

*Д. Д. Власов\**, *А. Н. Полилов*

*Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия*

**ВОЗМОЖНОСТЬ ПРЕДСКАЗАНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ  
ВЯЗКОУПРУГИХ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ  
НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ КОМПОНЕНТ  
КОМПЛЕКСНОГО МОДУЛЯ**

*D. D. Vlasov\* and A. N. Polilov*

**THE POSSIBILITY OF CREEP PREDICTION OF VISCOELASTIC  
POLYMER COMPOSITES USING FREQUENCY DEPENDENCES  
OF COMPLEX MODULUS COMPONENTS**

**Keywords:** polymer fibrous composites, linear viscoelasticity, creep theory, complex modulus, vibration tests

The method of creep estimation of polymer composite materials based on the rheological characteristics obtained in vibration tests is considered. Difficulties of application of short-term vibration test results for creep prediction are analyzed. The type of experimental dependencies for the components of complex modulus required for the application of viscoelastic creep theory is substantiated. Convenient analytical approximations of these dependencies are proposed, which allow one to restore the creep kernel in the form of an exponential kernels. Stability of the restored creep kernel parameters to inaccuracy of experimental determination of frequency dependencies of complex modulus of carbon fiber-reinforced plastic is analyzed.

**Ключевые слова:** композиты волокнистые полимерные, вязкоупругость линейная, теория ползучести, модуль комплексный, испытания вибрационные

Обсуждена возможность восстановления функции ползучести по экспериментальным зависимостям компонент комплексного мо-

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [danila\\_vlasov\\_98@mail.ru](mailto:danila_vlasov_98@mail.ru)  
Corresponding author: [danila\\_vlasov\\_98@mail.ru](mailto:danila_vlasov_98@mail.ru)

дуля от частоты гармонического нагружения. Проанализированы сложности применения результатов кратковременных вибрационных испытаний для предсказания ползучести. Обоснован вид экспериментальных зависимостей компонент комплексного модуля, необходимых для применения математического аппарата линейной вязкоупругости. Предложены удобные аналитические аппроксимации этих зависимостей, позволяющие восстановить ядро ползучести в виде экспоненциального ядра. Проанализирована чувствительность параметров восстановленного ядра ползучести к погрешностям экспериментального определения частотных зависимостей комплексного модуля углепластика.

## Введение

Явления, связанные с длительным деформированием материалов, называют — в широком смысле — ползучестью, которая проявляется, в частности, в росте деформаций при постоянном напряжении (собственно, “ползучесть” — в узком смысле), в снижении напряжений со временем при фиксированной деформации (релаксация), а также в затухании колебаний и сдвиге фаз при вибрационных испытаниях. Все эти внешне разные явления управляются одними и теми же реологическими свойствами материалов, поэтому адекватность предлагаемых определяющих уравнений проверяется возможностью описания этих разных явлений единым набором материальных параметров.

Среди широкого класса традиционных и современных моделей вязкоупругости особое место занимают наследственные теории ползучести, опирающиеся на интегральные операторы с разностными ядрами [1—4]. Именно “гибкость” уравнений наследственной теории ползучести позволяет применять её к самым различным классам материалов и явлений.

Изучение ползучести полимерных композитных материалов (ПКМ) становится обязательным этапом проектирования силовых композитных конструкций.

Традиционно именно экспериментальное нахождение кривых ползучести при постоянной нагрузке считается наиболее простым и корректным, так как нагрузка задаётся “мёртвым грузом”, а деформация определяется непосредственно на образце. Испытание на релаксацию требует, казалось бы, более простого оборудования, но фиксируя деформацию образца, мы вынуждены измерять напряжение (усилие) по динамометру, входящему в цепь нагрузки, и изменение его деформации при снижении усилия не позволяет строго выдерживать условие постоянства деформации образца. Но стандартные испытания на ползучесть являются длительными и требуют периодических измерений деформаций в течение нескольких дней или месяцев. Поэтому значительный интерес вызывает проверка возможности оценки параметров ползучести по сдвигу фаз между циклически изменяющимися напряжениями и деформациями [5—9].

Цель настоящей работы — анализ трудностей, связанных с описанием ползучести на основе кратковременных вибрационных испытаний (динамического механического анализа, ДМА), и в обосновании требований к необходимому объему и точности экспериментальных данных.

### Связь динамических характеристик материала с ползучестью

Возможность связать частотные зависимости компонент комплексного модуля с параметрами ползучести рассматривали еще в середине прошлого века [1—3, 5—8]. Реализация некоторых методов (ряды Прони и т.д.) проанализирована в [10—13]. Подобные результаты могут быть получены и с помощью использования традиционных моделей вязкоупругих тел, однако в настоящей работе применена наследственная модель линейной вязкоупругости.

Необходимо отметить, что авторы рассматривают только одномерные изотермические процессы без учета анизотропии и температурных эффектов, и принято, что материал не подвержен старению. В рамках данных ограничений для описания процессов ползучести и релаксации используем соответствующие интегральные уравнения [1—3]

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(1 + K^*), \quad (1)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0(1 - R^*), \quad (2)$$

где  $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$  — мгновенная упругая деформация;  $\sigma_0$  — мгновенное напряжение;  $E$  — модуль Юнга.

Интегральные операторы ползучести  $K^*$  и релаксации  $R^*$  определяем как

$$K^* u = \int_{-\infty}^t K(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad R^* v = \int_{-\infty}^t R(t-\tau)v(\tau)d\tau,$$

где  $K(t-\tau)$ ,  $R(t-\tau)$  — ядра ползучести и релаксации;  $t-\tau > 0$ .

Поскольку вязкоупругие свойства полимерных композитов проявляются также при вынужденных колебаниях (с частотой  $\omega$ ), уравнения (1) и (2) (с учетом описанных ограничений) можно применить к гармоническому закону изменения деформаций:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \exp i\omega t. \quad (3)$$

Возникающее напряжение будет отставать на фазовый угол  $\delta$  механических потерь:

$$\sigma = \sigma_0 \exp[i(\omega t + \delta)]. \quad (4)$$

Аддитивным слагаемым в (4) можно пренебречь для достаточно большого времени испытаний. Формально постоянное слагаемое обращается

в нуль при использовании  $-\infty$  в качестве нижнего предела в интегральных операторах.

Подстановка выражений (3) и (4) в соотношение, описывающее процесс релаксации (2), позволяет получить связь частотной зависимости компонент комплексного модуля с ядром релаксации:

$$E'(\omega) = E(1 - R_C), \quad (5)$$

$$E''(\omega) = ER_S. \quad (6)$$

$$\text{где } R_C = \int_0^{\infty} R(z) \cos \omega z dz; \quad R_S = \int_0^{\infty} R(z) \sin \omega z dz.$$

Аналогично определяем компоненты податливости при использовании уравнения ползучести (1).

Таким образом, ядра ползучести и релаксации, в принципе, восстанавливаются на основе частотных зависимостей вязкоупругих характеристик материала. В данном случае ядро релаксации определяем с помощью обратных интегралов Фурье:

$$R(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{E'(\omega)}{E} - 1 \right) \cos \omega t d\omega, \quad (7)$$

$$R(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{E''(\omega)}{E} \right) \sin \omega t d\omega. \quad (8)$$

Способ восстановления ядра ползучести по ядру релаксации является отдельной задачей, и в настоящей работе его не рассматриваем. Процедуры, кратко записанные уравнениями (1)—(8), изложены в классической литературе [1—3]. Существуют немногочисленные примеры практического описания процессов релаксации конструкционных материалов по зависимостям компонент комплексного модуля от частоты [12, 13].

Подобная методика видится авторам простой и перспективной, если бы с её помощью удавалось корректно описать ползучесть без проведения длительных квазистатических испытаний. Однако очевидно, что исходные зависимости  $E'(\omega)$  и  $E''(\omega)$  для реализации методики должны соответствовать определенным жестким требованиям, что накладывает ограничения на область её применимости.

### **Требования к асимптотике частотной зависимости комплексного модуля материала**

Рассмотрим значения, принимаемые компонентами комплексного модуля в ходе динамического нагружения (ДМА) вязкоупругого материала при вынужденных гармонических колебаниях в широком диапазоне частот.

Модуль накопления (действительная часть комплексного модуля) при убывании частоты стремится к статическому значению длительного модуля  $E'_0$ , которое нельзя точно определить ни при монотонном нагружении, ни при колебаниях, так как скорость деформации при этом должна быть равной нулю. Его обычно определяют как отношение напряжения к установившейся деформации ползучести, если она ограничена горизонтальной асимптотой. В случае неограниченной ползучести длительный модуль приходится полагать равным нулю. С ростом частоты колебаний значения  $E'(\omega)$  возрастают, приближаясь к пределу  $E'_\infty$ , который идентичен динамическому модулю Юнга  $E$ , поскольку при больших частотах колебаний реологические эффекты практически не проявляются. Динамический модуль Юнга в принципе может быть определен по скорости распространения самой быстрой волны дилатации, если корректно оценить влияние эффекта Пуассона при развитии волны в стержне. Динамический модуль определяется также в специальных высокоскоростных испытаниях при скоростях деформации порядка  $10^2$  обратных секунд. Он незначительно (на 5—10%) превышает модуль Юнга, определяемый на стандартных образцах при скоростях движения захватов в тех пределах (2—10 мм/мин), в которых влияние скорости на модуль пренебрежимо мало. Но прямая оценка значения  $E'_\infty$  при сверхвысоких частотах колебаний связана с проблемами виброразогрева, влияние которого сложно оценить расчетным путём.

Зависимость мнимой части комплексного модуля имеет обратный вид — при небольших частотах модуль потерь равен статическому значению  $E''_0$ , а при увеличении частоты реологические процессы “не успевают” проявиться, поэтому его значение уменьшается до динамического  $E''_\infty$ , практически равного нулю. Формально подобные зависимости компонент комплексного модуля могут быть немонотонными, что не противоречит термодинамике и интегрируемости соответствующих функций, но для определенности, исходя из доступных экспериментальных данных, монотонное стремление компонент модуля к асимптотическим значениям в нуле и на бесконечности просто постулируется.

На основе этих заключений вводятся следующие, естественные ограничения на частотную зависимость компонент комплексного модуля:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( \frac{E'(\omega)}{E'_\infty} - 1 \right) = 0, \quad (9)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{E''(\omega)}{E''_0} = 0. \quad (10)$$

Экспериментальные данные, соответствующие ограничениям (9) и (10), не только согласуются с описанной “физикой” процесса, но и обеспечивают интегрируемость в соотношениях (7) и (8), поскольку обратные косинус- и синус-интегралы Фурье будут обладать признаком сходимости.

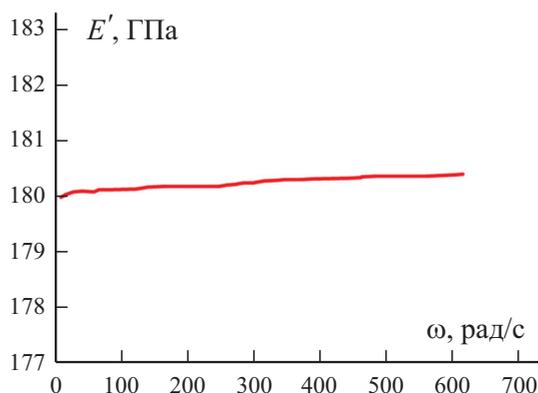


Рис. 1. Экспериментальная зависимость модуля накопления  $E'$  углепластика от частоты  $\omega$  [15].

К сожалению, в доступной литературе применительно к конструкционным материалам можно найти очень немного экспериментальных результатов, отвечающих сформулированным требованиям. Опубликованные данные [14] относятся к мягким полимерам или к резиноподобным материалам, модули Юнга которых на два-три порядка ниже, чем стекло- или углепластика. Для конструкционных полимерных материалов результаты вибрационных испытаний имеют вид отрезка в небольшом диапазоне частот без анализа асимптотики. Пример такой зависимости показан на рис. 1.

В публикациях [10—13] приведены именно такие экспериментальные данные, и в связи с этим предложенные там методики различными способами “обходят” прямое использование экспериментов. В данной работе авторы акцентируют внимание именно на необходимом виде результатов ДМА для компонент комплексного модуля.

### Аппроксимация экспериментальных данных

Анализ реальных экспериментальных данных приводит к выводу, что существует по крайней мере три принципиальные причины сложности использования зависимостей компонент комплексного модуля от частоты вибрационного нагружения.

Во-первых, статическое значение длительного модуля невозможно непосредственно определить из опыта (при нулевых скоростях деформации), а его нахождение путем экстраполяции результатов вибрационных испытаний приводит к широкому произволу, обеспечивая большой разброс значений предельной деформации ограниченной ползучести.

Во-вторых, принципиально важна асимптотика на очень большие частоты (на “бесконечные скорости”), но получить такие результаты на существующем вибрационном оборудовании не представляется возможным, а определение динамического модуля по скорости волн или при высокоскоростных испытаниях — это отдельная экспериментальная проблема,

требуемая принципиально иного оборудования по сравнению с ДМА. Поэтому надежное определение асимптотики компонент комплексного модуля на бесконечности затруднено.

В-третьих, точно определить характерную точку перегиба на экспериментальной зависимости  $E'(\omega)$  крайне сложно, а значение соответствующей частоты заметно влияет на восстановленную кривую ползучести.

Все эти и подобные сложности обусловлены одной и той же проблемой: аппроксимация зависимости  $E'(\omega)$  на всём частотном диапазоне по её ограниченному участку оказывается неустойчивой — экспериментальные данные могут быть описаны с одинаковой точностью совершенно различным набором параметров выбранной модели.

Для аппроксимации частотных зависимостей авторы предлагают использовать сигмовидные (S-образные) кривые, поскольку они удовлетворяют требованиям (9) и (10) и качественно отражают особенности динамических процессов.

Изменение модуля накопления предложено аппроксимировать соотношением

$$E'(\omega) = E'_0 + (E'_\infty - E'_0) \frac{\omega^2}{\omega^2 + k^2}. \quad (11)$$

Зависимость модуля потерь может быть по аналогии аппроксимирована соотношением

$$E''(\omega) = E''_0 + (E''_\infty - E''_0) \frac{\omega^2}{\omega^2 + s^2}. \quad (12)$$

Параметры  $k$  и  $s$  уравнений (11), (12) отвечают за характер перехода от статических (длительных) значений компонент комплексного модуля к динамическим и определяются феноменологически из условия наилучшего согласования с экспериментом, но, к сожалению, явных точек перегиба на реальных частотных зависимостях обнаружить не удастся.

Данные рис. 2 иллюстрируют качественный характер таких зависимостей, и чтобы надежно оценить их параметры, надо получить экспериментальные данные в достаточно широком диапазоне частот. Программа испытаний для получения подобных зависимостей должна быть следующей: частота колебаний изменяется в диапазоне нескольких десятичных порядков, причем начальные значения частоты должны были бы соответствовать порядкам  $10^{-2}$ — $10^{-1}$ , что сложно реализовать. Частоту необходимо увеличивать до тех пор, пока её рост не перестанет влиять на значение модуля с выбранной степенью точности.

### Восстановление функции ползучести на основе предложенной аппроксимации

Для проверки применимости соотношений (11) и (12) к описанию ползучести полимерных композитов на основе экспериментальной зависимости модуля накопления углепластика от частоты (см. рис. 1) были

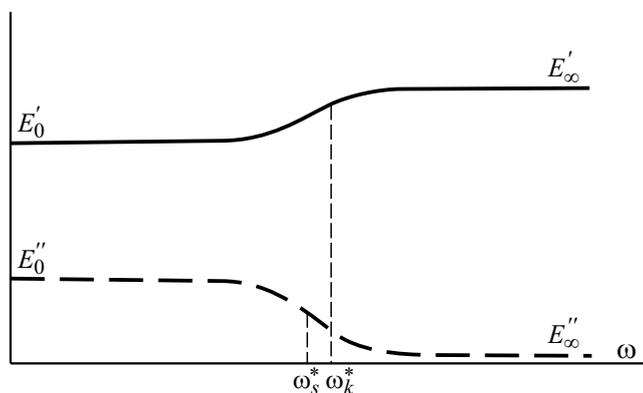


Рис. 2. Характерные виды частотных зависимостей модуля накопления (—) и модуля потерь (- - -).

восстановлены ядро, функция, а также кривые ползучести материала для разных значений параметров соотношения (11), описывающего имеющийся эксперимент.

Полученные методом ДМА результаты не удовлетворяют необходимым, указанным ранее требованиям, в связи с чем для апробации методики полученная экспериментальная зависимость была доработана согласно уравнению (11) на основе базовых значений параметров зависимости модуля накопления от частоты:  $E'_0 = 20$  ГПа,  $E'_\infty = 180$  ГПа,  $k = 0,5$  рад/с.

Статическое значение модуля накопления (при нулевой частоте) не может быть определено экспериментально, и фактически оно оценивается отношением постоянного приложенного напряжения к установившейся деформации ограниченной ползучести. Динамическое значение модуля накопления однонаправленных ПКМ, которое можно определить по скорости волны растяжения—сжатия или при высокоскоростных испытаниях, незначительно (на 5—10%) отличается от значения модуля Юнга, определенного при стандартных испытаниях на растяжение. Значение параметра  $k$ , входящего в выражение (11), выбирали в достаточной мере произвольно, чтобы получить качественное согласование с экспериментом. В результате задача аппроксимации и восстановления кривых ползучести оказывается неустойчивой. Имеющийся ограниченный набор экспериментальных данных можно с одинаковой точностью описать совершенно разным набором параметров аппроксимирующего выражения (11), варианты изменения которых представлены в таблице.

На основе доработанной зависимости, удовлетворяющей асимптотическим требованиям, было восстановлено ядро ползучести, которое для выражения (11) имеет вид экспоненты

$$K(t - \tau) = C \exp[-a(t - \tau)], \quad (13)$$

где константы экспоненциальной функции  $C$  и  $a$ , а также модуль  $E$  свя-

## Варианты изменения параметров соотношения (11)

Параметр	Итерация		
	1	2	3
$E'_0$ , ГПа	5	20	50
$E'_\infty$ , ГПа	170	180	190
$k$ , рад/с	0,05	0,5	5

заны с параметрами выражения (11) следующим образом:

$$E'_0 = \frac{Ea}{a+C}, \quad E'_\infty = E, \quad k = a+C.$$

Тогда на основе ядра (13) выражение (1) для процесса ползучести при  $\sigma = \text{const}$  можно переписать как

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left( \sigma - \sigma \left( \frac{C}{a} (\exp(-at) - 1) \right) \right). \quad (14)$$

Восстановленная с помощью выражения (14) и базовых значений параметров  $E'_0$ ,  $E'_\infty$ ,  $k$  кривая ползучести углепластика при постоянном значении напряжения  $\sigma = 200$  МПа (рис. 3) имеет горизонтальную асимптоту и описывает ограниченную ползучесть, однако вид начального этапа ползучести качественно согласуется с экспериментальными кривыми. Рассчитанные кривые ползучести приведены лишь в качестве иллюстрации применяемой методики, и наблюдаемое быстрое достижение предельной деформации связано с произвольным выбором параметров.

Для описания неограниченной ползучести можно использовать, например, ядро Абеля [16]:

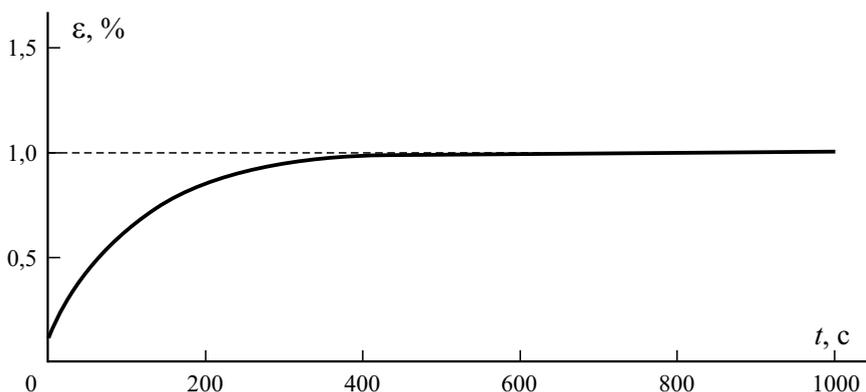


Рис. 3. Восстановленная кривая ползучести с разностным ядром в виде экспоненциальной функции.

$$K(t) = \frac{bt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},$$

где  $b$ ,  $\alpha$  — параметры ядра Абеля; а  $\Gamma(1+\alpha)$  — гамма-функция, равная

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} f^{z-1} e^{-f} df.$$

Для ядра Абеля известен вид резольвенты в виде дробно-экспоненциальной  $\mathcal{E}_\alpha$ -функции ( $R$ -function) Работнова [1—3]:

$$\mathcal{E}_\alpha(\beta, t) = bt^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}.$$

Восстановление ядер подобного вида с помощью обратного преобразования Фурье является отдельной нетривиальной задачей, предполагающей другой вид аппроксимирующего соотношения типа (11), и эту процедуру в настоящей работе не рассматривали. Также следует отметить, что усложнение ядра ползучести не позволит обойти главную проблему — сложность устойчивого определения параметров по ограниченному эксперименту.

### Корректность восстановления кривых ползучести

Важно проверить, каким образом повлияет на восстановленную кривую ползучести изменение параметров (см. таблицу) аппроксимирующего выражения (11). Длительный модуль  $E'_0$  отвечает за предельную деформацию установившейся ограниченной ползучести (рис. 4). Динамический модуль  $E_\infty$  определяет мгновенную упругую деформацию (рис. 5). О возможных значениях параметра  $k$ , который отвечает за скорость перехода от статического значения к динамическому (рис. 6), можно только догадываться, поскольку точное определение этого параметра по имеющимся экспериментальным данным (см. рис. 1) не представляется возможным. Все три параметра, на основе которых восстанавливаются кривые ползучести, сложно определить сколь-нибудь надежно из ограниченного набора экспериментально полученных значений  $E'_i(\omega_i)$ .

Формально можно выбрать три характерных значения модуля накопления при разных частотах и после подстановки величин  $E'_i$ ,  $\omega_i$  в (11) из полученных трех уравнений найти эти три параметра. Но найденные значения параметров будут существенно зависеть от выбранных точек. Другой способ — применение методов регрессионного анализа (метод наименьших квадратов) для нахождения трех параметров зависимости (11) для любого числа экспериментальных точек. Однако ограниченный диапазон экспериментальных частот не позволяет надежно обеспечить требуемую асимптотику в нуле и на бесконечности.

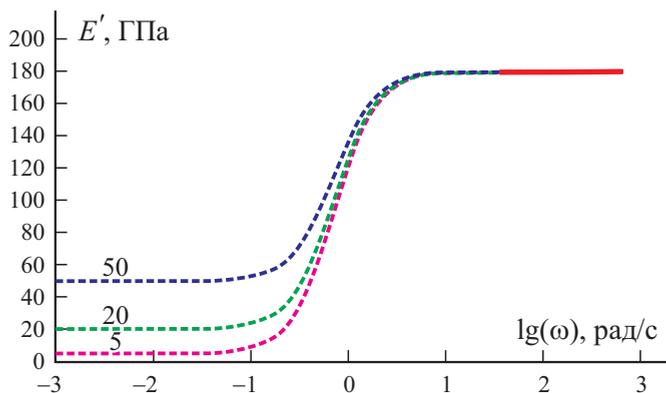


Рис. 4. Частотная зависимость модуля накопления при разных значениях длительного модуля  $E'_0$  (цифры у кривых, ГПа) и неизменных значениях  $E'_\infty$  и  $k$ .

Учитывая, что динамический модуль  $E'_\infty$  может быть определен в независимом высокоскоростном эксперименте, можно оставить в соотношении (11) два неизвестных параметра —  $E'_0$ ,  $k$ , а соотношение (11) свести к уравнению прямой линии:

$$\frac{E'_\infty - E'_0}{E'(\omega) - E'_0} = 1 + \frac{k^2}{\omega^2} \Rightarrow ay = 1 + k^2x, \tag{15}$$

$$a = E'_\infty / E'_0 - 1, \quad y = (E'(\omega) / E'_0 - 1)^{-1}, \quad x = \omega^{-2}.$$

Тогда нанесенные в новых координатах  $(x, y)$  экспериментальные данные можно попытаться экстраполировать прямой линией, и будет наглядно видно, насколько характер аппроксимации (11) согласуется с экспериментом.

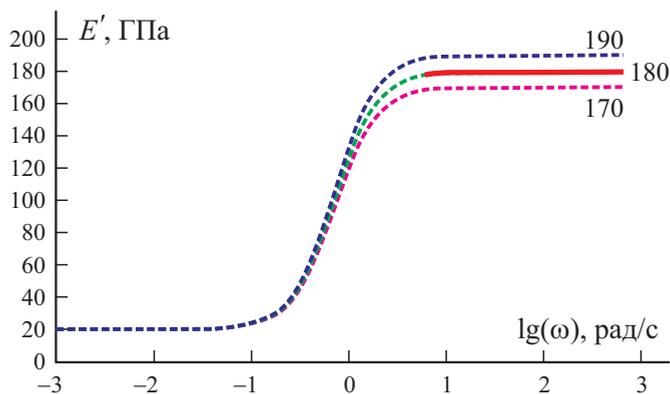


Рис. 5. Частотная зависимость модуля накопления при разных значениях динамического модуля  $E'_\infty$  (цифры у кривых, ГПа) и неизменных значениях  $E'_0$  и  $k$ .

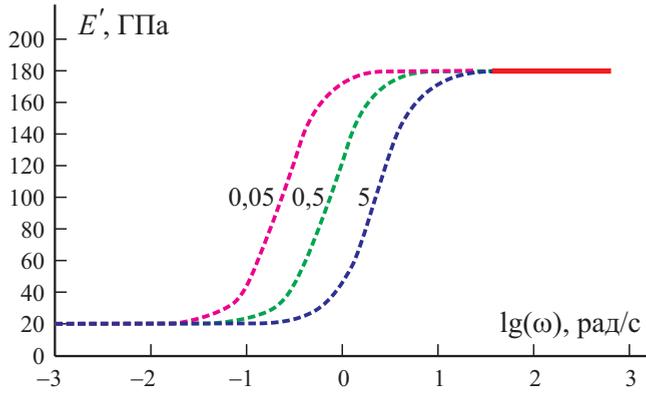


Рис. 6. Частотная зависимость модуля накопления при разных значениях параметра  $k$  (цифры у кривых, рад/с) и неизменных значениях  $E'_0$  и  $E'_\infty$ .

Для анализа чувствительности результатов к точности оценки параметров аппроксимации (11) были восстановлены кривые ползучести (14) при разных вариациях исходных данных (см. таблицу).

Приведенные на рис. 7—9 результаты расчетов показывают существенное влияние параметров аппроксимации (11) на восстановленные характеристики ползучести. Увеличение различия между статическим и динамическим значениями модуля накопления отражает рост реологических, наследственных эффектов, что проявляется в росте деформации ползучести (рис. 7). Изменение динамического модуля при этом сказывается на значении мгновенной деформации (рис. 8). Более подвержены ползучести материалы, в которых реологические эффекты перестают быть существенными при более высоких частотах (при большем значении параметра  $k$ ). Чем раньше начинается затухание роста модуля восстановления, что связано с точкой перегиба частотной зависимости, тем скорее происходит

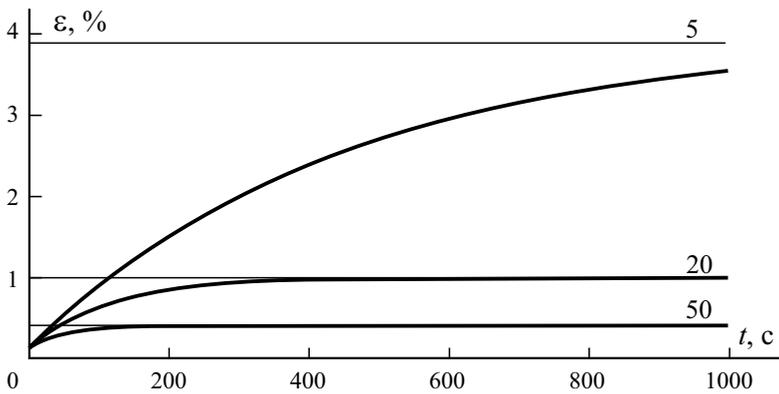


Рис. 7. Восстановленные кривые ползучести при разных значениях  $E'_0$  (цифры у кривых, ГПа) и неизменных значениях  $E'_\infty$  и  $k$ .

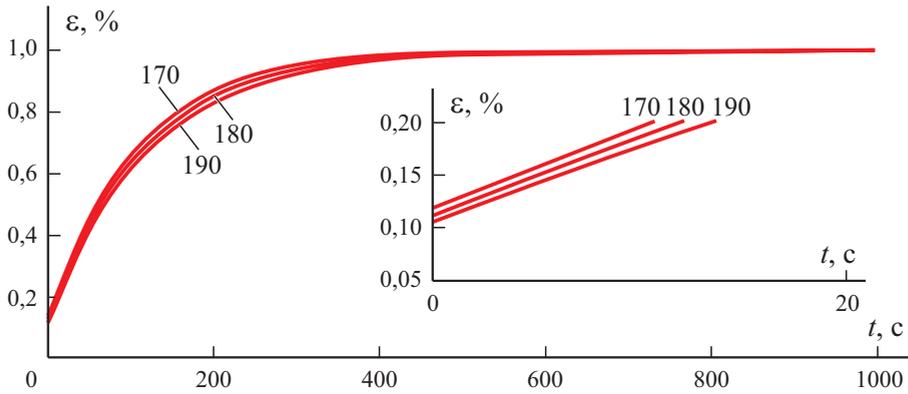


Рис. 8. Восстановленные кривые ползучести при разных значениях  $E'_\infty$  (цифры у кривых, ГПа) и неизменных значениях  $E'_0$  и  $k$ .

выход на горизонтальную асимптоту и тем менее заметны реологические эффекты (рис. 9). Покажем, как связан параметр  $k$  с точкой перегиба функции  $E'(\omega)$ . Поскольку определение параметра  $k$  происходит феноменологически, из условия наилучшего соответствия экспериментальным данным, удобно установить связь значения этого параметра со значением условной частоты  $\omega^*$  в точке “перегиба”. Необходимо отметить, что для предложенной сигмовидной зависимости (11) (см. рис. 2) справедлива асимптотика

$$\frac{dE'}{d\omega} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0; \omega \rightarrow \infty} 0.$$

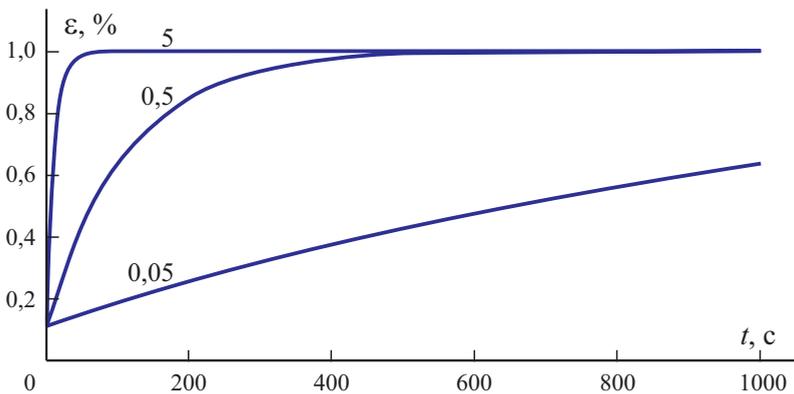


Рис. 9. Восстановленные кривые ползучести при разных значениях параметра перехода  $k$  (цифры у кривых, рад/с) и неизменных значениях  $E'_0$  и  $E'_\infty$ .

Приравнивая нулю вторую производную от выражения (11), можно связать условную частоту  $\omega_k^*$  со значением параметра  $k$ :  $k = \omega_k^* \sqrt{3}$ . Аналогично для зависимости модуля потерь  $s = \omega_s^* \sqrt{3}$ .

Основная сложность заключается в экспериментальном определении частоты  $\omega_k^*$ , соответствующей точке перегиба (равенству нулю второй производной) на экспериментальной зависимости  $E'(\omega)$ . Если учесть, что частотная шкала при большом диапазоне часто принимается логарифмической, то становится ясным, что даже небольшое отклонение от значения частоты  $\omega_k^*$  приведет к существенной погрешности восстановленных параметров функции ползучести.

Таким образом, несмотря на корректность всех преобразований, использование ограниченных экспериментальных данных по частотным зависимостям компонент комплексного модуля приводит к неустойчивым результатам. Определение экспериментальных зависимостей в большом диапазоне частот, с правильной и явно выраженной асимптотикой, является необходимым условием для прогнозирования ползучести. Но даже получение исчерпывающих зависимостей компонент комплексного модуля с необходимой асимптотикой не гарантирует приемлемой точности восстановленных характеристик ползучести из-за сильной чувствительности результатов решения обратной задачи к погрешностям первичных экспериментов.

### Анализ и обсуждение результатов

1. Прогнозирование ползучести на основе соотношений линейной вязкоупругости требует экспериментального определения частотных зависимостей компонент комплексного модуля в широком диапазоне частот и с высокой точностью.

2. При вынужденных колебаниях всегда происходит диссипация энергии, которая частично преобразуется в тепло. Повышение температуры приводит к изменению вязкоупругих свойств, поэтому, строго говоря, должна решаться связанная задача термовязкоупругости, но в стандартных экспериментах на вибрационное нагружение не удаётся строго следить за ростом температуры и заранее неизвестны параметры определяющих соотношений, учитывающих влияние температуры на вязкоупругие свойства. Поэтому в первом приближении процесс считается изотермическим, хотя неучёт повышения температуры служит дополнительным источником погрешностей восстановления ядер ползучести и релаксации по результатам вибрационных испытаний.

3. Результаты анализа приводят к выводу о том, что статический (длительный) модуль нельзя определить при обычных механических испытаниях. Динамический модуль можно определить независимо: по скорости распространения волны растяжения—сжатия или в высокоскоростных испытаниях. Высокие частоты нельзя реализовать без повышения тем-

пературы, а значит, экспериментальное определение зависимостей комплексного модуля корректно лишь при промежуточных частотах, и оно может служить лишь для сравнительной оценки параметров перехода от статики к динамике.

4. Предложены удобные варианты аналитического описания частотных зависимостей компонент комплексного модуля с требуемой асимптотикой; с их помощью формально возможно восстановление ядра ползучести, однако отмечена сильная зависимость результатов от точности получения экспериментальных данных в широком диапазоне частот нагружения.

### Заключение

Представлены новые результаты анализа известной задачи прогнозирования ползучести материала без проведения длительных экспериментов. Предложены удобные варианты аналитического описания частотных зависимостей компонент комплексного модуля от частоты вынужденных колебаний. При обосновании формальных преобразований отмечены требования к асимптотическому поведению компонент комплексного модуля, обеспечивающие корректность применения преобразований Фурье для восстановления оператора ползучести по результатам вибрационных испытаний. Применение данного подхода должно опираться на экспериментальные данные, полученные в достаточно широком частотном диапазоне. Подобная методика позволила бы сократить время по сравнению с традиционными испытаниями на ползучесть, однако процедура восстановления кривых ползучести по частотным зависимостям комплексного модуля оказывается крайне чувствительной к точности аппроксимации экспериментальных данных, и поэтому её практическое применение остается крайне ограниченным, сталкиваясь с трудно преодолимыми проблемами.

*Конфликт интересов.* Авторы подтверждают отсутствие конфликта интересов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 2014. — 752 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977. — 384 с.
3. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988. — 712 с.
4. *Полшов А. Н.* Этюды по механике композитов. — М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 320 с.
5. *Ferry J. D.* Viscoelastic Properties of Polymers. — New York: Wiley, 1980. — 641 p.
6. *Gross B.* Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity. — Paris, 1953. — 75 p.
7. *Lakes R. S.* Viscoelastic Solids. — London: CRC Press LLC, 1999. — 205 p.

8. *Betten J.* Creep Mechanics. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. — 367 p.
9. *Хохлов А. В.* Кривые длительной прочности, порождаемые линейной теорией вязкоупругости в сочетании с критериями разрушения, учитывающими историю деформирования // Тр. МАИ. — 2016. — № 91. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=75559> (дата обращения: 20.04.2021)
10. *Mead D. W.* Numerical interconversion of linear viscoelastic material functions // J. Rheol. — 1994. — No. 38. — P. 1769—1795.
11. *Park S. W., Schapery R. A.* Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part I. A numerical method based on Prony series // Int. J. Solids Struct. — 1999. — No. 36. — P. 1653—1675.
12. *Schapery R. A., Park S. W.* Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part II. An approximate analytical method // Int. J. Solids Struct. — 1999. — No. 36. — P. 1677—1699.
13. *Dacol V., Caetano E., Correia J. R.* A new viscoelasticity dynamic fitting method applied for polymeric and polymer-based composite materials // Materials. — 2020. — Vol. 13. — 5213.
14. *Rouleau L., Prik R., Bert P., Wim D.* Characterization and modeling of the viscoelastic behavior of a self-adhesive rubber using dynamic mechanical analysis tests // J. Aerospace Technol. Management. — 2015. — Vol. 7, No. 2. — P. 200—208.
15. *Власов Д. Д., Малышева Г. В.* Определение характеристик ползучести и релаксации полимерных волокнистых композитов с помощью динамических характеристик материала // Материалы междунар. науч. конф. студентов, аспирантов и молодых учёных ПЕРСПЕКТИВА, 2021. — Т. 4. — С. 60—63.
16. *Суворова Ю. В., Алексеева С. И., Куприянов Д. Ю.* Моделирование длительной ползучести георешеток типа FORTRAC на основе полиэтилентетрафталата // Высокомолекуляр. соединения. Сер. Б. — 2005. — Т. 47, № 6. — С. 1058—1061.

Поступила в редакцию 06.07.2021

Окончательный вариант поступил 11.10.2021

Received July 6, 2021 (Oct. 11, 2021)

---