

*А. Дашдемир\**

*Department of Mathematics, Faculty of Arts and Sciences, Kastamonu University, Kastamonu  
37150, Turkey*

**МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ  
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ С НАЧАЛЬНЫМ  
НАПРЯЖЕНИЕМ ПОСРЕДСТВОМ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ<sup>1</sup>**

*A. Daşdemir\**

**MODAL ANALYSIS OF FORCED VIBRATION FOR A PIEZOELECTRIC  
PLATE WITH INITIAL STRESS BY FINITE ELEMENT SIMULATION**

**Keywords:** forced vibration, initial stress, piezoelectric material, frequency response, poling direction

A modal analysis of forced vibrations caused by a time-harmonic force from a piezoelectric plate standing on a rigid foundation is presented. A 3D linearized elasticity theory for solids under initial stress (TLTESIS) is used. It is assumed that a uniformly distributed normal loadings acting on the lateral surfaces of the plate yield the initial stress state. The piezoelectric plate is under the action of a time-harmonic force poled in various directions. A mathematical model is developed, and the problem solved employing the 3D finite-element method (3D-FEM). Some numerical results illustrating the influence of changes in the poling direction and other important factors, such as the initial stress, on the dynamic behavior of the plate are presented.

**Ключевые слова:** колебания вынужденные, напряжение начальное, материал пьезоэлектрический, отклик частотный, направление поляризации

Работа посвящена модальному анализу вынужденных колебаний, обусловленных гармонической по времени силой в пьезоэлектрической пластине, покоящейся на упругом основании.

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [ahmetdasdemir37@gmail.com](mailto:ahmetdasdemir37@gmail.com)  
Corresponding author: [ahmetdasdemir37@gmail.com](mailto:ahmetdasdemir37@gmail.com)

<sup>1</sup>Перевод с англ.

Исследование проведено в рамках трехмерной линеаризованной теории упругости твердых тел с начальным напряжением в предположении о том, что равномерно распределенные нормальные нагрузки, действующие на боковые поверхности пластины, приводят к начальному напряженному состоянию. Кроме того, предполагали, что пьезоэлектрическую пластину под действием гармонической во времени силы можно поляризовать в разных направлениях. С помощью разработанной математической модели решение получено методом трехмерных конечных элементов. Численные результаты иллюстрируют влияние на динамическое поведение пластины изменений направления поляризации, а также других важных факторов, таких как начальное напряжение.

### Введение

В последнее время количество исследований, касающихся пьезоэлектрических конструкций существенно возросло благодаря их широкому применению в технике. В отличие от чистых упругих твердых тел пьезоэлектрические чувствительны к изменениям во внешней среде и реагируют на них. В силу этого удивительного свойства можно реализовать много потенциальных приложений, например, контроль колебаний и шума, создать умные устройства, некоторые преобразователи и акустические фильтры. Изучение таких материалов и соответствующих механических проблем становится все более актуальным. Два интересных исследования, имеющих важные области применения, выполнены в [1, 2]. Исчерпывающая информация, связанная с основами механических конструкций, использующих пьезоэлектрические материалы, изложена в фундаментальных монографиях [3, 4].

Проблемы, связанные с распространением электроупругих волн в изотропных и пьезоэлектрических средах, рассматривают давно. Однако наличие разных факторов обуславливает нелинейность процедуры решения связанных задач, например, если необходимо учитывать статическое начальное напряженное состояние твердого тела или конфигурации системы. В начале XX века предприняли первые попытки построения линеаризованных уравнений (также известных как трехмерные линеаризованные уравнения). Многие ученые, начиная с работ [5, 6], внесли свой вклад в развитие этой теории. Отметим фундаментальные исследования, описанные в [7—10]. Со временем упомянутую теорию развивали в [11—16]. Трехмерная линеаризованная теория упругости твердых тел с начальными напряжениями (ТЛТУНН), предложенная в [17] и развиваемая в [18], очень актуальна и сегодня. Существует множество работ, посвященных указанной теории и ее вариантам. В [19] представлен анализ задачи динамического поля напряжений, обусловленных вынужденными колебаниями двухслойной пластины-полосы на упругом основании при наличии начального напряжения. В [20] исследовали дисперсионные соотношения,

соответствующие скорости крутильных поверхностных волн в однородном слое конечной толщины на предварительно напряженном неоднородном полупространстве. В [21] проанализировали влияние равномерного приложенного начального напряжения на радиальные поверхности полого составного цилиндра. В [22] исследовали влияние начального напряженного состояния на дисперсионные соотношения упругих волн в пьезоэлектрическом фонном кристалле. В [23] решили задачи как свободных, так и вынужденных колебаний в предварительно напряженной пластине с двумя параллельными цилиндрическими полостями. В [24] рассмотрели динамический отклик предварительно напряженной сандвич-системы с пьезоэлектрической сердцевинкой и упругими лицевыми слоями, а затем распространили исследование на случай наличия несовершенных контактных взаимодействий слоев системы [25]. Также следует упомянуть важные работы [26—28].

В настоящей работе представлен модальный анализ задачи вынужденных колебаний пьезоэлектрической двухосно предварительно напряженной пластины конечных размеров, выполненный посредством модели кусочно-однородного тела. Предполагали, что на пластину действует гармонически изменяемая во времени сила; кроме того, предполагали, что поляризацию пластины можно выполнять в разных направлениях. Насколько известно автору настоящей работы, данная проблема изучена, а математическая модель, объясняющая влияние разных направлений поляризации на эффективные свойства системы, отсутствует. Для восполнения этого пробела посредством ТЛТУНН разработана модальная математическая модель рассматриваемой задачи и для численных расчетов применен метод конечных элементов (МКЭ). В частности, сравнили и обсудили влияние разных направлений поляризации на динамическое поведение пластины.

## 1. Постановка задачи о вынужденных колебаниях

Представим предварительно напряженную трансверсально-изотропную пьезоэлектрическую пластину, покоящуюся на упругом основании, в декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Геометрические параметры пластины: длина сторон  $2a_1$  и  $2a_3$  в направлении осей  $Ox_1$  и  $Ox_3$  соответственно, толщина  $h$  в направлении оси  $Ox_2$ . Опишем геометрию пластины как

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_1 \leq 2a_1, -h \leq x_2 \leq 0, 0 \leq x_3 \leq 2a_3\}. \quad (1)$$

Пусть  $\Gamma = \Gamma_1^\pm \cup \Gamma_2^\pm \cup \Gamma_3^\pm$  — граница объема  $V$ , где  $\Gamma_i^\pm$  указывает части внешней поверхности, остающиеся в положительном и отрицательном направлениях оси  $Ox_i$  соответственно. Здесь и далее  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

Пластина подвержена одноосным нагружениям в направлении осей  $Ox_1$  и  $Ox_3$ , создающим двухосное начальное напряженное состояние. Соответственно в пьезоэлектрической пластине имеют место начальные напря-

жения и электрические смещения. Обратите внимание на то, что начальные напряжения и электрические смещения взаимосвязаны. Объясним эту взаимосвязь позднее. Далее свяжем пластину с упругим основанием и приложим к ней механическую нагрузку, гармонически изменяющуюся по времени. Тогда все поля в задаче — гармонические по времени. Поэтому можно обозначить динамическую силу, смещения и электрический потенциал как

$$p_0(t) = p_0 \delta^* e^{i\omega t}, \quad u_j(x_1, x_2, x_3, t) = u_j(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega t},$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \varphi(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega t}$$

соответственно и дискретизировать временной множитель в определяющих уравнениях и связанных условиях граничного контакта. Здесь  $i$  — комплексная единица,  $\delta^*$  — дельта-функция Дирака двух переменных, определяемая как  $\delta(x_1 - a_1) \delta(x_3 - a_3)$ . Применим правило преобразования координат  $\hat{x}_j = x_j / h$ , чтобы иметь возможность исследовать задачу в более простой геометрии. Далее символ “крышечка” над координатами  $x_j$  опустим. Таким образом, имеем следующую краевую задачу:

$$T_{ji,j} + \rho \omega^2 h^2 u_i = 0, \tag{2}$$

$$S_{i,i} = 0, \tag{3}$$

$$\sigma_{2\ell} |_{\Gamma_2^+} = 0, \quad \sigma_{22} |_{\Gamma_2^+} = -p_0 \delta^*, \tag{4}$$

$$T_{ij} |_{\Gamma_\ell^\pm} = 0, \quad S_i |_{\Gamma_\ell^\pm} = 0, \tag{5}$$

$$u_i |_{\Gamma_2^-} = 0, \quad \varphi |_{\Gamma_2^\pm} = 0, \tag{6}$$

где  $T_{ij}$  — первый тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа;  $S_i$  — тензор электрической плотности;  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений;  $\rho$  — плотность пластины; нижние индексы после запятой означают частное дифференцирование. Отметим, что на протяжении всей работы использовано правило суммирования по повторяющимся индексам. Здесь и далее  $\ell = 1, 3$ . Физический смысл указанных граничных условий можно описать следующим образом: уравнения (4) — механические условия отсутствия усилий на свободной поверхности пластины; уравнения (5) — механические и электрические разомкнутые состояния (open conditions) на боковых поверхностях соответственно; уравнения (6) — механические и электрические состояния короткого замыкания (short conditions) на нижней поверхности пластины и свободной и нижней поверхностях ( $\pm$ ) соответственно.

В приведенных соотношениях использованы следующие обозначения:

$$T_{ji} = \sigma_{ij} + \sigma_{jk}^0 u_{i,k}, \quad (7)$$

$$S_i = D_i + D_i^0 u_{j,i}, \quad (8)$$

где  $D_i$  — тензор электрического смещения; верхний индекс 0 относится к величинам, связанным с начальными напряжениями. Соотношения деформация—перемещение и напряженность электрического поля—электрический потенциал имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ и } E_i = -\varphi_{,i}. \quad (9)$$

Далее используем уравнения состояния

$$\sigma_{ij} = \tilde{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \tilde{e}_{kij} E_k, \quad (10)$$

$$D_i = \tilde{e}_{ikl} \varepsilon_{kl} + \gamma_{ik} E_k, \quad (11)$$

где  $\tilde{C}_{ijkl}$  — тензор упругих постоянных;  $\tilde{e}_{kij}$  — тензор пьезоэлектрических постоянных;  $\gamma_{ij}$  — тензор диэлектрических постоянных. Отметим, что уравнения (10) и (11) описывают тензоры четвертого и третьего порядков постоянных материала. Используя сокращенную запись Фойгта

$$ij \rightarrow p \text{ и } kl \rightarrow q \equiv 11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6, \quad (12)$$

тензоры  $\tilde{C}_{ijkl}$  и  $\tilde{e}_{kij}$  можно записать как  $C_{pq}$  и  $e_{kp}$ .

В матричной форме уравнения состояния (10) и (11) имеют вид

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & -\tilde{\mathbf{e}} \\ \tilde{\mathbf{e}}^T & \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где верхний индекс T означает транспонирование матрицы. В уравнениях (13) использованы следующие вектор-матричные обозначения:  $\tilde{\mathbf{C}} = [\tilde{c}_{pq}]$  —  $6 \times 6$  матрица механических постоянных;  $\tilde{\mathbf{e}} = [\tilde{e}_{ip}]$  —  $3 \times 6$  матрица пьезоэлектрических постоянных;  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = [\tilde{\gamma}_{ij}]$  —  $3 \times 3$  матрица диэлектрических постоянных  $\gamma_{ij}$  с учетом правила (Г2). Соответственно в зависимости от направления поляризации пьезоэлектрического материала элементы матриц  $\tilde{\mathbf{C}}$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$  могут изменяться. Следует отметить, что матрица  $\tilde{\mathbf{M}} = [\tilde{m}_{fh}]$  —  $9 \times 9$  симметричная матрица относительно главной диагонали, где  $f, h = 1, 2, \dots, 9$ .

Приведем остальные обозначения:

$$\mathbf{S} = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12}\}^T, \quad (14)$$

$$\mathbf{D} = \{D_1 \quad D_2 \quad D_3\}^T, \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{13} \quad 2\varepsilon_{12}\}^T, \quad (16)$$

$$\mathbf{E} = \{E_1 \quad E_2 \quad E_3\}^T. \quad (17)$$

## 2. Методология решения

В настоящем разделе опишем применение МКЭ для моделирования задачи, описываемой уравнениями (2)—(6). Введем пробные функции  $w_i$  и  $\phi$ , удовлетворяющие условиям граничного контакта в уравнениях (4)—(6). Интегрирование по объему  $V$  результирующего уравнения, получаемого суммированием после умножения уравнений (2) и (3) на  $w_i$  и  $\phi$  соответственно, дает

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \left[ T_{ij,j} w_i + \rho \omega^2 h^2 u_i w_i + S_{i,i} \phi \right] dV = \\ &= \int_V \left[ (T_{ij} w_i)_{,j} - T_{ij} w_{i,j} + (S_i \phi)_{,i} - S_i \phi_{,i} \right] dV + \rho \omega^2 h^2 \int_V u_i w_i dV. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя известную теорему Гаусса, перепишем уравнение (18) как

$$\begin{aligned} &\int_V \left[ T_{ij} w_{i,j} + S_i \phi_{,i} \right] dV = \\ &= \int_{\Gamma} \left[ T_{ij} w_i \cos(n, x_j) + S_i \phi \cos(n, x_i) \right] d\Gamma + \rho \omega^2 h^2 \int_V u_i w_i dV, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\cos(n, x_i)$  — направляющий косинус. Теперь вычислим граничный интеграл в правой части уравнения (19). С учетом частей границы  $\Gamma = \Gamma_1^\pm \cup \Gamma_2^\pm \cup \Gamma_3^\pm$  и условий граничного контакта в уравнениях (4)—(6) указанный интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left[ T_{ij} w_i \cos(n, x_j) + S_i \phi \cos(n, x_i) \right] d\Gamma &= \int_{\Gamma_k^\pm} T_{ij} w_i \cos(n, x_j) d\Gamma_k + \\ &+ \int_{\Gamma_k^\pm} S_i \phi \cos(n, x_i) d\Gamma_k = - \int_{\Gamma_2^+} p_o \delta^* w_2 d\Gamma_2^+. \end{aligned} \quad (20)$$

В результате получим

$$\int_V \left[ T_{ij} w_{i,j} + S_i \phi_{,i} \right] dV = - \int_{\Gamma_2^+} p_o \delta^* w_2 d\Gamma_2^+ + \rho \omega^2 h^2 \int_V u_i w_i dV. \quad (21)$$

В явном виде уравнение (21) можно записать как

$$\int_V \left[ \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^w + \theta_{ij}^\sigma w_{i,j} + D_i \phi_{,i} + \theta_{ij}^D \phi_{,i} \right] dV = - \int_{\Gamma_2^+} p_o \delta^* w_2 d\Gamma_2^+ + \rho \omega^2 h^2 \int_V u_i w_i dV, \quad (22)$$

где  $\theta_{ij}^\sigma = \sigma_{kj}^0 u_{i,k}$ ;  $\theta_{ij}^D = D_i^0 u_{j,i}$ ;  $\varepsilon_{ij}^w = (w_{i,j} + w_{j,i})/2$  — соотношение деформации для тестовой функции  $w_i$ . Это завершает построение слабой формы (weak form) рассматриваемой задачи.

Затем, основываясь на вариационном принципе Гамильтона, построим вариационную формулировку трехмерной пьезоэлектрической пластины с использованием одной из указанных слабых форм. Рассматривая пробные функции  $w_i$  и  $\phi$  и соответствующие функции перемещения  $\delta u_i$  и электрического потенциала  $\delta \phi$ , удовлетворяющие условиям граничного контакта в (4)—(6), запишем уравнение (22) как

$$\begin{aligned} \int_V \left[ \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \theta_{ij}^\sigma \delta u_{i,j} + D_i \delta \phi_{,i} + \theta_{ij}^D \delta \phi_{,i} \right] dV = \\ = - \int_{\Gamma_2^+} p_o \delta^* u_2 d\Gamma_2^+ + \rho \omega^2 h^2 \int_V u_i \delta u_i dV. \end{aligned} \quad (23)$$

Рассмотрим интеграл в левой части уравнения (23). Для выделения механических составляющих величин используем для них символ “крышечка”, т.е.  $\hat{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}$ , и запишем подынтегральное выражение (13) как

$$\begin{aligned} & \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \theta_{ij}^\sigma \delta u_{i,j} + D_i \delta \phi_{,i} + \theta_{ij}^D \delta \phi_{,i} = \\ & = (\hat{\sigma}_{ij} + r_{kij}) \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{kj}^0 u_{i,k} \delta u_{i,j} + (r_{kij} u_{i,j} - s_{kn} \phi_{,n}) \delta \phi_{,k} = \\ & = (\hat{\sigma}_{ij} + \sigma_{kj}^0 u_{i,k}) \delta u_{i,j} + r_{kij} (\phi_{,k} \delta u_{i,j} + u_{i,j} \delta \phi_{,k}) - s_{kn} \phi_{,n} \delta \phi_{,k} = \\ & = p_{mjkl} u_{k,l} \delta u_{i,j} + r_{kij} (\phi_{,k} \delta u_{i,j} + u_{i,j} \delta \phi_{,k}) - s_{kn} \phi_{,n} \delta \phi_{,k} = \\ & = \frac{1}{2} \delta (p_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j}) + \delta (r_{kij} \phi_{,k} u_{i,j}) - \frac{1}{2} \delta (s_{kn} \phi_{,n} \phi_{,k}) = \\ & = \frac{1}{2} \delta (p_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j} + 2r_{kij} \phi_{,k} u_{i,j} - s_{kn} \phi_{,n} \phi_{,k}), \end{aligned} \quad (24)$$

где использованы соотношения

$$p_{ijkn} = C_{ijkn} + \sigma_{in}^0, \quad r_{ijk} = e_{ijk} + \frac{1}{2} D_k^0, \quad s_{kn} = \gamma_{kn}. \quad (25)$$

В итоге запишем уравнение (23) как

$$\delta \left( \frac{1}{2} \rho \omega^2 h^2 \int_V u_i^2 dV - \frac{1}{2} \int_V \left[ p_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j} + 2r_{kij} \varphi_{,k} u_{i,j} - s_{kn} \varphi_{,n} \varphi_{,k} \right] dV - \int_{\Gamma_2^+} p_o \delta^* u_2 d\Gamma_2^+ \right) = 0. \quad (26)$$

Введя выражения

$$P = \frac{1}{2} \int_V \left[ p_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j} + 2r_{kij} \varphi_{,k} u_{i,j} - s_{kn} \varphi_{,n} \varphi_{,k} \right] dV, \\ K = \frac{1}{2} \rho h^2 \int_V u_i^2 dV \text{ и } M = \int_{\Gamma_2^+} p_o \delta^* u_2 d\Gamma_2^+,$$

сводим рассматриваемую задачу к решению функционала

$$\delta(\omega^2 K - P - M) = 0, \quad (27)$$

где  $P$ ,  $K$ ,  $M$  — потенциальная и кинетическая энергии и виртуальная работа, произведенная внешней силой, соответственно. Отметим, что уравнение (27) можно также записать в виде

$$\delta(\omega^2 K - P_\sigma - P_m + P_e) = 0, \quad (28)$$

где

$$K = \frac{1}{2} \rho h^2 \int_V u_i^2 dV, \quad P_\sigma = \frac{1}{2} \int_V p_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j} dV - \int_{\Gamma_2^+} p_o \delta^* u_2 d\Gamma_2^+, \\ P_m = \int_V \left[ r_{kij} \varphi_{,k} u_{i,j} \right] dV, \quad P_e = \frac{1}{2} \int_V s_{kn} \varphi_{,n} \varphi_{,k} dV;$$

$P_\sigma$ ,  $P_m$ ,  $P_e$  — механическая, смешанная и электрическая энергии соответственно. Отметим, что представление в форме (28) вместо (27) иногда может быть более пригодным. Например, при  $\tilde{c}_{11} = \tilde{c}_{22} = \tilde{c}_{33} = \lambda + 2\mu$ ,  $\tilde{c}_{12} = \tilde{c}_{21} = \tilde{c}_{13} = \tilde{c}_{31} = \tilde{c}_{23} = \tilde{c}_{32} = \lambda$ ,  $\tilde{c}_{44} = \tilde{c}_{55} = \tilde{c}_{66} = \mu$  и  $\tilde{e}_{ij} = \tilde{\gamma}_{ij} = 0$  в матрицах  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{e}$ ,  $\tilde{\gamma}$  исходная задача сводится к случаю вынужденных колебаний в трехмерной предварительно напряженной упругой пластине. Однако в этом случае соответствующие строки и столбцы в операторах матрицы-вектора следует удалить. В противном случае в процедуре решения могут иметь место неопределенные случаи. Здесь  $\lambda$  и  $\mu$  — константы Ламе.

Для численного решения задачи используем традиционную формулировку МКЭ. Пусть  $V_h$  — область конечно-элементной сетки, а именно:  $V_h \subset V$  и  $V_h = \bigcup_m V^{em}$ . В соответствии с традиционной процедурой будем



искать слабое решение для перемещений  $\mathbf{u}_h = [u_{1h} \ u_{2h} \ u_{3h}] \in V_{uh}$ , электрических полей  $\mathbf{E}_h = [E_{1h} \ E_{2h} \ E_{3h}] \in V_{Eh}$  и их виртуальных вариаций  $\delta \mathbf{u}_h$  и  $\delta \mathbf{E}_h$  в виде

$$\mathbf{u}_h \cong \mathbf{N}_{uh} \tilde{\mathbf{U}}, \quad \mathbf{E}_h \cong \mathbf{N}_{Eh} \tilde{\mathbf{E}}, \quad \delta \mathbf{u}_h \cong \mathbf{N}_{uh} \delta \tilde{\mathbf{U}} \quad \text{и} \quad \delta \mathbf{E}_h \cong \mathbf{N}_{Eh} \delta \tilde{\mathbf{E}}, \quad (29)$$

где  $\tilde{\mathbf{U}}$  и  $\tilde{\mathbf{E}}$  — глобальные векторы узловых перемещений и узловых значений напряженности электрического поля соответственно;  $\mathbf{N}_{uh}$  — матрица функций формы перемещений;  $\mathbf{N}_{Eh}$  — вектор-строка функций формы для напряженности электрического поля. В настоящей работе использованы четырехугольные восьмиузловые конечные элементы, но в зависимости от желаемой сходимости решения МКЭ этот выбор может быть изменен. Узловые степени свободы элемента представим в виде единых векторов

$$\mathbf{u}_h^e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^e & \mathbf{u}_2^e & \mathbf{u}_3^e \end{bmatrix}^T = \\ = \begin{bmatrix} u_{11}^e & u_{12}^e & \dots & u_{18}^e & | & u_{21}^e & u_{22}^e & \dots & u_{28}^e & | & u_{31}^e & u_{32}^e & \dots & u_{38}^e \end{bmatrix}^T$$

и

$$\mathbf{E}_h^e = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^e & \mathbf{E}_2^e & \mathbf{E}_3^e \end{bmatrix}^T = \\ = \begin{bmatrix} E_{11}^e & E_{12}^e & \dots & E_{18}^e & | & E_{21}^e & E_{22}^e & \dots & E_{28}^e & | & E_{31}^e & E_{32}^e & \dots & E_{38}^e \end{bmatrix}^T.$$

В соответствии с общим принципом применения МКЭ при подстановке уравнения (29) в функционал (27) (или уравнение (28)) для  $V_h$  и  $\Gamma_h$  получаем

$$\left\{ \mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} \right\} \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{uE} \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{F}_u, \quad (30)$$

$$\mathbf{K}_{uE} \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{EE} \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{F}_E, \quad (31)$$

где  $\mathbf{K}_{uu} = \sum \mathbf{K}_{uu}^{em}$ ,  $\mathbf{K}_{uE} = \sum \mathbf{K}_{uE}^{em}$ ,  $\mathbf{K}_{EE} = \sum \mathbf{K}_{EE}^{em}$ ,  $\mathbf{M}_{uu} = \sum \mathbf{M}_{uu}^{em}$  — глобальные матрицы жесткости и массы, суммированные ( $\sum \bullet$ ) из соответствующих локальных матриц;  $\mathbf{F}_u$  и  $\mathbf{F}_E$  — векторы узловых сил. Из уравнения (27) следуют явные формы матриц элементов:

$$\mathbf{M}_{uu}^{em} = \int_{V^{em}} \mathbf{N}_{uh}^e \cdot \mathbf{N}_{uh}^{eT} dV^{em}, \quad \mathbf{K}_{uu}^{em} = \int_{V^{em}} \mathbf{S}_{uh}^{eT} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{S}_{uh}^e dV^{em}, \quad (32)$$

$$\mathbf{K}_{uE}^{em} = \int_{V^{em}} \mathbf{N}_{Eh}^{eT} \cdot \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{N}_{Eh}^e dV^{em}, \quad \mathbf{K}_{EE}^{em} = \int_{V^{em}} \mathbf{S}_{Eh}^{eT} \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{S}_{Eh}^e dV^{em}, \quad (33)$$

$$\mathbf{S}_{uh}^e = \mathbf{L}(\nabla) \cdot \mathbf{N}_{uh}^{eT}, \quad \mathbf{S}_{Eh}^e = \nabla \mathbf{N}_{Eh}^{eT}, \quad (34)$$

$$\mathbf{L}(\nabla) = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (35)$$

Систему уравнений (30) и (31) можно переписать в виде

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (36)$$

где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{uE} \\ \mathbf{K}_{uE} & \mathbf{K}_{EE} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \tilde{\mathbf{E}} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_E \end{Bmatrix}. \quad (37)$$

Отметим, что глобальные матрицы жесткости  $\mathbf{K}$  и массы  $\mathbf{M}$  в уравнении (37) являются симметричными и положительно определенными, поскольку слабая форма в уравнении (21) является положительно определенной. Следовательно, матричное уравнение (36) имеет решение для алгоритма МКЭ в рамках теории упругости. При оценке упомянутого матричного уравнения получаем значения перемещений, связанных с динамическим откликом пьезоэлектрической пластины, затем можем выразить компоненты относительного напряжения и электрического смещения, используя обобщенный закон Гука. В заключение отметим, что предложенную процедуру решения можно применять при решении некоторых вариантов рассматриваемой задачи или аналогичной задачи для упругих сред.

### 3. Численные приложения и примеры

В разделе 1 указано, что уравнения состояния (10), (11) и (13) могут различаться в зависимости от выбора направления поляризации. В разделе 2 описан ход решения для наиболее общего случая. Используя эти данные, можно получить определенные численные результаты для любого частного случая. С целью уменьшения объема настоящей работы представим численный анализ, основанный на предположении о том, что пьезоэлектрическая пластина поляризована только в направлении осей  $Ox_1$ ,  $Ox_2$  или  $Ox_3$  соответственно. В приложении А представлены элементы матриц уравнения (13) для всех рассматриваемых случаев. Результаты численных расчетов для пьезоэлектрической пластины, поляризованной в направлении осей  $Ox_1$ ,  $Ox_2$  и  $Ox_3$ , приведены на рис. 2—4—а, б, в соответственно. Для идентификации соответствующих численных результатов используем верхний индекс  $[\bullet]$ ; например,  $\sigma_{22}^{[1]}h/p_0$  — значение напряжения  $\sigma_{22}h/p_0$  при поляризации в направлении оси  $Ox_1$ . Отметим, что количество конечных элементов в направлении осей  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ , и  $Ox_3$  равно 50, 12 и 50 соответственно; общее количество узловых степеней свободы модели равно 135 252.

Введем обозначения

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\tilde{c}_{33}}}, \quad \eta_\ell = \frac{\sigma_{\ell\ell}^0}{\tilde{c}_{33}}, \quad \kappa_\ell = \frac{D_\ell^0}{2\tilde{c}_{33}}, \quad a_* = \frac{a_1}{a_3}, \quad h_* = \frac{h}{2a_*}, \quad (38)$$

где  $\Omega$  — безразмерный частотный параметр;  $\eta_\ell$  — параметр начального напряжения;  $\kappa_\ell$  — параметр начального электрического смещения;  $a_*$  — отношение размеров;  $h_*$  — отношение толщин. Напомним, что существуют взаимосвязи между механическими начальными напряжениями и электрическими начальными смещениями. При рассмотрении уравнений состояния при поляризации в направлении осей  $Ox_1$  и  $Ox_3$  с условиями граничного контакта (5) указанные соотношения легко получить в виде

$$D_1^0 = \frac{e_{33}(c_{11} + c_{12}) - 2c_{13}e_{31}}{c_{33}(c_{11} + c_{12}) - 2c_{13}^2} \sigma_{11}^0 \quad \text{и}$$

$$D_3^0 = \frac{(c_{11} - 2c_{12} + c_{22})c_{13}e_{31} + (c_{12}^2 - c_{11}c_{22})e_{33}}{(c_{11} - 2c_{12} + c_{22})c_{13}^2 + (c_{12}^2 - c_{11}c_{22})c_{33}} \sigma_{33}^0. \quad (39)$$

Отметим, что уравнения (39) линейны. Это согласуется с хорошо известными электромеханическими соображениями. Для конкретных примеров в качестве материала пластины выбран титанат бария ( $\text{BaTiO}_3$ ) с  $c_{44} = 44$  ГПа,  $e_{15} = 11,4$  Кл/м<sup>2</sup> и  $\gamma_{11} = 1,115$  нФ/м, как указано в [25]. В настоящей работе анализировали результаты, относящиеся к нижней поверхности пластины при  $\Omega = 0$ ,  $\eta = \eta_1 = \eta_3$ ,  $\eta = 0$ ,  $a_* = 1$  и  $h_* = 0,2$ , если не указано иное.

Сначала выполнили проверку достоверности разработанного алгоритма расчета и работу вычислительной программы. Для этого провели математическое исследование динамического поведения предварительно

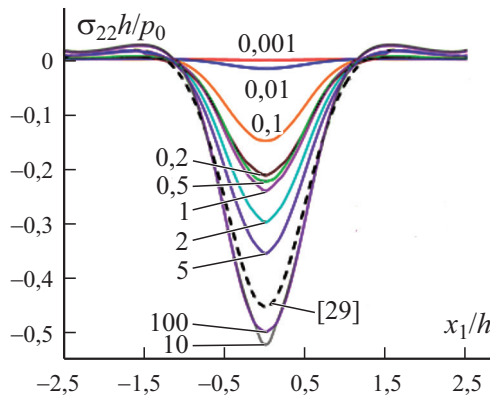


Рис. 1. Зависимость напряжения  $\sigma_{22}h/p_0$  от координаты  $x_1/h$  при поляризации в направлении оси  $Ox_2$  и  $x_3/h = a_3/h$ . Цифры у кривых — значения  $a_*$ .

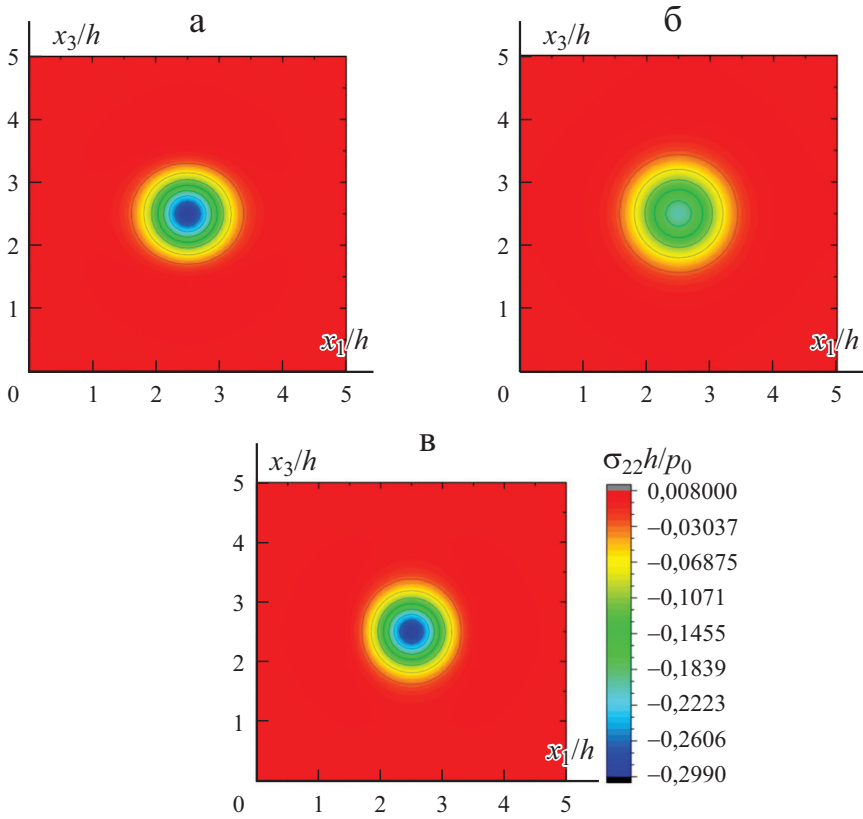


Рис. 2. Распределения напряжения  $\sigma_{22}h/p_0$  на плоскости  $Ox_1x_3$  при поляризации в направлении осей  $Ox_1$  (а),  $Ox_2$  (б),  $Ox_3$  (в).

напряженной пьезоэлектрической пластины-полосы под действием гармонической во времени силы [29]. Задача, рассматриваемая в настоящей работе, приобретает форму, аналогичную рассмотренной в [29] при  $a_* \rightarrow \infty$  и фиксированных значениях других надлежащих параметров. Данные рис. 1 свидетельствуют о том, что результаты расчета настоящей работы приближаются к представленным в [29] при  $x_3/h = a_3/h$  и  $a_* \rightarrow \infty$ , что доказывает эффективность предложенного алгоритма.

На рис. 2 представлена проекция трехмерных графиков нормального напряжения  $\sigma_{22}h/p_0$  на плоскость  $Ox_1x_3$ . Наименьшее значение напряжения  $\sigma_{22}h/p_0$  имеет место в случае поляризации в направлении оси  $Ox_2$ :  $\sigma_{22}^{[2]}h/p_0 < \sigma_{22}^{[1]}h/p_0 = \sigma_{22}^{[3]}h/p_0$ . Таким образом, с точки зрения изоляции напряжений наиболее целесообразна поляризация в направлении оси  $Ox_2$ . На рис. 2 видны области разной интенсивности напряжения  $\sigma_{22}h/p_0$ : сильного (синего цвета), среднего (зеленого цвета) и слабого (оранжевого цвета) воздействия. Формы зон сильного и среднего воздействия — круговые на рис. 2—б и эллипсоидальные с центром в точке (2,5, 2,5) на рис. 2—а, в. Главная ось эллипсов лежит на прямой

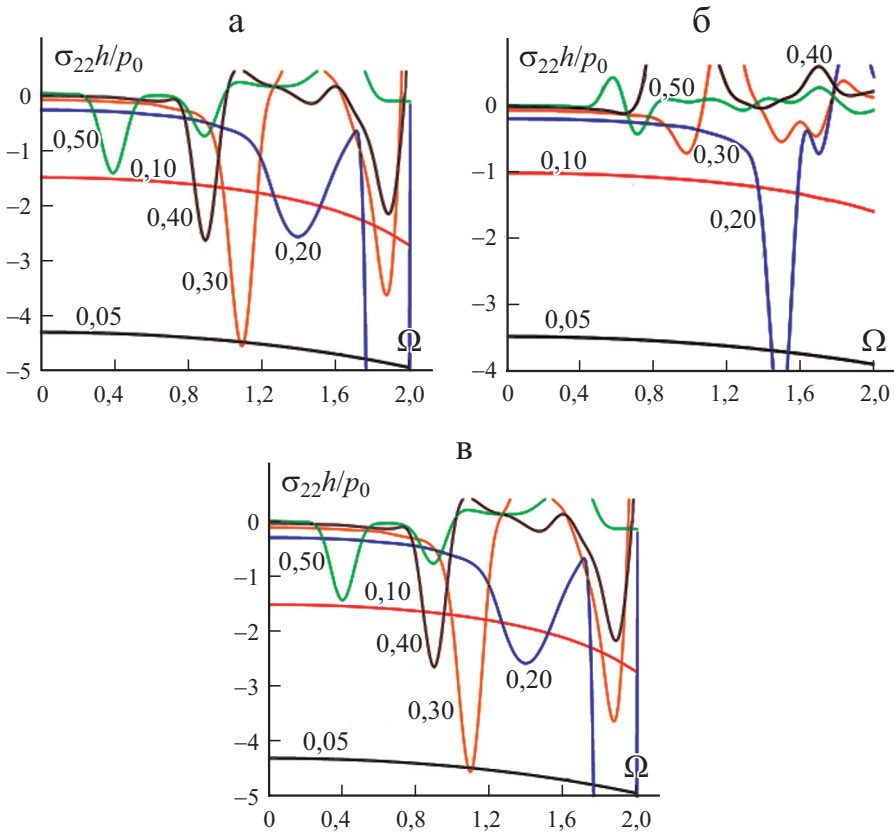


Рис. 3. Зависимость напряжения  $\sigma_{22}h/p_0$  от величины  $\Omega$  при поляризации в направлении осей  $Ox_1$  (а),  $Ox_2$  (б),  $Ox_3$  (в). Цифры у кривых — значения  $h^*$ .

$x_3/h = 2,5$  (см. рис. 2—а) и прямой  $x_1/h = 2,5$  (см. рис. 2—в). Имеем очень любопытную ситуацию. Точки фокуса граничного эллипса зоны среднего воздействия совпадают с вершинами одной из зон сильного воздействия. Например, на рис. 2—в фокусные точки соответствующего эллипса —  $F_1 \approx (2,5, 2,15)$  и  $F_2 \approx (2,5, 2,85)$ , являющиеся практически вершинами другого эллипса. Из полученных результатов следует, что при поляризации в направлении оси  $Ox_2$  трехмерное распределение напряжения  $\sigma_{22}h/p_0$  имеет форму прямого кругового конуса, а при поляризации в направлении осей  $Ox_1$  и  $Ox_3$  — правильного эллиптического конуса. Общий результат анализа сводится к тому, что выбор направления поляризации вдоль оси  $Ox_2$  обеспечивает наименьшие и наиболее равномерно распределенные напряжения.

Рассмотрим частотный отклик пластины на приложенную гармонически изменяющуюся во времени силу. Зависимости напряжения  $\sigma_{22}h/p_0$  от частоты  $\Omega$  при поляризации в направлении осей  $Ox_1$ ,  $Ox_2$  и  $Ox_3$  показаны на рис. 3. Видно, что при поляризации в направлении осей  $Ox_1$  и  $Ox_3$  зависимости весьма похожи. Зависимости  $\sigma_{22}h/p_0$  —  $\Omega$  немоно-

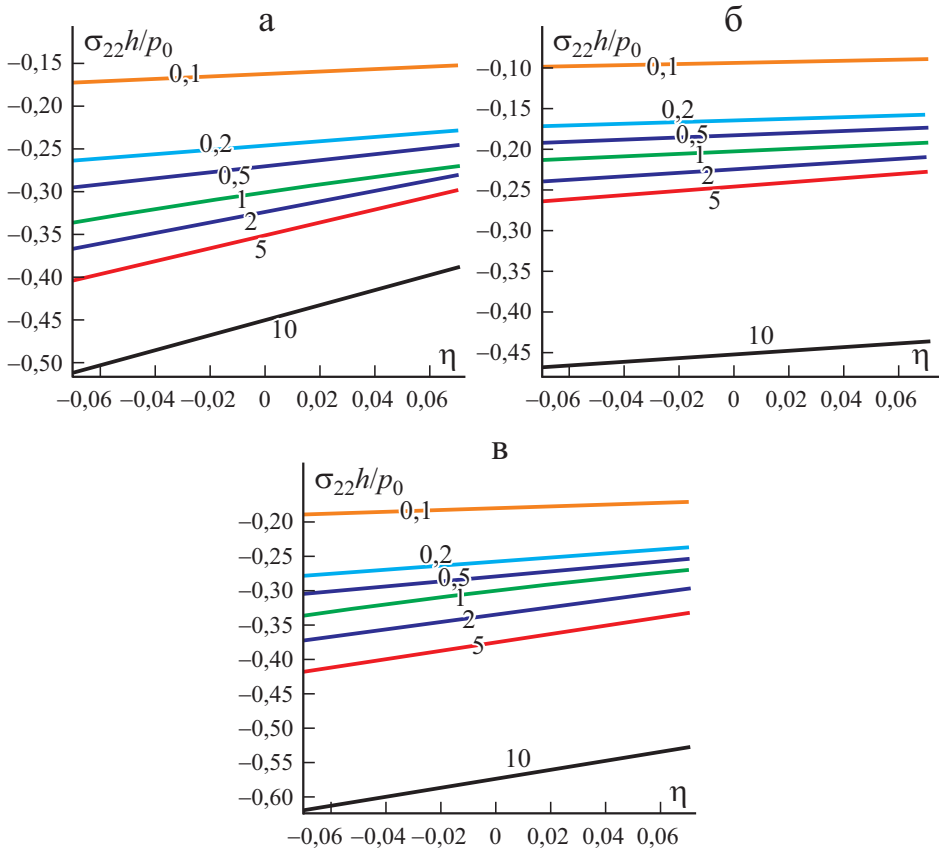


Рис. 4. Зависимость напряжения  $\sigma_{22}h/p_0$  от величины  $\eta$  при поляризации в направлении осей  $Ox_1$  (а),  $Ox_2$  (б),  $Ox_3$  (в). Цифры у кривых — значения  $a^*$ .

тонные. Абсолютные значения напряжения  $\sigma_{22}h/p_0$  возрастают с уменьшением отношения толщины  $h_*$ . Распределения  $\sigma_{22}h/p_0$  имеют экстремальные значения для определенных значений  $\Omega^*$ , которые назовем “резонансными”. Отметим, что поляризация в направлении оси  $Ox_2$  увеличивает значения  $\Omega^*$ , что означает большую устойчивость системы. При поляризации в направлении оси  $Ox_2$  зависимость  $\sigma_{22}h/p_0 — \Omega$  имеет наибольшее количество пульсаций; в этом случае направление поляризации совпадает с направлением гармонической силы по времени.

На рис. 4 показаны зависимости  $\sigma_{22}h/p_0 — \eta$  при определенных значениях отношения сторон  $a^*$ , построенные в предположении о том, что отношение  $a^*$  изменяется за счет изменения длины  $a_3$  при фиксированном значении  $a_1$ . Знак параметра начального напряжения  $\eta$  — положительный (отрицательный) — указывает на приложенную к пластине силу растяжения (сжатия). Видно, что напряжение  $\sigma_{22}h/p_0$  уменьшается при увеличении отношения  $a^*$ . Напряжение в пластине возрастает с увеличением начального сжатия, но уменьшается с увели-

чением начального растяжения. Это естественный результат, согласующийся с хорошо известными механическими результатами. Данные рис. 4 свидетельствуют о том, что влияние параметра начального напряжения  $\eta$  возрастает с увеличением отношения  $a^*$ . Сравнение данных рис. 4—*a* и 4—*б* доказывает, что выбор поляризации пластины в направлении  $Ox_1$ , а не  $Ox_3$  приводит к уменьшению значений напряжения  $\sigma_{22}h/p_0$  при  $a^* < 1$ , т.е.  $\sigma_{22}^{[2]}h/p_0 < \sigma_{22}^{[1]}h/p_0 < \sigma_{22}^{[3]}h/p_0$ . Напротив, при  $a^* > 1$  наблюдаем противоположный эффект:  $\sigma_{22}^{[2]}h/p_0 < \sigma_{22}^{[3]}h/p_0 < \sigma_{22}^{[1]}h/p_0$ . Это означает, что в пластине, поляризованной в направлении относительно длинной кромки, развивается менее напряженное состояние. Причина этого факта заключается в том, что поляризация пластины в направлении более длинной кромки имеет большую эффективную площадь.

### Заключение

В работе описаны вынужденные колебания предварительно напряженной пьезоэлектрической пластины, покоящейся на упругом основании. Сложность проблемы — в отсутствии аналитического выражения, связанного с общим подходом для оценки динамического отклика такой механической системы в рамках ТЛТУНН. Кроме того, пьезоэлектрические материалы могут иметь разные уравнения состояния в зависимости от направления поляризации. В работе представлено модальное исследование для оценки рассматриваемой и подобной ей задач.

Приведены некоторые результаты для трех частных случаев. Полученные численные результаты доказывают, что наилучшую изоляцию напряжений можно реализовать при направлении поляризации, параллельном приложенной динамической силе, при котором рассматриваемая система становится более устойчивой. Установлено, что вертикальная поляризация пластины увеличивает резонансный отклик системы. Кроме того, существует тесная количественная и качественная взаимосвязь между отношением сторон и направлением поляризации. Влияние параметра начального напряжения на распределение напряжений ослабевает по мере уменьшения отношения длин сторон пластины. Численные результаты получены для конкретного пьезоматериала — титаната бария ( $BaTiO_3$ ). Однако предложенная модель позволяет проведение более широкого исследования в других случаях и при других пьезоматериалах.

*Благодарность.* Автор выражает глубокую благодарность анонимным рецензентам за их конструктивные комментарии и предложения, существенно улучшившие качество статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kumar P., Mahanty M., Chattopadhyay A. and Singh A. K.* Effect of interfacial imperfection on shear wave propagation in a piezoelectric composite structure: Wentzel—Kramers—Brillouin asymptotic approach // *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* — 2019. — Vol. 30, Nos. 18—19. — P. 2789—2807.
2. *Mahanty M., Chattopadhyay A., Kumar P. and Singh A. K.* Effect of initial stress, heterogeneity and anisotropy on the propagation of seismic surface waves, // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2020. — Vol. 27, No. 3. — P. 177—188.
3. *Yang J.* An Introduction to the Piezoelectricity. — N. Y.: Springer, 2005.
4. *Tiersten H. F.* Linear Piezoelectric Plate Vibrations: Elements of the Linear Theory of Piezoelectricity and the Vibrations Piezoelectric Plates. —N. Y.: Springer, 2013.
5. *Southwell R. V.* On the general theory of elastic stability // *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A.* — 1914. — No. 213. — P. 187—244.
6. *Biezeno C. B. and Hencky H.* On the general theory of elastic stability // *Proc. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.* — 1928. — No. 31. — P. 569—592.
7. *Biot M. A.* Nonlinear theory of elasticity and the linearized case for a body under initial stress // *Philos. Mag. Ser.* — 1939. — Vol. 7, No. 27. — P. 468—489.
8. *Neuber H.* Die Grundgleichungen der elastischen Stabilität in allgemeinen Koordinaten und ihre Integration // *ZAMM.* — 1943. — Vol. 23. — P. 321—330.
9. *Treffitz E.* Zur Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichts // *ZAMM.* — 1933. — Vol. 12, No. 2. — P. 160—165.
10. *Green A. E., Rivlin R. S., and Shield R. T.* General theory of small deformations superposed on large elastic deformation // *Proc. R. Soc. London, Ser. A.* — 1952. — No. 211. — P. 211—292.
11. *Guz A. N.* Three-dimensional theory of elastic stability under finite subcritical deformations // *J. Appl. Mech.* — 1972. — Vol. 8, No. 12. — P. 25—44.
12. *Zubov L. M.* Theory of small deformations of prestressed thin shells // *J. Appl. Math. Mech.* — 1976. — Vol. 40, No. 1. — P. 73—82.
13. *Tiersten H. F.* Perturbation theory for linear electroelastic equations for small fields superimposed on a bias // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1978. — Vol. 64, No. 3. — P. 832—837.
14. *Ogden R. W.* Nonlinear Elastic Deformations. — N. Y.: Ellis Horwood/Halsted Press, 1984.
15. *Akbarov S. D. and Guz A. N.* Mechanics of Curved Composites. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2000.
16. *Reddy J. N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. — CRC press, 2003.
17. *Guz A. N.* Fundamentals of the Three-dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. — N. Y.: Springer, 1999.
18. *Akbarov S. D.* Dynamics of Pre-Strained Bi-Material Elastic Systems: Linearized Three-Dimensional Approach. — N. Y.: Springer, 2015.
19. *Akbarov S. D., Yildiz A. and Erozu M.* Forced vibration of the pre-stressed bi-layered plate-strip with finite length resting on a rigid foundation // *Appl. Math. Model.* — 2011. — Vol. 35, No. 1. — P. 250—256.
20. *Gupta S., Majhi D. K., Kundu S. and Vishwakarma S. K.* Propagation of torsional surface waves in a homogeneous layer of finite thickness over an initially stressed heterogeneous half-space // *Appl. Math. Comput.* — 2012. — Vol. 218, No. 9. — P. 5655—5664.
21. *Hu W. T. and Chen W. Y.* Influence of lateral initial pressure on axisymmetric wave propagation in hollow cylinder based on first power hypo-elastic model // *J. Cent. South Univ.* — 2014. — Vol. 21, No. 2. — P. 753—760.



22. *Guo X. and Wei P.* Dispersion relations of elastic waves in one-dimensional piezoelectric/piezomagnetic phononic crystal with initial stresses // *Ultrasonics*. — 2016. — Vol. 6. — P. 72—85.
23. *Yesil U. B.* Forced and natural vibrations of an orthotropic pre-stressed rectangular plate with neighboring two cylindrical cavities // *Comput. Mater. Continua*. — 2017 — Vol. 53, No. 1. — P. 1—22.
24. *Daşdemir A.* Forced vibrations of pre-stressed sandwich plate-strip with elastic layers and piezoelectric core // *Int. Appl. Mech.* — 2018. — Vol. 54, No. 4. — P. 480—493.
25. *Daşdemir A.* Effect of imperfect bonding on the dynamic response of a pre-stressed sandwich plate-strip with elastic layers and a piezoelectric core // *Acta Mech. Solida Sin.* — 2017. — Vol. 30, No. 6. — P. 658—667.
26. *Guz A. N.* Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses // *Int. Appl. Mech.* — 2002. — Vol. 38, No. 1. — P. 23—59.
27. *Akbarov S. D.* Recent investigations on dynamic problems for an elastic body with initial (residual) stresses // *Int. Appl. Mech.* — 2007. — Vol. 43, No. 12. — P. 1305—1324.
28. *Akbarov S. D.* *Stability Loss and Buckling Delamination*. — Berlin: Springer, 2012.
29. *Daşdemir A.* A mathematical model for forced vibration of pre-stressed piezoelectric plate-strip resting on rigid foundation // *МАТЕМАТИКА: МЛИАМ*, — 2018. — Vol. 34, No. 2. — P. 419—431.

Поступила в редакцию 15.01.2020

Окончательный вариант поступил 12.07.2021

Received Jan. 15, 2020 (July 12, 2021)

## Приложение А

Пьезоэлектрические материалы можно поляризовать в разных направлениях. При этом в зависимости от рассматриваемого случая изменяется матрица  $\tilde{\mathbf{M}}$  уравнений состояния. В работе представлен модальный анализ и обсуждены численные результаты, полученные для трех случаев. Матрица  $\tilde{\mathbf{M}}$  при поляризации в направлении осей  $Ox_1$ ,  $Ox_2$  и  $Ox_3$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} c_{33} & c_{13} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & e_{33} & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & e_{31} & 0 & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 & e_{31} & 0 & 0 \\ & & & c_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ & & & & & c_{44} & 0 & e_{15} & 0 \\ & & & & & & -\gamma_{33} & 0 & 0 \\ & & & & & & & -\gamma_{11} & 0 \\ \text{sym} & & & & & & & & -\gamma_{11} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} & 0 \\ & c_{33} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ & & & & c_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & c_{44} & e_{15} & 0 & 0 \\ & & & & & & -\gamma_{11} & 0 & 0 \\ & & & & & & & -\gamma_{33} & 0 \\ \text{sym} & & & & & & & & -\gamma_{11} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ & c_{22} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} \\ & & & c_{44} & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ & & & & & c_{66} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & -\gamma_{11} & 0 & 0 \\ & & & & & & & -\gamma_{11} & 0 \\ \text{sym} & & & & & & & & -\gamma_{33} \end{pmatrix}$$

СООТВЕТСТВЕННО.

---