

М. Резаи-Паджанд, А. Р. Масуди, А. Алепахамбар*

Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Iran

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ ДВУНАПРАВЛЕННОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ ТОНКОСТЕННОЙ С-ОБРАЗНОЙ БАЛКИ¹

M. Rezaiee-Pajand, A. R. Masoodi, and A. Alepaighambar*

LATERAL-TORSIONAL BUCKLING OF A BIDIRECTIONAL EXPONENTIALLY GRADED THIN-WALLED C-SHAPED BEAM

Keywords: lateral-torsional buckling, bidirectional exponentially functionally graded material, monosymmetric C-shaped beam, lateral bracing, thin-walled section

Based on the Euler—Bernoulli beam theory, an analytical closed-form solution to the lateral-torsional buckling moment of a bidirectional exponentially functionally graded monosymmetric C-shaped beam is proposed. The Young's and shear moduli of the beam vary along its height and length direction. An exponential function is used to describe the variation in material properties along both the directions. For calculating the effective material properties along these directions, the rule of mixture is employed. Moreover, the effect of distributed lateral bracing is considered in the solution presented. Several numerical examples are solved to illustrate the high accuracy and performance of the solution.

Ключевые слова: потеря устойчивости изгибно-крутильная, материал функционально-градиентный экспоненциально двунаправленный, балка С-образная моносимметричная, связь боковая, сечение тонкостенное

На основе теории балок Эйлера—Бернулли предложено аналитическое решение для определения критического момента

* Автор, с которым следует вести переписку: rezaiee@um.ac.ir
Corresponding author: rezaiee@um.ac.ir

¹Перевод с англ.

изгибно-крутильной формы потери устойчивости двунаправленной экспоненциально функционально-градиентной моносимметричной С-образной балки. Модули Юнга и сдвига балки изменяются по высоте и длине. Для описания изменения свойств материала в обоих направлениях использованы экспоненциальные функции. Для расчета эффективных свойств материала в этих направлениях применено правило смеси. В представленном решении учтено влияние распределенных боковых связей. Для демонстрации высокой точности и производительности решения решено несколько численных примеров.

Введение

Потеря устойчивости при продольном изгибе с кручением — одна из важнейших мод разрушения балок с тонкостенным поперечным сечением. Такое разрушение более существенно при моносимметричном поперечном сечении балки. Отметим, что определение критической нагрузки такой конструкции при продольном изгибе с кручением сложнее, чем для двутавровой балки. Разрушение при поперечной потере устойчивости широко изучено для однородных конструкций [1, 2]. Многие тонкостенные конструкционные элементы изготавливают из двутавровых балок. Очевидно, что поведение при местной, поперечной и крутильной формах потери устойчивости С-образных балок имеет фундаментальное значение в силу тонкостенности их поперечного сечения и малой жесткости при кручении. Это диктует необходимость изучения моды разрушения при потере устойчивости тонкостенных балок, особенно с моносимметричным поперечным сечением.

За последнее десятилетие опубликовано несколько новых работ о потере устойчивости тонкостенных балок при продольном изгибе с кручением. В первые годы XXI века в [3, 4] провели интересное исследование потери устойчивости тонкостенных двутавровых балок из композитных материалов при продольном изгибе с кручением. В [5] проанализировали закритическое поведение тонкостенных балок открытого сечения после поперечной потери устойчивости. Прочность стальных угловых профилей после поперечной потери устойчивости исследовали в [6]. В [7] аналитически изучали эффекты докритического деформирования тонкостенных балок с открытым коническим поперечным сечением при потере устойчивости, обусловленной продольным изгибом с кручением. В [7—12] изучали изгибно-крутильную форму потери устойчивости балок с переменным поперечным сечением. В [13] исследовали поведение конических толстостенных балок с произвольным поперечным сечением при изгибно-крутильной потере устойчивости. В [9, 14] для описания нелинейных откликов тонкостенных двутавровых балок при изгибно-крутильной потере устойчивости в вычислительном методе использовали оболочечный конечный элемент.

В некоторых работах изучали поведение тонкостенных балок разного сечения, изготовленных из разных типов композитных материалов, при продольном изгибе с кручением [15—21]. В [22—28] исследовали применение изотропных и неоднородных функционально-градиентных материалов (ФГМ). Например, в [29] определили критический момент при изгибно-крутильной потере устойчивости конических двутавровых балок из ФГМ с непрерывными боковыми связями. Хотя было проведено много исследований для изучения поведения композитных балок при изгибе [30], анализ изгиба при поперечном кручении балок из ФГМ с разным поперечным сечением, в том числе *S*- и *Z*-образным, все еще может быть разработан с использованием аналитического решения. Недавно в [31] проанализировали продольный изгиб с кручением конической двутавровой свободно опертой балки из ФГМ методом дифференциальных квадратур. Свойства балки непрерывно изменялись вдоль ее оси.

Из приведенного обзора литературы следует, что изучение поведения композитных тонкостенных балок при потере устойчивости следует продолжать. Цель настоящей работы — получение аналитического решения задачи потери устойчивости при продольном изгибе с кручением тонкостенной балки из двунаправленного ФГМ с боковыми связями и *S*-образным поперечным сечением. Для этого использовали теорию балок Эйлера—Бернулли и предположения Сен-Венана о кручении. Решение получено методом минимизации полной потенциальной энергии. Кроме того, для распределения модулей Юнга и сдвига использовали экспоненциальные функции и правило смеси, а коэффициент Пуассона предположили постоянным.

1. Методологические предположения

Для упрощения формулировок в каждой процедуре использовали введенные предположения. Сначала рассматривали крутильные деформации на основе теории Сен-Венана для тонкостенных балок без учета влияния сдвиговой деформации. Иными словами, приняли теорию балки Эйлера—Бернулли. Соответственно сечение балки при деформации оставалось плоским. Рассматривали малые деформации. Материалы балки считали линейно-упругими, характеристики которых изменялись в обоих направлениях. Модули упругости и сдвига изменяли по высоте поперечного сечения и длине балки согласно экспоненциальным функциям. Характер изменения модулей Юнга и сдвига, а также коэффициента Пуассона считали постоянным для всей балки. В результате *S*-образное поперечное сечение балки имеет одну ось симметрии.

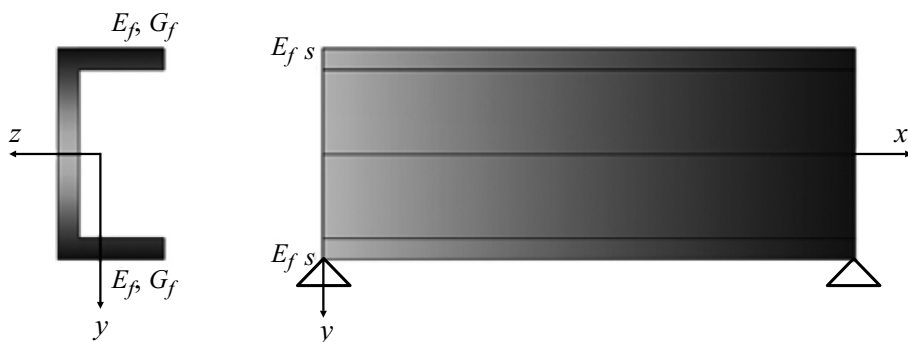


Рис. 1. Схема изменения свойств материала балки в продольном и поперечном направлениях.

2. Определение свойств ФГМ

Рассмотрим балку из ФГМ, эффективные механические свойства которого определили по правилу смеси исходя из характеристик составляющих ее материалов, включая модули Юнга и сдвига [32]:

$$P_f = P_c V_c + P_m V_m, \quad (1)$$

$$V_c + V_m = 1, \quad (2)$$

где нижние индексы c и m обозначают керамическую и металлическую фазы ФГМ соответственно. Изменения механических свойств в продольном (по длине L) и поперечном (по высоте h) направлениях балки представим следующим образом:

$$E(y) = E_f(x)P \quad G(y) = G_f(x)P, \quad P = \exp\left[\alpha\left(\left|y/h\right| + 0,5\right)\right], \quad (3)$$

$$E_f(x) = E_{f,s}Q \quad G_f(x) = G_{f,s}Q, \quad Q = \exp(\gamma x/L), \quad (4)$$

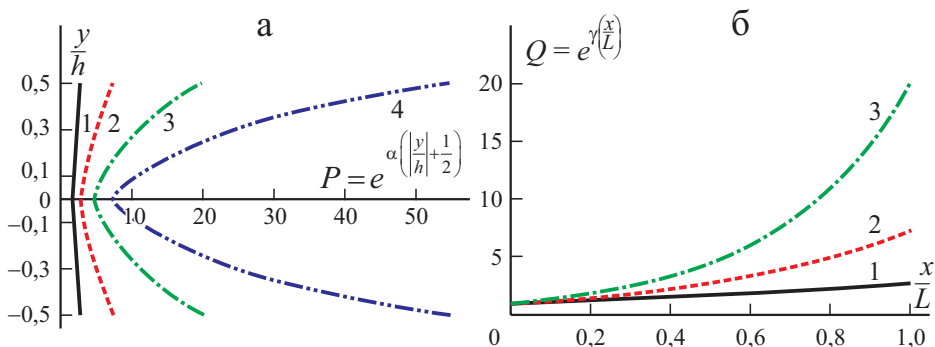


Рис. 2. Вид функций $P(y/h)$ (а) и $Q(x/L)$ (б): цифры у кривых — значения α (а) и γ (б).

где x и y — продольное и поперечное направление соответственно; нижний индекс s указывает начальное поперечное сечение балки; нижний индекс f, s указывает состояние ФГМ в начале балки. Схематически балка изображена на рис. 1. Зависимости $P(y/h)$ и $Q(x/L)$ иллюстрируют данные рис. 2.

3. Предложенная схема

Поскольку жесткость элемента балки при кручении меньше ее осевой жесткости, разрушение балки может происходить по моде продольного изгиба с кручением. В настоящем исследовании балка подвержена действию сосредоточенных моментов относительно осей z и y , приложенных на обоих концах. Основная цель исследования — определение максимального изгибающего момента, который можно приложить к балке, путем построения и минимизации функции полной потенциальной энергии конструкции. На рис. 3 показана геометрия балки и ее сечения, где t_w , h , t_f , b_f — толщина стенки, высота сечения, толщина и ширина полки соответственно.

Точки C и S — центры площади и сдвига С-образного поперечного сечения соответственно. Горизонтальные расстояния центров площади и сдвига от середины стенки обозначены как z_c и z_0 соответственно. Эти параметры вычисляем по формулам [33]

$$z_c = \frac{0,5b_f^2 t_f e^\alpha}{b_f t_f e^\alpha + \frac{t_w h}{\alpha} (e^\alpha - e^{\alpha/2})}, \quad (5)$$

$$z_0 = \frac{t_f b_f^2 h^2 e^\alpha}{4I_z}. \quad (6)$$

Балка в продольном направлении непрерывно связана с пружинами жесткостью R (боковая связь), а ее поперечное сечение постоянно. Полная потенциальная энергия балки $\Pi = U + V$, где U — потенциальная энергия

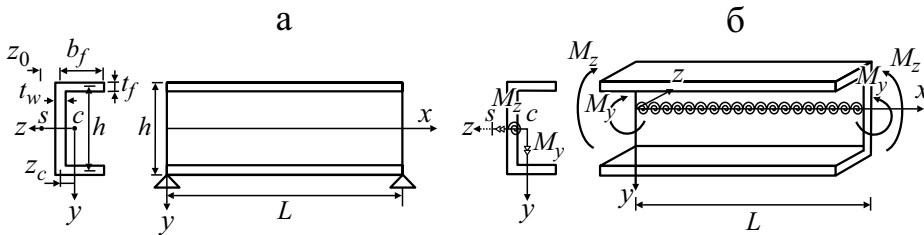


Рис. 3. С-образная балка под действием внешних изгибающего M_z и поперечного M_y моментов.

ее продольного изгиба с кручением; V — работа внешних нагрузок [33, 34]:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E_f(x) I_y [w'']^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L E_f(x) I_z [v'']^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L E_f(x) I_w [\phi'']^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L G_f(x) J(x) [\phi']^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L R[\phi]^2 dx, \quad (7)$$

$$V = - \int_0^L E_f(x) M_y v'' \phi dx + \int_0^L E_f(x) M_y \beta [\phi']^2 dx + \int_0^L E_f(x) M_z w'' \phi dx. \quad (8)$$

Здесь w и v — прогибы балки в направлениях z и y соответственно; ϕ — угол закручивания; I_y и I_z — полярные моменты инерции относительно осей y и z соответственно; I_w — депланационный момент инерции. В силу функций изменения модулей упругости и сдвига ось упругой симметрии балки совмещена с осью z . Геометрическая ось симметрии С-образного поперечного сечения также совпадает с осью z . Поэтому взаимодействие изгиба с растяжением балки в функции ее энергии деформирования не учитывали. Поскольку балка — продольно-призматическая, также не учитывали изгибно-крутильное взаимодействие. Поскольку модули Юнга и сдвига изменяются вдоль продольной оси балки, вариационное исчисление не использовали в силу большой сложности вывода основных дифференциальных уравнений при таком подходе. Прибегли к простому и эффективному способу получения определяющих уравнений, применив метод Ритца при выборе гармонических функций для величин w , v и ϕ . Следует отметить, что один из наиболее существенных моментов — выполнение всех граничных условий в выбранных функциях. В настоящем исследовании оба конца балки имели шарнирное опирание в направлениях z и y . Рассмотрели три типа граничных условий опирания концов балки: свободно опертые (SS), защемленный—подвижный (CF) и защемленные (CC):

$$\begin{aligned} w(0) = 0, \quad w''(0) = 0, \quad w(L) = 0, \quad w''(L) = 0, \\ v(0) = 0, \quad v''(0) = 0, \quad v(L) = 0, \quad v''(L) = 0, \\ \phi_{SS}(0) = 0, \quad \phi_{SS}''(0) = 0, \quad \phi_{SS}(L) = 0, \quad \phi_{SS}''(L) = 0, \\ \phi_{CF}(0) = 0, \quad \phi_{CF}'(0) = 0, \quad \phi_{CF}(L) \neq 0, \quad \phi_{CF}'(L) = 0, \\ \phi_{CC}(0) = 0, \quad \phi_{CC}'(0) = 0, \quad \phi_{CC}(L) = 0, \quad \phi_{CC}'(L) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Функции, выбранные для прогиба балки, можно представить в виде

$$w(x) = \sum_{k=1}^{m+2} w_k \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad (10)$$

$$v(x) = \sum_{k=1}^{m+2} v_k \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad (11)$$

$$\phi_{SS}(x) = \sum_{k=1}^{m+2} \phi_k \sin \frac{k\pi x}{L},$$

$$\phi_{CF}(x) = \sum_{k=1}^{m+2} \phi_k \left(1 - \cos \frac{(2k-1)\pi x}{L} \right), \quad (12)$$

$$\phi_{CC}(x) = \sum_{k=1}^{m+2} \phi_k \left(1 - \cos \frac{2k\pi x}{L} \right),$$

где w_k и v_k — прогибы в направлениях z и y соответственно; ϕ_k — угол закручивания; k — номер моды потери устойчивости, возрастающий от 1 до $m+2$. Необходимо отметить, что балка имеет $m+1$ моду потери устойчивости. После этого потенциальную энергию деформирования С-образного поперечного сечения переписывали с учетом выбранных функций деформирования. Энергию деформирования в силу продольного изгиба можно выразить как

$$U^{by} = \frac{1}{2} \int_0^L E_f(x) I_y [w'']^2 dx, \quad (13)$$

где

$$I_y = \frac{t_f b_f^3}{6} + 2t_f b_f \left(\frac{b_f}{2} - z_c \right)^2 e^\alpha + \frac{2h}{\alpha} (e^\alpha - e^{\alpha/2}) \left(z_c^2 t_w + \frac{t_w^3}{12} \right). \quad (14)$$

Соответствующая процедура получения соотношения для полярного момента инерции I_y вокруг оси y представлена в Приложении. Используя формулы (7) и (14), получим выражение для потенциальной энергии деформирования при продольном изгибе

$$\begin{aligned} U^{by} = & -(8,1174w_k^2 k^4 E_{f,s} (19,7392e^{2\alpha} h^2 k^2 t_w^4 + 19,7392e^\alpha h^2 k^2 t_w^4 - \\ & - 19,7392e^{(\gamma+2\alpha)} h^2 k^2 t_w - 19,7392e^{(\gamma+\alpha)} h^2 k^2 t_w^4 - 39,4784e^{1,5\alpha} h^2 k^2 t_w^4 + \\ & + 39,4784e^{(\gamma+1,5\alpha)} h^2 k^2 t_w^4 + 19,7392e^{(\gamma+1,5\alpha)} \alpha h k^2 b_f t_f t_w^3 + \\ & + 78,9568e^{2\alpha} \alpha h k^2 b_f^3 t_f t_w + 19,7392e^{2\alpha} \alpha h k^2 b_f t_f t_w^3 - \\ & - 78,9568e^{(\gamma+2\alpha)} \alpha h k^2 b_f^3 t_f t_w - 19,7392e^{(\gamma+2\alpha)} \alpha h k^2 b_f t_f t_w^3 - \\ & - 78,9568e^{1,5\alpha} \alpha h k^2 b_f^3 t_f - 19,7392e^{1,5\alpha} \alpha h k^2 b_f t_f t_w^3 + \\ & + 78,9568e^{(\gamma+1,5\alpha)} \alpha h k^2 b_f^3 t_f t_w + 19,7392e^{2\alpha} \alpha^2 k^2 b_f^4 t_f^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -19,7392e^{(\gamma+2\alpha)}\alpha^2k^2b_f^4t_f^2) / (L^3\alpha\gamma(39,4784e^\alpha\alpha k^2b_ft_f + \\
 & +e^\alpha\alpha\gamma^2b_ft_f + 39,4784e^\alpha hk^2t_w + e^\alpha\gamma^2ht_w - 39,4784e^{0,5\alpha}hk^2t_w - e^{0,5\alpha}\gamma^2ht_w.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Энергия деформирования U^{bz} при изгибе относительно оси z и полярный момент инерции I_z относительно оси z запишем как

$$U^{bz} = \frac{1}{2} \int_0^L E_f(x) I_z [v'']^2 dx, \tag{16}$$

$$I_z = \frac{b_ft_fh^2e^\alpha}{2} + \frac{2t_w h^3}{\alpha} \left[\frac{e^\alpha}{4} - \frac{e^\alpha}{\alpha} + \frac{2(e^\alpha - e^{\alpha/2})}{\alpha^2} \right]. \tag{17}$$

Выражение для определения величины I_z приведено в Приложении. Окончательное выражение энергии деформирования U^{bz} при изгибе относительно оси z имеет вид

$$\begin{aligned}
 U^{bz} = & -\frac{1}{\alpha^3 L^3 (39,4784k^2 + \gamma^2)\gamma} 24,3523v_k^2 k^4 h^2 E_{f,s} (19,7392e^{(\gamma+\alpha)}\alpha^3 k^2 b_ft_f + \\
 & +19,7392e^{(\gamma+\alpha)}\alpha^2 hk^2 t_w - 78,9568e^{(\gamma+\alpha)}\alpha hk^2 t_w + 157,9137e^{0,5\alpha} hk^2 t_w - \\
 & -19,7392e^\alpha \alpha^3 k^2 b_ft_f - 19,7392e^\alpha \alpha^2 hk^2 t_w + 78,9568e^\alpha \alpha hk^2 t_w + \\
 & +157,9137e^{(\gamma+\alpha)} hk^2 t_w - 157,9137e^{(\gamma+0,5\alpha)} hk^2 t_w - 157,9137e^\alpha hk^2 t_w). \tag{18}
 \end{aligned}$$

Энергию деформирования U^w в силу искривления и депланационный момент инерции I_w можно быть определить с помощью выражений

$$U^w = \frac{1}{2} \int_0^L E_f(x) I_w [\phi'']^2 dx, \tag{19}$$

$$I_w = \left(I_y + Az_c^2 - Az_0 z_c \right) \frac{h^2}{4}, \tag{20}$$

$$A = 2b_ft_f e^\alpha + \frac{2t_w h}{\alpha} (e^\alpha - e^{\alpha/2}). \tag{21}$$

Площадь поперечного сечения балки можно вычислить по формуле (21). Выражения для вычисления депланационного момента инерции приведены в Приложении. Энергию деформирования в силу искривления можно вычислить по формулам (7) и (19). Потенциальную энергию кручения по Сен-Венану при свободном кручении балки и постоянную кручения находим с помощью соотношений

$$U^{st} = \frac{1}{2} \int_0^L G_f(x) J [\phi']^2 dx, \tag{22}$$

$$J = \frac{2}{3} b_f t_f^3 e^\alpha + \frac{2ht_w^3(e^\alpha - e^{\alpha/2})}{3\alpha}. \quad (23)$$

Подробно определение постоянной кручения представлено в Приложении. Энергию деформирования при кручении по Сен-Венану можно найти с помощью формул (7) и (22). Выражения для расстояний центров сдвига и площади от середины стенки также приведены в Приложении. На рис. 3 представлена геометрия С-образной балки и приложенные к ней нагрузки. Потенциальную энергию, обусловленную боковыми пружинами, выразим как

$$U^R = \frac{1}{2} \int_0^L R[\phi]^2 dx. \quad (24)$$

Подставив (12) в уравнение (24), получим потенциальную энергию, обусловленную боковыми пружинами, работающими на кручение, в виде

$$\begin{aligned} U_{SS}^R &= \frac{R[\phi_k]^2 L}{4}, \\ U_{CF}^R &= \frac{3R[\phi_k]^2 L}{4}, \\ U_{CC}^R &= \frac{3R[\phi_k]^2 L}{4}. \end{aligned} \quad (25)$$

С-образное поперечное сечение несимметрично относительно оси y . Скручивание создает продольное напряжение относительно оси сдвига, влияющее на сопротивление продольному изгибу с кручением балки с одной осью симметрии. Это влияние, известное как эффект Вагнера, характеризует параметр β , вычисляемый по формуле [33]

$$\begin{aligned} \beta = & \left\{ \frac{2h^3 t_w z_c}{\alpha} \left[\frac{e^\alpha}{4} - \frac{e^\alpha}{\alpha} + \frac{2(e^\alpha - e^{\alpha/2})}{\alpha^2} \right] + \frac{2h}{\alpha} z_c^3 t_w (e^\alpha - e^{\alpha/2}) + \right. \\ & \left. + \frac{t_f e^\alpha}{4} \left[h^2 (z_c^2 - (b_f - z_c)^2) + 2(z_c^4 - (b_f - z_c)^4) \right] \right\} / 2I_y - z_0. \end{aligned} \quad (26)$$

Согласно Вагнеру, прочность при кручении балки с одной осью симметрии изменяется от $G_f(x)J$ до $G_f(x)J + G_f(x)\beta M_y$. За счет внешних нагрузок функцию энергии можно выразить как

$$V = \frac{M_y v_k \pi^2 k^2 \phi_k}{2L} + \frac{M_y \beta [\phi_k]^2 k^2 \pi^2}{2L} - \frac{M_z \phi_k w_k k^2 \pi^2}{2L}. \quad (27)$$

На основании изложенного общую потенциальную энергию деформирования конструкции найдем, объединив энергию деформирования при продольном изгибе относительно осей z и y с потенциальной энергией деформирования при кручении по Сен-Венану, а также энергией, обусловленной внешними моментами. Поскольку функция полной потенциальной энергии слишком сложна, ее упростили, используя депланационный момент инерции, постоянную кручения, моменты инерции и параметр Вагнера. После выполнения необходимых вычислений получили следующие простые аналитические выражения:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{SS} = & -\frac{E_{f,s}I_y w_k^2 \pi^4 k^4 (-2e^\gamma \pi^2 k^2 + 2\pi^2 k^2)}{2L^3 (4\pi^2 k^2 + \gamma^2)\gamma} - \\
 & -\frac{E_{f,s}I_w \phi_k^2 \pi^4 k^4 (-2e^\gamma \pi^2 k^2 + 2\pi^2 k^2)}{2L^3 (4\pi^2 k^2 + \gamma^2)\gamma} + \\
 & + \frac{G_{f,s}J\phi_k^2 \pi^2 k^2 (+2e^\gamma \pi^2 k^2 - 2\pi^2 k^2 + e^\gamma \gamma^2 - \gamma^2)}{2L(4\pi^2 k^2 + \gamma^2)\gamma} - \\
 & - \frac{E_{f,s}I_z v_k^2 \pi^4 k^4 (-2e^\gamma \pi^2 k^2 + 2\pi^2 k^2)}{2L^3 (4\pi^2 k^2 + \gamma^2)\gamma} + \frac{M_y v_k \phi_k \pi^2 k^2}{2L} + \\
 & + \frac{M_y \beta [\phi_k]^2 \pi^2 k^2}{2L} + \frac{1}{4} R(\phi_k)^2 L - \frac{M_z w_k \phi_k \pi^2 k^2}{2L}, \quad (28) \\
 \Pi_{CF} = & -\frac{E_{f,s}I_y w_k^2 \pi^4 k^4 (-2e^\gamma \pi^2 k^2 + 2\pi^2 k^2)}{2L^3 (4\pi^2 k^2 + \gamma^2)\gamma} + \\
 & + \frac{1}{2L^3 (16\pi^2 k^2 - 16\pi^2 k + 4\pi^2 + \gamma^2)\gamma} (\phi_k^2 \pi^4 I_2 E_{f,s} (-16\gamma^2 k^4 + 32\gamma^2 k^3 - 24\gamma^2 k^2 + \\
 & + 8\gamma^2 k - 128\pi^2 k^6 + 384\pi^2 k^5 - 480\pi^2 k^4 + 320\pi^2 k^3 + 24\pi^2 k - 384e^\gamma \pi^2 k^5 + \\
 & + 480e^\gamma \pi^2 k^4 - 8e^\gamma \gamma^2 k - 24e^\gamma \pi^2 k + 128e^\gamma \pi^2 k^6 - 32e^\gamma \gamma^2 k^3 + 24e^\gamma \gamma^2 k^2 + \\
 & + 16e^\gamma \gamma^2 k^4 - 320e^\gamma \pi^2 k^3 + 2e^\gamma \pi^2 + e^\gamma \gamma^2 - 120\pi^2 k^2 - 2\pi^2 - \gamma^2 + 120e^\gamma \pi^2 k^2)) \\
 & - \frac{G_{f,s}J\phi_k^2 \pi^2}{2L(16\pi^2 k^2 - 16\pi^2 k + 4\pi^2 + \gamma^2)\gamma} (-16e^\gamma \pi^2 k^4 + 32e^\gamma \pi^2 k^3 + 16\pi^2 k^4 - \\
 & - 24e^\gamma \pi^2 k^2 - 32\pi^2 k^3 + 8e^\gamma \pi^2 k + 24\pi^2 k^2 - e^\gamma \pi^2 - 8\pi^2 k + \pi^2) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{E_{f,s} I_z v_k^2 \pi^4 k^4 (-2e^\gamma \pi^2 k^2 + 2\pi^2 k^2)}{2L^3 (4\pi^2 k^2 + \gamma^2) \gamma} - \\
 & \frac{M_y v_k \phi_k \pi k (2 \cos^3(k\pi) k^2 - 2 \cos^3(k\pi) k - 2 \cos(k\pi) k - 4k^2 + \cos(k\pi) + 4k - 1)}{L(3k^2 - 4k + 1)} - \\
 & - \frac{M_y \beta (\phi_k)^2 \pi (-4\pi k^2 + 4\pi k - \pi)}{2L} + \frac{3R(\phi_k)^2 L}{4} + \\
 & + \frac{M_z w_k \phi_k \pi k (2 \cos^3(k\pi) k^2 - 2 \cos^3(k\pi) k - 2 \cos(k\pi) k - 4k^2 + \cos(k\pi) + 4k - 1)}{L(3k^2 - 4k + 1)}, \tag{29}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{CC} = & - \frac{E_{f,s} I_y w_k^2 \pi^4 k^4 (-2e^\gamma \pi^2 k^2 + 2\pi^2 k^2)}{2L^3 (4\pi^2 k^2 + \gamma^2) \gamma} + \\
 & + \frac{8E_{f,s} I_w \pi^4 k^4 \phi_k^2 (e^\gamma \gamma^2 + 8e^\gamma \pi^2 k^2 - 8\pi^2 k^2 - \gamma^2)}{L(16\pi^2 k^2 + \gamma^2) \gamma} - \\
 & - \frac{8G_{f,s} J \phi_k^2 \pi^2 k^2 (-2e^\gamma \pi^2 k^2 + 2\pi^2 k^2)}{L(16\pi^2 k^2 + \gamma^2) \gamma} - \frac{E_{f,s} I_z v_k^2 \pi^4 k^4 (-2e^\gamma \pi^2 k^2 + 2\pi^2 k^2)}{2L^3 (4\pi^2 k^2 + \gamma^2) \gamma} + \\
 & + \frac{2M_y v_k \phi_k \pi k (\cos^3(k\pi) - 3 \cos(k\pi) + 2)}{3L} + \frac{2M_y \beta [\phi_k]^2 \pi^2 k^2}{L} + \\
 & + \frac{3}{4} R(\phi_k)^2 L - \frac{2M_z w_k \phi_k \pi k (\cos^3(k\pi) - 3 \cos(k\pi) + 2)}{3L}. \tag{30}
 \end{aligned}$$

Для определения критического изгибающего момента балки полную потенциальную энергию конструкции минимизировали методом Ритца. Для этого производные выражений (28) — (30) по w_k , v_k , ϕ_k приравняли к нулю:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_k} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v_k} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_k} = 0. \tag{31}$$

Уравнения (31) можно записать в матричной форме как

$$\begin{bmatrix} \{C_{11}\} & \{C_{12}\} & \{C_{13}\} \\ \{C_{21}\} & \{C_{22}\} & \{C_{23}\} \\ \{C_{31}\} & \{C_{32}\} & \{C_{33}\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_k\} \\ \{v_k\} \\ \{\phi_k\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}. \tag{32}$$

Детерминант матрицы коэффициентов [C] приравняем к нулю.

4. Результаты и обсуждение

Для проверки представленной формулы для определения критического момента потери устойчивости результаты, полученные в настоящем исследовании, сопоставили с полученными другими исследователями. В частном случае критический момент можно определить для С-образной свободно опертой балки без поперечного момента относительно оси y . Для проверки результатов рассмотрели балку UPE160 [35] со следующими геометрическими характеристиками: $b_f = 0,07$ м, $t_f = 0,95$ см, $t_w = 0,55$ см, $h = 0,141$ м, $I_y = 8,83 \cdot 10^6$ м⁴, $I_z = 1,05 \cdot 10^6$ м⁴, $I_w = 4,66 \cdot 10^6$ м⁴, $E = 210$ ГПа, $\nu = 0,3$.

Результаты сравнения критического момента балок разной длины с полученными с помощью эталонного решения и расчета методом конечных элементов (МКЭ) приведены в табл. 1. Видно хорошее согласование представленных результатов.

Кроме того, численно исследовали влияние показателей степени, связанных с механическими свойствами материала в направлениях x и y , на критический момент потери устойчивости балки. Геометрические характеристики и свойства материала С-образной балки следующие: $b_f = 0,15$ м, $t_f = 0,02$ м, $t_w = 0,01$ м, $h = 0,5$ м, $E_{f,s} = 100$ ГПа, $\nu = 0,3$.

4.1. С-образная балка из однонаправленного экспоненциально функционально-градиентного материала (ОЭФГМ), нагруженная поперечным и изгибающим моментами. Рассмотрим балку из ФГМ, экспоненциально градиентного только в направлении оси y ; в продольном направлении свойства постоянны (параметр $\gamma = 0$) (рис. 4). Ввиду отсутствия боковой связи константу жесткости R считали равной нулю. С учетом граничных условий, использованных в данном примере, критические моменты потери устойчивости запишем как

$$M_{cr,SS} = \frac{\sqrt{\left\{ E_{f,s} \left[E_{f,s} I_w \pi^4 k^4 + L^2 k^2 \pi^2 (G_{f,s} J + 2M_y \beta) \right] I_z - M_y^2 L^4 \right\} I_y I_z}}{L^2 I_z} \quad (33)$$

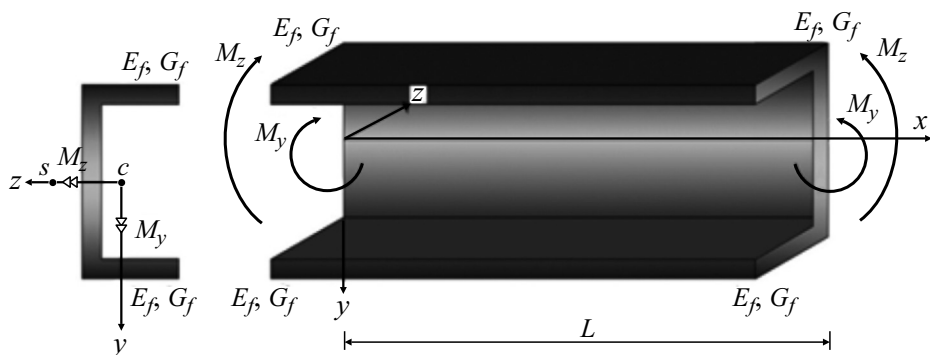


Рис. 4. С-образная балка из ОЭФГМ без боковых связей.

Табл. 1

Значения критического момента потери устойчивости M_{cr} (кН·м) свободно опертых однородных С-образных балок

Длина балки, м	[35]	МКЭ	Настоящая работа
1,200	121,76	115,77	117,73
1,800	65,88	63,93	64,54
2,500	42,44	41,38	41,81
3,000	28,25	27,57	27,84

$$\begin{aligned}
 M_{cr,CF} = 1,5 \left[I_y I_z \left(-\frac{4}{9} L^4 M_y^2 k^2 (k-1)^2 + \frac{8}{9} (k-1) M_y^2 L^4 (k-0,5) k + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{16}{9} (k-1) M_y^2 L^4 (k-0,5)^2 k \cos^3(k\pi) - \frac{4}{9} M_y^2 L^4 (k-0,5)^2 - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{16}{9} M_y^2 L^4 (k-0,5)^3 \cos(k\pi) + 4E_{f,s}^2 (k-1)^2 \left(k - \frac{1}{3} \right)^2 I_w I_z (k-0,5)^4 k^2 \pi^6 + \right. \right. \\
 \left. \left. + E_{f,s} (k-1)^2 (G_{f,s} J + 2M_y \beta) L^2 \left(k - \frac{1}{3} \right)^2 I_z (k-0,5)^2 k^2 \pi^4 - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{16}{9} M_y^2 L^4 (k-0,5)^4 \right]^{0,5} / \left\{ L^2 I_z \left[(k^2 - k) \cos(k\pi) \right]^3 + \right. \\
 \left. + (k-0,5) \cos(k\pi) - 2(k-0,5)^2 \right\}, \quad (34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{cr,CC} = \left\{ \left[16L^4 M_y^2 (-2 - \cos^3(k\pi) + 3\cos(k\pi)) \right] + \right. \\
 \left. + E_{f,s} k^4 I_z \pi^4 L^2 (G_{f,s} J + 2M_y \beta) + \right. \\
 \left. + 4E_{f,s}^2 I_w I_z \pi^6 k^6 I_y I_z \right\}^{0,5} / \left[L^2 I_z (\cos(k\pi) + 2)(\cos(k\pi) - 1) \right]^2. \quad (35)
 \end{aligned}$$

Модуль Юнга верхней полки равен 100 ГПа, модуль упругости в продольном направлении постоянен, а в поперечном направлении изменяется согласно формуле (3). Балка нагружена сосредоточенными изгибающими моментами M_z и M_y . Значения критических моментов, обусловленных моментом $M_y = 1000$ кН·м, приведены в табл. 2.

Полученные результаты показывают, что увеличение длины балки, к которой приложен изгибающий момент M_y , уменьшает значения критического момента потери устойчивости. Увеличение показателя степени α обусловило экспоненциальное увеличение критического момента по-

тери устойчивости. Расчет трех мод потери устойчивости (первой, третьей и пятой) продемонстрировал возможность и точность формулировки, предложенной для предсказания критического момента потери устойчивости С-образных балок. Установили, что для первой моды значения критического момента потери устойчивости балки с защемленными и подвижными концами (CF) меньше, чем балок с граничными условиями защемления (CC) и свободного опирания (SS), а для пятой моды наоборот больше. Кроме того, при малых значениях показателя степени α с увеличением длины балки значения критического момента потери устойчивости стремятся к нулю.

4.2. С-образная балка из двунаправленного экспоненциально функционально-градиентного материала (ДЭФГМ), нагруженная изгибающими моментами. Смоделировали С-образную балку из ДЭФГМ без

Табл. 2

Значения критических моментов потери устойчивости (МН·м) в 1-й, 3-й и 5-й модах ($k = 1, 3, 5$) С-образных балок из ОЭФГМ разной длины L и с разными условиями опирания (SS, CF, CC), нагруженных поперечными моментами $M_y = 1000$ кН·м

$L = 1$ м					$L = 5$ м				
k	α	SS	CF	CC	k	α	SS	CF	CC
1	1,0	13,29249	10,43925	32,77327	1	1,0	-----	-----	0,690856
	1,5	22,03629	17,30670	52,99423		1,5	0,000000	0,000000	1,733469
	2,0	36,05533	28,31745	85,51939		2,0	1,068730	0,827867	3,227929
	2,5	58,60743	46,02996	137,9224		2,5	2,424230	1,899062	5,566335
	3,0	94,96860	74,58804	222,4777		3,0	4,436300	3,481637	9,300513
	3,5	153,6979	120,7139	359,1005		3,5	7,614704	5,979080	15,30884
	4,0	248,6966	195,3258	580,1370		4,0	12,71722	9,987209	25,01256
3	1,0	126,1857	829,2124	896,1635	3	1,0	4,208464	31,32348	34,47599
	1,5	203,1728	1332,263	1439,307		1,5	7,528328	51,92404	56,55179
	2,0	327,0589	2141,928	2313,529		2,0	12,77137	84,95471	92,00008
	2,5	526,7058	3446,881	3722,557		2,5	21,15872	138,0913	149,0643
	3,0	848,8887	5552,899	5996,562		3,0	34,64987	223,7650	241,1007
	3,5	1369,500	8956,104	9671,245		3,5	56,41724	362,1423	389,7786
	4,0	2211,804	14462,28	15616,67		4,0	91,61113	585,9777	630,2936
5	1,0	351,9323	4484,610	4153,098	5	1,0	13,29261	176,3799	163,8742
	1,5	565,4299	7199,462	6666,579		1,5	22,03630	285,7237	264,9735
	2,0	909,0625	11569,21	10712,45		2,0	36,05533	461,5685	427,5984
	2,5	1462,902	18612,32	17233,56		2,5	58,60743	744,8533	689,6129
	3,0	2356,724	29979,22	27758,03		3,0	94,96860	1201,925	1112,389
	3,5	3801,089	48347,72	44765,21		3,5	153,6979	1940,432	1795,503
	4,0	6137,981	78066,99	72281,95		4,0	248,6966	3135,218	2900,685

$L = 10 \text{ м}$				
k	α	CF	CF	CC
1	1,0	-----	-----	-----
	1,5	-----	-----	0
	2,0	0	0	0,602994
	2,5	0,636763	0,481029	1,416772
	3,0	1,489988	1,162396	2,607227
	3,5	2,744466	2,151348	4,482034
3	4,0	4,725825	3,709297	7,489073
	1,0	0,000000	6,168344	7,444872
	1,5	1,293759	11,84855	13,30775
	2,0	2,930312	20,66322	22,57124
	2,5	5,356367	34,69056	37,39192
	3,0	9,181851	57,21008	61,23219
5	3,5	15,31190	93,51540	99,69799
	4,0	25,19740	152,1949	161,8905
	1,0	2,609962	41,65551	39,15566
	1,5	5,024488	69,63977	64,90529
	2,0	8,767401	114,4496	106,1935
	2,5	14,72177	186,4946	172,6142
	3,0	24,27991	302,6243	279,7063
	3,5	39,68869	490,1695	452,6779
	4,0	64,59325	793,5199	732,4721

боковых связей (константа жесткости $R = 0$), нагруженную изгибающими моментами на концах (рис. 5). Модули Юнга и сдвига изменяются экспоненциально в продольном и поперечном направлениях. Поперечный изгибающий момент относительно оси y равен нулю. Длина

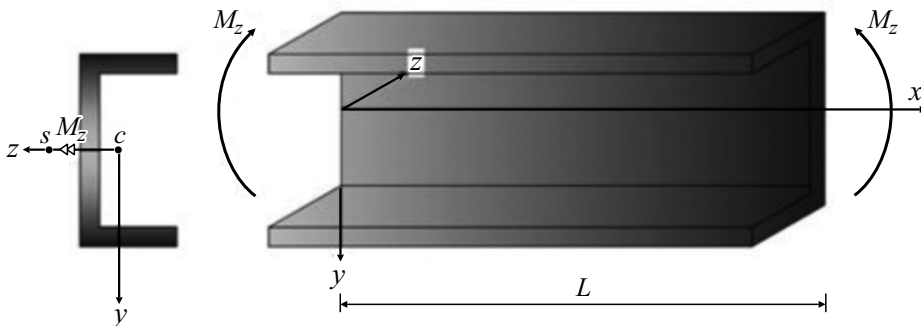


Рис. 5. С-образная балка из ДЭФГМ без боковых связей.

балки $L = 10$ м. В зависимости от граничных условий на концах балки критический момент потери устойчивости вычисляем как

$$M_{cr,SS} = \frac{1}{I_z (4\pi^2 k^2 + \gamma^2) \gamma L^2} \left\{ \sqrt{8} \left[(E_{f,s} k^4 I_z \pi^4 (2E_{f,s} I_w \pi^4 k^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2G_{f,s} J L^2 \pi^2 k^2 + G_{f,s} J L^2 \gamma^2) (e^\gamma)^2 - 2I_z E_{f,s} (2E_{f,s} I_w \pi^6 k^6 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2L^2 k^4 G_{f,s} J \pi^4 + L^2 \gamma^2 k^2 G_{f,s} J \pi^2) k^2 \pi^2 e^\gamma + \right. \right. \\ \left. \left. + 2E_{f,s}^2 I_w I_z \pi^8 k^8 + 2E_{f,s} L^2 k^6 I_z G_{f,s} J \pi^6 + k^4 E_{f,s} G_{f,s} J \gamma^2 I_z L^2 \pi^4 \right) I_z I_y \right]^{0,5} \right\}, \quad (36)$$

$$M_{cr,CF} = 0,5 \left\{ \sqrt{576} \left[(\gamma^2 + 16\pi^2 (k - 0,5)^2) (\pi^8 I_z E_{f,s} (k - 1)^2 k^4 (0,5 E_{f,s} I_w \gamma^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 4E_{f,s} I_w \pi^2 (k - 0,5)^2 + G_{f,s} J L^2) (k - \frac{1}{3})^2 (k - 0,5)^4 (e^\gamma)^2 - 2\pi^4 I_z E_{f,s} (k - 1)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 0,5\pi^4 I_w E_{f,s} (k - 0,5)^4 \gamma^2 + \pi^4 (4I_w E_{f,s} \pi^2 (k - 0,5)^2 + G_{f,s} J L^2) (k - 0,5)^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + \pi^4 (k - \frac{1}{3})^2 e^\gamma + 0,5\pi^8 k^4 (k - 0,5)^4 I_z E_{f,s}^2 (k - 1)^2 I_w (k - \frac{1}{3})^2 \gamma^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \pi^8 I_z (4E_{f,s} I_w \pi^2 (k - 0,5)^2 + G_{f,s} J L^2) E_{f,s} (k - 1)^2 k^4 (k - \frac{1}{3})^2 (k - 0,5)^4 \right) (4\pi^2 k^2 + \right. \\ \left. + \gamma^2) I_z I_y \right]^{0,5} / (16\pi^2 k^2 - 16\pi^2 k + 4\pi^2 + \gamma^2) ((k^2 - k) \cos^3(k\pi) + \\ \left. + (0,5 - k) \cos(k\pi) - 2(k - 0,5)^2) I_z (4\pi^2 k^2 + \gamma^2) \gamma L^2 \right\}, \quad (37)$$

$$M_{cr,CC} = \left\{ 2I_z (16\pi^2 k^2 + \gamma^2) (4\pi^2 k^2 + \gamma^2) (\cos(k\pi) + 2) (\cos(k\pi) - 1)^2 \gamma L^2 \right. \\ \left. \times \left[\sqrt{576} (I_z (4\pi^2 k^2 + \gamma^2) I_y (16\pi^2 k^2 + \gamma^2) (+E_{f,s} I_z \pi^8 k^8 (0,5 E_{f,s} I_w \gamma^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + G_{f,s} J L^2 + 4E_{f,s} I_w \pi^2 k^2) (e^\gamma)^2 - 2(4E_{f,s} I_w \pi^6 k^6 + \right. \right. \\ \left. \left. + k^4 (G_{f,s} J L^2 + 0,5 E_{f,s} I_w \gamma^2) \pi^4) \pi^4 I_z E_{f,s} k^4 e^\gamma + \right. \right. \\ \left. \left. + 4E_{f,s}^2 I_w I_z \pi^{10} k^{10} + E_{f,s} I_z k^8 (0,5 E_{f,s} I_w \gamma^2 + G_{f,s} J L^2) \pi^8 \right) \right]^{0,5} \right\}^{-1}. \quad (38)$$

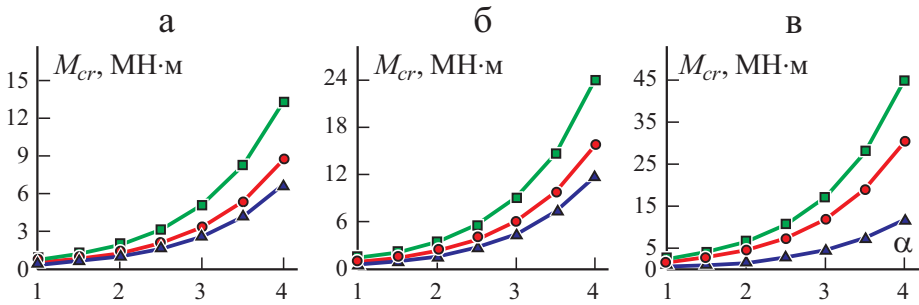


Рис. 6. Изменение критического момента потери устойчивости M_{cr} первой моды ($k = 1$) балки из ДЭФГМ в зависимости от параметра α при граничных условиях СС (■), SS (●), CF (▲) и $L = 10$ м, $M_y = 0$; $\gamma = 1$ (а), 2 (б), 3 (в).

Численные результаты получили для первой моды потери устойчивости. Влияние экспоненциального изменения свойств материала в продольном и поперечном направлениях и разных граничных условиях опирания концов балки на критический момент M_{cr} иллюстрируют данные рис. 6.

4.3. С-образная свободно опертая балка из ОЭФГМ с непрерывной боковой связью. Рассмотрена балка длиной 5 м, нагруженная изгибающими моментами. Модули Юнга и сдвига экспоненциально изменяются только в продольном направлении ($\alpha = 0$). Соотношения, используемые для расчета значений центров площади и сдвига, момента инерции относительно оси y , депланационного момента, площади поперечного сечения балки, постоянная кручения и характеристики Вагнера следующие:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} z_c = \frac{b_f^2 t_f}{2b_f t_f + t_w h}, \quad (39)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} z_0 = \frac{t_f b_f^2 h^2}{4I_z}, \quad (40)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} I_y = \frac{t_f b_f^3}{6} + 2t_f b_f \left(\frac{b_f}{2} - z_c \right)^2 + h \left(z_c^2 t_w + \frac{t_w^3}{12} \right), \quad (41)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} I_z = \frac{b_f t_f h^2}{2} + \frac{t_w h^3}{12}, \quad (42)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} I_w = \left(I_y + A z_c^2 - A z_0 z_c \right) \frac{h^2}{4}, \quad (43)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} A = 2b_f t_f e^\alpha + t_w h, \quad (44)$$

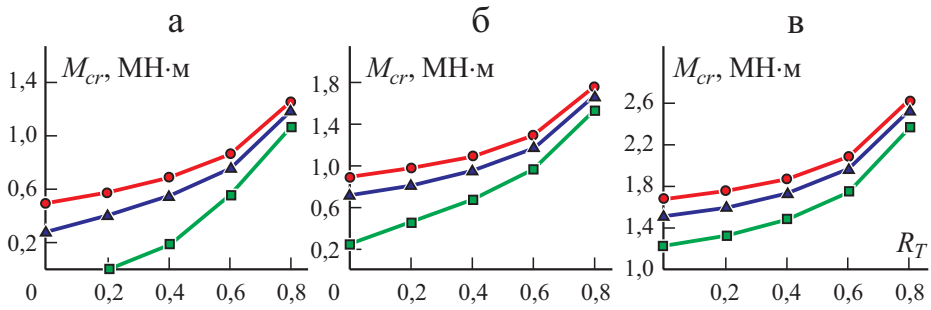


Рис. 7. Изменение критического момента потери устойчивости M_{cr} первой моды ($k = 1$) балки из ОЭФГМ в зависимости от параметра боковых связей R_T при $L = 5$ м; $M_y = 0$ (●), 200 (▲), 500 (■) кН·м; $\gamma = 1$ (а), 2 (б), 3 (в).

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} J = \frac{2}{3} b_f t_f^3 + \frac{h t_w^3}{3}, \quad (45)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta = \frac{\frac{h^3 t_w z_c}{12} + h z_c^3 t_w + \frac{t_f}{4} \left\{ h^2 \left[(z_c^2 - (b_f - z_c)^2) + 2 \left[z_c^4 - (b_f - z_c)^4 \right] \right] \right\}}{2I_y} - z_0. \quad (46)$$

Численные результаты показали, что значения критического момента потери устойчивости однородной С-образной балки, рассчитанные при заданных параметрах, точные. Поэтому предложенные формулировки можно использовать для анализа продольного изгиба с кручением С-образных балок из ФГМ. Отметим, что рассматривали балку с непрерывными боковыми связями, для учета которых использовали безразмерный коэффициент R_T , определенный как [36—38]

$$R_T = \frac{1}{1 + \frac{10G_{f,s}J_s}{RL}}, \quad R = \frac{10G_{f,s}J}{L} \frac{R_T}{1 - R_T}. \quad (47)$$

Изменение критического момента потери устойчивости для первой моды при разных значениях параметра γ иллюстрируют данные рис. 7.

Закключение

Исследовали потерю устойчивости С-образной моносимметричной балки из ФГМ при продольном изгибе с кручением. Модули Юнга и сдвига материала балки экспоненциально изменяются по высоте и длине. Распределение составляющих материалов предполагали симметричным по высоте. В результате поперечное сечение балки обладало моносимметрией. Использовали теорию балок Эйлера—Бернулли и Сен-Венана.

Определили полную потенциальную энергию балки при действии на ее концах сосредоточенных изгибающих моментов относительно продольной и поперечной осей и непрерывной связи по всей длине. Критический момент потери устойчивости балки при разных граничных условиях нашли путем минимизации полной потенциальной энергии. Точность и обоснованность предложенных формулировок подтвердили сравнением численных результатов с тестовыми решениями.

Основные результаты настоящей работы следующие.

— Поскольку изменение модулей Юнга и сдвига по высоте ($\gamma \neq 0$) и длине балки ($\alpha \neq 0$) считали экспоненциальным, то, как и ожидали, критический момент потери устойчивости экспоненциально возрастал с изменением показателей степени α и γ .

— Влияние граничных условий опирания концов балки на критический момент потери устойчивости зависит от номера моды. Для первой моды значения критического момента балки с граничными условиями CF близки или даже меньше таковых балки с граничными условиями SS. Для третьей и пятой мод значения критического момента балки с граничными условиями CF близки или больше таковых балки с граничными условиями SS.

— Наличие непрерывной связи по длине балки увеличило критический момент потери устойчивости.

— Увеличение длины балки при действии на ее концах поперечных изгибающих моментов уменьшило критический момент потери устойчивости в первой моде, особенно при наличии непрерывной боковой связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Attard M. M.* Lateral buckling analysis of beams by the FEM // *Comput. Struct.* — 1986. — Vol. 23, No. 2. — P. 217—231.
2. *Mottram J.* Lateral-torsional buckling of thin-walled composite I-beams by the finite difference method // *Compos. Eng.* — 1992. — Vol. 2, No. 2. — P. 91—104.
3. *Lee J. and Kim S. E.* Flexural-torsional buckling of thin-walled I-section composites // *Comput. Struct.* — 2001. — Vol. 79, No. 10. — P. 987—995.
4. *Lee J., Kim S. E., and Hong K.* Lateral buckling of I-section composite beams // *Eng. Struct.* — 2002. — Vol. 24, No. 7. — P. 955—964.
5. *Mohri F., Azrar L., and Potier-Ferry M.* Lateral post-buckling analysis of thin-walled open section beams // *Thin-Walled Struct.* — 2002. — Vol. 40, No. 12. — P. 1013—1036.
6. *Trahair N.* Lateral buckling strengths of steel angle section beams // *J. Struct. Eng.* — 2003. — Vol. 129, No. 6. — P. 784—791.
7. *Andrade A. and Camotim D.* Lateral-torsional buckling of prismatic and tapered thin-walled open beams: assessing the influence of pre-buckling deflections // *Steel Compos. Struct.* — 2004. — Vol. 4, No. 4. — P. 281—301.
8. *Andrade A. and Camotim D.* Lateral-torsional buckling of singly symmetric tapered beams: theory and applications // *J. Eng. Mech.* — 2005. — Vol. 131, No. 6. — P. 586—597.
9. *Andrade A., Camotim D., and Dinis P. B.* Lateral-torsional buckling of singly symmetric web-tapered thin-walled I-beams: 1D model vs. shell FEA // *Comput. Struct.* — 2007. — Vol. 85, Nos. 17—18. — P. 1343—1359.

10. *Challamel N., Andrade A., and Camotim D.* An analytical study on the lateral-torsional buckling of linearly tapered cantilever strip beams // *Int. J. Struct. Stability Dynamics.* — 2007. — Vol. 7, No. 3. — P. 441—456.

11. *Andrade A., Providência P., and Camotim D.* Elastic lateral-torsional buckling of restrained web-tapered I-beams // *Comput. Struct.* — 2010. — Vol. 88, Nos. 21—22. — P. 1179—1196.

12. *Rezaiee-Pajand M., Masoodi A. R., and Bambaeechee M.* Tapered beam-column analysis by analytical solution // *Proc. Institution of Civil Engineers—Structures and Buildings.* — 2019. — Vol. 172, No. 11. — P. 789—804.

13. *Asgarian B., Soltani M., and Mohri F.* Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross sections // *Thin-Walled Struct.* — 2013. — Vol. 62. — P. 96—108.

14. *Kala Z. and Kala J.* Lateral-torsional buckling analysis of I-beams using shell finite elements and nonlinear computation methods // *AIP Conf. Proc.* — 2012. — P. 2066—2069.

15. *Sapkás Á. and Kollár L. P.* Lateral-torsional buckling of composite beams // *Int. J. Solids Struct.* — 2002. — Vol. 39, No. 11. — P. 2939—2963.

16. *de Oliveira J. P. S., Calenzani A. F. G., Fakury R. H., and Ferreira W. G.* Elastic critical moment of continuous composite beams with a sinusoidal-web steel profile for lateral-torsional buckling // *Eng. Struct.* — 2016. — Vol. 113. — P. 121—132.

17. *Jiao P., Borchani W., Soleimani S., and McGraw B.* Lateral-torsional buckling analysis of wood composite I-beams with sinusoidal corrugated web // *Thin-Walled Struct.* — 2017. — Vol. 119. — P. 72—82.

18. *Ahmadi H. and Rasheed H. A.* Lateral torsional buckling of anisotropic laminated thin-walled simply supported beams subjected to mid-span concentrated load // *Compos. Struct.* — 2018. — Vol. 185. — P. 348—361.

19. *Bouakaz K., Daouadji T. H., Meftah S. A., Ameer M., Tounsi A., and Bedia E. A. A.* A numerical analysis of steel beams strengthened with composite materials // *Mech. Compos. Mater.* — 2014. — Vol. 50, No. 4. — P. 491—500.

20. *Paimushin V. N., Ivanov V. A., Lukankin S. A., Polyakova N. V., Firsov V. A., and Kholmogorov S. A.* Exact analytical and numerical solutions of stability problems for a straight composite bar subjected to axial compression and torsion // *Mech. Compos. Mater.* — 2009. — Vol. 45, No. 2. — P. 113—136.

21. *Numayr K. S. and Qablan H. A.* Effect of torsion and warping on the free vibration of sandwich beams // *Mech. Compos. Mater.* — 2005. — Vol. 41, No. 2. — P. 109—118.

22. *Rezaiee Pajand M., Masoodi A., and Mokhtari M.* Static analysis of functionally graded non-prismatic sandwich beams // *Adv. Comput. Des.* — 2018. — Vol. 3, No. 2. — P. 165—190.

23. *Rezaiee-Pajand M. and Masoodi A. R.* Stability analysis of frame having FG tapered beam-column // *Int. J. Steel Struct.* — 2018. — Vol. 19, No. 2. — P. 1—23.

24. *Rezaiee-Pajand M. and Masoodi A. R.* Analyzing FG shells with large deformations and finite rotations // *World J. Eng.* — 2019. — Vol. 16, No. 5. — P. 636—647.

25. *Rezaiee-Pajand M. and Masoodi A. R.* Stability analysis of frame having FG tapered beam-column // *Int. J. Steel Struct.* — 2019. — Vol. 19, No. 2. — P. 446—468.

26. *Rezaiee-Pajand M., Rajabzadeh-Safaei N., and Masoodi A. R.* An efficient curved beam element for thermo-mechanical nonlinear analysis of functionally graded porous beams // *Structures.* — 2020. — Vol. 28. — P. 1035—1049.

27. *Rezaiee-Pajand M. and Masoodi A. R.* Hygro-thermo-elastic nonlinear analysis of functionally graded porous composite thin and moderately thick shallow panels // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2020. — Online: <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1780524>

28. *Rezaiee-Pajand M., Sobhani E., and Masoodi A. R.* Semi-analytical vibrational analysis of functionally graded carbon nanotubes coupled conical-conical shells // *Thin-Walled Struct.* — 2021. — Vol. 159. — P. 107272.
29. *Rezaiee Pajand M., Masoodi A., and Alepeighambar A.* Lateral-torsional buckling of functionally graded tapered I-beams considering lateral bracing // *Steel Compos. Struct.* — 2018. — Vol. 28, No. 4. — P. 403—404.
30. *Rezaiee-Pajand M. and Masoodi A. R.* Exact natural frequencies and buckling load of functionally graded material tapered beam-columns considering semi-rigid connections // *J. Vib. Control.* — 2018. — Vol. 24, No. 9. — P. 1787—1808.
31. *Soltani M. and Asgarian B.* Lateral-torsional stability analysis of a simply supported axially functionally graded beam with a tapered I-section // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 56, No. 1. — P. 39—54.
32. *Elishakoff I. E., Pentaras D., and Gentilini C.* *Mechanics of Functionally Graded Material Structures.* — World Scientific, 2015.
33. *Zhang L. and Tong G. S.* Lateral buckling of simply supported C-and Z-section purlins with top flange horizontally restrained // *Thin-Walled Struct.* — 2016. — Vol. 99. — P. 155—167.
34. *Zhang W. F., Liu Y. C., Hou G. L., Chen K. S., Ji J., Deng Y., and Deng S. L.* Lateral-orsional buckling analysis of cantilever beam with tip lateral elastic brace under uniform and concentrated load // *Int. J. Steel Struct.* — 2016. — Vol. 16, No. 4. — P. 1161—1173.
35. *Ekström C. M. and Wesley D.* *Lateral-Torsional Buckling of Steel Channel Beams.* — Master's Thesis, Chalmers University of Technology, 2017.
36. *Shooshtari A., Moghaddam S. H., and Masoodi A. R.* Pushover analysis of gabled frames with semi-rigid connections // *Steel Compos. Struct.* — 2015. — Vol. 18, No. 6. — P. 1557—1568.
37. *Masoodi A. R. and Moghaddam S. H.* Nonlinear dynamic analysis and natural frequencies of gabled frame having flexible restraints and connections // *KSCE J. Civil Eng.* — 2015. — Vol. 19, No. 6. — P. 1819—1824.
38. *Masoodi A. R.* Analytical solution for optimum location of belt truss based on stability analysis // *Proc. Institution of Civil Engineers—Structures and Buildings.* — 2019. — Vol. 172, No. 5. — P. 382—388.

Приложение

Формулы для расчета значений центров площади и сдвига, моментов инерции относительно осей y и z , площади поперечного сечения, постоянной кручения и параметра Вагнера β следующие:

$$z_c = \frac{\int E_{(y)} y dA}{\int E_{(y)} dA} = \frac{\int \exp[\alpha |y/h| + 0,5] y dA}{\int \exp[\alpha |y/h| + 0,5] dA}, \quad (\text{A-1})$$

$$z_0 = \frac{hb_f Q_{y=0,5h}}{2I_z} = \frac{hb_f \int \exp[\alpha |y/(2h)| + 0,5] y dA}{2I_z}, \quad (\text{A-2})$$

$$I_y = \int \exp[\alpha |y/(2h)| + 0,5] z^2 dA, \quad (\text{A-3})$$

$$I_z = \int \exp\left[\alpha|y/(2h)| + 0,5\right] y^2 dA, \quad (A-4)$$

$$J = ht_w^3 \int_{web} \exp\left[\alpha|y/(2h)| + 0,5\right] dy + 2b_f t_f^3 \exp\left[\alpha|y/(2h)| + 0,5\right], \quad (A-5)$$

$$\beta = \frac{\int (x^3 + xy^2) \exp(\alpha|y/(2h)| + 0,5) dA}{2I_y} - x_0. \quad (A-6)$$

Следует отметить, что указанные зависимости получены с учетом изменения параметров экспоненты, связанных с модулями Юнга и сдвига материала в продольном и поперечном направлениях.

Поступила в редакцию 02.07.2020

Окончательный вариант поступил 05.05.2021

Received July 2, 2020 (May 5, 2021)
