buckling load of the shells as a function of their geometrical parameters, the honeycomb structure, stiffeners, and types of elastic foundations are examined in detail.

Ключевые слова: устойчивость статическая, сандвич-оболочки усеченные конические, ребра жесткости, материалы ауксетические, подход аналитический

Исследована статическая устойчивость ауксетических усеченных конических сандвич-оболочек, подкреплённых ребрами жесткости и покоящихся на упругих основаниях. Оболочки состоят из

*Автор, с которым следует вести переписку: ducnd@vnu.edu.vn
Corresponding author: ducnd@vnu.edu.vn

¹Перевод с англ.

двух изотропных лицевых слоев и ауксетической сердцевины с отрицательным коэффициентом Пуассона. На основе классической теории оболочек в сочетании с методами перемещений и Бубнова—Галеркина выведены и решены определяющие уравнения оболочек. Подробно рассмотрена критическая нагрузка потери устойчивости оболочек как функция их геометрических параметров, сотовой структуры, ребер жесткости и типов упругого основания.

Введение

Конические и усеченные конические оболочки широко используют в аэрокосмической, машиностроительной и строительной отраслях промышленности. Поэтому изучение их статического и динамического поведения привлекло многих исследователей. Результаты изучения собственных частот и критических нагрузок потери устойчивости слоистых композитных усеченных конических оболочек представлены в [1]. В [2] рассмотрена потеря устойчивости усеченных конических оболочек со свойствами, непрерывно изменяющимися по толщине и подверженных гидростатическому давлению [2] и осевым сжимающим нагрузкам [3]. В [4] также исследовали нелинейную потерю устойчивости изначально несовершенных функционально-градиентных усеченных конических оболочек с граничными условиями свободного опирания. Используя нелинейность фон Кармана и теорию больших деформаций, в [5] с помощью теории сдвигового деформирования проанализировали нелинейное динамическое поведение функционально-градиентных усеченных конических оболочек, окруженных упругой средой. В [6] проанализировали свободные колебания многослойных усеченных конических оболочек, содержащих функционально-градиентные слои. В [7] также представили анализ потери устойчивости функционально-градиентных композитных конических оболочек, армированных углеродными нанотрубками.

Используя аналитический подход, в [8, 9, 10—14] выполнили анализ потери устойчивости функционально-градиентных усеченных конических оболочек, подверженных осевым сжимающим нагрузкам и внешнему равномерному давлению. В [15] представили экспериментальные и теоретические результаты изучения несущей способности продольно сжатых легка конических композитных оболочек. В [16] исследовали устойчивость конических бороалюминиевых оболочек, подверженных осевой нагрузке и внешнему давлению. Колебания функционально-градиентных усеченных конических оболочек при гармоническом возбуждении исследовали в [17] с помощью полуаналитического метода. В [18] изучали нелинейные колебания и резонанс функционально-градиентных усеченных конических оболочек. Используя метод конечных элементов, в [19—21] исследовали критические механические и тепловые нагрузки и собственные частоты

функционально-градиентных композитных конических оболочек, армированных углеродными нанотрубками.

Поскольку ауксетические материалы — одни из самых современных материалов, используемых в конструкциях пластин и оболочек, подвергающихся взрывным нагрузкам, их нелинейный динамический отклик и проблемы колебаний изучали подробно. Исследовали ауксетические пластины [22], цилиндрические ауксетические оболочки с ребрами жесткости и без них [23, 24], двояко изогнутые пологие ауксетические оболочки без ребер жесткости [25, 26], многослойные пьезоэлектрические ауксетические пластины [27]. Кроме того, в [28] исследовали многослойную пластину с сердцевинной из ауксетических сот и лицевыми слоями, армированными углеродными нанотрубками. Позднее в [29] также изучали динамический отклик многослойных пластин с лицевыми панелями из многофазных нанокompозитов в гипотермической среде. В [30] исследовали изгиб, коробление и свободные колебания сандвич-панелей с квадратными сотовыми заполнителями. Свободные изгибные колебания сотовых многослойных пластин с отрицательным коэффициентом Пуассона, свободно опертых на противоположных кромках, проанализированы в [31]. В [32] исследовали переходные нелинейные реакции ауксетических сотовых многослойных пластин при ударных нагрузках. Инновационную сандвич-конструкцию с сотовой сердцевинной из ауксетических ячеек предложили в [33]. В [34] исследовали эффективность новой системы защиты, использующей сандвич-панели с ауксетическим сотовым заполнителем для смягчения ударных нагрузок, вызванных близкими и контактными детонациями взрывчатых веществ. Эквивалентные сандвич-панели, состоящие из ауксетических и традиционных сотовых заполнителей и металлических лицевых слоев, и их характеристики сопротивления импульсным нагрузкам проанализировали в [35]. В [36] исследовали влияние оснований Винклера и Пастернака на вибрационное поведение пластин и оболочек. В [37, 38] представили экспериментальное исследование сотовых сандвич-панелей, подверженных ударному нагружению и квазистатическому проникновению. В [39] представили анализ колебаний толстых ауксетических пластин. В [40] исследовали динамический отклик пластин из слоистых композитов с ауксетическими слоями. В [41] исследовали эффект самоблокировки при контактной деформации изотропных и анизотропных ауксетических материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона. Рассматривали многослойные пластины с функционально-градиентной ауксетической трехмерной решеткой, используя конечно-элементное моделирование и проводя эксперименты, изучали нелинейный динамический отклик [42], колебания большой амплитуды [43], нелинейный изгиб [44] и закритическое поведение [45]. Анализ продольной устойчивости и колебания композитных цилиндрических оболочек с сердцевинной из ауксетических сот, подвергнутых разным типам нагрузок, провели в [46—48].

Из представленного обзора литературы можно заключить, что исследователи сосредоточили свое внимание на статическом и динамическом

изучении конических и усеченных конических оболочечных конструкциях, изготовленных из функционально-градиентных материалов и нанокompозитов. В некоторых работах также принимали во внимание подкрепление оболочек ребрами жесткости ([8—10, 12, 14]). Однако усеченную коническую оболочку из ауксетических материалов, подкрепленную ребрами жесткости, еще не изучали. Поэтому в настоящей работе исследовали линейную статическую устойчивость ауксетических усеченных конических оболочек (АУКО), подкрепленных ребрами жесткости и покоящихся на упругих основаниях. Оболочки изготовлены из двух однородных лицевых слоев и сердцевины из ауксетического материала.

1. Ауксетические усеченные конические оболочки на упругом основании

Рассмотрим АУКО, опирающуюся на упругие основания, толщиной h , радиусами $R_1 < R_2$, длиной L и половинным углом при вершине α . Меридиональное, окружное и нормальное направления оболочки обозначим как x , θ и z соответственно. Схема оболочки с заданной системой координат и геометрическими характеристиками представлена на рис. 1: h_1 , h_3 — толщина верхнего и нижнего лицевых слоев; h_2 — толщина сердцевины. Наружная поверхность подкреплена поперечными ребрами жесткости высотой h_θ , шириной d_θ , расстояние между двумя последовательными ребрами жесткости s_θ . Внутренняя поверхность подкреплена упругим основанием Пастернака, взаимодействие которого с оболочкой описывает соотношение [3]

$$q_e = K_1 w - K_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \quad (1)$$

где K_1 (Н/м³) — жесткость пружины (винклеровское основание); K_2 (Н/м) — коэффициент сдвига основания Пастернака.

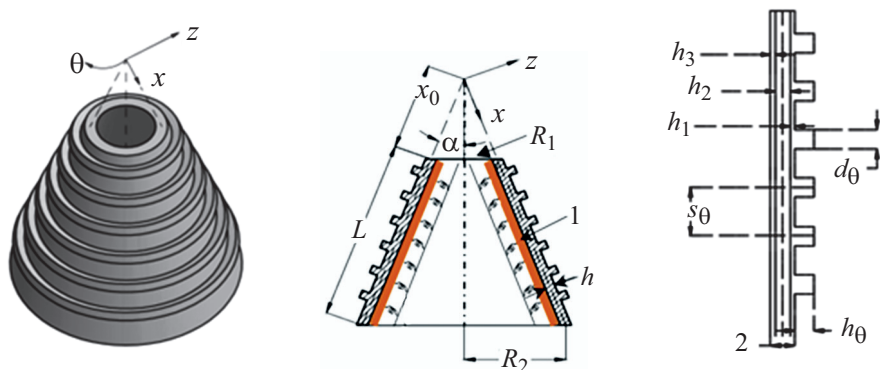


Рис. 1. Геометрия ауксетической усеченной конической оболочки: 1, 2 — сдвиговой и ауксетический слои соответственно.

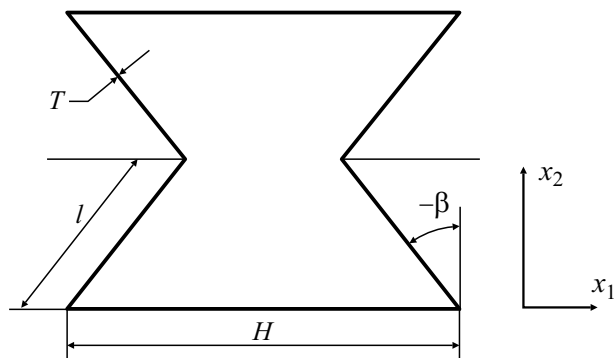


Рис. 2. Геометрия слоя сотовой сердцевины.

Ауксетическая модель слоя сотовой сердцевины представлена на рис. 2, где l — длина наклонного ячеистого ребра; H — длина вертикального ячеистого ребра; T — толщина ячеистого ребра; β — угол наклона.

Для материала сердцевины предположим следующие выражения [49]:

$$\begin{aligned}
 E_1^C &= E \left(\frac{T}{l} \right)^3 \frac{\cos \beta}{\left(\frac{H}{l} + \sin \beta \right) \sin^2 \beta}, & E_2^C &= E \left(\frac{T}{l} \right)^3 \frac{\frac{H}{l} + \sin \beta}{\cos^3 \beta}, \\
 \nu_{12}^C &= \frac{\cos^2 \beta}{\left(\frac{H}{l} + \sin \beta \right) \sin \beta}, & \nu_{21}^C &= \frac{\left(\frac{H}{l} + \sin \beta \right) \sin \beta}{\cos^2 \beta}, \\
 G_{12}^C &= E \left(\frac{T}{l} \right)^3 \frac{\left(\frac{H}{l} + \sin \beta \right)}{\left(\frac{H}{l} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{H}{l} \right) \cos \beta}, & G_{13}^C &= G \frac{T}{l} \frac{\cos \beta}{\frac{H}{l} + \sin \beta}, \\
 G_{23}^C &= G \frac{T}{l} \frac{1 + 2 \sin^2 \beta}{2 \cos \beta \left(\frac{H}{l} + \sin \beta \right)}, & \rho^C &= \rho \frac{\frac{T}{l} \left(\frac{H}{l} + 2 \right)}{2 \cos \beta \left(\frac{H}{l} + \sin \beta \right)},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где индекс C относится к величинам, характеризующим материал сердцевины: E , G , ρ — модуль Юнга, модуль сдвига и массовая плотность исходного материала соответственно.

2. Теоретическая формулировка

На основе классической теории оболочек и нелинейности фон Кармана выведем определяющие уравнения. Нормальные и сдвиговые деформации на расстоянии z от срединной поверхности оболочки представим следующим образом [50]:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + zk_x, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 + zk_\theta, \quad \gamma_{x\theta} = \gamma_{x\theta}^0 + 2zk_{x\theta}, \quad (3)$$

где ε_x^0 , ε_θ^0 и $\gamma_{x\theta}^0$ — нормальные и сдвиговая деформации срединной плоскости оболочки соответственно; k_x, k_θ и $k_{x\theta}$ — кривизны и кручение соответственно, связанные с компонентами перемещения как

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_\theta^0 &= \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{x} + \frac{w}{x} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{2x^2 \sin^2 \alpha} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2, \\ \gamma_{x\theta}^0 &= \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \\ k_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad k_\theta = -\frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x}, \\ k_{x\theta} &= -\frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{x^2 \sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Закон Гука для АУКО определим как

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x^T \\ \sigma_\theta^T \\ \sigma_{x\theta}^T \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{11}^T & Q_{12}^T & 0 \\ Q_{12}^T & Q_{22}^T & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \sigma_x^C \\ \sigma_\theta^C \\ \sigma_{x\theta}^C \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{11}^C & Q_{12}^C & 0 \\ Q_{12}^C & Q_{22}^C & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44}^C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \sigma_x^B \\ \sigma_\theta^B \\ \sigma_{x\theta}^B \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{11}^T & Q_{12}^T & 0 \\ Q_{12}^T & Q_{22}^T & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix}, \quad \sigma_\theta^S = E^S \varepsilon_\theta, \end{aligned} \quad (5)$$

где верхние индексы T , B , C и S относятся к величинам, характеризующим верхний и нижний лицевые слои, сердцевину и ребра жесткости соответственно; компоненты приведенной жесткости Q_{ij}^T и Q_{ij}^C запишем как

$$Q_{11}^T = Q_{22}^T = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad Q_{12}^T = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad Q_{44}^T = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$Q_{11}^C = \frac{E_1^C}{1-\nu_{12}^C \nu_{21}^C}, \quad Q_{12}^C = \frac{\nu_{12}^C E_2^C}{1-\nu_{12}^C \nu_{21}^C}, \quad Q_{22}^C = \frac{E_2^C}{1-\nu_{12}^C \nu_{21}^C}, \quad Q_{44}^C = G_{12}^C. \quad (6)$$

Результирующие усилия и моменты АУКО запишем в величинах напряжений по ее толщине:

$$(N_i, M_i) = \int_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2+h_1}{2}} \sigma_i^T(1, z) dz + \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \sigma_i^C(1, z) dz + \int_{-\frac{h_2}{2}-h_3}^{\frac{h_2}{2}} \sigma_i^B(1, z) dz +$$

$$+ \frac{d_j}{s_j} \int_{\frac{h_2}{2}+h_1}^{\frac{h_2+h_1+h_j}{2}} \sigma_j^S(1, z) dz, \quad i = (x, \theta, x\theta), j = \theta. \quad (7)$$

Подстановка уравнений (5) в (7) дает уравнения состояния

$$N_x = A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_\theta^0 + B_{11}k_x + B_{12}k_\theta,$$

$$N_\theta = A_{12}\varepsilon_x^0 + A_{22}\varepsilon_\theta^0 + B_{12}k_x + B_{22}k_\theta,$$

$$N_{x\theta} = A_{66}\gamma_{x\theta}^0 + 2B_{66}k_{x\theta}, \quad (8)$$

$$M_x = B_{11}\varepsilon_x^0 + B_{12}\varepsilon_\theta^0 + D_{11}k_x + D_{12}k_\theta,$$

$$M_\theta = B_{12}\varepsilon_x^0 + B_{22}\varepsilon_\theta^0 + D_{12}k_x + D_{22}k_\theta,$$

$$M_{x\theta} = B_{66}\gamma_{x\theta}^0 + 2D_{66}k_{x\theta}.$$

Выражения для коэффициентов приведены в Приложении.

Нелинейные уравнения равновесия АУКО, покоящихся на упругих основаниях, в классической теории оболочек имеют вид [10]

$$x \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + N_x - N_\theta = 0, \quad (9a)$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + x \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + 2N_{x\theta} = 0, \quad (9b)$$

$$\begin{aligned}
 & x \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{2}{\sin \alpha} \left(\frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{x} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{x \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial M_\theta}{\partial x} + \\
 & + \left(x N_x \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\sin \alpha} N_{x\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)_{,x} + \frac{1}{\sin \alpha} \left(N_{x\theta} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \alpha} N_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)_{,\theta} - \\
 & - N_\theta \operatorname{ctg} \alpha - x K_1 w + x K_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (9B)
 \end{aligned}$$

В настоящей работе для получения уравнений устойчивости АУКО использовали критерий прилегающего равновесия (adjacent equilibrium criterion) [50]. Состояние равновесия АУКО при механических нагрузках определяем исходя из перемещений u_0, v_0 и w_0 . Перемещениям придадим сколь угодно малые приращения u_1, v_1 и w_1 , а полные перемещения близкого состояния зададим как

$$u = u_0 + u_1, v = v_0 + v_1, w = w_0 + w_1. \quad (10)$$

Аналогично равнодействующие силы и моменты близкого состояния связаны с состоянием равновесия как

$$N_x = N_{x0} + N_{x1}, N_\theta = N_{\theta0} + N_{\theta1}, N_{x\theta} = N_{x\theta0} + N_{x\theta1}, \quad (11)$$

$$M_x = M_{x0} + M_{x1}, M_\theta = M_{\theta0} + M_{\theta1}, M_{x\theta} = M_{x\theta0} + M_{x\theta1},$$

где члены с нижним индексом 0 соответствуют перемещениям u_0, v_0 и w_0 , а с нижним индексом 1 представляют части приращений результирующих сил и моментов, линейных в отношении величин u_1, v_1 и w_1 . Такой метод называют методом в перемещениях, с помощью которого можно получить уравнения устойчивости, подставив уравнения (10) и (11) в уравнения (9). Отметим, что в результирующих уравнениях отсутствуют члены с нижним индексом 0, соответствующие уравнениям равновесия. Кроме того, игнорируются геометрические нелинейные члены с нижним индексом 1, поскольку они пренебрежимо малы по сравнению с линейными членами. Остальные члены образуют уравнения устойчивости

$$x \frac{\partial N_{x1}}{\partial x} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_{x\theta1}}{\partial \theta} + N_{x1} - N_{\theta1} = 0, \quad (12a)$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_{\theta1}}{\partial \theta} + x \frac{\partial N_{x\theta1}}{\partial x} + 2N_{x\theta1} = 0, \quad (12b)$$

$$x \frac{\partial^2 M_{x1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial M_{x1}}{\partial x} + \frac{2}{\sin \alpha} \left(\frac{\partial^2 M_{x\theta1}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{x} \frac{\partial M_{x\theta1}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{x \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 M_{\theta1}}{\partial \theta^2} - N_{\theta1} \operatorname{ctg} \alpha +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(xN_{x0} \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{\sin \alpha} N_{x\theta 0} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_{,x} + \frac{1}{\sin \alpha} \left(N_{x\theta 0} \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \alpha} N_{\theta 0} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)_{,\theta} - \\
 & - \frac{\partial M_{\theta 1}}{\partial x} - xK_1 w_1 + xK_2 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \right) = 0, \quad (12\text{в})
 \end{aligned}$$

где результирующие силы и моменты для состояния устойчивости имеют вид

$$\begin{aligned}
 N_{x1} &= A_{11} \varepsilon_{x1}^0 + A_{12} \varepsilon_{\theta 1}^0 + B_{11} k_{x1} + B_{12} k_{\theta 1}, \\
 N_{\theta 1} &= A_{12} \varepsilon_{x1}^0 + A_{22} \varepsilon_{\theta 1}^0 + B_{12} k_{x1} + B_{22} k_{\theta 1}, \\
 N_{x\theta 1} &= A_{66} \gamma_{x\theta 1}^0 + 2B_{66} k_{x\theta 1}, \\
 M_{x1} &= B_{11} \varepsilon_{x1}^0 + B_{12} \varepsilon_{\theta 1}^0 + D_{11} k_{x1} + D_{12} k_{\theta 1}, \\
 M_{\theta 1} &= B_{12} \varepsilon_{x1}^0 + B_{22} \varepsilon_{\theta 1}^0 + D_{12} k_{x1} + D_{22} k_{\theta 1}, \\
 M_{x\theta 1} &= B_{66} \gamma_{x\theta 1}^0 + 2D_{66} k_{x\theta 1}.
 \end{aligned} \quad (13)$$

Линейная форма для деформаций и кривизн в компонентах перемещений имеет вид

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{x1}^0 &= \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{\theta 1}^0 = \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{u_1}{x} + \frac{w_1}{x} \operatorname{ctg} \alpha, \\
 \gamma_{x\theta 1}^0 &= \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{v_1}{x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \\
 k_{x1} &= -\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}, \quad k_{\theta 1} = -\frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial w_1}{\partial x}, \\
 k_{x\theta 1} &= -\frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{x^2 \sin \alpha} \frac{\partial w_1}{\partial \theta}.
 \end{aligned} \quad (14)$$

Подставив уравнения (13), (14) в уравнения (12а, б, в), уравнения устойчивости в компонентах перемещений запишем как

$$C_{11}(u_1) + C_{12}(v_1) + C_{13}(w_1) = 0, \quad (15\text{а})$$

$$C_{21}(u_1) + C_{22}(v_1) + C_{23}(w_1) = 0, \quad (15\text{б})$$

$$C_{31}(u_1) + C_{32}(v_1) + C_{33}(w_1) + PC_{34}(w_1) = 0 \quad (15\text{в})$$

(коэффициенты C_{ij} ($i = 1, \dots, 3$, $j = 1, \dots, 4$) приведены в Приложении).

В [51] получено мембранное решение уравнений равновесия. Для этого в уравнениях равновесия все члены, связанные с моментами и вращением, приравнивали к нулю. Решив уравнения равновесия в мембранной форме, получили, что

$$N_{x0} = -\frac{P}{\pi x \sin 2\alpha}, \quad N_{\theta 0} = 0, \quad N_{x\theta 0} = 0, \quad (16)$$

где P — осевая сжимающая нагрузка.

Предположим, что оболочка свободно оперта на обоих концах. Граничные условия в этом случае запишем как

$$v_1 = w_1 = 0, M_{x1} = 0 \text{ при } x = x_0, x_0 + L. \quad (17)$$

Приближенное решение уравнений (16), удовлетворяющее граничным условиям (17), имеет вид

$$\begin{aligned} u_1 &= X \cos \frac{m\pi(x-x_0)}{L} \sin \frac{n\theta}{2}, \\ v_1 &= Y \sin \frac{m\pi(x-x_0)}{L} \cos \frac{n\theta}{2}, \\ w_1 &= Z \sin \frac{m\pi(x-x_0)}{L} \sin \frac{n\theta}{2}, \end{aligned} \quad (18)$$

где m — количество полуволн вдоль образующей; n — количество полных волн вдоль параллельной окружности; X, Y, Z — постоянные. С учетом того, что $x_0 \leq x \leq x_0 + L, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, для удобства интегрирования уравнения (15а) и (15б) умножим на x , а уравнение (15в) — на x^2 ; применив метод Галеркина к полученным уравнениям, запишем

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+L} \int_0^{2\pi} \Delta_1 \cos \frac{m\pi(x-x_0)}{L} \sin \frac{n\theta}{2} x \sin \alpha d\theta dx &= 0, \\ \int_{x_0}^{x_0+L} \int_0^{2\pi} \Delta_2 \sin \frac{m\pi(x-x_0)}{L} \cos \frac{n\theta}{2} x \sin \alpha d\theta dx &= 0, \\ \int_{x_0}^{x_0+L} \int_0^{2\pi} \Delta_3 \sin \frac{m\pi(x-x_0)}{L} \sin \frac{n\theta}{2} x \sin \alpha d\theta dx &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= x \left[C_{11}(u_1) + C_{12}(v_2) + C_{13}(w_1) \right], \\ \Delta_2 &= x \left[C_{21}(u_1) + C_{22}(v_2) + C_{23}(w_1) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Delta_3 = x^2 \left[C_{31}(u_1) + C_{32}(v_1) + C_{33}(w_1) + PC_{34}(w_1) \right] . \quad (20)$$

Подставив уравнения (18) и (19) в (20), после интегрирования и некоторых перестановок получим, что

$$d_{11}X + d_{12}Y + d_{13}Z = 0, \quad (21a)$$

$$d_{21}X + d_{22}Y + d_{23}Z = 0, \quad (21б)$$

$$d_{31}X + d_{32}Y + (d_{33} + d_{34}P + d_{35}K_1 + d_{36}K_2)Z = 0 \quad (21в)$$

(коэффициенты d_{ij} ($i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 6$) приведены в Приложении).

Уравнения (21) можно выразить в форме

$$P = \frac{d_{13}(d_{22}d_{31} - d_{21}d_{32}) + d_{23}(d_{11}d_{32} - d_{21}d_{31})}{d_{34}(d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21})} - \frac{d_{33} + d_{35}K_1 + d_{36}K_2}{d_{34}}, \quad (22)$$

определяющей механическую нагрузку потери устойчивости АУКО. Минимальное значение P называют критической механической нагрузкой потери устойчивости $P_{кр}$.

3. Численные результаты и обсуждение

Приняты следующие параметры ауксетического слоя сердцевин: $E = 69$ ГПа, $G = 26$ ГПа, $\nu = 0,33$, $\frac{T}{l} = 0,0138571$, $\nu_{12} = -0,3401$, геометрические параметры многослойных усеченных конических оболочек, подкреплённых ребрами жесткости, — $h_1 = h_3 = 0,00667$ м, $h_2 = 0,02$ м, $h_\theta = 0,03$ м, $s_\theta = 0,15$ м, $d_\theta = 2h_\theta$, $K_1 = K_2 = 0$. Значения ν_{12} приведены в табл. 1.

3.1. Проверка достоверности. Для проверки надежности предложенного метода и процедуры решения полученные результаты сопоставили с опу-

Табл. 1

Значения коэффициента Пуассона ν_{12} сердцевин усеченных конических сэндвич-оболочек

β , град	$\frac{H}{l} = 1$	$\frac{H}{l} = 1,5$	$\frac{H}{l} = 2$	$\frac{H}{l} = 2,5$	$\frac{H}{l} = 3$
-30	-2,7434	-1,2628	-0,8201	-0,6073	-0,4821
-45	-2,4142	-0,8918	-0,5469	-0,3944	-0,3084
-50	-2,3054	-0,7349	-0,4371	-0,3111	-0,2414
-55	-2,2208	-0,5899	-0,3401	-0,2389	-0,1842
-75	-2,0353	-0,1299	-0,0671	-0,0452	-0,0341

Табл. 2

Значения критического напряжения σ_{cr} (МПа) изотропных усеченных конических оболочек

α , град	[52]	[3]	[8]	Настоящая
30	284,05	283,44 (1,15)	284,2331 (1,30)	284,22 (1,30)
45	239,66	238,25 (1,15)	240,1864 (1,29)	240,12 (1,29)
60	175,31	172,52 (1,12)	176,2382 (1,24)	176,10 (1,24)
70	93,096	89,745 (1,8)	93,8722 (1,17)	93,791 (1,17)

бликованными в литературе [3, 8, 46, 52] (табл. 2, 3). Авторы исследовали статическую устойчивость изотропных однородных усеченных конических оболочек (без учета упругого основания и ребер жесткости)

при $E = 210$ ГПа, $\nu = 0,3$, $h = 0,0005$ м,

$$R_2 = 400h, L = \frac{1}{4}R_2 \sin \alpha, \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{\pi(2R_1 + L \sin \alpha)h \cos \alpha},$$

где P_{cr} — критическая осевая нагрузка.

Геометрические параметры ауксетических цилиндрических оболочек (см. табл. 3) следующие: $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,3$, $R_1 = R_2$, $\frac{T}{l} = 0,0138571$, $\frac{H}{l} = 2$, $L = 0,8$ м, $\beta = -55^\circ$.

Данные табл. 2 и 3 доказывают точность подхода, предложенного в настоящей работе.

3.2. Механические нагрузки потери устойчивости. Данные табл. 4 иллюстрируют влияние половинного угла α при вершине и ребер жесткости на критическую осевую нагрузку потери устойчивости АУКО при $R_1/h = 100$ и $L = \sqrt{400R_1h}$. Видно, что ребра жесткости оказали позитивное влияние на устойчивость АУКО. При одном и том же значении α критическая нагрузка потери устойчивости усеченных конических оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, значительно больше, чем непод-

Табл. 3

Сравнение значений безразмерной критической нагрузки потери устойчивости ауксетических цилиндрических оболочек

R_1/h	h_1 , мм	h_2 , мм	h_3 , мм	[46]	Настоящая
5	6	18	6	0,07939	0,07636
10	3	9	3	0,03684	0,03657
20	1,5	4,5	1,5	0,01772	0,01713
40	0,75	2,25	0,75	0,00869	0,00822

Табл. 4

Влияние ребер жесткости и половинного угла конусности α на критическую нагрузку потери устойчивости P_{cr} (МПа) АУКО

α , град	Подкрепленная	Неподкрепленная
10	222,08 (10,1)	160,35 (6,15)
20	203,42 (9,2)	146,19 (5,17)
30	173,83 (8,4)	124,34 (5,16)
45	116,38 (7,1)	83,075 (4,16)
60	58,879 (5,7)	41,699 (3,15)
75	15,885 (4,1)	11,264 (2,11)

крепленных. Кроме того, значение угла α также сильно повлияло на значение критической нагрузки потери устойчивости оболочки: с увеличением угла α значения P_{cr} уменьшаются и наоборот.

Влияние отношения верхнего радиуса к толщине АУКО, подкрепленных ребрами жесткости и опирающихся на упругое основание, иллюстрируют данные табл. 5. В настоящем исследовании использованы следующие параметры: $h_1 = h_3 = 0,00667$ м, $h_2 = 0,02$ м, $h_\theta = 0,03$ м, $L = \sqrt{400R_1h}$, $K_1 = K_2 = 0$. При одинаковом значении угла α устойчивость конической оболочки изменяется с изменением отношения R_1/h . Так, при $\alpha = 10^\circ$ и $R_1/h = 100$ критическая нагрузка $P_{cr} = 222,08$ МПа уменьшилась до 221,64 МПа при $R_1/h = 200$.

Влияние отношения R_1/h и местоположения ребер жесткости (внутри и снаружи оболочки) на критическую нагрузку потери устойчивости усеченных конических оболочек при $R_1/h = 150$ и $\alpha = 10^\circ$ с ауксетической сердцевинной, опирающихся на упругие основания, иллюстрируют данные табл. 6. Видно, что местоположение ребер жесткости оказало большое влияние на несущую способность оболочки. Наружные ребра жесткости оказались более эффективными, чем внутренние. Иными словами, значение критической нагрузки потери устойчивости ауксетической конической

Табл. 5

Влияние отношения R_1/h и угла α на величину P_{cr} (МПа) АУКО, подкрепленных ребрами жесткости

α , град	$R_1/h = 100$	$R_1/h = 160$	$R_1/h = 200$
10	222,08 (10,1)	221,99 (11,1)	221,64 (11,1)
25	189,54 (9,1)	188,88 (9,1)	187,62 (10,1)
40	136,78 (7,5)	135,89 (8,1)	135,46 (8,1)
50	96,814 (6,7)	95,968 (7,1)	96,696 (7,1)
65	41,881 (5,1)	41,845 (5,6)	41,837 (5,8)

Влияние отношения $L^2 / (R_1 h)$ и местоположения ребер жесткости на линейную статическую устойчивость P_{cr} (МПа) АУКО

$L^2 / (R_1 h)$	Внутренние ребра	Наружные ребра
150	222,23 (7,1)	162,50 (4,17)
200	222,14 (8,1)	162,74 (5,17)
300	221,40 (9,1)	162,85 (6,18)
400	221,11 (11,1)	163,03 (7,18)

оболочки, подкрепленной наружными ребрами жесткости, больше, чем подкрепленной внутренними ребрами. Кроме того, критическая нагрузка потери устойчивости АУКО мало изменялась с изменением отношения $L^2 / (R_1 h)$.

Данные рис. 3 иллюстрируют влияние угла α и местоположения ребер жесткости (внутри или снаружи) на критическую нагрузку потери устойчивости АУКО при $R_1 / h = 150$ и $L^2 / R_1 h = 400$. Видно, что значения P_{cr} АУКО, подкрепленной наружными ребрами жесткости, выше, чем подкрепленной внутренними ребрами. При $\alpha = 10^\circ$ значения P_{cr} оболочки, подкрепленной наружными и внутренними ребрами жесткости, равны 221,11 и 163,03 МПа соответственно, а при $\alpha = 65^\circ$ — 41,839 и 31,182 МПа соответственно.

Влияние коэффициента гибкости стенок $\frac{T}{l}$ на критическую нагрузку потери устойчивости усеченных конических оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, с входными параметрами $R_1 / h = 100$ и $L = \sqrt{400R_1 h}$

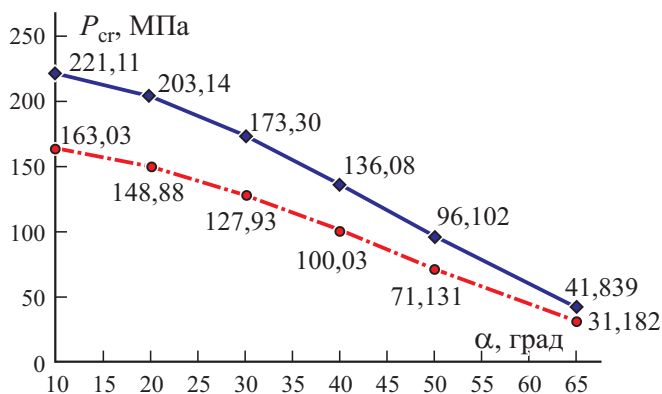


Рис. 3. Влияние местоположения ребер жесткости (снаружи (—◆—) или внутри (- -●- -)) и угла α на критическую нагрузку потери устойчивости P_{cr} АУКО при $R_1 / h = 150$, $L^2 / (R_1 h) = 400$, $K_1 = K_2 = 0$, $T / l = 0,0138571$, $\beta = -55^\circ$, $H / l = 2$.

Табл. 7

Влияние отношения T/l на статическую устойчивость P_{cr} (МПа) АУКО

α , град	$\frac{T}{l} = 0,0138571$	$\frac{T}{l} = 2,5 \cdot 0,0138571$	$\frac{T}{l} = 4 \cdot 0,0138571$
10	222,08 (10,1)	222,11 (10,1)	222,22 (10,1)
2	203,42 (9,2)	203,45 (9,2)	203,54 (9,2)
30	173,83 (8,4)	173,86 (8,4)	173,94 (8,4)
45	116,38 (7,1)	116,40 (7,1)	116,45 (7,1)
60	58,879 (5,7)	58,885 (5,7)	58,905 (5,7)
75	15,885 (4,1)	15,887 (4,1)	15,894 (4,1)

иллюстрируют данные табл. 7. Изменение отношения $\frac{T}{l}$ сказалось на критической нагрузке потери устойчивости оболочек. При увеличении коэффициента гибкости $\frac{T}{l}$ и неизменном значении угла $\alpha = 10^\circ$ значение P_{cr} слегка возросло с 222,08 МПа при $\frac{T}{l} = 0,0138571$ до 222,22 МПа при $\frac{T}{l} = 4 \cdot 0,0138571$. Таким образом, увеличение толщины или уменьшение высоты гексагональной структуры ауксетического слоя повышает несущую способность конструкции и наоборот.

Данные о критической нагрузке потери устойчивости АУК сэндвич-оболочек (с сердцевинной, имеющей отрицательный коэффициент Пуассона), подкрепленных ребрами жесткости и опирающихся на упругие основания, приведены в табл. 8 и на рис. 4. Видно, что упругое основание позитивно влияет на статическую устойчивость и значительно увеличивает критическую нагрузку потери устойчивости усеченных конических оболочек.

Табл. 8

Влияние упругих оснований на величину P_{cr} (МПа) АУКО, подкрепленных ребрами жесткости, при $\alpha = 30^\circ$

K_1 , Па/м	K_2 , Па·м			
	0	$1 \cdot 10^5$	$2,5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$
0	173,38 (8,4)	176,86 (8,3)	181,38 (8,3)	188,90 (8,1)
$1 \cdot 10^7$	192,19 (9,1)	195,19 (9,1)	199,69 (9,1)	207,19 (9,1)
$2,5 \cdot 10^7$	217,19 (9,2)	220,19 (9,1)	224,70 (9,1)	232,20 (9,1)
$5 \cdot 10^7$	252,73 (10,1)	255,73 (10,1)	260,24 (10,1)	267,74 (10,1)

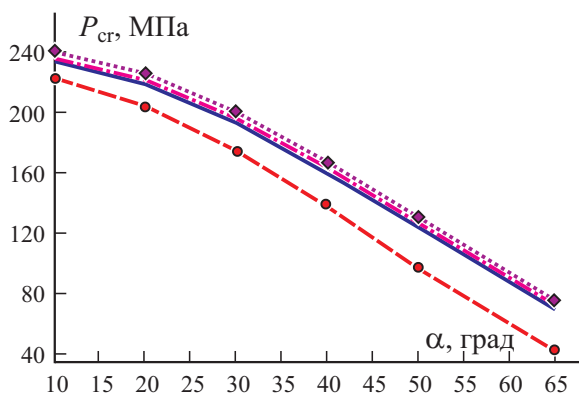


Рис. 4. Влияние упругих оснований и угла α на линейную статическую устойчивость АУКО, подкрепленных ребрами жесткости, при $R_1 / h = 100$, $L^2 / (R_1 h) = 400$, $T / l = 0,0138571$, $\beta = -55^\circ$, $H / l = 2$, $K_1 = K_2 = 0$ (—●—); $K_1 = 10$ МПа/м, $K_2 = 0$ (—); $K_1 = 10$ МПа/м, $K_2 = 0,1$ МПа·м (—●—); $K_1 = 10$ МПа/м, $K_2 = 0,25$ МПа·м (···◆···).

Критическая нагрузка потери устойчивости АУКО, опирающейся на упругое основание, больше таковой без упругого основания.

Заклучение

В настоящей работе выведены определяющие уравнения для исследования линейной статической устойчивости многослойных усеченных конических оболочек, подкрепленных ребрами жесткости с отрицательным коэффициентом Пуассона. Для решения этих уравнений с целью определения критической нагрузки потери устойчивости использовали классическую теорию оболочек в сочетании с геометрической нелинейностью фон Кармана и методами перемещений и Галеркина.

Реверсивная гексагональная структура в слое ауксетического материала увеличивала критическую нагрузку потери устойчивости оболочки. При увеличении толщины стенки или уменьшении высоты реверсивной гексагональной структуры критическая нагрузка потери устойчивости возрастала.

Упругие основания существенно влияли на критическую нагрузку потери устойчивости многослойных усеченных конических сандвич-оболочек. Оболочка, опирающаяся на упругие основания Винклера и Пастернака, обладала большей несущей способностью, чем оболочки без упругих оснований.

Ребра жесткости увеличивали критическую нагрузку потери устойчивости усеченных конических оболочек. Ребра жесткости, размещенные на наружной поверхности оболочки, оказались эффективнее размещенных на ее внутренней поверхности.

Представлено и обсуждено влияние верхнего радиуса, половинного угла конусности и длины конуса на критическую нагрузку потери устойчивости ауксетической усеченной конической оболочки.

Благодарность. Авторы благодарны за финансовую поддержку исследования грантом № CN.21.06 Вьетнамского Национального инженерно-технологического университета (Ханой). Фам Динь Нгуен финансировала Vingroup Joint Stock Company и поддерживала стипендиальная программа для отечественных магистров/докторов наук Фонда инноваций Vingroup (VINIF), Института больших данных Vingroup (VINBIGDATA), код VINIF.2020.TS.17.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sofiyev A. H. and Karaca Z. The vibration and buckling of laminated non-homogeneous orthotropic conical shells subjected to external pressure // *Eur. J. Mech. A-Solid*. — 2018. — Vol. 28. — P. 317—328.
2. Sofiyev A. H., Kuruoglu N., and Turkmen M. Buckling of FGM hybrid truncated conical shells subjected to hydrostatic pressure // *Thin-Walled Struct.* — 2009. — Vol. 47. — P. 61—72.
3. Sofiyev A. H. The buckling of FGM truncated conical shells subjected to axial compressive load and resting on Winkler–Pasternak foundations // *Int. J. Pres. Ves. Pip.* — 2010. — Vol. 87. — P. 753—761.
4. Sofiyev A. H. Influence of the initial imperfection on the non-linear buckling response of FGM truncated conical shells // *Int. J. Mech. Sci.* — 2011. — Vol. 53. — P. 753—761.
5. Najafov A. M. and Sofiyev A. H. The non-linear dynamics of FGM truncated conical shells surrounded by an elastic medium // *Int. J. Mech. Sci.* — 2013. — Vol. 66. — P. 33—44.
6. Sofiyev A. H. and Osmancebioglu E. The free vibration of sandwich truncated conical shells containing functionally graded layers within the shear deformation theory // *Composites: Part B*. — 2017. — Vol. 120. — P. 197—211.
7. Sofiyev A. H., Tornabene F., Dimitri R., and Kuruoglu N. Buckling behavior of FG-CNT reinforced composite conical shells subjected to a combined loading // *Nanomaterials*. — 2020. — Vol. 10, No. 3. — P. 1—19.
8. Dung D. V., Hoa L. K., and Nga N. T. On the stability of functionally graded truncated conical shells reinforced by functionally graded stiffeners and surrounded by an elastic medium // *Compos. Struct.* — 2014. — Vol. 108. — P. 77—90.
9. Dung D. V. and Chan D. Q. Analytical investigation on mechanical buckling of FGM truncated conical shells reinforced by orthogonal stiffeners based on FSDT // *Compos. Struct.* — 2017. — Vol. 159. — P. 827—841.
10. Duc N. D. and Cong P. H. Nonlinear thermal stability of eccentrically stiffened functionally graded truncated conical shells surrounded on elastic foundations // *Eur. J. Mech. A-Solid*. — 2015. — Vol. 50. — P. 120—131.
11. Duc N. D., Cong P. H., Tuan N. D., Tran P., and Thanh N. V. Thermal and mechanical stability of functionally graded carbon nanotubes (FG CNT)-reinforced composite truncated conical shells surrounded by the elastic foundations // *Thin-Walled Struct.* — 2017. — Vol. 115. — P. 300—310.
12. Duc N. D., Seung-Eock K., and Chan D. Q. Thermal buckling analysis of FGM sandwich truncated conical shells reinforced by FGM stiffeners resting on elastic foundations using FSDT // *Therm. Stress*. — 2018. — Vol. 41, No. 3. — P. 331—365.
13. Chan D. Q., Nguyen P. D., Quang V. D., Anh V. T. T., and Duc N. D. Nonlinear buckling and post-buckling of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite truncated conical shells subjected to axial load // *Steel. Compos. Struct.* — 2019. — Vol. 31, No. 3. — P. 243—259.

14. *Chan D. Q., Long V. D., and Duc N. D.* Nonlinear buckling and post-buckling of FGM shear deformable truncated conical shells reinforced by FGM stiffeners // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 54, No. 6. — P. 754—764.
15. *Dzhankhotov S. O., Kireev V. A., and Kulagin N. T.* Experimental and theoretical study of the supporting power of longitudinally compressed slightly conical shells made of composite materials // *Mech. Compos. Mater.* — 1981. — Vol. 16, No. 6. — P. 698—705.
16. *Babich I. Yu., Boriseiko A. V., and Semenyuk N. P.* Stability of conical shells of metal composites beyond the elastic limit // *Mech. Compos. Mater.* — 2001. — Vol. 37, No. 1. — P. 61—66.
17. *Moghaddam S. M. F. and Ahmadi H.* Active vibration control of truncated conical shell under harmonic excitation using piezoelectric actuator // *Thin-Walled Struct.* — 2020. — Vol. 151. — P. 106642.
18. *Aris H. and Ahmadi H.* Nonlinear vibration analysis of FGM truncated conical shells subjected to harmonic excitation in thermal environment // *Mech. Res. Commun.* — 2020. — Vol. 104. — P. 103499.
19. *Kiani Y.* Torsional vibration of functionally graded carbon nanotube reinforced conical shells // *Sci. Eng. Compos. Mater.* — 2018. — Vol. 25, No. 1. — P. 41—52.
20. *Jam J. E. and Kiani Y.* Buckling of pressurized functionally graded carbon nanotube reinforced conical shells // *Compos. Struct.* — 2018. — Vol. 125. — P. 586—595.
21. *Mirzaei M. and Kian Y.* Thermal buckling of temperature dependent FG-CNT reinforced composite conical shells // *Aerospace Sci. Technol.* — 2015. — Vol. 47. — P. 42—53.
22. *Duc N. D. and Cong P. H.* Nonlinear dynamic response and vibration of sandwich composite plates with negative Poisson's ratio in auxetic honeycombs // *J. Sandw. Struct. Mater.* — 2018. — Vol. 20. — P. 692—717.
23. *Cong P. H., Khanh N. D., Khoa N. D., and Duc N. D.* New approach to investigate nonlinear dynamic response of sandwich auxetic double curved shallow shells using TSDT // *Compos. Struct.* — 2018. — Vol. 185. — P. 455—465.
24. *Cong P. H., Long P. T., Nhat N. V., and Duc N. D.* Geometrically nonlinear dynamic response of eccentrically stiffened circular cylindrical shells with negative poisson's ratio in auxetic honeycombs core layer // *Int. J. Mech. Sci.* — 2019. — Vol. 152. — P. 443—453.
25. *Duc N. D., Kim S. E., Cong P. H., Anh N. T., and Khoa N. D.* Dynamic response and vibration of composite double curved shallow shells with negative Poisson's ratio in auxetic honeycombs core layer on elastic foundations subjected to blast and damping loads // *Int. J. Mech. Sci.* — 2017. — Vol. 133. — P. 504—512.
26. *Duc N. D., Kim S. E., Tuan N. D., Tran P., and Khoa N. D.* New approach to study nonlinear dynamic response and vibration of sandwich composite cylindrical panels with auxetic honeycomb core layer // *Aerospace Sci. Technol.* — 2017. — Vol. 70. — P. 396—404.
27. *Quan T. Q., Anh V. M., Mahesh V., and Duc N. D.* Vibration and nonlinear dynamic response of imperfect sandwich piezoelectric auxetic plate // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2020. DOI: 10.1080/15376494.2020.1752864
28. *Hajmohammad M. H., Kolahchi R., Zarei M. S., and Nouri A. H.* Dynamic response of auxetic honeycomb plates integrated with agglomerated CNT-reinforced face sheets subjected to blast load based on visco-sinusoidal theory // *Int. J. Mech. Sci.* — 2019. — Vols. 153—154. — P. 391—401.
29. *Hajmohammad M. H., Nouri A. H., Zarei M. S., and Kolahchi R.* A new numerical approach and visco-refined zigzag theory for blast analysis of auxetic honeycomb plates integrated by multiphase nanocomposite facesheets in hygrothermal environment // *Eng. Comput.* — 2019. — Vol. 35. — P. 1141—1157.

30. Liu J., Cheng Y. S., and Li R. F. A semi-analytical method for bending, buckling, and free vibration analyses of sandwich panels with square-honeycomb cores // *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* — 2010. — Vol. 10. — P. 127—151.
31. Di K. and Mao X. B. Free flexural vibration of honeycomb sandwich plate with negative Poisson's ratio simple supported on opposite edges // *Acta Mater. Compos. Sin.* — 2016. — Vol. 33. — P. 910—920.
32. Zhang J., Zhu X., Yang X., and Zhang W. Transient nonlinear responses of an auxetic honeycomb sandwich plate under impact loads // *Int. J. Impact. Eng.* — 2019. — Vol. 134. — P. 103383.
33. Jin X., Wang Z., Ning J., Xiao G., Liu E., and Shu X. Dynamic response of sandwich structures with graded auxetic honeycomb cores under blast loading // *Composites: Part B.* — 2016. — Vol. 106. — P. 206—217.
34. Qi C., Remennikov A., Pei L. Z., Yang S., Yu Z. H., and Ngo T. D. Impact and close-in blast response of auxetic honeycomb-cored sandwich panels: Experimental tests and numerical simulations // *Compos. Struct.* — 2017. — Vol. 180. — P. 161—178.
35. Imbalzano G., Linforth S., Tuan N. D., Lee P. V. S., and Phuong T. Blast resistance of auxetic and honeycomb sandwich panels: Comparisons and parametric designs // *Compos. Struct.* — 2018. — Vol. 183. — P. 242—261.
36. Banić D., Bacciocchi M., Tornabene F., and Ferreira A. J. M. Influence of Winkler-Pasternak foundation on the vibrational behavior of plates and shells reinforced by agglomerated carbon nanotubes // *Appl. Sci.* — 2017. — Vol. 7, No. 12. — P. 1228.
37. Roudbeneh F. H., Liaghat G., Sabouri H., and Hadavinia H. Experimental investigation of impact loading on honeycomb sandwich panels filled with foam // *Int. J. Crashworthines.* — 2018. — Vol. 24, No. 2. — P. 199—210.
38. Roudbeneh F. H., Liaghat G., Sabouri H., and Hadavinia H. Experimental investigation of quasistatic penetration tests on honeycomb sandwich panels filled with polymer foam // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2018. — Vol. 27, No. 21. — P. 1803—1815.
39. Lim T. C. Vibration of thick auxetic plates // *Mech. Res. Commun.* — 2014. — Vol. 61. — P. 0—66.
40. Tornabene F. General higher order layer-wise theory for free vibrations of doubly-curved laminated composite shells and panels // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2016. — Vol. 23, No. 9. — P. 1046—1067.
41. Shil'ko S. V., Petrokovets E. M., and Pleskachevskii Yu. M. An analysis of contact deformation of auxetic composites // *Mech. Compos. Mater.* — 2006. — Vol. 42, No. 5. — P. 477—484.
42. Li C., Shen H. S., and Wang H. Nonlinear dynamic response of sandwich plates with functionally graded auxetic 3D lattice core // *Nonlinear. Dyn.* — 2020. — Vol. 100. — P. 3235—3252.
43. Li C., Shen H. S., Wang H., and Yu Z. Large amplitude vibration of sandwich plates with functionally graded auxetic 3D lattice core // *Int. J. Mech. Sci.* — 2020. — Vol. 174. — P. 105472.
44. Li C., Shen H. S., and Wang H. Full-scale finite element modeling and nonlinear bending analysis of sandwich plates with functionally graded auxetic 3D lattice core // *J. Sandw. Struct. Mater.* — 2020. DOI: 10.1177/1099636220924657
45. Li C., Shen H. S., and Wang H. Postbuckling behavior of sandwich plates with functionally graded auxetic 3D lattice core // *Compos. Struct.* — 2020. — Vol. 237. — P. 111894.
46. Eipakchi H. and Nasrekani F. M. Analytical Solution for Buckling Analysis of Composite Cylinders with Honeycomb Core Layer // *AIAA J.* — 2021. DOI: 10.2514/1.J060422

47. *Eipakchi H. and Nasrekani F. M.* Axisymmetric analysis of auxetic composite cylindrical shells with honeycomb core layer and variable thickness subjected to combined axial and non-uniform radial pressures // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2020. DOI: 10.1080/15376494.2020.1841346

48. *Eipakchi H. and Nasrekani F. M.* Vibrational behavior of composite cylindrical shells with auxetic honeycombs core layer subjected to a moving pressure // *Compos. Struct.* — 2020. — Vol. 254. — P. 112847.

49. *Tian D. Q. and Chun Y. Z.* Wave propagation in sandwich panel with auxetic core // *J. Solid. Mech.* — 2010. — Vol. 2. — P. 393—402.

50. *Brush A. B.* Buckling of Bars, Plates and Shells. — N. Y.: McGraw-Hill, 1975.

51. *Naj R., Boroujerdy M. S., and Eslami M. R.* Thermal and mechanical instability of functionally graded truncated conical shells // *Thin-Walled Struct.* — 2008. — Vol. 46. — P. 65—78.

52. *Seide P.* Buckling of circular cones under axial compression / *J. Appl. Mech.* — 1961. — Vol. 28. No. 2. — P. 315—326.

Приложение

$$A_{66} = Q_{44}^T \left(\int_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2+h_1}{2}} dz + \int_{-\frac{h_2}{2}}^{-\frac{h_2}{2}-h_3} dz \right) + Q_{44}^C \int_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} dz,$$

$$B_{66} = Q_{44}^T \left(\int_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2+h_1}{2}} z dz + \int_{-\frac{h_2}{2}}^{-\frac{h_2}{2}-h_3} z dz \right) + Q_{44}^C \int_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} z dz,$$

$$D_{11} = Q_{11}^T \left(\int_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2+h_1}{2}} z^2 dz + \int_{-\frac{h_2}{2}}^{-\frac{h_2}{2}-h_3} z^2 dz \right) + Q_{11}^C \int_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} z^2 dz,$$

$$D_{12} = Q_{12}^T \left(\int_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2+h_1}{2}} z^2 dz + \int_{-\frac{h_2}{2}}^{-\frac{h_2}{2}-h_3} z^2 dz \right) + Q_{12}^C \int_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} z^2 dz,$$

$$D_{22} = Q_{22}^T \left(\int_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2+h_1}{2}} z^2 dz + \int_{-\frac{h_2}{2}}^{-\frac{h_2}{2}-h_3} z^2 dz \right) + Q_{22}^C \int_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} z^2 dz + E^S \frac{d\theta}{s\theta} \int_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2+h_1+h_0}{2}} z^2 dz,$$

$$D_{66} = Q_{44}^T \left(\int_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2+h_1}{2}} z^2 dz + \int_{-\frac{h_2}{2}}^{-\frac{h_2}{2}-h_3} z^2 dz \right) + Q_{44}^C \int_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} z^2 dz.$$

$$\begin{aligned}
 C_{11}(u_1) &= A_{11} \frac{\partial}{\partial x}(u_1) - A_{22} \frac{1}{x}(u_1) + xA_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_1) + A_{66} \frac{1}{x \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(u_1), \\
 C_{12}(v_1) &= (A_{66} + A_{12}) \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}(v_1) - (A_{66} + A_{22}) \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta}(v_1), \\
 C_{13}(w_1) &= \left(B_{22} \frac{1}{x} + A_{12} \operatorname{ctg} \alpha \right) \frac{\partial}{\partial x}(w_1) - A_{22} \frac{1}{x} \operatorname{ctg} \alpha (w_1) - B_{11} x \frac{\partial^3}{\partial x^3}(w_1) + \\
 &\quad + (B_{12} + 2B_{66} + B_{22}) \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(w_1) - \\
 &\quad - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{1}{x \sin^2 \alpha} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2}(w_1) - B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(w_1), \\
 C_{21}(u_1) &= (A_{66} + A_{12}) \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}(u_1) + (A_{66} + A_{22}) \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta}(u_1), \\
 C_{22}(v_1) &= \frac{A_{22}}{x \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(v_1) + xA_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v_1) + A_{66} \frac{\partial}{\partial x}(v_1) - A_{66} \frac{1}{x}(v_1), \\
 C_{23}(w_1) &= A_{22} \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{x \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta}(w_1) - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta}(w_1) - \\
 &\quad - B_{22} \frac{1}{x^2 \sin^3 \alpha} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3}(w_1) - B_{22} \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}(w_1). \\
 C_{31}(u_1) &= \left(\frac{B_{22}}{x^2} - \frac{A_{22}}{x} \operatorname{ctg} \alpha \right) (u_1) - \left(\frac{B_{22}}{x} + A_{12} \operatorname{ctg} \alpha \right) \frac{\partial}{\partial x}(u_1) + 2B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_1) + \\
 &\quad + \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} B_{22} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(u_1) + \frac{1}{x \sin^2 \alpha} (2B_{66} + B_{12}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2}(u_1) + xB_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3}(u_1), \\
 C_{32}(v_1) &= \frac{1}{x \sin \alpha} \left(\frac{B_{22}}{x} - A_{22} \operatorname{ctg} \alpha \right) \frac{\partial}{\partial \theta}(v_1) - B_{22} \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}(v_1) + \\
 &\quad + B_{22} \frac{1}{x^2 \sin^3 \alpha} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3}(v_1) + \frac{1}{\sin \alpha} (2B_{66} + B_{12}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta}(v_1), \\
 C_{33}(w_1) &= \left(B_{22} \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{x^2} - A_{22} \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{x} - xK_1 \right) (w_1) + \left(K_2 - D_{22} \frac{1}{x^2} \right) \frac{\partial(w_1)}{\partial x} + \\
 &\quad + \left(xK_2 + D_{22} \frac{1}{x} + 2B_{12} \operatorname{ctg} \alpha \right) \frac{\partial^2(w_1)}{\partial x^2} + \\
 &\quad + \left(2B_{22} \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{x^2 \sin^2 \alpha} - (D_{12} + D_{22} + 2D_{66}) \frac{2}{x^3 \sin^2 \alpha} + \frac{K_2}{x \sin^2 \alpha} \right) \frac{\partial^2(w_1)}{\partial \theta^2} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2D_{11} \frac{\partial^3(w_1)}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{2}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^3(w_1)}{\partial x \partial \theta^2} - \\
 & -x D_{11} \frac{\partial^4(w_1)}{\partial x^4} - D_{22} \frac{1}{x^3 \sin^4 \alpha} \frac{\partial^4(w_1)}{\partial \theta^4} - \\
 & - (D_{12} + 2D_{66}) \frac{2}{x \sin^2 \alpha} \frac{\partial^4(w_1)}{\partial x^2 \partial \theta^2}, C_{34}(w_1) = -\frac{1}{\pi \sin(2\alpha)} \frac{\partial^2(w_1)}{\partial x^2}, \\
 d_{11} = & \frac{A_{11} \pi \sin(\alpha) L(L+2x_0)}{4} - \left[A_{22} \sin(\alpha) + \frac{A_{66} n^2}{4 \sin(\alpha)} \right] \left[\frac{\pi L(L+2x_0)}{4} \right] - \\
 & - \frac{A_{11} m^2 \pi^3}{8L^2} \sin(\alpha) \left[(L+x_0)^4 - x_0^4 + \frac{3L^3(L+2x_0)}{m^2 \pi^2} \right], \\
 d_{12} = & -\frac{(A_{66} + A_{12}) mn \pi^2}{12L} \left[(L+x_0)^3 - x_0^3 + \frac{3L^3}{2m^2 \pi^2} \right] - \frac{(A_{66} + A_{22}) n L^2}{8m}, \\
 d_{13} = & \left[B_{22} m \pi \sin(\alpha) + \frac{(B_{12} + 2B_{66}) mn^2 \pi}{4 \sin(\alpha)} \right] \frac{\pi(L+2x_0)}{4} + \\
 & + \frac{A_{12} m \pi^2 \cos(\alpha)}{6L} \left[(L+x_0)^3 - x_0^3 + \frac{3L^3}{2m^2 \pi^2} \right] + \\
 & + \frac{A_{22} \cos(\alpha) L^2}{4m} - \frac{B_{11} m \pi^2 \sin(\alpha)(L+2x_0)}{4}, \\
 d_{21} = & -\frac{(A_{66} + A_{12}) mn \pi^2}{12L} \left[(L+x_0)^3 - x_0^3 - \frac{3L^3}{2m^2 \pi^2} \right] - \frac{(A_{66} + A_{22}) n L^2}{8m}, \\
 d_{22} = & -\frac{A_{22} n^2 L \pi (L+2x_0)}{16 \sin(\alpha)} - \frac{A_{66} \sin(\alpha) L \pi (L+2x_0)}{2} - \\
 & - \frac{A_{66} m^2 \pi^3 \sin(\alpha)}{8L^2} \left[(L+x_0)^4 - x_0^4 \right] + \frac{3\pi A_{66} \sin(\alpha) L(L+2x_0)}{8}, \\
 d_{23} = & \frac{A_{22} \operatorname{ctg}(\alpha) n L \pi (L+2x_0)}{8} + \frac{B_{22} n^3 L \pi}{16 \sin^2(\alpha)} + \\
 & + \frac{(B_{12} + 2B_{66}) m^2 \pi^3 n}{12L^2} \left[(L+x_0)^3 - x_0^3 - \frac{3L^3}{2m^2 \pi^2} \right] + \frac{B_{22} n \pi L}{8},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{31} = & B_{22} \left[\frac{n^2}{4 \sin(\alpha)} - \sin(\alpha) \right] \frac{L^2}{4m} + \frac{A_{22} \cos(\alpha) L^2 (L + 2x_0)}{4m} + \\
 & + \left[\frac{B_{22} m \pi^2 \sin(\alpha)}{6L} + \frac{(B_{12} + 2B_{66}) m \pi^2 n^2}{24 \sin(\alpha) L} \right] \left[(L + x_0)^3 - x_0^3 - \frac{3L^3}{2m^2 \pi^2} \right] + \\
 & + \frac{A_{12} \cos(\alpha) m \pi^2}{8L} \left[(L + x_0)^4 - x_0^4 - \frac{3L^3 (L + 2x_0)}{m^2 \pi^2} \right] + \\
 & + \frac{B_{11} m \pi^2 \sin(\alpha)}{2L} \left[(L + x_0)^3 - x_0^3 - \frac{3L^3}{2m^2 \pi^2} \right] + \\
 & + \frac{B_{11} m^3 \pi^4 \sin(\alpha)}{L^3} \left[\frac{(L + x_0)^5 - x_0^5}{10} + \frac{3L^5}{4m^4 \pi^4} + L^2 \frac{x_0^3 - (L + x_0)^3}{2m^2 \pi^2} \right], \\
 d_{32} = & B_{22} n \left[\frac{n^2}{8 \sin^2(\alpha)} - 1 \right] \frac{L \pi (L + 2x_0)}{4} + \\
 & + \frac{A_{22} \operatorname{ctg}(\alpha) n \pi}{12} \left[(L + x_0)^3 - x_0^3 - \frac{3L^3}{2m^2 \pi^2} \right] + \\
 & + \frac{(B_{12} + 2B_{66}) m^2 \pi^3 n}{16L^2} \left[(L + x_0)^4 - x_0^4 - \frac{3L^3 (L + 2x_0)}{m^2 \pi^2} \right], \\
 d_{33} = & B_{22} \cos(\alpha) \left[1 - \frac{n^2}{2 \sin^2(\alpha)} \right] \left[\frac{L \pi (L + 2x_0)}{4} \right] - \\
 & - \left[\frac{A_{22} \cot^2(\alpha) \sin(\alpha) \pi}{6} + \frac{D_{22} m^2 \pi^3 \sin(\alpha)}{6L^2} \right] + \\
 & + \frac{(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 \pi^3}{12L^2 \sin(\alpha)} \left[(L + x_0)^3 - x_0^3 - \frac{3L^3}{2m^2 \pi^2} \right] + \\
 & + \left[D_{22} \sin(\alpha) + \frac{(D_{12} + 2D_{66}) n^2}{2 \sin(\alpha)} \right] \frac{\pi L}{4} - \\
 & - \frac{B_{12} m^2 \pi^3 \cos(\alpha)}{4L^2} \left[(L + x_0)^4 - x_0^4 - \frac{3L^3 (L + 2x_0)}{m^2 \pi^2} \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{L\pi n^2}{4\sin(\alpha)} \left[(D_{12} + D_{22} + 2D_{66}) - \frac{D_{22}n^2}{8\sin^2(\alpha)} \right] - \\
 & - \frac{D_{11}m^2\pi^3 \sin(\alpha)}{2L^2} \left[(L+x_0)^3 - x_0^3 - \frac{3L^3}{2m^2\pi^2} \right] - \\
 & - \frac{D_{11}m^4\pi^5 \sin(\alpha)}{L^4} \left[\frac{(L+x_0)^5 - x_0^5}{10} + \frac{3L^5}{4m^4\pi^4} + \frac{x_0^3 - (L+x_0)^3}{2m^2\pi^2} L^2 \right], \\
 d_{34} & = \frac{m^2\pi^2}{16L^2 \cos(\alpha)} \left[(L+x_0)^4 - x_0^4 - \frac{3L^3(L+2x_0)}{m^2\pi^2} \right], \\
 d_{35} & = -\sin(\alpha)\pi \left[\frac{(L+x_0)^5 - x_0^5}{10} + \frac{3L^5}{4m^4\pi^4} + \frac{x_0^3 - (L+x_0)^3}{2m^2\pi^2} L^2 \right], \\
 d_{36} & = -\frac{\pi \sin(\alpha)}{4} \left[(L+x_0)^3 - x_0^3 - \frac{3L^3}{2m^2\pi^2} \right] - \\
 & - \frac{m^2\pi^3 \sin(\alpha)}{L^2} \left[\frac{(L+x_0)^5 - x_0^5}{10} + \frac{3L^5}{4m^4\pi^4} + L^2 \frac{x_0^3 - (L+x_0)^3}{2m^2\pi^2} \right] - \\
 & - \frac{n^2\pi}{24\sin(\alpha)} \left[(L+x_0)^3 - x_0^3 - \frac{3L^3}{2m^2\pi^2} \right].
 \end{aligned}$$

Поступила в редакцию 07.06.2021

Окончательный вариант поступил 17.09.2021

Received June 7, 2021 (Sept. 17, 2021)
