

Н. Триведи^а, С. Дас^а, Е.-М. Крачиун^{б}*

^аDepartment of Mathematical Sciences, Indian Institute of Technology (BHU), Varanasi - 221005, India

^бFaculty of Mechanical, Industrial and Maritime Engineering, “Ovidius” University of Constanta, Bd. Mamaia 124, 900527, Constanta, Romania

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ КРАЕВОЙ ТРЕЩИНЫ В ДВУХ РАЗНЫХ МОДЕЛЯХ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ¹

*N. Trivedi, S. Das, and E.-M. Craciun**

THE MATHEMATICAL STUDY OF AN EDGE CRACK IN TWO DIFFERENT SPECIFIED MODELS UNDER TIME-HARMONIC WAVE DISTURBANCE

Keywords: edge crack, composites, stress intensity factor, orthotropic strip, time-harmonic wave

This article determines the stress intensity factor (SIF) at the tip of an edge crack in two models considered. Problem-1 is an orthotropic strip of finite thickness bonded by an orthotropic half-plane, and Problem-2 is an orthotropic vertical semi-infinite strip of the same depth. Edge cracks have been invaded perpendicularly by time-harmonic elastic waves. The considered models have been taken to the transformed plane by using the Fourier transform technique, where the Schmidt method is used to find the unknown coefficients. The Analytical expression of the SIF is derived for both the problems. The variations of normalized SIF for the different crack lengths and depth of the strips for the problems considered have been calculated numerically, and their behaviour has been depicted graphically for different particular cases.

Ключевые слова: трещина краевая, композиты, коэффициент интенсивности напряжений, полоса ортотропная, волна гармоническая

*Автор, с которым следует вести переписку: emcraciun@yahoo.com
Corresponding author: emcraciun@yahoo.com

¹Перевод с англ.

Коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в вершине краевой трещины определен в двух рассмотренных моделях. Задача 1 — ортотропная полоса конечной толщины, соединенная с ортотропной полуплоскостью; задача 2 — ортотропная вертикальная полубесконечная полоса такой же толщины. Краевые трещины прорастали перпендикулярно гармоническим упругим волнам. Рассмотренные модели перенесены в преобразованную плоскость с помощью преобразования Фурье, а для нахождения неизвестных коэффициентов использовали метод Шмидта. Для обеих задач получено аналитическое выражение для КИН. Изменения нормализованного КИН для трещин разной длины и полосы разной толщины в указанных задачах вычислили численно и их поведение отображали графически для разных частных случаев.

Введение

Композитные материалы имеют огромное значение в строительстве механических конструкций. Эти легкие и устойчивые материалы изготавливают из двух или более материалов с одинаковыми или разными физическими свойствами, обуславливающими их гибкость, долговечность, способность выдерживать большие нагрузки, рентабельность производства. Композиты широко используют в конструкциях автомобилей, самолетов, сверхскоростных поездов, мостов и многих других механических конструкций. Разрушение композитов — серьезная проблема для исследователей. Существует множество причин разрушения композитного материала, но в настоящей работе рассмотрено разрушение, обусловленное внутренними и внешними трещинами, в частности краевыми трещинами. Проблема краевых трещин в композитной среде очень сложна, и ее активно изучают многие исследователи во всем мире. Большая часть аэрокосмической промышленности рассматривает волокнисто-армированные композиты как альтернативные материалы для конструкций самолетов в силу их легкости, гибкости и способности выдерживать большие нагрузки. Спектр применения композитов очень широкий — от бытовой техники до космических кораблей.

Краевые трещины — особо опасный тип трещин, поскольку более уязвимы, чем внутренние трещины. Решение проблемы краевых трещин может быть сложной задачей, поскольку они чаще встречаются в повседневной практике, их тенденция к распространению больше, возможность торможения меньше. Инженеры и исследователи имеют дело с краевыми трещинами в течение нескольких последних десятилетий, и тем не менее решение проблемы этих трещин по-прежнему актуально. Очень важную роль в борьбе с краевыми трещинами играет КИН. Из обзора литературы следует, что многие исследователи внесли свой вклад в решение проблем краевых трещин в композитных и ортотропных средах. КИН для краевой

трещины, расположенной в упругой полуплоскости, изучали в [1], а в упругодинамической среде — в [2]. В [3] исследовали некоторые проблемы краевых трещин в бесконечной полосе. В [4] провели анализ напряжений полубесконечной пластины с наклонной краевой трещиной. Краевую трещину в неоднородной полуплоскости при термическом нагружении изучали в [5]. Влияние нестационарного термического и динамического нагружения на краевую трещину в функционально-градиентном материале проанализировали в [6] и [7] соответственно. В [8—11] определили значения КИН для краевой трещины в ортотропных материалах. В [12] получили эффект рассеяния краевой направленной волны при наличии краевой трещины. В [13] представили результаты исследования трещины на поверхности раздела между разнородными ортотропными материалами.

Уже проведены и все еще продолжаются многочисленные исследования композитных материалов [14—16], а также их преимуществ для улучшения жизни человека и экономии человеческих ресурсов. В [17] представлена модель снижения жесткости многослойного эпоксидного углепластика, предназначенного для аэрокосмической промышленности. В [18] исследовали поведение эпоксидных композитов при растяжении с высокой скоростью деформирования. В [19] изучали способы улучшения абляционных и межфазных свойств сцепления композитов на основе этиленпропилендиеновых мономеров. В [20] исследовали волокнисто-армированные слоистые композиты для аэрокосмической техники с целью уменьшения массы конструкции. В [21] изучали влияние скорости нагружения на разрушение волокнисто-армированных углепластиков, а в [22] — их применение для упрочнения бетонной конструкции. В [23] рассмотрена возможность применения метода весовых функций для ортотропного образца с надрезом на одной кромке. В [24] разработали теоретическую модель для системы краевой и внутренних трещин. В [25] исследовали влияние гармонического по времени возмущения на поведение трех коллинеарных трещин. Волновое возмущение также изучали в [26] для множественных трещин в сэндвич-среде. В [27—29] исследовали влияние термического удара и термических напряжений на распространение трещин. В [30, 31] изучали полимерные композиты и деформирование армированных композитов соответственно.

Когда композитная конструкция работает в реальной окружающей среде, ее поверхности открыты для всех типов волн и давления, присутствующих в среде и воздействующих на нее. Волновые возмущения — основной вид возмущения, обусловленного окружающей средой. Гармонические волновые возмущения в силу гармонических волн, налетающих на поверхность, создают давление на поверхность трещины, влияющее на скорость ее распространения и поле напряжений вокруг трещины.

В настоящем исследовании предложены две математические модели краевой трещины. Краевая трещина в вертикальной полубесконечной ортотропной полосе конечной толщины h , соединенной с ортотропной полуплоскостью, рассмотрена в задаче 1, а в задаче 2 — краевая трещина

в такой же вертикальной полубесконечной ортотропной полосе, но без учета полуплоскости. Задачи решали методом преобразования Фурье для получения пары интегральных уравнений, а неизвестные определяли методом Шмидта [32]. Получено приближенное аналитическое выражение коэффициента интенсивности напряжений (КИН) при гармоническом волновом возмущении в вершине краевой трещины. Для обеих задач дано графическое представление КИН при изменении волновых чисел и длины трещины по отношению к разной толщине полосы. Сравнение КИН краевой трещины в обеих задачах — важная особенность настоящей работы.

1. Математическая формулировка

Рассмотрим краевую трещину конечной длины ($0 < x < a$) в двух разных задачах. В задаче 1 краевая трещина расположена в вертикальной ортотропной полосе конечной толщины h , соединенной с ортотропной полуплоскостью (рис. 1—а). В задаче 2 рассмотрим краевую трещину в ортотропной полосе такой же толщины, но без ортотропной полуплоскости (рис. 1—б). Уравнения перемещений для обеих задач имеют вид

$$C_{11}^{(j)} \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial y^2} + \left(1 + C_{12}^{(j)}\right) \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial x \partial y} + \frac{\omega^2}{C_T^{(j)2}} u^{(j)} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial x^2} + C_{22}^{(j)} \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial y^2} + \left(1 + C_{12}^{(j)}\right) \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial x \partial y} + \frac{\omega^2}{C_T^{(j)2}} v^{(j)} = 0, \quad (2)$$

где $C_{ik}^{(j)}$ — упругие постоянные; $C_T^{(j)} = \left(C_{66}^{(j)} / \rho\right)^{1/2}$; верхние индексы

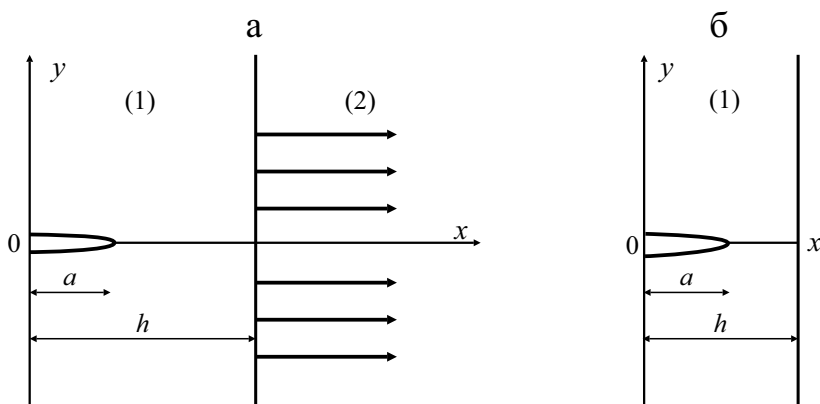


Рис. 1. Геометрия трещины в задачах 1 (а) и 2 (б).

$j = 1, 2$ относятся к среде 1 и 2 соответственно. Соответствующие напряжения имеют вид

$$\sigma_{xx}^{(j)} = C_{66}^{(j)} \left(C_{11}^{(j)} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + C_{12}^{(j)} \frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} \right), \quad (3)$$

$$\sigma_{yy}^{(j)} = C_{66}^{(j)} \left(C_{12}^{(j)} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + C_{22}^{(j)} \frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} \right), \quad (4)$$

$$\sigma_{xy}^{(j)} = C_{66}^{(j)} \left(\frac{\partial u^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial x} \right). \quad (5)$$

Рассмотрим падающие упругие волны, движущиеся в отрицательном направлении оси y . Соответствующие перемещения определим как

$$u^{(j)} = 0, \quad v^{(j)} = \varepsilon_v \exp \left[i\omega y / C_T^{(j)} \sqrt{C_{22}^{(j)}} \right],$$

где ε_v — амплитуда; ω — круговая частота; $C_{66}^{(j)}$ — модуль упругости; ρ — плотность материала.

Общие граничные условия для обеих задач следующие:

— на границе $y = 0$

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x, 0) = -p, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (6)$$

$$\sigma_{xy}^{(1)}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq h, \quad (7)$$

$$v^{(1)}(x, 0) = 0, \quad a < x < h; \quad (8)$$

— на границе $x = 0$

$$\sigma_{xx}^{(1)}(0, y) = 0, \quad |y| < \infty, \quad (9)$$

$$\sigma_{xy}^{(1)}(0, y) = 0, \quad |y| < \infty. \quad (10)$$

Условия непрерывности на поверхности раздела $x = h$ для задачи 1 следующие:

$$u^{(1)}(h, y) = u^{(2)}(h, y), \quad |y| < \infty, \quad (11)$$

$$v^{(1)}(h, y) = v^{(2)}(h, y), \quad |y| < \infty, \quad (12)$$

$$\sigma_{yy}^{(1)}(h, y) = \sigma_{yy}^{(2)}(h, y), |y| < \infty, \quad (13)$$

$$\sigma_{xy}^{(1)}(h, y) = \sigma_{xy}^{(2)}(h, y), |y| < \infty. \quad (14)$$

Граничные условия на поверхности раздела $x = h$ для задачи 2 следующие:

$$\sigma_{xx}^{(1)}(h, y) = 0, |y| < \infty, \quad (15)$$

$$\sigma_{xy}^{(1)}(h, y) = 0, |y| < \infty. \quad (16)$$

Компоненты напряжений стремятся к нулю при удалении от трещины.

2. Решение задачи

Преобразование Фурье имеет вид

$$\bar{g}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(-i\zeta x) dx, \quad g(x) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\zeta) \exp(i\zeta x) d\zeta. \quad (17)$$

Применив указанное преобразование к уравнению (1), получим

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} + q_j \frac{\partial^2}{\partial y^2} + r_j \right) (\underline{u}_i, \underline{v}_i) = 0, \quad (18)$$

где

$$q_j = \zeta^2 \left(2C_{12}^{(j)} - C_{11}^{(j)} C_{12}^{(j)} + C_{12}^{(j)2} \right) / C_{22}^{(j)} + \left(1 + C_{22}^{(j)} \right) \frac{\omega^2}{C_{22}^{(j)} C_T^{(j)2}},$$

$$r_j = \left(\zeta^2 C_{11}^{(j)} - \frac{\omega^2}{C_T^{(j)2}} \right) \left(\zeta^2 - \frac{\omega^2}{C_T^{(j)2}} \right) / C_{22}^{(j)}. \quad (19)$$

Решение можно предположить в виде

$$\begin{aligned} \underline{u}^{(1)}(\xi, y) = & A^{(1)}(\xi) \exp\left(\gamma_1^{(1)} y\right) + \\ & + B^{(1)}(\xi) \exp\left(-\gamma_1^{(1)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(1)} \xi\right) + C^{(1)}(\xi) \exp\left(\gamma_2^{(1)} y\right) + \\ & + D^{(1)}(\xi) \exp\left(-\gamma_2^{(1)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(1)} \xi\right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\underline{v}^{(1)}(\xi, y) = \alpha_1^{(1)} A^{(1)}(\xi) \exp\left(\gamma_1^{(1)} y\right) - \alpha_1^{(1)} B^{(1)}(\xi) \exp\left(-\gamma_1^{(1)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(1)} \xi\right) +$$

$$+\alpha_2^{(1)}C^{(1)}(\xi)\exp\left(\gamma_2^{(1)}y\right)-\alpha_2^{(1)}D^{(1)}(\xi)\exp\left(-\gamma_2^{(1)}y\right)\operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(1)}\xi\right), \quad (21)$$

$$\underline{u}^{(2)}(\xi, y) = A^{(2)}(\xi)\exp\left(-\gamma_1^{(2)}\xi\right)\operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(2)}y\right) + B^{(2)}(\xi)\exp\left(-\gamma_2^{(2)}\xi\right)\operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(2)}y\right), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \underline{v}^{(2)}(\xi, y) = & -\alpha_1^{(2)}A^{(2)}(\xi)\exp\left(-\gamma_1^{(2)}\xi\right)\operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(2)}y\right) - \\ & -\alpha_1^{(2)}B^{(2)}(\xi)\exp\left(-\gamma_2^{(2)}\xi\right)\operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(2)}y\right), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\gamma_k^{(j)}$ — корни уравнения (18);

$$\alpha_k^{(j)} = \left(\frac{\gamma_k^{(j)} - \zeta^2 C_{11}^{(j)} / \gamma_k^{(j)} + \omega^2 / \left(C_T^{(j)2} \gamma_k^{(j)} \right)}{i\zeta \left(1 + C_{12}^{(j)} \right)} \right), \quad k=1,2; j=1,2.$$

Выражения для напряжений запишем как

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{xy}^{(1)}(\xi, y) \setminus C_{66}^{(1)} = & i\zeta C_{12}^{(1)} \left(\left(A^{(1)} \exp\left(\gamma_1^{(1)}y\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + B^{(1)} \exp\left(-\gamma_1^{(1)}y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(1)}\xi\right) + C^{(1)} \exp\left(\gamma_2^{(1)}y\right) \right) + \right. \\ & \left. + D^{(1)} \exp\left(-\gamma_2^{(1)}y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(1)}\xi\right) \right) + C_{22}^{(1)} \left(\alpha_1^{(1)} \gamma_1^{(1)} \left(A^{(1)} \exp\left(\gamma_1^{(1)}y\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + B^{(1)} \exp\left(-\gamma_1^{(1)}y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(1)}\xi\right) \right) + \alpha_2^{(1)} \gamma_2^{(1)} \left(C^{(1)} \exp\left(\gamma_2^{(1)}y\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + D^{(1)} \exp\left(-\gamma_2^{(1)}y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(1)}\xi\right) \right) \right), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{xy}^{(1)}(\xi, y) \setminus C_{66}^{(1)} = & \gamma_1^{(1)} \left(A^{(1)} \exp\left(\gamma_1^{(1)}y\right) - \right. \\ & \left. - B^{(1)} \exp\left(-\gamma_1^{(1)}y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(1)}\xi\right) \right) + \gamma_2^{(1)} \left(C^{(1)} \exp\left(\gamma_2^{(1)}y\right) - \right. \\ & \left. - D^{(1)} \exp\left(-\gamma_2^{(1)}y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(1)}\xi\right) \right) + i\zeta \left(\alpha_1^{(1)} A^{(1)} \exp\left(\gamma_1^{(1)}y\right) - \right. \\ & \left. - \alpha_1^{(1)} B^{(1)} \exp\left(-\gamma_1^{(1)}y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(1)}\xi\right) + \alpha_2^{(1)} C^{(1)} \exp\left(\gamma_2^{(1)}y\right) - \right. \end{aligned}$$

$$-\alpha_2^{(1)} D^{(1)} \exp\left(-\gamma_2^{(1)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(1)} \xi\right), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{yy}^{(2)}(\xi, y) \setminus C_{66}^{(2)} = & i\xi C_{12}^{(2)} \left(A^{(2)} \exp\left(-\gamma_1^{(2)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(2)} \xi\right) + \right. \\ & \left. + B^{(2)} \exp\left(-\gamma_2^{(2)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(2)} \xi\right) \right) + \\ & + C_{22}^{(2)} \left(\alpha_1^{(2)} \gamma_1^{(2)} A^{(2)} \exp\left(-\gamma_1^{(2)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(2)} \xi\right) + \right. \\ & \left. + \alpha_2^{(2)} \gamma_2^{(2)} B^{(2)} \exp\left(-\gamma_2^{(2)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(2)} \xi\right) \right), \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{xy}^{(2)}(\xi, y) \setminus C_{66}^{(2)} = & -\gamma_1^{(2)} A^{(2)} \exp\left(-\gamma_1^{(2)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(2)} \xi\right) - \\ & -\gamma_2^{(2)} B^{(2)} \exp\left(-\gamma_2^{(2)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(2)} \xi\right) + \\ & + i\xi \left(-\alpha_1^{(2)} A^{(2)} \exp\left(-\gamma_1^{(2)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(2)} \xi\right) - \right. \\ & \left. -\alpha_2^{(2)} B^{(2)} \exp\left(-\gamma_2^{(2)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(2)} \xi\right) \right). \quad (27) \end{aligned}$$

Для задачи 1, используя граничные условия (7), (9), (10) и условия непрерывности (11)—(14), получим

$$B^{(1)} = \nabla_1 A^{(1)},$$

$$C^{(1)} = (\nabla_3 + \nabla_2 \nabla_1) A^{(1)},$$

$$D^{(1)} = \nabla_4 A^{(1)}, \quad (28)$$

$$A^{(2)} = \nabla_5 A^{(1)},$$

$$B^{(2)} = \nabla_6 A^{(1)},$$

$$\nabla_1 = \frac{\left(\gamma_1^{(1)} + i\xi\alpha_1^{(1)}\right) + \left(\gamma_2^{(1)} + i\xi\alpha_2^{(1)}\right) \nabla_3 \left[1 - \beta_6 \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(2)} h\right)\right]}{\left\{\left(\gamma_1^{(1)} + i\xi\alpha_1^{(1)}\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(1)} h\right) + \left(\gamma_2^{(1)} + i\xi\alpha_2^{(1)}\right) \nabla_2 \left[1 - \left(\beta_5 + \beta_6 \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(1)} h\right)\right)\right]\right\} \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(1)} h\right)},$$

$$\nabla_2 = \frac{-(1 + \beta_5 - \beta_4\beta_5)}{(1 + \beta_6 - \beta_3 - \beta_4\beta_6)}, \quad \nabla_3 = \frac{-1}{(1 + \beta_6 - \beta_3 - \beta_4\beta_6)},$$

$$\nabla_4 = \frac{\beta_5\nabla_1 + \beta_6(\nabla_3 + \nabla_2\nabla_1)}{\operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h)}, \quad \nabla_5 = (\beta_3\nabla_1 + \beta_3\nabla_2\nabla_1 + \beta_4\nabla_4)\exp(\gamma_1^{(2)}h),$$

$$\beta_1 = -2\phi_6 + \frac{2\phi_5\alpha_1^{(2)}}{\alpha_1^{(1)}},$$

$$\beta_2 = \phi_7 + \phi_5 - \frac{\phi_3\left(\alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(1)}\right) - (\phi_1 - \phi_3)\left(\phi_6 - \phi_5 - \left(\phi_5 / \alpha_1^{(1)}\right)\left(\alpha_2^{(1)} - \alpha_1^{(1)}\right)\right)}{\alpha_1^{(1)}(\phi_2 - \phi_1)},$$

$$\beta_3 = \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{(\phi_3 - \phi_1 + (\phi_4 / \phi_8)\beta_2)}, \quad \beta_4 = \frac{(\phi_2 - \phi_1 + (\phi_4 / \phi_8)\beta_1)}{(\phi_3 - \phi_1 + (\phi_4 / \phi_8)\beta_2)},$$

$$\beta_5 = \frac{-2\alpha_1^{(1)}}{\left(\alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(1)}\right) - \left(\alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(1)}\right)\beta_4},$$

$$\beta_6 = \frac{\left(\alpha_2^{(1)} - \alpha_1^{(1)}\right) + \left(\alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(1)}\right)\beta_3}{\left(\alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(1)}\right) - \left(\alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(1)}\right)\beta_4},$$

$$\phi_1 = C_{66}^{(1)}\left(i\xi C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}\alpha_1^{(1)}\gamma_1^{(1)}\right), \quad \phi_2 = C_{66}^{(1)}\left(i\xi C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}\alpha_2^{(1)}\gamma_2^{(1)}\right),$$

$$\phi_3 = C_{66}^{(2)}\left(i\xi C_{12}^{(2)} + C_{22}^{(2)}\alpha_1^{(2)}\gamma_1^{(2)}\right), \quad \phi_4 = C_{66}^{(2)}\left(i\xi C_{12}^{(2)} + C_{22}^{(2)}\alpha_2^{(2)}\gamma_2^{(2)}\right),$$

$$\phi_5 = C_{66}^{(1)}\left(i\xi\alpha_1^{(1)} + \gamma_1^{(1)}\right), \quad \phi_6 = C_{66}^{(1)}\left(i\xi\alpha_2^{(1)} + \gamma_2^{(1)}\right),$$

$$\phi_7 = C_{66}^{(2)}\left(-i\xi\alpha_1^{(2)} - \gamma_1^{(2)}\right), \quad \phi_8 = C_{66}^{(2)}\left(-i\xi\alpha_2^{(2)} - \gamma_2^{(2)}\right),$$

Для задачи 2, используя граничные условия (7), (15), (16), получим

$$\begin{aligned} B^{(1)} &= (f_1 + f_2 f_4) A^{(1)}, \\ C^{(1)} &= f_4 A^{(1)}, \\ D^{(1)} &= f_3 A^{(1)}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$A^{(2)} = 0,$$

$$B^{(2)} = 0,$$

$$f_1 = \frac{\operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h) - 1}{\operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h) - \operatorname{ch}(\gamma_1^{(1)}h)}, \quad f_2 = \frac{(\gamma_2^{(1)} + i\xi\alpha_2^{(1)})[\operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h) - 1]}{\operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h) - \operatorname{ch}(\gamma_1^{(1)}h)},$$

$$f_3 = \frac{-(\gamma_1^{(1)} + i\xi\alpha_1^{(1)})[\operatorname{ch}(\gamma_1^{(1)}h) - 1]}{(\gamma_2^{(1)} + i\xi\alpha_2^{(1)})[\operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h) - 1]}, \quad (29)$$

$$f_4 = \frac{(\gamma_1^{(1)} + i\xi\alpha_1^{(1)})[\operatorname{ch}(\gamma_1^{(1)}h) - 1] + (\gamma_2^{(1)} + i\xi\alpha_2^{(1)})f_1f_3\operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h)}{f_2(\gamma_1^{(1)} + i\xi\alpha_1^{(1)})\operatorname{ch}(\gamma_1^{(1)}h) + (\gamma_2^{(1)} + i\xi\alpha_2^{(1)})[1 - f_2f_3\operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h)]}.$$

Граничные условия (6) и (8) с помощью выражений (28) и (29) приводят к соотношениям

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \bar{v}^{(1)}(\xi, 0) R(\xi) \cos(\xi x) d\xi = -\frac{p}{C_{66}^{(1)}}, \quad 0 \leq x < a, \quad (30)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \bar{v}^{(1)}(\xi, 0) \cos(\xi x) d\xi = 0, \quad a < x, \quad (31)$$

где для задачи 1

$$R(\xi) = \left[\left(i\xi C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)} \alpha_1^{(1)} \gamma_1^{(1)} \right) \left(1 + \nabla_1 \operatorname{ch}(\gamma_1^{(1)}h) \right) + \left(i\xi C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)} \alpha_2^{(1)} \gamma_2^{(1)} \right) \left(\nabla_3 + \nabla_2 \nabla_1 + \nabla_4 \operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h) \right) \right] /$$

$$\left\{ \alpha_1^{(1)} \left[1 - \nabla_1 \operatorname{ch}(\gamma_1^{(1)}h) \right] + \alpha_2^{(1)} \left[\nabla_3 + \nabla_2 \nabla_1 - \nabla_4 \operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h) \right] \right\}, \quad h > 0, \quad (32)$$

для задачи 2

$$R(\xi) = \left\{ \left(i\xi C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)} \alpha_1^{(1)} \gamma_1^{(1)} \right) \left[1 + (f_1 + f_2 f_4) \operatorname{ch}(\gamma_1^{(1)}h) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(i\xi C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)} \alpha_2^{(1)} \gamma_2^{(1)} \right) \left[f_4 + (f_1 f_3 + f_1 f_2 f_4) \operatorname{ch} \left(\gamma_2^{(1)} h \right) \right] \Bigg\} / \\
 & / \left\{ \alpha_1^{(1)} \left[1 - (f_1 + f_2 f_4) \operatorname{ch} \left(\gamma_1^{(1)} h \right) \right] + \alpha_2^{(1)} \left[f_4 - (f_1 f_3 + f_1 f_2 f_4) \operatorname{ch} \left(\gamma_2^{(1)} h \right) \right] \right\}, \\
 & h > 0. \tag{33}
 \end{aligned}$$

Представив $v^{(1)}(x, 0)$ в виде ряда

$$\begin{aligned}
 \pi C_{66}^{(1)} v^{(1)}(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} \cos \left\{ (2n-1) \sin^{-1} (x/a) \right\}, \quad 0 < x < a, \tag{34} \\
 &= 0, \text{ где-либо еще,}
 \end{aligned}$$

удовлетворим условие (31). Преобразование Фурье уравнения (34) приводит к соотношению

$$C_{66}^{(1)} v^{(1)}(\xi, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} \frac{(2n-1)}{2\xi} J_{2n-1}(\xi a), \tag{35}$$

где $c_n^{(1)}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению; $J_{2n-1}(\xi a)$ — функция Бесселя первого порядка.

Выражение для нормального напряжения получим в виде

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x, 0) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} (2n-1) \int_0^{\infty} \frac{R(\xi)}{\xi} J_{2n-1}(\xi a) \cos(\xi x) d\xi. \tag{36}$$

Для нахождения коэффициентов $c_n^{(1)}$ используем метод Шмидта [32], с помощью которого выражение (30) с учетом выражения (36) можно свести к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} Q_n^{(1)}(x) = -p, \quad 0 \leq x < a, \tag{37}$$

где

$$Q_n^{(1)}(x) = \frac{(2n-1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R(\xi)}{\xi} J_{2n-1}(\xi a) \cos(\xi x) d\xi. \tag{38}$$

Построим систему ортогональных функций $W_n(x)$ из системы функций $Q_n^{(1)}(x)$, удовлетворяющих условию ортогональности:

$$\int_0^a W_n(x) W_m(x) dx = N_n \delta_{nm}, \quad W_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_{in}}{S_{nn}} Q_i^{(1)}(x). \tag{39}$$

Здесь $N_n = \int_0^a [W_n(x)]^2 dx$; $W_1(x) = Q_1^{(1)}(x)$; S_{in} — кофакторы элементов s_{in} матрицы S_n :

$$S_n = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}, \quad s_{in} = \int_0^a Q_i^{(1)}(x) Q_n^{(1)}(x) dx. \quad (40)$$

Уравнение (37) можно переписать в виде ортогонального набора функций $Q_n^{(1)}(x)$ как

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} Q_n^{(1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n W_n(x) = -p. \quad (41)$$

Теперь, с учетом последних двух равенств для получения значения q_n и используя это значение и первые два равенства, получим значения $c_n^{(1)}$:

$$c_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} d_j \frac{S_{nj}}{S_{ji}}, \quad (42)$$

где $d_j = \frac{-1}{N_j} \int_0^a p W_j(x) dx$. Для большого значения ξ величину R^L можно оценить как $\frac{R(\xi)}{\xi} \rightarrow R^L$, т.е.

$$R^L = \frac{R(\xi_l)}{\xi_l}, \quad (43)$$

где ξ_l считается очень большим значением ξ . Теперь для оценки интеграла в уравнении (36) используем выражение

$$\int_0^{\infty} J_n(xz) \cos(yz) dz = \frac{-x^n \sin \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{y^2 - x^2} \{y + \sqrt{y^2 - x^2}\}^n}, \quad y > x. \quad (44)$$

С помощью уравнений (38), (43) и (44) функцию $Q_n^{(1)}(x)$ можно записать как

$$Q_n^{(1)}(x) = \frac{(2n-1)}{\pi} \left[\int_0^{\infty} \left(R(\xi) / \xi - R^L \right) J_{2n-1}(\xi a) \cos(\xi x) d\xi + \right. \\ \left. + R^L [(-a)^{2n-1} \sin((2n-1)\pi/2) / \sqrt{(x^2 - a^2)} \{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}\}^{2n-1}]. \quad (45)$$

Коэффициент интенсивности динамических напряжений по моде I (K_{Ia}) для обеих задач в вершине $x = a$ краевой трещины определяем как

$$K_{Ia} = \{2\pi(x-a)\}^{\frac{1}{2}} \lim_{x \rightarrow a^+} \sigma_{yy}^{(1)}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} (2n-1) (-1)^n R^L / (\pi a)^{1/2}. \quad (46)$$

Значения упругих постоянных

| Эпоксидный композит | C_{11} | C_{22} | C_{12} | C_{66} | ρ , г/см ³ |
|---------------------------|----------|----------|----------|----------|----------------------------|
| | ГПа | | | | |
| Углепластик (среда (1)) | 155,36 | 16,31 | 3,67 | 7,40 | 1,60 |
| Стеклопластик (среда (2)) | 46,09 | 12,60 | 2,86 | 5,50 | 2,10 |

2. Результаты и обсуждение

Для численного анализа представленных математических моделей в задаче 1 использовали эпоксидный углепластик для вертикальной ортотропной полосы и эпоксидный стеклопластик для полуплоскости, а в задаче 2 — эпоксидный углепластик для ортотропной полосы. Значения упругих постоянных композитов приведены в таблице.

Безразмерный динамический КИН по моде I (K_{Ia}) для обеих задач в вершине $x = a$ краевой трещины численно вычислили с использованием выражения (46). Изменения безразмерного КИН представлены графически для вертикальной полосы толщиной $h = 2, 4, 6$ при разных значениях длины трещины и волнового числа $a\omega / C_T^{(1)}$. Расчеты показали, что чем меньше толщина полосы h , тем больше значение КИН.

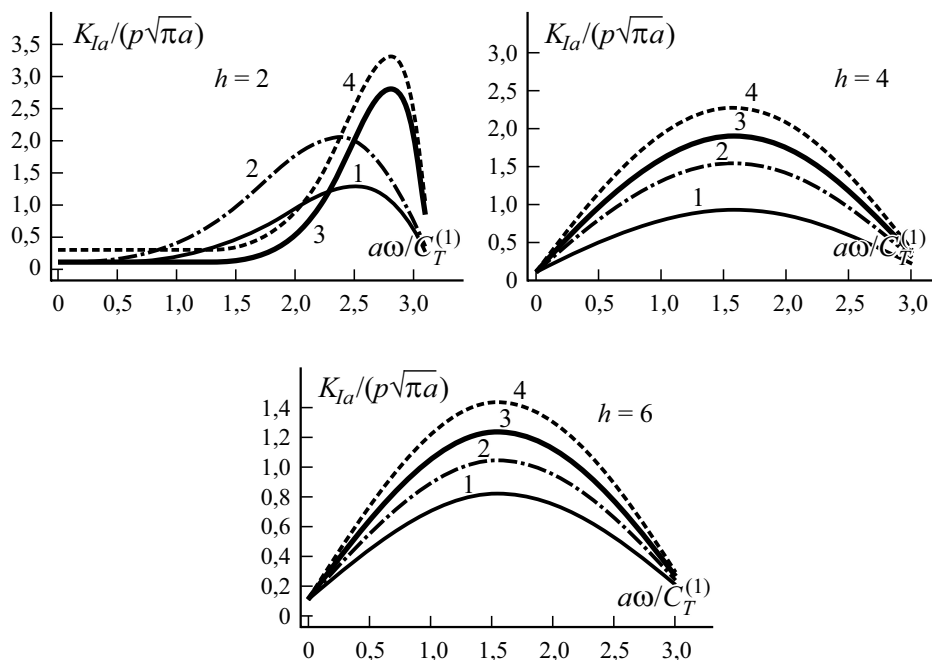


Рис. 2. Зависимость нормированного КИН $K_{Ia} / (p\sqrt{\pi a})$ от волнового числа $a\omega / C_T^{(1)}$ при $a/h = 0,4$ (1); $0,5$ (2); $0,6$ (3); $0,7$ (4) и разных значениях h для задачи 1.

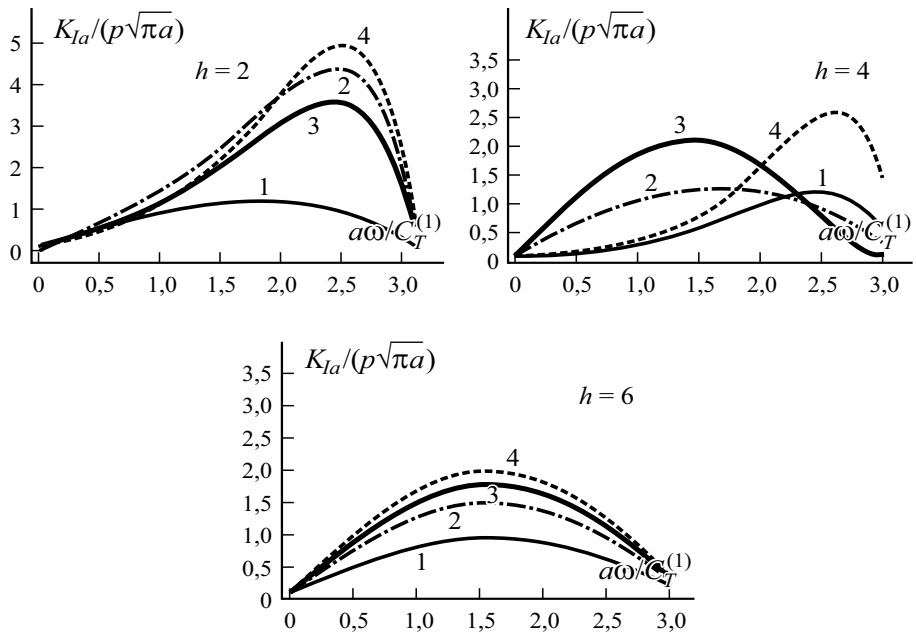


Рис. 3. Зависимость нормированного КИН $K_{Ia}/(p\sqrt{\pi a})$ от волнового числа $a\omega/C_T^{(1)}$ при $a/h = 0,4$ (1); $0,5$ (2); $0,6$ (3); $0,7$ (4) и разных значениях h для задачи 2.

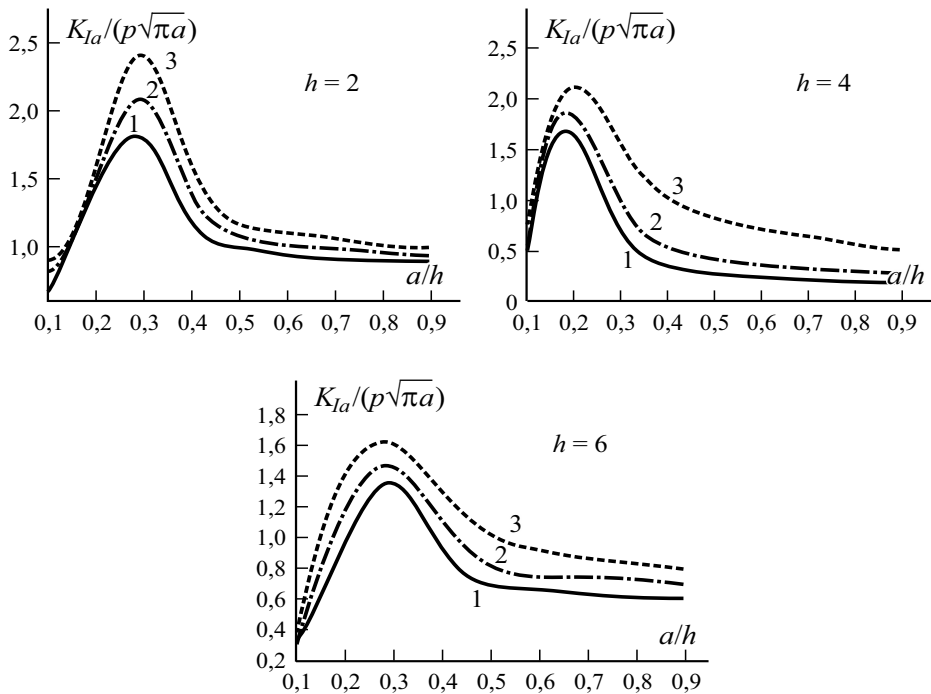


Рис. 4. Зависимость нормированного КИН $K_{Ia}/(p\sqrt{\pi a})$ от отношения a/h при $a\omega/C_T^{(1)} = 0,5$ (1); $1,5$ (2); $2,5$ (3) и разных значениях h для задачи 1.

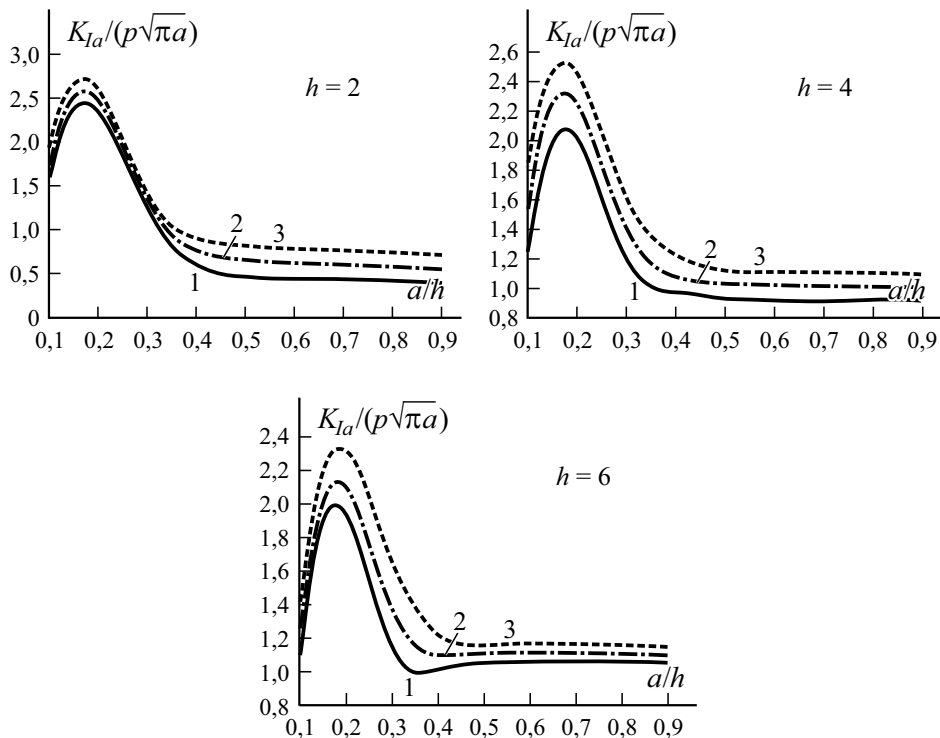


Рис. 5. То же для задачи 2.

Зависимости нормированных значений КИН $K_{Ia}/(p\sqrt{\pi a})$ от волнового числа $a\omega/C_T^{(1)}$ при разном отношении a/h и разной толщине ортотропной полосы h , рассчитанные по моделям задач 1 и 2, приведены на рис. 2 и 3 соответственно. Видно, что значения КИН возрастали с увеличением отношения a/h и волнового числа при расчете по обоим моделям. Зависимости нормированных значений КИН $K_{Ia}/(p\sqrt{\pi a})$ от отношения a/h при разных значениях волнового числа $a\omega/C_T^{(1)}$ и разной толщине ортотропной полосы h , рассчитанные по моделям задач 1 и 2, приведены на рис. 4 и 5 соответственно. Видно, что чем больше значение $a\omega/C_T^{(1)}$, тем больше значение КИН. Обе модели демонстрируют одинаковый характер изменения нормированных значений КИН. При этом значения КИН, рассчитанные по модели задачи 2, больше рассчитанных по модели задачи 1.

Заклучение

В настоящем исследовании достигнуты две важные цели: 1) получение приближенного аналитического выражения КИН для краевой трещины для обеих рассмотренных задач при действии гармонической волны на поверхности трещины; 2) графическое представление нормированного КИН в вершине трещины $x = a$ для обеих задач при разных значениях волнового числа $a\omega / C_T^{(1)}$ и отношения a / h .

Дальнейшие исследования будут посвящены краевой трещине в композитном материале, ослабленном внутренними трещинами в материале, а также краевой трещине, расположенной на поверхности раздела двух или более композитных материалов.

Благодарность. Авторы выражают сердечную благодарность рецензентам за конструктивные предложения по улучшению рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sneddon I. N. and Das S. C.* The stress intensity factor at the tip of an edge crack in an elastic half-plane // *Int. J. Eng. Sci.* — 1971. — Vol. 9. — P. 25—36.
2. *Achenbach D., Keer L. M., and Mendelsohn D. A.* Elastodynamic analysis of an edge crack // *J. Appl. Mech.* — 1980. — Vol. 47. — P. 551—556.
3. *Gupta G. D. and Erdogan F.* The problem of edge cracks in an infinite strip // *J. Appl. Mech.* — 1974. — Vol. 41. — P. 1001—1006.
4. *Hasebe N. and Inohara S.* Stress analysis of a semi-infinite plate with an oblique edge crack // *Ingenieur-Archiv.* — 1980. — Vol. 49. — P. 51—62.
5. *Jin Z. H. and Noda N.* Edge crack in a nonhomogeneous half plane under thermal loading // *J. Therm. Stresses.* — 1994. — Vol. 17. — P. 591—599.
6. *Jin Z. H. and Paulino G. H.* Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material // *Int. J. Fract.* — 2001. — Vol. 107. — P. 73—98.
7. *Guo L., Wu L.-Z., and Zeng T.* The dynamic response of an edge cracks in a functionally graded orthotropic strip // *Mech. Res. Commun.* — 2005. — Vol. 32. — P. 385—400.
8. *Das S., Chakraborty S., Srikanth N., and Gupta M.* Symmetric edge cracks in an orthotropic strip under normal loading // *Int. J. Fract.* — 2008. — Vol. 153. — P. 77—84.
9. *Das S., Prasad R., and Mukhopadhyay S.* Stress intensity factor of an edge crack in composite media // *Int. J. Fract.* — 2011. — Vol. 172. — P. 201—207.
10. *Singh A., Das S., and Craciun E.-M.* Thermal stress intensity factor for an edge crack in orthotropic composite media // *Composites: Part B.* — 2018. — Vol. 153. — P. 130—136.
11. *Singh A., Das S., and Craciun E.-M.* Effect of thermomechanical loading on an edge crack of finite length in an infinite orthotropic strip // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 55. — P. 285—296.
12. *Chiu W. K., Rose L. R. F., and Vien B. S.* Scattering of the edge-guided wave by an edge crack at a circular hole in an isotropic plate // *Procedia Eng.* — 2017. — Vol. 188. — P. 309—316.

13. *Lee G. H. and Beom H. G.* Interfacial edge crack between dissimilar orthotropic thermoelastic materials under uniform heat flow // *J. Mech. Sci. Technol.* — 2014. — Vol. 28. — P. 3041—3050.
14. *L'vov G. I.* Using the Concept of Imposed Constraints in the Plasticity Theory of Composites // *Mech. Compos. Mater.* — 2021. — Vol. 57. — P. 337—348.
15. *Seyfullayev A. I., Rustamova M. A., and Kerimova S. A.* A problem of fatigue fracture mechanics of a two-layer material with edge cracks // *Mech. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 53. — P. 415—424.
16. *Solovyev D. N., Dadunashvili S. S., Mironov A., Doronkin P., and Mironovs D.* Mathematical modeling and experimental investigations of a main rotor made from layered composite materials // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 56. — P. 103—110.
17. *Whitworth H. A.* Modeling stiffness reduction of graphite/epoxy composite laminates // *J. Compos. Mater.* — 1987. — Vol. 21. — P. 362—372.
18. *Naik N. K., Yernamma P., Thoram N. M., Gadipatri R., and Kavala V. R.* High strain rate tensile behavior of woven fabric e-glass/epoxy composite // *Polym. Test.* — 2010. — Vol. 29. — P. 14—22.
19. *Jia X., Zeng Z., Li G., Hui D., Yang X., and Wang S.* Enhancement of ablative and interfacial bonding properties of epdm composites by incorporating epoxy phenolic resin // *Composites: Part B.* — 2013. — Vol. 54. — P. 234—240.
20. *Linganiso L. Z. and Anandjiwala R. D.* Fibre-Reinforced Laminates in Aerospace Engineering // *Advanced Composite Materials for Aerospace Engineering*, Ch. 4. — Woodhead Publ., 2016. — P. 101—127.
21. *Miao C. and Tippur H. V.* Effect of Loading Rate on Fracture Behavior of Carbon Fiber Reinforced Polymer Composites // *Challenges in Mechanics of Time Dependent Materials, Fracture, Fatigue, Failure and Damage Evolution*. Ch. 4. — Springer, Cham, 2020. — P. 21—28.
22. *Yuhazri M. Y., Zulfikar A. J. and Ginting A.* Fiber reinforced polymer composite as a strengthening of concrete structures: A review // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* — 2020. — Vol. 1003. — P. 012135.
23. *Xu W., Zhang C., Wu X. R., and Yu Y.* Weight function method and its application for orthotropic single edge notched specimens // *Compos. Struct.* — 2020. — Vol. 252. — P. 112695.
24. *Petrova V. and Schmauder S.* A theoretical model for the study of thermal fracture of functionally graded thermal barrier coatings with a system of edge and internal cracks // *Theor. Appl. Fract. Mech.* — 2020. — Vol. 108. — P. 102605.
25. *Ito S.* Dynamic stress intensity factors of three collinear cracks in an orthotropic plate subjected to time-harmonic disturbance // *J. Mech.* — 2016. — Vol. 32. — P. 491—499.
26. *Trivedi N., Das S., and Altenbach H.* Study of collinear cracks in a composite medium subjected to time-harmonic wave disturbance // *Z. Angew. Math. Mech.* — 2021. — Vol. 101. — P. e202000307.
27. *Sadowski T. and Neubrand A.* Estimation of the crack length after thermal shock in FGM strip // *Int. J. Fract.* — 2004. — Vol. 127. — P. L135—L140.
28. *Ivanov I. V., Sadowski T., and Pietras D.* Crack propagation in functionally graded strip under thermal shock // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* — 2013. — Vol. 222. — P. 1587—1595.
29. *Burlayenko V. N., Altenbach H., Sadowski T., Dimitrova S. D., and Bhaskar A.* Modelling functionally graded materials in heat transfer and thermal stress analysis by means of graded finite elements // *Appl. Math. Model.* — 2017. — Vol. 45. — P. 422—438.
30. *Kondratiev A. V., Gaidachuk V. E., and Kharchenko M. E.* Relationships between the ultimate strengths of polymer composites in static bending, compression, and tension // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 55. — P. 259—266.

31. *L'vov G. I. and Kostromitskaya O. A.* Numerical modeling of plastic deformation of unidirectionally reinforced composites // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 56. — P. 1—14.

32. *Yau W. F.* Axisymmetric slipless indentation of an infinite, elastic cylinder // *SIAM J. Appl. Math.* — 1967. — Vol. 15. — P. 219—227.

Поступила в редакцию 09.08.2021

Окончательный вариант поступил 16.11.2021

Received Aug. 9, 2021 (Nov. 16, 2021)
