

О. Митрофанов, Мазен Осман*

*Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),
Россия*

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГЛАДКИХ КОМПОЗИТНЫХ ПАНЕЛЕЙ ПРИ ОБЕСПЕЧЕНИИ УСТОЙЧИВОСТИ И ПРОЧНОСТИ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ

О. Mitrofanov and Mazen Osman*

DESIGNING OF SMOOTH COMPOSITE PANELS PROVIDING STABILITY AND STRENGTH AT POSTBUCKLING BEHAVIOR

Keywords: postbuckling state, stability, rectangular panels, orthotropic material, compression, shear.

Buckling of skin is admissible for upper load-bearing panels of a wing box and mechanization units of a light aircraft in case of loads close to operating level. Method of determining the optimum parameters of composite skin under action of compressive and shear flows is considered. Peculiarities of the optimum design problem are formulated as follows. Firstly, two loading levels are considered when designing the panels. At the first level, panel buckling is not admissible. At the second level, subject to the admissibility of postbuckling behavior, the panel thickness is calculated from the conditions for reaching the critical stresses determined accounting for the geometrically nonlinear relations. Secondly, the thickness and width of the rectangular panel are taken as variable parameters. Thirdly, in order to determine the optimum parameters of the panel, the conditions of realization of the minimum stability margin at the first loading level and minimum strength margin at the second loading level are taken into account. The stability and strength margins at the corresponding loading levels have to be equal unit. The loading levels above-mentioned, in general case, have to be coincided with the operating and ultimate loads considered when designing the aircraft structures, but can be given by an aircraft designer based on the

*Автор, с которым следует вести переписку: oleg1mitrofanov@yandex.ru
Corresponding author: oleg1mitrofanov@yandex.ru

special design conditions. It was noted that analytical solutions of the geometrically nonlinear problems have to be used in determining the design parameters according to the technique of postbuckling state. The relations presented take into account the membrane stresses arising at buckling of a thin panel. The technique developed can be applied at the early design stages. The relations for designing the hinge-supported orthotropic panels in compression, shear and combined loading are presented.

Ключевые слова: состояние закритическое, устойчивость, панели прямоугольные, материал ортотропный, сжатие, сдвиг

Для сжатых несущих панелей кессонов крыла и агрегатов механизации легкого самолета допускается потеря устойчивости тонких обшивок при нагрузках, близких к эксплуатационному уровню. В работе рассмотрена методика определения оптимальных параметров обшивки из композитных материалов при воздействии сжимающими и сдвиговыми потоками. Особенности постановки задачи оптимального проектирования следующие. Во-первых, при проектировании панелей предложено рассматривать два уровня нагружения: на первом не допускается потеря устойчивости панели; на втором при условии допустимости закритического поведения вычисляют толщину панели из условий достижения предельных по прочности напряжений, определенных с учетом геометрически нелинейных соотношений. Во-вторых, в качестве переменных параметров принята толщина и ширина прямоугольной панели. В-третьих, для определения оптимальных параметров панелей учитывается условие реализации минимальных запасов по устойчивости при первом уровне нагружения и по прочности при проектировании по закритическому состоянию при втором уровне нагружения. Запасы по устойчивости и по прочности на соответствующих уровнях нагружения должны быть равны единице. Указанные уровни нагружения в общем случае не обязательно должны совпадать с эксплуатационными и расчетными нагрузками, рассматриваемыми при проектировании авиационных конструкций, но могут назначаться разработчиком воздушного судна из специальных расчетных условий. Отмечено, что при определении параметров по закритическому состоянию должны быть использованы аналитические решения геометрически нелинейных задач. Указанные соотношения соответствуют методологии проектирования по закритическому состоянию. Приведенные в работе соотношения учитывают мембранные напряжения, возникающие при потере устойчивости тонких панелей. Представленная методика может быть применима на ранних этапах проектирования. В работе приведены соотношения для проектирования шарнирно опертых ортотропных панелей при сжатии, сдвиге и комбинированном нагружении.

Введение

При проектировании сжатых несущих панелей кессонов крыла и агрегатов механизации самолетов малой и средней грузоподъемности допускается потеря устойчивости обшивки при нагрузках, близких к эксплуатационному уровню. Рассмотрим гладкие панели из композитных материалов, нагруженные сжимающими и сдвиговыми потоками. Как правило, большой интерес при проектировании указанных элементов авиационных конструкций вызывают задачи и поверочных расчетов, и оптимального проектирования панелей минимального веса. Отметим, что решения задач оптимального армирования композитных панелей при ограничениях по прочности получены достаточно давно и приведены, например, в монографиях [1—4]. Актуальным вопросам расчетов устойчивости и закритического поведения гладких и подкрепленных панелей посвящены монографии [5, 6]. Кроме того, в работе [6] приведены результаты широких экспериментальных исследований подкрепленных композитных панелей.

В работах [7, 8] отмечено, что потенциал композитных панелей тонкостенных конструкций, склонных к потере устойчивости, не используется в полной мере из-за отсутствия нормативных документов в авиакосмической отрасли. С таким утверждением следует согласиться и в настоящее время, поскольку технические специалисты используют в основном циркуляр [9].

Решения прикладных задач, касающиеся оптимального проектирования композитных панелей с учетом деградации характеристик композитных материалов, приведены в работах [10—12]. Следующее направление, имеющее практическую значимость, связано с численными и экспериментальными исследованиями прочности композитных панелей с учетом низкоскоростных ударных воздействий [13, 14]. Также следует отметить работы, посвященные оптимальному проектированию трехслойных композитных панелей [15, 16]. Широкому параметрическому моделированию композитного крыла посвящена работа [17].

Анализ закритического поведения является сложным и актуальным направлением для проектирования и численных исследований [18, 19] тонкостенных композитных конструкций. Большой обзор работ, посвященных расчетам и алгоритмам оптимизации подкрепленных металлических и композитных панелей при обеспечении условий устойчивости и прочности при закритическом поведении, представлен в [20]. Отметим, что наиболее перспективные разработки по оптимальному проектированию композитных панелей при закритическом поведении связаны с возможным варьированием переменными жесткостями, в том числе связанными с изменением угла армирования. В [21—26] предложены различные методики расчета и проектирования оптимальных композитных панелей с переменными углами армирования. Несомненно, интересными являются работы [27, 28], посвященные аналитическому подходу к оптимизации укладки композитных панелей при геометрически нелинейном поведении с учетом переменного угла армирования слоистого пакета.

Другое важное направление, активно развиваемое авторами работ [29, 30], связано с вероятностным подходом к оптимизации композитных конструкций при анализе их надежности и прочности при закритическом состоянии.

Отдельно следует выделить главу монографии [31], которая посвящена задачам оптимального проектирования композитных панелей при закритическом поведении. В работе объединены возможности нелинейного конечно-элементного моделирования и анализа возможных форм перестроения для последующего эффективного проектирования панелей. Также следует отметить работу [32], посвященную анализу и проектированию панелей при закритическом поведении с учетом умеренного развития геометрически нелинейного поведения при вторичном изменении параметров волнообразования при нагружении.

В [33, 34] изложена методология проектирования тонких композитных панелей по закритическому состоянию при допустимости потери устойчивости при нагрузках, близких к эксплуатационному уровню. В этом случае при использовании аналитических решений геометрически нелинейных задач возможно определение минимальных толщин панелей при достижении предельных по прочности напряжений.

В данной работе предложено определять оптимальные параметры гладких композитных панелей (рис. 1) исходя из обеспечения минимальных запасов (равных единице) на двух уровнях нагружения:

- на уровне 1 необходимо обеспечить устойчивость,
- на уровне 2 допустима потеря устойчивости и необходимо обеспечить статическую прочность при геометрически нелинейном поведении панели.

В общем случае указанные уровни нагружения 1 и 2 могут не совпадать с эксплуатационными и расчетными нагрузками. Отметим, что указанные уровни нагружения при введении дополнительных коэффициентов могут назначаться разработчиком воздушного судна в специальных расчетных условиях. Например, для обшивок сжатых панелей многозамкнутого закрылка самолета малой и средней грузоподъемности возможно допущение потери устойчивости обшивки между продольными стенками (рис. 2) при сжимающих нагрузках ниже эксплуатационного уровня. Это также отно-

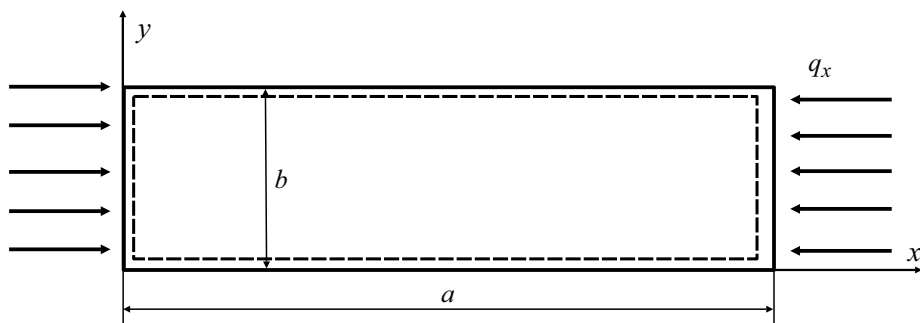


Рис. 1. Схема прямоугольной ортотропной панели при действии сжимающих усилий.

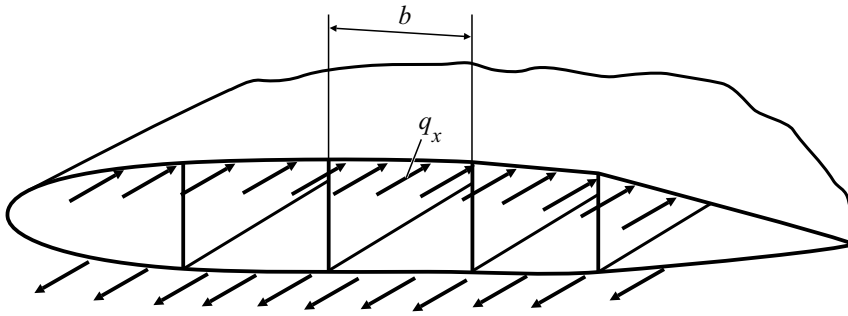


Рис. 2. Поперечное сечение многослойного закрылка.

сится к нижним панелям фюзеляжа при действии сжатия. Для удобства дальнейших рассуждений обозначим отношение нагрузок двух указанных уровней через коэффициент ω , который не обязательно будет совпадать с коэффициентом безопасности, принятым при разработке авиационных конструкций.

Формально задача проектирования панелей минимального веса может быть представлена следующим образом: при заданных потоках необходимо определить толщину и ширину гладкой композитной панели (целевая функция — вес $V(\delta, b) \rightarrow \min$) при ограничениях по устойчивости и по прочности при закритическом поведении, которые выполняются в виде равенства единице соответствующих запасов.

В настоящей работе рассмотрим одновременно соотношения методик проектирования по устойчивости и по закритическому состоянию. Исследуем прямоугольные ортотропные панели с геометрическими параметрами $a \gg b$ толщиной δ при шарнирном опирании при сжатии, сдвиге и комбинированном нагружении. Цель — разработка методики проектирования гладких композитных панелей с учетом указанных условий и запись замкнутых аналитических соотношений для определения толщины и ширины панели.

1. Исходные соотношения и предлагаемая методика проектирования

Запишем основные соотношения геометрически нелинейной задачи для ортотропных гладких панелей. Условие совместности деформаций имеет вид

$$L_1(F) - L_2(W) = 0, \quad (1)$$

где

$$L_1(F) = \frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_x} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4},$$

$$L_2(W) = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right),$$

нелинейное уравнение типа Кармана —

$$L_3(F, W) - L_4(W) = 0, \quad (2)$$

где

$$L_3(F, W) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y},$$

$$L_4(W) = \frac{1}{\delta} \left[D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right].$$

Здесь и далее E_x, E_y — модули упругости в направлении осей x и y ; G_{xy} — модуль сдвига в плоскости композитного пакета; μ_{xy} — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение вдоль оси x при растяжении вдоль оси y ; условие ортотропии $E_x \mu_{xy} = E_y \mu_{yx}$; D_E, D_C, D_3 — изгибные жесткости ортотропной панели; δ — толщина панели; F — функция напряжений.

Приведем дополненный по отношению к материалам работ [33, 34] алгоритм определения оптимальных параметров ортотропных панелей, который в данном случае будет включать следующие пункты:

1) исходя из геометрических параметров, граничных условий и характера нагружения панели необходимо определить возможную форму прогиба при потере устойчивости панели, которая, как правило, может быть описана известной тригонометрической функцией (с точностью до неизвестной величины амплитуды);

2) определить коэффициент $\omega = q^d / q^{st}$ — отношение расчетной (разрушающей) нагрузки и критической нагрузки, при которой потеря устойчивости не допускается;

3) при известных геометрических параметрах (в частности, длине и ширине панели) и жесткостных характеристиках, обусловленных укладкой КМ, для рассматриваемых гладких ортотропных панелей вычислить числа полуволн при потере устойчивости по известным соотношениям механики композитных конструкций [1];

4) провести аналитическое решение геометрически нелинейной задачи методом Бубнова—Галеркина, позволяющим получить замкнутые аналитические соотношения и, в частности, нелинейные уравнения, связывающие толщину, ширину панели и амплитуду прогиба;

5) записать равенства для определения напряжений через функцию напряжений, из которых получаем выражение для мембранных напряжений в зависимости от амплитуды прогиба;

6) исследовать на экстремум выражения для напряжений по координатам x и y и определить точки, в которых напряжения могут достичь максимальных по модулю значений;

7) из условия достижения напряжениями предельных значений, например, $\bar{\sigma}_x$, определить амплитуду прогиба при напряжениях $\sigma = \bar{\sigma}_x$ (см.

п. 5). Подставив полученное равенство в геометрически нелинейное уравнение (см. п. 4), в итоге запишем нелинейное уравнение относительно толщины панели;

8) в общем случае надо записать линейные соотношения (см. п. 4) и аналитически решить задачу устойчивости. Как правило, выражения для определения критических напряжений потери устойчивости гладких ортотропных панелей известны. Аналитически переписать полученное соотношение относительно ширины панели;

9) подставить полученное в п. 8 соотношение в выражение, являющееся решением геометрически нелинейной задачи, в п. 7 и получить нелинейное уравнение относительно толщины панели;

10) провести численное решение нелинейного уравнения и определить оптимальную толщину гладкой ортотропной панели. Вычислить ширину ортотропной панели (см. п. 8). Исходя из конструктивных и технологических ограничений уточнить значения толщины и ширины панели.

Теперь рассмотрим применение приведенных пунктов при различных вариантах нагружения композитных панелей.

2. Определение оптимальных параметров гладких композитных панелей при сжатии

Рассмотрим соотношения, приведенные в табл. 1, поясняющие место методологии проектирования по закритическому состоянию в общей те-

Табл. 1

Расчетные соотношения для определения толщины ортотропной прямоугольной панели при одноосном сжатии при шарнирном опирании [34]

Условия для проектирования панелей	Соотношения для определения напряжений	Соотношения для определения минимальной толщины панелей
Статическая прочность	$\sigma = \frac{P}{\delta b}$	$\delta = \frac{P}{\sigma b}$
Устойчивость	$\bar{\sigma}_{cr} = K \left(\frac{\delta}{b} \right)^2, K = \frac{2\pi^2}{12} \times$ $\times \left[\sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y} + \mu_{xy} \bar{E}_x + 2G_{xy} \right]$	$\delta^2 = b^2 \frac{\bar{\sigma}_{st}}{K}$
Закритическое состояние	$\sigma_x = -\frac{f^2}{8} E_x \frac{\pi^2 m^2}{a^2} - p_x,$ $\delta^2 \bar{D}_{mn} + f^2 E_{mn} = p_x \left(\frac{m}{a} \right)^2$	$\delta^3 + \delta \frac{E_{mn} \bar{\sigma}_x}{D_{mn} E_{\alpha\beta}} -$ $-\frac{q_x^d}{D_{mn}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{E_{mn}}{E_{\alpha\beta}} \right) = 0$

ории проектирования тонкостенных конструкций. Представленные соотношения иллюстрируют возможность определения толщины панелей при ограничениях по статической прочности, устойчивости и закритическому состоянию.

В табл. 1 введены следующие обозначения: K , \bar{D}_{mn} , E_{mn} , $E_{\alpha\beta}$ — коэффициенты, зависящие от жесткостных соотношений композитной структуры панели (приведены далее); $\bar{\sigma}$ — допускаемые по условиям прочности нормальные напряжения; $\bar{\sigma}_{st}$ — допускаемые по условиям устойчивости нормальные напряжения, определяемые разработчиком воздушного судна; $q_x^d = p_x \delta$ — действующий на панель сжимающий поток на расчетном уровне нагружения; $\bar{E}_x = \frac{E_x}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}}$, $\bar{E}_y = \frac{E_y}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}}$.

Дадим необходимые пояснения для приведенных соотношений. Представим прогиб прямоугольной панели в виде

$$W = f \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right),$$

где f — амплитуда прогиба; m — число полуволн в продольном направлении.

В результате рассмотрения геометрически нелинейного уравнения совместности деформаций (1) может быть определена функция напряжений [34]

$$F = A_1 f^2 \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) + A_2 f^2 \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) - \frac{p_x y^2}{2},$$

где

$$A_1 = \frac{E_y a^2}{32 b^2 m^2}, \quad A_2 = \frac{E_x b^2 m^2}{32 a^2}.$$

Тогда мембранные продольные напряжения потерявшей устойчивость панели вычисляем по формуле

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{E_x f^2 m^2 \pi^2}{8 a^2} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) - p_x. \quad (3)$$

При решении геометрически нелинейной задачи методом Бубнова—Галеркина может быть получено уравнение

$$\delta^2 \bar{D}_{mn} + f^2 E_{mn} = \left(\frac{m}{a}\right)^2 p_x, \quad (4)$$

где

$$E_{mn} = \left(\frac{m^4 E_x}{a^4} + \frac{E_y}{b^4}\right) \frac{\pi^2}{16}, \quad (5)$$

$$\bar{D}_{mn} = \pi^2 \left[\frac{\bar{E}_x}{12} \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} \right) \left(\frac{m}{ab} \right)^2 + \frac{\bar{E}_y}{12} \left(\frac{1}{b} \right)^4 \right]. \quad (6)$$

Далее будем считать, что продольные напряжения (3) достигают предельных по прочности значений $\bar{\sigma}_x$ в потенциально-критических точках при условии выполнения равенства $\cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) = 1$. Тогда, выразив из уравнения (3) амплитуду прогиба, получим соотношение

$$f^2 = (\bar{\sigma}_x - p_x) \frac{1}{E_{\alpha\beta}}, \quad (7)$$

где $E_{\alpha\beta} = \frac{E_x \pi^2 m^2}{8a^2}$.

Подставляя прогиб (7) в уравнение (4), получим искомое нелинейное выражение, указанное в табл. 1, относительно толщины

$$\delta^3 + \delta \frac{E_{mn} \bar{\sigma}_x}{D_{mn} E_{\alpha\beta}} - \frac{q_x^d}{D_{mn}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{E_{mn}}{E_{\alpha\beta}} \right) = 0,$$

где q_x^d — сжимающий поток при расчетном уровне нагружения.

Теперь уточним соотношения, введя два уровня нагружения при проектировании и рассмотрев два переменных параметра — толщину и ширину прямоугольной панели. Запишем выражение при проектировании по устойчивости не через критические напряжения, а через действующий на эксплуатационном уровне сжимающий поток

$$b^2 = \frac{\pi^2}{6q_x^{\text{exp}}} \delta^3 \left[\sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y} + \mu_{xy} \bar{E}_x + 2G_{xy} \right]. \quad (8)$$

Также следует учесть, что используемое соотношение верно при определении числа полуволн m [1]

$$m = \frac{a}{b} \sqrt[4]{\frac{E_y}{E_x}}, \quad (9)$$

из которого следует, что число m зависит от соотношения жесткостных параметров и соотношений сторон.

Таким образом, для получения уравнения для определения толщины панели необходимо в выражение (7) подставить обозначения (5), (6), затем соотношение для чисел полуволн m (9) и далее исключить ширину b с помощью уравнения (8). Итоговое выражение относительно толщины

после указанных преобразований включает сжимающие потоки, действующие на двух уровнях нагружения:

$$\delta = \frac{2q_x^d - q_x^{st}}{\bar{\sigma}_x}. \quad (10)$$

В инженерных расчетах авиационных конструкций при условии $q_x^{st} = q_x^{\text{exp}}$ следует учитывать величину коэффициента безопасности $f_{\text{safety}} = 1,5$. Тогда для определения толщины получим более простое равенство

$$\delta = \frac{2q_x^{\text{exp}}}{\sigma_x}, \quad (11)$$

которое вместе с уравнением (8) определяет оптимальные параметры композитной панели. Также отметим, что в данном случае не указаны дополнительные коэффициенты безопасности, вводимые при проектировании композитных конструкций и, как уже было отмечено, вводимые разработчиком воздушного судна в специальные расчетные условия и зависящие от многих конкретных условий. Причем на дополнительные коэффициенты безопасности обычно умножают нагрузки на двух указанных уровнях нагружения.

3. Определение оптимальных параметров гладких композитных панелей при сдвиге

Представим аналогичные рассуждения при рассмотрении задачи оптимального проектирования гладких ортотропных панелей при действии касательных потоков. Также рассмотрим соотношения, приведенные в табл. 2, с помощью которых можно убедиться в правомерности представленных рассуждений для случая сдвига.

В табл. 2 приняты следующие обозначения: Q — действующая перерезывающая сила; $\bar{\tau}_d$ — допускаемые по условиям прочности касательные напряжения; $\bar{\tau}_{st}$ — допускаемые по условиям устойчивости касательные напряжения, которые определяются разработчиком воздушного судна; $q_{xy}^d = p_{xy}\delta$ — действующий на панель сдвиговой поток при расчетном уровне нагружения; $B_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta}$, G_α — жесткостные коэффициенты, обозначения для которых приведены далее.

Теперь рассмотрим случай действия на ортотропную прямоугольную панель касательных потоков. Воспользуемся для описания прогиба равенством вида [35]

$$W = f \cdot \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi(x - \alpha y)}{s}, \quad (12)$$

где α — тангенс угла наклона волн при выпучивании; s — расстояние между узловыми линиями.

Табл. 2

Расчетные соотношения для определения толщины ортотропной
прямоугольной панели при сдвиге

Условия для проектирования панелей	Соотношения для вычисления напряжений	Соотношения для определения минимальной толщины панелей
Статическая прочность	$\tau = \frac{Q}{\delta b}$	$\delta = \frac{Q}{\bar{\tau}_d b}$
Устойчивость	$\tau_{cr} = K_\tau \left(\frac{\delta}{b} \right)^2$, $K_\tau = \frac{2\pi^2}{12} \times$ $\times \sqrt{\bar{E}_y (\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy})} \sqrt{4 + 3\theta + \frac{1}{\theta}}$, $\theta = \sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y} / (\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy})$ [35]	$\delta^2 = b^2 \frac{\bar{\tau}_{st}}{K_\tau}$
Закритическое состояние	$\tau_{xy} = -f^2 \frac{\pi^2}{8} \frac{\alpha}{G_\alpha b^2} - p_{xy}$, $f^2 B_{\alpha\beta} \delta + D_{\alpha\beta} \delta^3 = \frac{2\alpha\pi^2}{s^2} q_{xy}^d$	$\delta^3 + \delta \frac{8G_\alpha B_{\alpha\beta} \bar{\tau}_{xy} b^2}{D_{\alpha\beta} \pi^2 \alpha} +$ $+ \frac{q_{xy}^d}{\pi^2 D_{\alpha\beta}} \left(\frac{8G_\alpha B_{\alpha\beta} b^2}{\alpha} - \frac{2\alpha}{s^2} \right) = 0$

Тогда из уравнения совместности деформаций (1) получим функцию напряжений

$$F = \frac{f^2}{32} \left\{ \frac{1}{G_\alpha} \left(\frac{s}{b} \right)^2 \cos \frac{2\pi(x-\alpha y)}{s} + \left(\frac{b}{s} \right)^2 E_x \cos \frac{2\pi y}{b} \right\} -$$

$$-\frac{p_x y^2}{2} - \frac{p_y x^2}{2} + p_{xy} xy, \tag{13}$$

где

$$G_\alpha = \frac{1}{E_y} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_x} \right) \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{E_x}.$$

Будем считать, что прочностное разрушение в данном случае возможно по достижении предельных касательных напряжений $\bar{\tau}_{xy}$. Запишем выражение для мембранных касательных напряжений [34]

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f^2 \Delta_{xy} - p_{xy},$$

где $\Delta_{xy} = \frac{\pi^2}{8} \frac{\alpha}{G_\alpha b^2} \cos \frac{2\pi(x-\alpha y)}{s}$, и далее будем считать, что при действии

максимальных напряжений в критических точках имеем $\cos \frac{2\pi(x-\alpha y)}{s} \rightarrow 1$.

Используя далее процедуру метода Бубнова—Галеркина с учетом геометрически нелинейного уравнения (2), в общем виде при $f \neq 0$ получим

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{s^2} \left[\frac{\pi^2 f^2}{16G_\alpha} \left(\frac{\alpha}{b}\right)^2 + \frac{E_x}{16} \frac{\pi^2 f^2}{s^2} + p_x \right] + \left[-\frac{\pi^2 f^2}{16G_\alpha} + p_y \right] \left(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) + \\ & + \frac{\alpha \pi^2}{s^2} \left(\frac{\pi^2 f^2}{8b^2 G_\alpha} + 2p_{xy} \right) - \frac{\bar{E}_x \delta^2}{12} \frac{\pi^4}{s^4} - \\ & - 2 \left(\frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} \right) \delta^2 \left(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) \frac{\pi^2}{s^2} - \\ & \frac{\bar{E}_y \delta^2}{12} \left[\left(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right)^2 + \frac{4\pi^4 \alpha^2}{b^2 s^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

При малых прогибах выражение (14) перепишем в виде

$$\begin{aligned} q_{xy} \alpha = p_{xy} \delta \alpha = & \frac{\bar{E}_x \delta^3}{12} \frac{\pi^2}{s^2} + 2 \left(\frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} \right) \delta^3 \left[\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right] + \\ & + \frac{\bar{E}_y \delta^3}{12} \frac{s^2}{\pi^2} \left[\frac{\pi^4}{b^4} + \frac{\alpha^4 \pi^4}{s^4} + \frac{6\pi^4 \alpha^2}{b^2 s^2} \right], \end{aligned}$$

который совпадает с равенством из работы [35]. При некоторых упрощениях путем аналитической минимизации можно определить критический сдвиговой поток ортотропной панели по известной формуле [35]

$$q_{xy}^{cr} = \frac{2\pi^2}{b^2} \frac{\delta^3}{12} \sqrt{\bar{E}_y (\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy})} \sqrt{4 + 3\theta + \frac{1}{\theta}}, \quad (15)$$

где $\theta = \sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y} / (\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy})$, при этом критические параметры волнообразования вычисляем из соотношений [35]

$$\alpha^4 \left[\frac{3\lambda}{\lambda_1} + 1 \right] + \alpha^2 \left[3\sqrt{\lambda_1} - \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda_1}} \right] - \lambda_1 - \lambda = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\lambda_1}{\alpha} + 2\lambda\alpha - \frac{1}{\alpha\gamma^2} + \alpha^3 = 0, \quad (17)$$

где

$$\gamma = \frac{b^2}{s^2}, \quad \lambda_1 = \frac{E_x}{E_y}, \quad \lambda = \frac{(\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy})}{\bar{E}_y}.$$

Учитывая введение двух уровней нагружения, перепишем равенство (15) в виде

$$b^2 = \frac{\pi^2}{q_{xy}^{st}} \frac{\delta^3}{6} \sqrt{\bar{E}_y (\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy})} \sqrt{4 + 3\theta + \frac{1}{\theta}}. \quad (18)$$

Далее при действии только касательных потоков на расчетном уровне из уравнения (14) имеем

$$\delta^3 + \delta \frac{8G_\alpha B_{\alpha\beta} \bar{\tau}_{xy} b^2}{D_{\alpha\beta} \pi^2 \alpha} + \frac{q_\alpha^d}{\pi^2 D_{\alpha\beta}} \left(\frac{8G_\alpha B_{\alpha\beta} b^2}{\alpha} - \frac{2\alpha}{s^2} \right) = 0, \quad (19)$$

где

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{b^4} \frac{1}{16G_\alpha} \left\{ \left[\left(\frac{\alpha b}{s} \right)^2 + E_x G_\alpha \frac{b^4}{s^4} \right] + \left[\frac{b^2}{s^2} + \alpha^2 \frac{b^4}{s^4} \right] + 2\alpha \frac{b^2}{s^2} \right\}, \quad (20)$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{b^4} \frac{1}{12} \left\{ \bar{E}_x \frac{b^4}{s^4} + 2(\mu_{xy} \bar{E}_x + 2G_{xy}) \left[\frac{b^2}{s^2} + \alpha^2 \frac{b^4}{s^4} \right] + \bar{E}_y \left[\left(1 + \frac{\alpha^2 s^2}{b^2} \right)^2 + \frac{4\alpha^2 b^2}{s^2} \right] \right\}. \quad (21)$$

Теперь распишем процедуру получения итогового громоздкого уравнения для определения толщины с учетом того, что ширина панели b также является переменной величиной. Во-первых, определим критические параметры волнообразования α_{cr} и γ_{cr} , зависящие от жесткостных соотношений, по формулам (16), (17). Во-вторых, подставим обозначения для G_α , $B_{\alpha\beta}$ (20) и $D_{\alpha\beta}$ (21) в уравнение (19). Далее, используя обозначения для s и b (16), можно получить одно громоздкое уравнение относительно толщины δ , включающее в себя два уровня действующих потоков и решаемое численным образом. После определения оптимальной толщины панели по формуле (18) можно вычислить оптимальную ширину прямоугольной панели.

4. Определение оптимальных параметров композитных панелей при комбинированном нагружении

Рассмотрим случай комбинированного нагружения продольными сжимающими и касательными потоками. Будем считать, что компоненты нагружения изменяются пропорционально одному параметру: $q_x = \xi \bar{q}_x$, $q_{xy} = \xi \bar{q}_{xy}$. При рассмотрении задач устойчивости и закритического поведения будем использовать вид прогиба, описываемый соотношением (12). Тогда функция напряжения F и решение геометрически нелинейной задачи сохраняют вид соотношений (13) и (14).

При действии комбинации потоков при малых прогибах выражение (14) перепишем в виде

$$q_x^{st} + q_{xy}^{st} \alpha = \frac{\pi^2}{b^2} \left\{ \frac{\bar{E}_x \delta^3}{12} \frac{b^2}{s^2} + 2 \left(\frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} \right) \delta^3 \left[1 + \frac{\alpha^2 b^2}{s^2} \right] + \frac{\bar{E}_y \delta^3}{12} \left[\frac{s^2}{b^2} + \frac{\alpha^4 b^2}{s^2} + 6\alpha^2 \right] \right\},$$

где $q_x^{st} = p_x^{st} \delta$, $q_{xy}^{st} = p_{xy}^{st} \delta$ — действующие потоки, соответствующие уровню нагружения, при котором необходимо обеспечить устойчивость.

Далее при использовании параметра $\gamma = b^2/s^2$ и системы уравнений

$$\partial \xi / \partial \alpha = 0, \quad \partial \xi / \partial \gamma = 0$$

можно по аналогии со случаем сдвига и работы [36] численным образом определить критические параметры волнообразования при потере устойчивости (α_{cr}, γ_{cr}). В соответствии с предложенным приемом сведения задачи оптимизации к одному уравнению потребуются выражения относительно ширины панели.

Отметим еще раз практические достоинства результатов работы [35], в которой получены аналитические решения задач устойчивости для ортотропных панелей и формула для критических касательных потоков (15). Указанное уравнение было следствием более общей решаемой задачи устойчивости, предполагающей комбинированное нагружение. В работе [35] было получено аналитическое решение задачи устойчивости при одновременном действии сжимающих и касательных напряжений и записано выражение

$$\sigma_x^{exp} \delta + \frac{(\tau_{xy}^{exp} \delta)^2}{\frac{2\pi^2}{b^2} \left(2D_y + D_3 \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \right)} = \frac{2\pi^2}{b^2} (D_3 + \sqrt{D_x D_y}),$$

которое так же, как и формула (15), имеет применение для практических

расчетов. Переписывая приведенное уравнение через действующие потоки для первого уровня нагружения, при которых необходимо обеспечить устойчивость, имеем

$$q_x^{\text{st}} b^2 + \frac{(q_{xy}^{\text{st}})^2 b^4}{2\pi^2 \delta^3 \left[\frac{3\bar{E}_y}{12} + \left(\frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} \right) \sqrt{\frac{E_y}{E_x}} \right]} - 2\pi^2 \delta^3 \left(\frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} + \frac{\sqrt{E_x \bar{E}_y}}{12} \right) = 0 \quad (22)$$

и получаем квадратное уравнение относительно величины b^2 . Отметим, что практическая значимость полученного в работе [35] уравнения заключается в возможности аналитического определения минимальной толщины ортотропной панели при заданной нагрузке, укладке и ширине панели.

Далее в рассматриваемой задаче определения толщины ортотропной панели с минимальными запасами для второго уровня нагружения при комбинированном нагружении необходимо воспользоваться комплексным критерием прочности. Считая, что на панель действуют потоки (так как при постановке задачи проектирования толщины и напряжения неизвестны), воспользуемся следующим выражением для критерия прочности с учетом умножения на толщину:

$$\frac{(\sigma_x \delta)^2}{\bar{\sigma}_x^2} + \frac{(\tau_{xy} \delta)^2}{\bar{\tau}_{xy}^2} = \delta^2. \quad (23)$$

Здесь $\bar{\sigma}_x$ и $\bar{\tau}_{xy}$ — предельные по остаточной прочности напряжения композитного пакета при наличии дефектов 1-й категории [9]. Отметим, что данный прием использован в работе [36], где рассмотрен вариант нагружения при действии двухосного сжатия и сдвига.

Мембранные напряжения в срединной поверхности потерявшей устойчивость прямоугольной ортотропной панели определяем как

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -f^2 \Delta_x - p_x, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f^2 \Delta_{xy} - p_{xy}, \quad (24)$$

где

$$\Delta_x = -\frac{\pi^2}{8} \left\{ \frac{\alpha^2}{G_\alpha b^2} \cos \frac{2\pi(x-\alpha y)}{s} + \frac{E_x}{s^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right\},$$

$$\Delta_{xy} = \frac{\pi^2}{8} \frac{\alpha}{G_\alpha b^2} \cos \frac{2\pi(x-\alpha y)}{s}.$$

Теперь запишем полученные выражения для случая совместного действия продольными сжимающими $q_x^d = p_x \delta$ и касательными $q_{xy}^d = p_{xy} \delta$ потоками. Перепишем выражения (24) с учетом действия потоков в виде

$$\sigma_x \delta = -\delta \Delta_1 f^2 - q_x^d, \quad \tau_{xy} \delta = -\delta \Delta_{xy} f^2 - q_{xy}^d. \quad (25)$$

Далее нелинейное уравнение (14) перепишем в виде

$$f^2 B_{\alpha\beta} \delta + D_{\alpha\beta} \delta^3 = \frac{\pi^2}{s^2} q_x^d + \frac{2\alpha\pi^2}{s^2} q_{xy}^d. \quad (26)$$

Проведем следующие преобразования уравнений (23), (25) и (26). Сначала подставим потоки из (25) в критерий прочности (23). Далее, подставив амплитуду прогиба из (26) в полученное на предыдущем шаге рассуждений соотношение, запишем искомое нелинейное уравнение для определения толщины как

$$\begin{aligned} & \bar{\tau}_{xy}^2 \left[-\Delta_1 \frac{\frac{\pi^2}{s^2} (q_x + 2\alpha q_{xy}) - D_{\alpha\beta} \delta^3}{B_{\alpha\beta}} - q_x \right]^2 + \\ & + \bar{\sigma}_x^2 \left[\Delta_2 \frac{\frac{\pi^2}{s^2} (q_x + 2\alpha q_{xy}) - D_{\alpha\beta} \delta^3}{B_{\alpha\beta}} - q_{xy} \right]^2 = \delta^2 \bar{\sigma}_x^2 \bar{\tau}_{xy}^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Для получения искомого громоздкого уравнения для определения оптимальной толщины при рассмотрении двух уровней нагружения надо подставить величины b^2 при аналитическом решении квадратного уравнения (22) в записанное равенство (27).

5. Пример определения параметров композитной панели при сжатии

Рассмотрим панели из углепластика со следующими характеристиками: $E_1 = 125$ ГПа, $E_2 = 9$ ГПа, $G_{12} = 5$ ГПа, $\mu_{21} = 0,28$, $\bar{\sigma}_1 = 0,9$ ГПа. Положим, что при стандартной укладке $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$ и относительной толщине $h_0 = 0,4$, $h_{45} = 0,5$, $h_{90} = 0,1$ предел прочности при сжатии равен $\bar{\sigma}_x = 459$ МПа. В табл. 3, 4 приведены результаты расчетов при разных уровнях нагружения. Приведенный параметр $\Delta = 100/\omega$ (%) показывает процент нагрузки, при которой принята возможность допустимости потери устойчивости. Из данных табл. 3, 4 видно, что допустимость или недопустимость ранней потери устойчивости может приводить к разным рекомендациям при разработке конструкций.

Табл. 3

Оптимальные параметры углепластиковой панели при изменении уровня нагрузки, при которой допустима потеря устойчивости

$q_x^{st} \cdot 10^3$, ГПа·м	0,4	0,359	0,24	0,182	0,15
$q_x^d \cdot 10^3$, ГПа·м	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
ω	1,5	1,67	2,5	3,3	4
Δ , %	67	60	40	30	25
δ , мм	1,74	1,83	2,09	2,22	2,29
b , мм	47,6	54,2	80,8	101,3	116,9

Рассмотрим также традиционный вопрос проектирования композитных конструкций об оптимальной укладке. В данном случае для шарнирно опертой панели при сжатии параметры панели определяем по формулам (8) и (10). Целесообразно рассматривать безразмерный параметр $\zeta = \delta / b$. Из указанных уравнений можно получить соотношение

$$\zeta = \frac{\delta}{b} = \sqrt{\frac{6q_x^{st}}{\pi^2 \left[\sqrt{E_x E_y} + \mu_{xy} E_x + 2G_{xy} \right]}} \frac{\bar{\sigma}_x}{(2q_x^d - q_x^{st})},$$

а для авиационных конструкций с учетом коэффициента безопасности $f_{safety} = 1,5$ имеем

$$\zeta = \frac{\delta}{b} = \sqrt{\frac{3\bar{\sigma}_x}{\pi^2 \left[\sqrt{E_x E_y} + \mu_{xy} E_x + 2G_{xy} \right]}}.$$

Отметим, что здесь также опущены дополнительные коэффициенты безопасности, вводимые при проектировании композитных конструкций по указанным ранее причинам. Для оценки оптимального армирования в

Табл. 4

Оптимальные параметры углепластиковой панели при изменении уровня разрушающей нагрузки

$q_x^{st} \cdot 10^3$, ГПа·м	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
$q_x^d \cdot 10^3$, ГПа·м	0,6	0,668	1,0	1,32	1,6
ω	1,5	1,67	2,5	3,3	4
Δ , %	67	60	40	30	25
δ , мм	1,74	2,04	3,48	4,88	6,1
b , мм	47,6	60,3	134,7	223,1	311,8

Оптимальные параметры углепластиковой панели при изменении угла армирования при уровнях нагружения $q_x^{st} \cdot 10^3 = 0,4$ ГПа·м и $q_x^d \cdot 10^3 = 0,6$ ГПа·м

Параметр	$\pm\varphi$, град			
	10	20	30	40
$\bar{\sigma}_x$, ГПа	0,827	0,6	0,33	0,168
ζ	0,067	0,048	0,03	0,02
δ , мм	0,97	1,33	2,43	4,75
b , мм	14,4	27,9	80,8	241,4

табл. 5 показано изменение параметра ζ в зависимости от угла армирования при использовании структуры $\pm\varphi^\circ$. Предел прочности $\bar{\sigma}_x$ ($\pm\varphi^\circ$) при этом определялся по условию разрушения монослоя КМ вдоль волокон. Отметим, что реализация прочностных и жесткостных характеристик панели со структурой $\pm\varphi^\circ$ возможна и при стандартной укладке $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$. Отметим также, что полученные соотношения учитывают прочностные, но не конструктивные и не технологические ограничения. При разработке конструкций, как правило, реализуется компромиссное решение.

6. Пример возможного применения методики определения оптимальных параметров сжатых панелей

Рассмотрим многозамкнутый закрылок самолета малой грузоподъемности при допустимости потери устойчивости обшивки между продольными стенками (рис. 2, 3). На ранних этапах проектирования, как правило, исходными данными являются геометрические параметры (например, координаты внешних поверхностей, но не толщина обшивок) закрылка, а также внешние нагрузки и соответствующие силовые факторы (изгибающий и крутящий моменты, а также перерезывающая сила). На начальном этапе проектирования исходя из величины изгибающего момента и координат внешних поверхностей и используя балочную теорию, можно определить расчетные нормальные потоки. В этом случае вкладом продольных поясов (носящих конструктивный характер) в восприятие изгибающего момента, как правило, пренебрегают. Причем на максимальной высоте сечения будет действовать максимальный сжимающий поток. Пример сечения рассматриваемой конструкции показан на рис. 2, 3. Используя формулы (8) и (11), можно вычислить толщину сжатой панели и шаг установки продольных стенок исходя из ранее рассмотренных условий обеспечения устойчивости и прочности при закритическом состоянии.



Рис. 3. Фрагмент поперечного сечения конструктивно-подобного образца многослойного закрывка.

Заключение

В настоящей работе получены следующие результаты.

1. Предложена методика проектирования оптимальных гладких композитных панелей в новой постановке задачи при ограничениях по устойчивости и прочности при закритическом поведении. В методике учитываются два уровня нагружения, при которых обеспечивается устойчивость и прочность при геометрически нелинейном поведении панели с минимальными запасами, равными единице.

2. Приведены аналитические соотношения при реализации методики при сжатии, сдвиге и комбинированном нагружении, что соответствует достижению цели работы. Даны пояснения особенностей реализации методики для каждого вида нагружения. В случае сжатия шарнирно опертой панели получены инженерные аналитические соотношения для получения рекомендаций при выборе оптимальных параметров.

3. Практическая значимость работы заключается в возможности получения оптимальных параметров гладких композитных панелей на ранних этапах проектирования, когда переменными параметрами могут быть толщина и ширина панели (шаг стрингеров) при заданных погонных нагрузках. Также методика может быть использована при выборе шага установки стенок для многозамкнутых конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vasiliev V. V., Morozov E. V.* Advanced Mechanics of Composite Materials and Structures. — Amsterdam: Elsevier, 2018.
2. *Тетерс Г. А., Рикардс Р. Б., Нарусберг В. Л.* Оптимизация оболочек из слоистых композитов. — Рига: Зинатне, 1978.
3. *Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1977.

4. Баничук Н. В., Кобелев В. В., Рикардс Р. Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1988.
5. Kollár L., Springer G. *Mechanics of Composite Structures*. — Cambridge University Press, 2009. <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511547140>
6. Falzon B. G., Aliabadi M. H. *Buckling and Postbuckling Structures: Experimental, Analytical and Numerical Studies*. — Imperial College London, UK, 2008. <https://doi.org/10.1142/p506>
7. Degenhardt R., Teßmer J. Advances in computational stability analysis of composite aerospace structures // AIP Conf. Proc. — 2010. — Vol. 1281. — P. 1608 — 1611. <https://doi.org/10.1063/1.3498128>
8. Degenhardt R., Castro S., Arbelo M., Zimmerman R., Khakimova R., Kling A. Future structural stability design for composite space and airframe structures // *Thin-Walled Struct.* — 2014. — Vol. 81. — P. 29—38. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.02.020>
9. Advisory Circular 20-107B, U.S. Department of Transportation Federal Aviation Administration, 2009. https://www.faa.gov/documentLibrary/media/Advisory_Circular/AC20-107B.pdf
10. Kalnins K., Auzins J., Rikards R. Metamodeling approach for analysis of post-buckling in composite panels with structural degradation // 11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conf., Portsmouth, Virginia, USA, 06 — 08 Sept., 2006. <https://doi.org/10.2514/6.2006-7104>
11. Kalnins K., Auzins J., Rikards R. Fast simulation procedure for ribbed composite structures with material degradation // *Mech. Compos. Mater.* — 2007. — Vol. 43, No. 2. — P. 225—232. <https://doi.org/10.1007/s11029-007-0022-2>
12. Kalnins K., Bisagni C., Rikards R., Eglitis E., Cordisco P., Chate A. Metamodels for the optimization of damage tolerant composite structures // ICAS 2008 — 26th Congr. Int. Council of the Aeronautical Sciences, Anchorage, Alaska, USA, September 14-19, 2008, ICAS 2008. 3. — P. 2151—2157.
13. Liu H., Liu J., Ding Y., Zhou J., Shao K., Blackman B., Kinloch A., Falzon B., Dear J. Effects of impactor geometry on the low-velocity impact behaviour of fibre-reinforced composites: An experimental and theoretical investigation // *Appl. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 27. — P. 533—553. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10443-020-09812-8>
14. Liu H., Falzon B. G., Tan W. Experimental and numerical studies on the impact response of damage-tolerant hybrid unidirectional/woven carbon-fibre reinforced composite laminates // *Composites: Part B.* — 2017. — Vol. 136. — P. 101—118. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.10.016>
15. Kondratiev A., Potapov O., Tsaritsynskyy A., Nabokina T. Optimal design of composite shelled sandwich structures with a honeycomb filler // *Adv. Des., Simulation and Manufacturing IV.* — 2021. — P. 546—555. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-77719-7_54
16. Kondratiev A., Gaydachuk V. Weight-based optimization of sandwich shelled composite structures with a honeycomb filler // *Eastern-European J. Enterprise Technol.* — 2019. — Vol. 1, No. 1. — P. 24—33. <http://dx.doi.org/10.15587/1729-4061.2019.154928>
17. Михайловский К. В., Барановски С. В. Методика проектирования крыла из полимерных композиционных материалов на основе параметрического моделирования. Ч. 3. Выбор и обоснование оптимальных схем армирования силовых элементов // *Изв. вузов. Машиностроение.* — 2018. — № 5 (698) — С. 75—84. <http://doi.org/10.18698/0536-1044-2018-5-75-84>
18. Maksimović K., Maksimović M., Vasović-Maksimović I., Rasuo B., Maksimović S. Postbuckling and failure analysis of layered composite panels // *FME Trans.* — 2020. — Vol. 48, No. 2. — P. 447—453. <http://dx.doi.org/10.5937/fme2002447M>

19. Zhang F., Wu M., Hou X., Han C., Wang X., Xu X. Post-buckling reliability analysis of stiffened composite panels based on adaptive iterative sampling // Eng. Comput. — 2021. — Vol. 22, May. — P. 1—11. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00366-021-01424-5>
20. Ni X., Prusty G., Hellier A. Buckling and post-buckling of isotropic and composite stiffened panels: A review on optimisation (2000-2015) // Trans. Roy. Inst. Naval Architects. Part A: Int. J. Maritime Eng. — 2016. — Vol. 158, Part A3. — P. A-251—A-268. <https://doi.org/10.5750/ijme.v158iA3.994>
21. Madeo A., Groh R. M. J., Zucco G., Weaver P., Zagari G., Zinno, R. Post-buckling analysis of variable-angle tow composite plates using Koiter's approach and the finite element method // Thin-Walled Struct. — 2017. — Vol. 110, January. — P. 1—13 <http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2016.10.012>
22. White S., Raju G., Weaver P. Initial post-buckling of variable-stiffness curved panels // J. Mech. Phys. Solids. — 2014. — Vol. 71, November. — P. 132—155 <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmps.2014.07.003>
23. Quadros H., Hernandez J. A lagrange parametrization for the design of variable stiffness laminates // Struct. Multidisciplinary Optimization. — 2018. — Vol. 58, February. P. 129—137. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-017-1882-2>
24. Wu Z., Raju G., Weaver P. Framework for the buckling optimization of variable-angle tow composite plates // AIAA J. — 2015. — Vol. 53, No. 12. — P. 1—17. <http://dx.doi.org/10.2514/1.J054029>
25. Liguori F. S., Zucco G., Madeo A., Magisano D., Leonetti L., Garcea G., Weaver P. Koiter method and solid shell finite elements for postbuckling optimisation of variable angle tow composite structures // Proc. XXIV AIMETA Conf. — 2019. — P. 1731—1742 http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-41057-5_139
26. Wu Wen, Ba R., Lei Z., Geng C., Zhang X., Peng K., Guo J., Ma Y. Buckling analysis of stiffened composite panels with variable stiffness // IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. — 2019. — Vol. 504, No. 1. Article number 012059. <http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/504/1/012059>
27. Selyugin S. Locally orthotropic lay-up as an optimal solution for vat post-buckled composite plates experiencing large deflections above von Karman limits // engrXiv Preprints. — 2021. — P. 1—11. <http://dx.doi.org/10.31224/osf.io/4a6hz>
28. Selyugin S. Composite plates in postbuckling: dual extremal variational principles, energy features, stability, lay-up optimality conditions via complementary energy approach // engrXiv Preprints. — 2019. — P. 1—17. <http://dx.doi.org/10.31224/osf.io/3vbj6>
29. López C., Bacarreza O., Baldomir A., Hernandez S., Aliabadi M. H. Reliability-based design optimization of composite stiffened panels in post-buckling regime // Struct. Multidisciplinary Optimization. — 2017. — Vol. 55. — P. 1121—1141. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-016-1568-1>
30. Farokhi H., Bacarreza O., Aliabadi M. H. Probabilistic optimisation of mono-stringer composite stiffened panels in post-buckling regime // Struct. Multidisciplinary Optimization. — 2020. — Vol. 62. — P. 1395—1417. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-020-02565-9>
31. Faggiani A., Falzon B. G. Chapt. 8. Optimization of postbuckling-stiffened composite aerostructures // Buckling and Postbuckling Structures. II. Experimental, Analytical and Numerical Studies / Eds. B. G. Falzon and M. H. F. Aliabadi. — Queen's Univ. Belfast, UK, 2018. — P. 253—284. https://doi.org/10.1142/9781786344335_0008
32. Wu Z., Raju G., Weaver P. Analysis and design for the moderately deep postbuckling behavior of composite plates // J. Aircraft. — 2016. — Vol. 54, No. 1. — P. 1—9. <http://dx.doi.org/10.2514/1.C033875>

33. *Mitrofanov O.* Applied design of minimum weight composite wing panels taking into account skin post-buckling behavior // *Aerospace MAI J.* — 2002. — Vol. 9, No. 1. — P. 35—42. <http://vestnikmai.ru/publications.php?ID=32669>

34. *Mitrofanov O. V.* Designing Load-Bearing Panels of Aircraft Structures for Post-Buckling State. — Moscow: MAI, 2020.

35. *Balabukh L. I.* Stability of plywood plates // *Air Fleet Technol.* — 1937. — Vol. 9. — P. 19—37.

36. *Mitrofanov O., Osman M., Gavrioliak V.* Composite panels design based on post-buckling state with combined loading // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2021. — Vol. 1925, No. 1. — P. 1—9. Article number 012055. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1925/1/012055>

Поступила в редакцию 30.09.2021

Окончательный вариант поступил 10.01.2022

Received Sept. 30, 2021 (Jan. 10, 2022)
