

Чун Кё Ли^а, Бён Ку Ли^{б*}

^а*Department of Civil Engineering, University of Seoul, Korea*

^б*Department of Civil and Environmental Engineering, Wonkwang University, Korea*

СВЯЗАННЫЕ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ АКСИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ КРУГЛОИЗОГНУТОЙ БАЛКИ¹

*Joon Kyu Lee and Byoung Koo Lee**

COUPLED FLEXURAL-TORSIONAL FREE VIBRATION OF AN AXIALLY FUNCTIONALLY GRADED CIRCULAR CURVED BEAM

Keywords: flexural-torsional vibration, circular curved beam, AFG material, natural frequency, mode shape

The coupled flexural-torsional free vibration of circular horizontally curved beams made of an axially functionally graded (AFG) material were investigated. Beams with rectangular and elliptical cross sections were designed to obey quadratic functions of Young's modulus and the mass density in the axial direction. Using the Timoshenko and St. Venant beam theories, the governing differential equations of motion were derived. Based on the trial eigenvalue method together with the numerical integration method, the differential equations were solved to obtain the natural frequencies. For validation purposes, the frequencies computed in this study and ADINA were compared. Parametric studies were also performed to clarify how the natural frequency of the flexural-torsion coupling depends on modular ratio, cross-sectional shape, aspect ratio, slenderness ratio, and opening angle of the beams.

Ключевые слова: колебания изгибно-крутильные, балка круглоизогнутая, материал аксиально-функционально-градиентный, частота собственная, форма моды

Исследовали связанные изгибно-крутильные колебания круглоизогнутых балок из аксиально-функционально-градиентного

*Автор, с которым следует вести переписку: bkleest@wku.ac.kr
Corresponding author: bkleest@wku.ac.kr

¹Перевод с англ.

материала. Балки прямоугольного и эллиптического поперечного сечения проектировали, используя квадратичные функции изменения модуля Юнга и плотности в осевом направлении. Посредством теории балок Тимошенко и Сен-Венана вывели определяющие дифференциальные уравнения движения. Собственные частоты балок определили с помощью метода пробных собственных значений в комбинации с методом численного интегрирования. Для проверки достоверности предложенного метода сравнили частоты, вычисленные в настоящей работе и с помощью программного обеспечения ADINA. Параметрические исследования выполнили для оценки влияния отношения модулей упругости, формы поперечного сечения, отношения размеров и угла раскрытия балок на собственную частоту связанных изгибно-крутильных колебаний.

Введение

Изогнутые балки, расположенные на горизонтальной плоскости, часто используют в качестве общепринятых конструктивных элементов в разных технических приложениях [1]. После того как в 1984 г. предложили функционально-градиентные материалы (ФГМ) для защиты от суровых тепловых условий, их применение активно расширили до передовых инженерных практик [2]. С точки зрения строительной инженерии понимание вибрационного поведения конструктивных элементов очень необходимо при проектировании, строительстве и обслуживании общественных сооружений [3].

В целом, ФГМ делят на две категории: поперечно- (ПФГМ) и аксиально-функционально-градиентные (АФГМ) материалы.

Многие исследования, цитируемые в открытой литературе, посвящены математическим формулировкам и историческим обзорам конструктивного поведения балок, колонн, арок и изогнутых балок, изготовленных из ФГМ. В [4] рассмотрена устойчивость однородных балок при статических и динамических нагрузках; в [5] вычислили собственные частоты балок из гибридных ФГМ; в [6] изучали критические нагрузки потери устойчивости консольных балок из ФГМ, используя энергетический принцип; в [7] рассчитали критическую нагрузку потери устойчивости методом линейных возмущений, дополненным методом Рэлея—Ритца; в [8], используя метод Рэлея—Ритца, проанализировали статическую и динамическую устойчивость колонн, имеющих форму моды Дункана; в [9] изучали свободные колебания и потерю устойчивости конических балок-колонн с полужесткими соединениями.

В [10] определили собственные частоты неоднородных балок из ФГМ с разными граничными условиями на концах, используя регуляризацию интегрального уравнения Фредгольма; в [11] изучали устойчивость

конических динамических колонн, решили дифференциальное уравнение колебаний и методом дифференциальных квадратур определили геометрию моды потери устойчивости; в [12] изучали поперечно-крутильную устойчивость двутавровой конической балки из АФГМ; в [13] использовали геометрически нелинейную модель балки, основанную на модифицированной теории моментных напряжений.

В [14, 15] проанализировали свободные колебания арки из ПФГМ, свойства которого зависели от температуры окружающей среды. Для исследования свободных и вынужденных плоских колебаний параболических арок из АФГМ в [16] разработали новый метод, основанный на технике дополнительных функций; в [17] исследовали свободные колебания параболических арок из АФГМ; в [18] изучали конические криволинейные балки Тимошенко из ФГМ; в [19] исследовали собственные частоты изогнутых балок, надлежащим образом оптимизировав распределение в них материала; в [20] использовали метод пробных собственных значений, дополненный методом численного интегрирования для расчета собственных частот круговых арок из АФГМ.

В [21, 22] проанализировали свободные колебания изогнутых балок из ФГМ, опирающихся на упругое основание и подверженных жестким термическим условиям. В [21] рассматривали балки из ПФГМ, свойства которых зависят от температуры окружающей среды. В [22] исследовали балки из ПФГМ, опирающиеся на упругое основание.

Во многих предыдущих исследованиях изучали типичные изогнутые балки [23, 24], свойства поперечного сечения которых, а не свойства материала, изменялись вдоль осевой координаты. Однако в настоящее время инженеров интересует практическое применение балок из АФГМ. Поэтому для соответствующих математических формулировок и численных методов решения необходимо разработать методы предсказания собственных частот балок из АФГМ, искривленных в горизонтальной плоскости.

Настоящая работа посвящена уникальному численному подходу к исследованию связанных изгибно-крутильных свободных колебаний круглоизогнутой в горизонтальной плоскости балки из АФГМ. С помощью уравнений динамического равновесия элемента изогнутой балки, а также теорий Тимошенко и Сен-Венана получены обыкновенные дифференциальные уравнения, определяющие формы мод колебаний таких балок. В параметрическом исследовании использовали квадратичную функцию свойств материала и рассмотрели прямоугольные и эллиптические поперечные сечения. Для расчета собственных частот и форм колебаний определяющие дифференциальные уравнения решили методом пробных собственных значений в комбинации с численным интегрированием. Сравнили собственные частоты, рассчитанные в настоящей работе и с помощью автоматического динамического инкрементального нелинейного анализа (программное обеспечение ADINA). В параметрических

исследованиях изучали влияние граничных условий на концах балки, формы поперечного сечения, вращательной и крутильной инерции, отношения модулей упругости, отношения плотностей, отношения размеров, коэффициента гибкости и угла раскрытия на собственные частоты; представили типичный пример форм мод колебаний.

1. Постановка задачи

На рис. 1—*а* показана конфигурация круглоизогнутой балки из АФГМ радиусом r с углом раскрытия α , расположенной на горизонтальной плоскости (x, y) . Ось изогнутой балки определена в полярных координатах (r, θ) с помощью базовой линии aO . Концы балки a при $\theta = 0$ и b при $\theta = \alpha$ либо шарнирно закреплены, либо защемлены. Поперечное сечение балки одинаково по всей длине дуги \overline{ab} , т.е. площадь A , момент инерции I , полярный момент I_p и постоянная кручения J постоянны от $\theta = 0$ до $\theta = \alpha$. Балка изготовлена из АФГМ, модуль Юнга E и плотность ρ которого изменяются в зависимости от координаты θ . Значения E и ρ на концах a и b обозначим как $E_a(E_b)$ и $\rho_a(\rho_b)$ соответственно, а в середине балки c при $\theta = \alpha/2$ — как E_c и ρ_c .

На рис. 1—*б* показана перерезывающая сила Q , изгибающий M и крутящий T моменты, поперечная сила инерции F_w , вращательный C_ψ и крутящий C_ϕ моменты силы инерции, действующие на элемент балки. Изгибно-крутильные колебания балки из плоскости подвержены гармоническому движению, координаты которого пропорциональны $\sin(\omega_i t)$, например, $w_{\theta,t} = w_\theta \sin(\omega_i t)$, где $w_\theta (= w)$ — амплитуда прогиба, ω_i — собственная частота, i — номер моды, t — время.

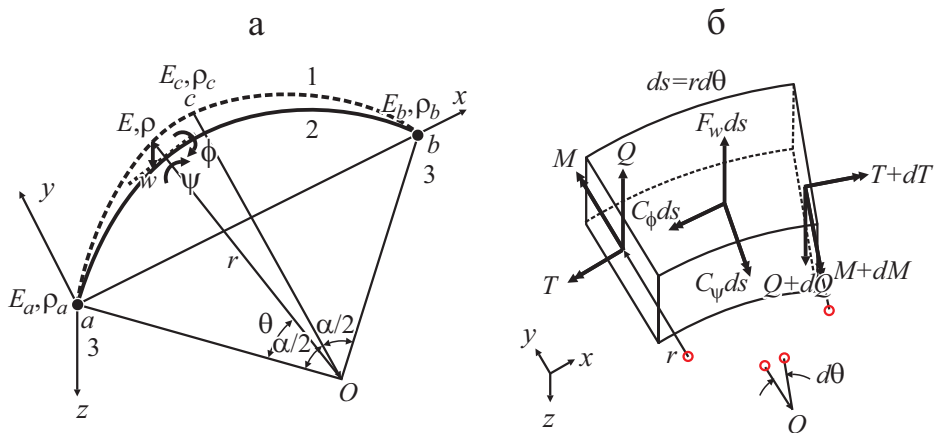


Рис. 1. Геометрия круглоизогнутой балки (а) и нагрузки на криволинейный элемент балки (б): 1, 2 — недеформированный и деформированный; 3 — шарнирно закрепленный/защемленный.

Уравнения динамического равновесия записаны исходя из диаграммы свободного тела, показанной на рис. 1—б:

$$\frac{dQ}{d\theta} - rF_w = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dM}{d\theta} - rQ + T + rC_\psi = 0, \quad (2)$$

$$M - \frac{dT}{d\theta} + rC_\phi = 0. \quad (3)$$

Полный угол поворота $dw/d\theta$ и внутренние силы Q , M , T криволинейной балки задают в теории Тимошенко как [25—27]

$$\frac{dw}{d\theta} = r(\psi + \beta), \quad (4)$$

$$Q = kGA\beta = kGA\left(\frac{1}{r} \frac{dw}{d\theta} - \psi\right), \quad (5)$$

$$M = \frac{EI}{r} \left(\phi - \frac{d\psi}{d\theta}\right), \quad (6)$$

$$T = \frac{GJ}{r} \left(\psi + \frac{d\phi}{d\theta}\right), \quad (7)$$

где β — коэффициент сдвигового перекашивания; k — коэффициент коррекции сдвига; G — модуль сдвига.

Силу инерции F_w , изгибающий C_ψ и крутильный C_ϕ моменты инерции зададим как [28]

$$F_w = -\rho A \omega_i^2 w, \quad (8)$$

$$C_\psi = -R_\psi \rho I \omega_i^2 \psi, \quad (9)$$

$$C_\phi = -R_\phi \rho I_p \omega_i^2 \phi. \quad (10)$$

В уравнениях (9) и (10) показатели моментов инерции R_ψ и R_ϕ определим следующим образом:

$$R_\psi = 1, \text{ если } C_\psi \text{ учитывается; } R_\psi = 0, \text{ если } C_\psi \text{ не учитывается,} \quad (11)$$

$$R_\phi = 1, \text{ если } C_\phi \text{ учитывается; } R_\phi = 0, \text{ если } C_\phi \text{ не учитывается,}$$

где, как видно из уравнения (10), рассматривается теория балки Сен-Венана, не учитывающая деформацию коробления. Рассчитываемые собственные частоты подразделяем на два типа — с изгибной и крутильной

модами в соответствии с показателями моментов инерции R_ψ и R_ϕ , определяемыми согласно (11).

Из уравнений (5)—(7) получим первые производные $dQ/d\theta$, $dM/d\theta$, $dT/d\theta$:

$$\frac{dQ}{d\theta} = kA \frac{dG}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{d\theta} - \psi \right) + kGA \left(\frac{1}{r} \frac{d^2w}{d\theta^2} - \frac{d\psi}{d\theta} \right), \quad (12)$$

$$\frac{dM}{d\theta} = \frac{I}{r} \frac{dE}{d\theta} \left(\phi - \frac{d\psi}{d\theta} \right) + \frac{EI}{r} \left(\frac{d\phi}{d\theta} - \frac{d^2\psi}{d\theta^2} \right), \quad (13)$$

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{J}{r} \frac{dG}{d\theta} \left(\psi + \frac{d\phi}{d\theta} \right) + \frac{GJ}{r} \left(\frac{d\psi}{d\theta} + \frac{d^2\phi}{d\theta^2} \right). \quad (14)$$

Модуль сдвига G выразим известным соотношением

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (15)$$

Подстановка внутренних сил (5)—(7), сил инерции (8)—(10) и первых производных (12)—(14) в уравнения (1)—(3) приводит к дифференциальным уравнениям шестого порядка

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} = -\frac{r}{E} \frac{dE}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{d\theta} - \psi \right) - \frac{2(1+\nu)}{k} r^2 \frac{\rho}{E} \omega_i^2 w + r \frac{d\psi}{d\theta}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{d\theta^2} = & -\frac{k}{2(1+\nu)} \frac{r^2}{(I/A)} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{d\theta} - \psi \right) - \frac{1}{E} \frac{dE}{d\theta} \left(\frac{d\psi}{d\theta} - \phi \right) - \\ & -R_\psi r^2 \frac{\rho}{E} \omega_i^2 \psi + \frac{1}{2(1+\nu)(I/J)} \left(\psi + \frac{d\phi}{d\theta} \right) + \frac{d\phi}{d\theta}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{d\theta^2} = & -\frac{d\psi}{d\theta} - \frac{2(1+\nu)I}{J} \left(\frac{d\psi}{d\theta} - \phi \right) - \frac{1}{E} \frac{dE}{d\theta} \left(\psi + \frac{d\phi}{d\theta} \right) - \\ & -R_\phi \frac{2(1+\nu)I_p}{J} r^2 \frac{\rho}{E} \omega_i^2 \phi. \end{aligned} \quad (18)$$

На шарнирно закрепленном конце при $\theta = 0$ или $\theta = \alpha$ прогиб w , изгибающий момент M и угол закручивания ϕ равны нулю:

$$w = 0, \quad \frac{d\psi}{d\theta} = 0, \quad \phi = 0. \quad (19)$$

На защемленном конце при $\theta = 0$ или $\theta = \alpha$ прогиб w , полный угол поворота $dw/d\theta$ и угол закручивания ϕ равны нулю:

$$w = 0, \quad \frac{dw}{d\theta} = 0, \quad \phi = 0. \quad (20)$$

2. Свойства материала аксиально-функционально-градиентной балки

В данном разделе функции E и ρ в уравнениях (16)—(20) определены применительно к круглоизогнутой балке из АФГМ. В открытой литературе используют разные виды функций: линейные [2, 6, 8, 13], экспоненциальные [5, 12, 16, 17], полиномиальные [7—12, 22] и периодические [8, 10]. В настоящей работе выбрана квадратичная функция E по переменной θ . Для этого сначала введем следующее отношение модулей упругости m_E :

$$m_E = \frac{E_a}{E_c}. \quad (21)$$

Затем квадратичную функцию E при (r, θ) определим как

$$E = \frac{4E_c}{\alpha^2} (m_E - 1) (\theta^2 - \alpha\theta + c_E), \quad c_E = \frac{m_E \alpha^2}{4(m_E - 1)}, \quad (22)$$

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{4E_c}{\alpha^2} (m_E - 1) (2\theta - \alpha). \quad (23)$$

Функцию ρ выберем пропорциональной функции E [2, 4—20]. Введя отношение плотностей m_ρ , предположим, что

$$\rho = \frac{4\rho_c}{\alpha^2} (m_\rho - 1) (\theta^2 - \alpha\theta + c_\rho), \quad c_\rho = \frac{m_\rho \alpha^2}{4(m_\rho - 1)}, \quad (24)$$

$$m_\rho = \frac{\rho_a}{\rho_c}. \quad (25)$$

Свойства A , I , I_p , J , k взяты из [29, 30] для балки прямоугольного поперечного сечения

$$A = BD, \quad I = \frac{BD^3}{12}, \quad I_p = \frac{(BD^3 + DB^3)}{12}, \quad J = \left[\frac{1}{3} - 0,21 \frac{D}{B} \left(1 - \frac{D^4}{12B^4} \right) \right] BD^3, \quad (26a)$$

$$k = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$$

и эллиптического поперечного сечения

$$A = \frac{\pi BD}{4}, \quad I = \frac{\pi BD^3}{64}, \quad I_p = \frac{\pi(BD^3 + B^3D)}{64}, \quad J = \frac{\pi B^3 D^3}{16(B^2 + D^2)}, \quad (266)$$

$$k = \frac{12(1+\nu)(B^2 + 3D^2)D^2}{\nu B^4 + (16+10\nu)B^2 D^2 + (40+37\nu)D^4},$$

где B и D — ширина и высота соответственно.

3. Обезразмеривание

Для вывода безразмерных дифференциальных уравнений и представления наиболее распространенных результатов параметрических исследований ввели безразмерные параметры

$$\delta = \frac{w}{r}, \quad (27)$$

$$a = \frac{D}{B} \leq 1, \quad (28)$$

$$s = \frac{r}{\sqrt{I/A}}, \quad (29)$$

$$\Omega_i = \omega_i r \sqrt{\rho_c / E_c} \quad (30)$$

для балки прямоугольного поперечного сечения

$$\lambda_I = \frac{I}{J} = \frac{1}{4 \left[1 - 0,63a \left(1 - a^4 / 12 \right) \right]}, \quad \lambda_{I_p} = \frac{I_p}{J} = \frac{1 + 1/a^2}{4 \left[1 - 0,63a \left(1 - a^4 / 12 \right) \right]} \quad (31a)$$

и эллиптического поперечного сечения

$$\lambda_I = \frac{I}{J} = \frac{1+a^2}{4}, \quad \lambda_{I_p} = \frac{I_p}{J} = \frac{(1+a^2)^2}{4a^2}, \quad (316)$$

где δ — безразмерный боковой прогиб; a — отношение размеров; s — коэффициент гибкости; Ω_i — частотный параметр; λ_I и λ_{I_p} — отношения жесткостей I и I_p к J соответственно.

Используя свойства материала и поперечного сечения (21)—(26), параметры балки (27)—(31), приводим к безразмерному виду дифференциальные уравнения (16)—(18), управляющие связанными изгибно-крутильными свободными колебаниями круглоизогнутой балки из АФГМ:

$$\frac{d^2\delta}{d\theta^2} = h_1 \left(\frac{d\delta}{d\theta} - \psi \right) + \frac{2(1+\nu)}{k} h_2 \Omega_i^2 \delta + \frac{d\psi}{d\theta}, \quad (32)$$

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} = -\frac{k s^2}{2(1+\nu)} \left(\frac{d\delta}{d\theta} - \psi \right) + h_1 \left(\frac{d\psi}{d\theta} - \phi \right) + R_\psi h_2 \Omega_i^2 \psi + \frac{1}{2(1+\nu) \lambda_I} \left(\psi + \frac{d\phi}{d\theta} \right) + \frac{d\phi}{d\theta}, \quad (33)$$

$$\frac{d^2\phi}{d\theta^2} = -\frac{d\psi}{d\theta} - 2(1+\nu) \lambda_I \left(\frac{d\psi}{d\theta} - \phi \right) + h_1 \left(\psi + \frac{d\phi}{d\theta} \right) + 2R_\phi (1+\nu) \lambda_{I_p} h_2 \Omega_i^2 \phi. \quad (34)$$

Здесь h_1 и h_2 — функции полярной координаты θ :

$$h_1 = -\frac{2\theta - \alpha}{\theta^2 - \alpha\theta + c_E}, \quad h_2 = -\frac{m_\rho - 1}{m_E - 1} \frac{\theta^2 - \alpha\theta + c_\rho}{\theta^2 - \alpha\theta + c_E}, \quad (35)$$

где коэффициент k , определяемый для прямоугольного поперечного сечения уравнением (26а), а для эллиптического сечения — уравнением (26б), запишем исходя из отношения размеров a как

$$k = \frac{12(1+\nu)(1+3a^2)a^2}{\nu + (16+10\nu)a^2 + (40+37\nu)a^4}. \quad (36)$$

Используя параметр балки (27), запишем размерные граничные условия (19) и (20) в безразмерном виде:

— для шарнирно закрепленного конца при $\theta = 0$ или $\theta = \alpha$

$$\delta = 0, \quad \frac{d\psi}{d\theta} = 0, \quad \phi = 0, \quad (37)$$

— для защемленного конца при $\theta = 0$ или $\theta = \alpha$

$$\delta = 0, \quad \frac{d\delta}{d\theta} = 0, \quad \phi = 0. \quad (38)$$

4. Результаты и обсуждение

На основе приведенных математических формулировок, разработали вычислительную программу на алгоритмическом языке FORTRAN для предсказания частотного параметра Ω_i и форм мод колебаний

$(\delta, \psi, \phi)_i$. Метод решения, описанный в [20, 24, 27], использовали для решения дифференциальных уравнений (32)—(34) при граничных условиях на концах, описываемых уравнениями (37) и (38). Рассмотрели следующие условия: шарнирно закрепленные (Ш—Ш), шарнирно закрепленный и защемленный (Ш—З) и защемленные концы (З—З). Входные параметры балки включали граничные условия на концах, форму поперечного сечения (прямоугольная или эллиптическая), параметры m_E , m_ρ , ν , a , s , α и показатели инерции R_ψ и R_ϕ .

Метод пробных собственных значений, усовершенствованный методом поиска определителя [31], применили для вычисления величины Ω_i в уравнениях (32)—(34), а затем для расчета $(\delta, \psi, \phi)_i$ применили численный метод Рунге—Кутты [31]. В методе Рунге—Кутта размер шага $\Delta\theta$ определили в соответствии с заданным коэффициентом расщепления n полной длины балки:

$$\Delta\theta = \frac{\alpha}{n}. \quad (39)$$

Перед параметрическим исследованием для получения подходящего значения n провели анализ сходимости, результаты которого представлены на рис. 2. Видно, что решение для параметра Ω_i , полученное при $n=30$ примерно за 0,3 с, согласуется с таковым при $n=200$ с точностью до четырех значащих цифр.

Для проверки достоверности математической формулировки и разработанного метода решения значения собственных частот ω_i , предсказанные в настоящей работе, сравнили с полученными посредством программного обеспечения ADINA. Предсказанные безразмерные

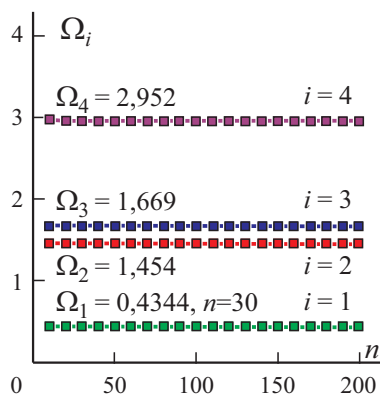


Рис. 2. Анализ сходимости в зависимости от коэффициента расщепления n для балки прямоугольного поперечного сечения с граничными условиями Ш—З при $m_E = 0,5$, $m_\rho = 0,5$, $\nu = 0,3$, $a = 0,5$, $s = 50$; $\alpha = \pi/4$, $R_\psi = 1$, $R_\phi = 1$ (расчетные значения параметров — для рис. 2—8).

Табл. 1

Сравнение значений собственных частот ω_i , рассчитанных в настоящей работе и посредством ADINA

Условие на концах	Свойства материала, геометрия	i	ω_i , рад/с		Ошибка, %
			Настоящая работа	ADINA	
Ш—Ш	Прямоугольная ($B = 0,1$ м, $D = 0,05$ м)	1	191,45	195,78	2,26
		2	1056,2	1063,7	0,71
	ФГМ: от Al до ZrO ₂ до Al; $A\alpha = \pi/2$	3	2495,0	2512,0	0,68
		4	4471,7	4509,4	0,84
Ш—З	Круглоизогнутая ($D = 0,075$ м)	1	187,87	189,06	0,64
		2	735,76	737,02	0,17
	Однородный материал ZrO ₂ ; $\alpha = 3\pi/4$	3	1638,7	1641,8	0,19
		4	2866,4	2872,7	0,22
З—З	Эллиптическая ($B = 0,1$ м; $D = 0,05$ м)	1	143,57	141,43	1,48
		2	371,15	365,68	1,47
	АФГМ: от ZrO ₂ до Al до ZrO ₂ ; $\alpha = \pi/2$	3	738,90	728,22	1,45
		4	1860,4	1833,4	1,45

частоты Ω_i преобразовали к собственным частотам ω_i (рад/с) согласно уравнению

$$\omega_i = \frac{\Omega_i}{r} \sqrt{\frac{E_c}{\rho_c}}$$

Для сравнения рассмотрели балку из АФГМ радиусом $r = 1$, состоящего из чистого алюминия (Al) и чистого диоксида циркония (ZrO₂). Свойства материалов следующие: Al — $E = 70$ ГПа, $\rho = 2700$ кг/м³; ZrO₂ — $E = 140$ ГПа, $\rho = 5400$ кг/м³, $\nu = 0,3$, $R_\psi = R_\phi = 1$. Сравнение результатов представлено в табл. 1, где указаны граничные условия на концах, форма поперечного сечения с размерами B и D , а также угол раскрытия α . Значения частот, предсказанные в настоящей работе и с помощью ADINA, хорошо согласуются друг с другом с погрешностью 2,3%. Это означает, что разработанные теоретические и численные методы корректно работают при анализе свободных колебаний круглоизогнутых балок из АФГМ.

Затем изучили взаимосвязь между частотным параметром Ω_i и параметрами балки из АФГМ, включающими граничные условия на концах, показатели вращательной R_ψ и крутильной R_ϕ инерции, форму поперечного сечения (прямоугольная или эллиптическая), отношение модулей упругости m_E , отношение плотностей m_ρ , коэффициент Пуассона ν , отношение размеров a , коэффициент гибкости s и угол раскрытия α . Формы мод колебаний балки определили при $1 \leq m_E \leq 5$, $1 \leq m_\rho \leq 5$,

Табл. 2

Влияние вращательной и крутильной инерции на параметр частоты Ω_i

Условие на концах	Показатель инерции		Ω_i					
	R_ψ	R_ϕ	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
Ш—Ш	0	0	0,2851	1,197	-	2,621	-	-
	1	0	0,2844	1,185	-	2,569	-	4,309
	1	1	0,2832	1,180	1,668	2,561	3,576	4,295
Ш—З	0	0	0,4375	1,476	-	3,023	-	4,944
	1	0	0,4363	1,460	-	2,963	-	4,806
	1	1	0,4344	1,454	1,669	2,952	3,577	4,788
З—З	0	0	0,6192	1,787	-	3,460	-	5,486
	1	0	0,6173	1,767	-	3,391	-	5,337
	1	1	0,6144	1,668	1,760	3,378	3,577	5,317

Примечание: Прямоугольное поперечное сечение; $m_E = 0,5$, $m_\rho = 0,5$, $\nu = 0,3$, $a = 0,5$, $s = 50$, $\alpha = \pi/4$.

$0,3 \leq \nu \leq 0,4$, $0 < a \leq 1$, $0 < s \leq 300$ и $0 < \alpha \leq \pi$. Результаты параметрических исследований представлены в табл. 2—4 и на рис. 3—8.

В табл. 2 приведены значения частотного параметра $\Omega_{i=1-6}$ для трех типов граничных условий. Типы колебаний делятся на изгибные и крутильные, определяемые показателями инерции R_ψ и R_ϕ соответственно. В данной таблице цифры, набранные жирным шрифтом, соответствуют модам кручения, а нормальным шрифтом — модам изгиба. В случае $R_\psi = R_\phi = 1$ наблюдали уменьшение значений Ω_i . Различие значений частот около 4% или меньше означает, что влияние изгибной и крутильной инерции нельзя игнорировать. Исключение крутильной инерции при $R_\phi = 0$ не повлияло на крутильную частоту. При всех рассмотренных граничных условиях изгибным колебаниям соответствовали первая, вторая, четвертая и шестая моды, а крутильным — третья и пятая. Однако порядок следования изгибных и крутильных мод колебаний может быть иным при других значениях параметров балки.

Данные табл. 3 иллюстрируют влияние формы поперечного сечения балки на частотный параметр Ω_i . Различие значений частот балок с прямоугольным и эллиптическим сечениями около 0,5% или меньше. Значение параметра Ω_i балки с эллиптическим сечением был немного больше, чем с прямоугольным, для первой, второй и третьей мод, но меньше для четвертой. Значения для третьей крутильной моды набраны жирным шрифтом; остальные моды являются изгибающими, независимо от граничных условий.

Табл. 3

Влияние формы поперечного сечения на параметр частоты Ω_i

Условие на концах	Форма поперечного сечения	Ω_i			
		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
Ш—Ш	Прямоугольная	0,2832	1,180	1,668	2,561
	Эллиптическая	0,2847	1,181	1,790	2,559
Ш—З	Прямоугольная	0,4344	1,454	1,669	2,952
	Эллиптическая	0,4356	1,454	1,790	2,950
З—З	Прямоугольная	0,6144	1,668	1,760	3,388
	Эллиптическая	0,6157	1,761	1,790	3,376

Примечание: Прямоугольное поперечное сечение; $m_E = 0,5$, $m_p = 0,5$, $\nu = 0,3$, $a = 0,5$, $s = 50$, $\alpha = \pi/4$.

Данные табл. 4 иллюстрируют влияние коэффициента Пуассона ν на частотный параметр Ω_i , который уменьшается по мере увеличения значений ν . Этот эффект более выражен при более высоких модах. Различия значений частот для четвертой моды около 1% или меньше. Значения для третьей крутильной моды набраны жирным шрифтом; остальные моды являются изгибающими, независимо от граничных условий.

На рис. 3 показаны зависимости частотного параметра Ω_i от отношения модулей упругости m_E . Увеличение отношения m_E повышало значение Ω_i , что более заметно для более высоких мод. Первая, вторая и четвертая

Табл. 4

Влияние коэффициента Пуассона ν на параметр частоты Ω_i

Условия на концах	ν	Ω_i			
		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
Ш—Ш	0,3	0,2832	1,180	1,668	2,561
	0,35	0,2827	1,178	1,639	2,554
	0,4	0,2821	1,176	1,612	2,547
Ш—З	0,3	0,4344	1,454	1,669	2,952
	0,35	0,4339	1,451	1,640	2,944
	0,4	0,4335	1,449	1,613	2,936
З—З	0,3	0,6144	1,668	1,760	3,378
	0,35	0,6141	1,640	1,758	3,370
	0,4	0,6138	1,612	1,754	3,361

Примечание: Прямоугольное поперечное сечение; $m_E = 0,5$, $m_p = 0,5$, $\nu = 0,3$, $a = 0,5$, $s = 50$, $\alpha = \pi/4$.

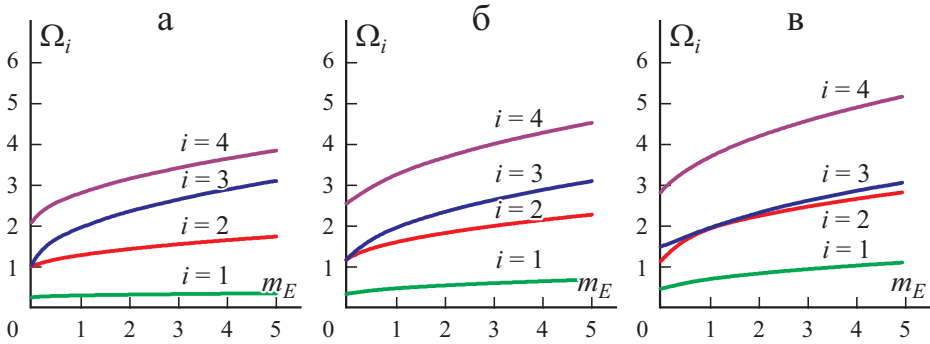


Рис. 3. Зависимость частотного параметра Ω_i от величины m_E для балки с граничными условиями Ш—Ш (а); Ш—3 (б); 3—3 (в): $i = 1, 2, 4$ — изгибные моды; $i = 3$ — крутильная мода.

моды — изгибные, а третья — крутильная, независимо от граничных условий при данном наборе параметров балки. Интересно, что вторая и третья моды имели двойные корни при некотором значении m_E , при котором их частотные кривые пересекаются друг с другом.

Зависимость частотного параметра Ω_i от отношения плотностей m_ρ проиллюстрирована на рис. 4. Увеличение отношения m_ρ уменьшало значение Ω_i , что сильнее выражено для более высоких мод. При данном наборе параметров балки первая, вторая и четвертая моды — изгибные, а третья — крутильная.

На рис. 5 показаны зависимости частотного параметра Ω_i от отношения сторон a . Буквами F и T отмечены участки, соответствующие

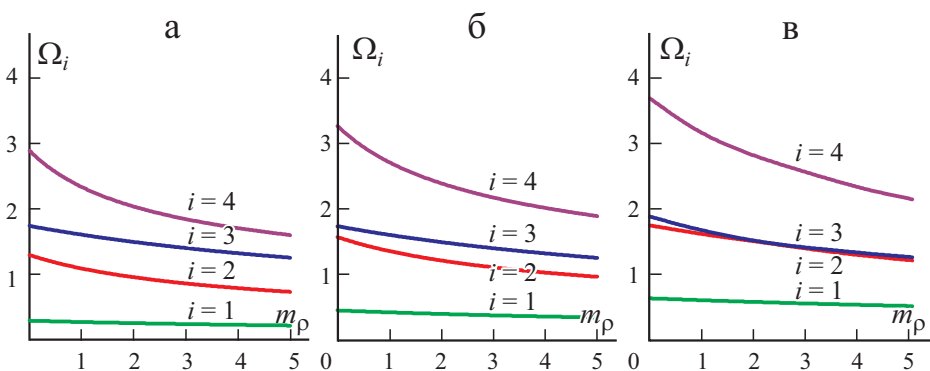


Рис. 4. Зависимость частотного параметра Ω_i от величины m_ρ для балки прямоугольного поперечного сечения с граничными условиями Ш—Ш (а); Ш—3 (б); 3—3 (в): $i = 1, 2, 4$ — изгибные моды; $i = 3$ — крутильная мода.

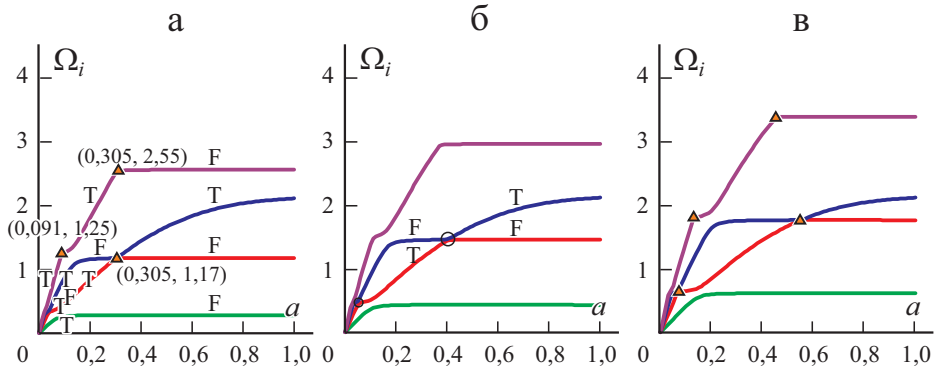


Рис. 5. Зависимость частотного параметра Ω_i от величины a для балки прямоугольного поперечного сечения с граничными условиями Ш—Ш (*a*); Ш—З (*б*); З—З (*в*): \blacktriangle — координаты двойных корней; F и T — изгибная и крутильная моды соответственно; \circ — изменение направления второй и третьей мод; зависимости мод $i = 1, 2, 3, 4$ следуют снизу вверх.

изгибной и крутильной модам соответственно. Переходы мод видны на рис. 5—*a* и *в* при симметричных граничных условиях на концах балки. Частотные зависимости второй и третьей мод балки с шарнирно закрепленными концами (см. рис. 5—*a*) пересекаются в точке (0,305, 1,17). Это означает, что существуют двойные корни $\Omega_2 = \Omega_3 = 1,17$ при $a = 0,305$, соответствующие изгибной и крутильной модам. Таким образом, при $a = 0,305$ форма колебаний изменяется с крутильной на изгибную во второй моде и наоборот — в третьей. Такая же ситуация характерна для балки с защемленными концами (см. рис. 5—*в*). Однако в случае балки с шарнирно закрепленным и защемленным концами (см. рис. 5—*б*) ча-

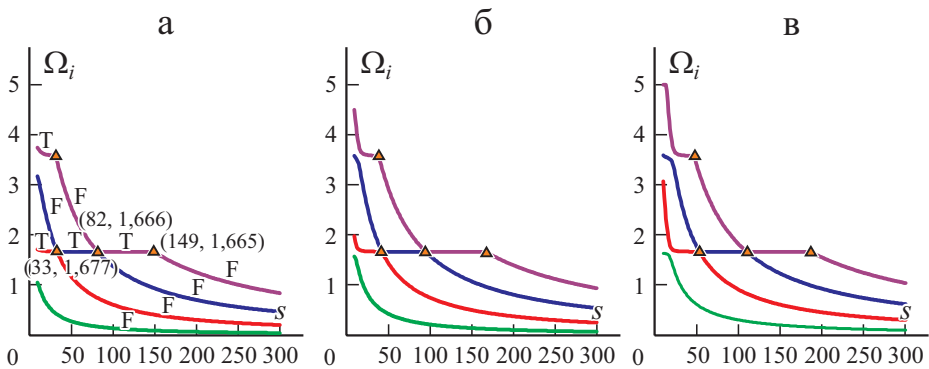


Рис. 6. Зависимость частотного параметра Ω_i от величины s для балки прямоугольного поперечного сечения с граничными условиями Ш—Ш (*a*); Ш—З (*б*); З—З (*в*). Обозначения те же, что на рис. 5.

стотные кривые сближаются друг с другом, но не пересекаются, демонстрируя так называемое явление изменения направления [32] и отсутствие двойных корней, обозначенных темным треугольником. При $a \rightarrow \infty$ все частотные кривые сходятся к общей горизонтальной асимптоте.

На рис. 6 приведены зависимости частотного параметра Ω_i от коэффициента гибкости s . Нисходящие участки кривых на рис. 6—*a* соответствуют изгибной моде, а горизонтальные — крутильной. Переход мод имеет место при всех рассмотренных типах граничных условий, включая случай шарнирно закрепленного и защемленного концов (см. рис. 6—*б*), что отличается от случая, проиллюстрированного на рис. 5—*б* (влияние отношения сторон a). Интересно, что на крутильную моду коэффициент гибкости s практически не влияет.

Зависимости частотного параметра Ω_i от угла раскрытия α приведены на рис. 7. Видно, что с увеличением угла α величина Ω_i уменьшается. Переход мод наблюдали при всех типах граничных условий. Во всех таблицах и на рисунках первая мода — изгибная, независимо от комбинации параметров балки $m_E, m_p, \nu, a, s, \alpha$, включая граничные условия и форму поперечного сечения.

Данные рис. 8 иллюстрируют формы мод колебаний $(\delta, \psi, \phi)_i$ относительно θ/α при разных граничных условиях. Если геометрия конструкционного элемента симметрична, например, в случае Ш—Ш и З—З, а также при симметричных свойствах материала, форма колебаний будет либо симметричной, либо антисимметричной относительно срединной линии балки (см. рис. 8—*a, в*). Формы мод колебаний балки в случае Ш—З асимметричны (см. рис. 8—*б*). Положения максимальной амплитуды и узловой точки, представленные в форме мод на рис. 8, используют при проектировании конструкций и их техническом обслуживании.

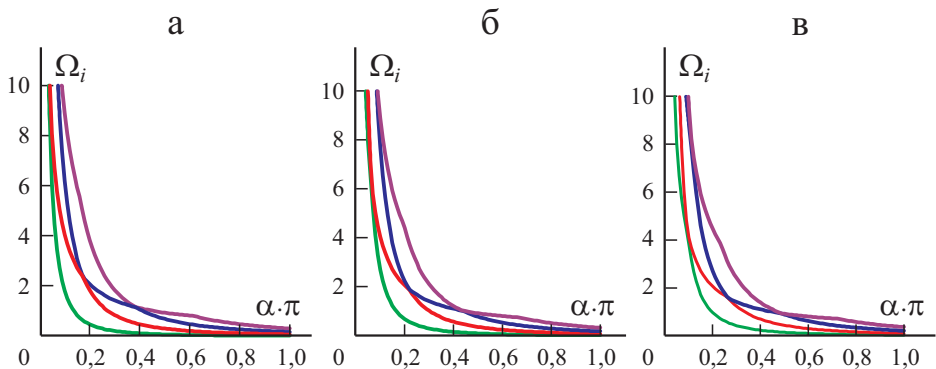


Рис. 7. Зависимость частотного параметра Ω_i от величины α для балки прямоугольного поперечного сечения с граничными условиями Ш—Ш (*a*); Ш—З (*б*); З—З (*в*). Зависимости мод $i = 1, 2, 3, 4$ следуют снизу вверх.

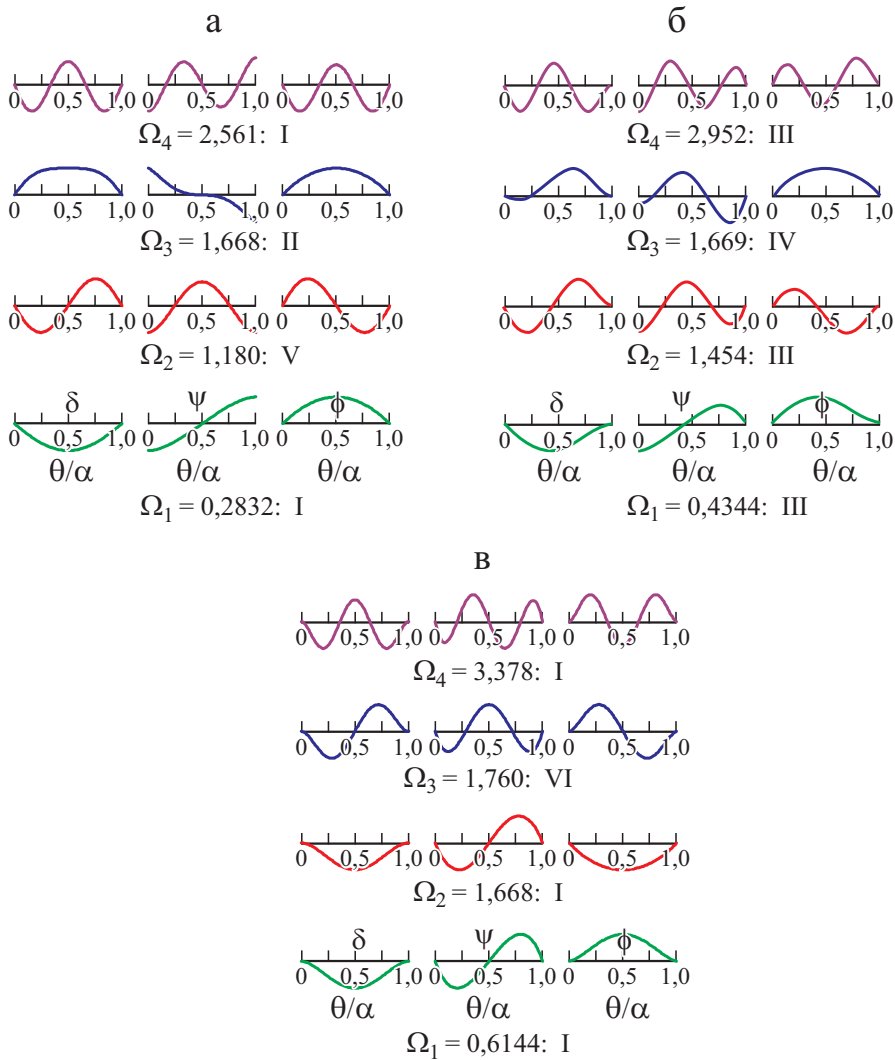


Рис. 8. Типичные формы мод колебаний для балки прямоугольного поперечного сечения с граничными условиями Ш—Ш (а); Ш—3 (б); 3—3 (в): I — симметричная изгибная мода; II — симметричная крутильная мода; III — изгибная мода; IV — крутильная мода; V — антисимметричная изгибная мода; VI — антисимметричная крутильная мода.

Заключение

В настоящей работе исследовали свободные колебания из плоскости в сочетании с изгибно-крутильными колебаниями круглоизогнутых балок, изготовленных из аксиально-функционально-градиентного материала. С учетом уравнений динамического равновесия для элемента круглоизогнутой балки дифференциальные уравнения, управляющие свободными колебаниями балок вывели с использованием теорий Тимо-

шенко и Сен-Венана. Для описания свойств ФГМ выбрали квадратичную функцию и рассмотрели прямоугольное и эллиптическое поперечные сечения балок. Для вычисления собственных частот дифференциальные уравнения решали методом пробных собственных значений, дополненным методом численного интегрирования. Предсказанные значения собственных частот, полученные в настоящей работе и с помощью программного обеспечения ADINA, хорошо согласуются друг с другом. Выполнили параметрические исследования влияния граничных условий на концах балки, формы поперечного сечения, вращательной и крутильной инерции, отношения модулей упругости, отношения плотностей, отношения размеров, коэффициента гибкости и угла раскрытия на частотные характеристики балок.

Благодарность. Авторы признательны за финансовую поддержку Корейскому национальному исследовательскому фонду (грант NRF-2020R1C1C1005374) и доктору Хи Мин Юн, директору Sunkoo Engineering (Корея) за помощь в вычислении собственных частот круглоизогнутых балок из АФГМ с помощью программного обеспечения ADINA.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Norris C. H., Wilbur J. B., and Utku S. Elementary Structural Analysis. — N. Y.: McGraw-Hill Inc., 1976.
2. Horibe T. and Mori K. Large deflections of tapered cantilever beams made of axially functionally graded materials // Mech. Eng. J. — 2018. — Vol. 5. — P. 1—10.
3. Rao S. S. Vibration of Continuous Systems. — Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2007.
4. Li X. F. A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Bernoulli—Euler beam // J. Sound. Vib. — 2008. — Vol. 318. — P. 1210—1229.
5. Kukla S. and Rychlewska J. Free vibration analysis of functionally graded beam // J. Appl. Math. Comput. Mech. — 2013. — Vol. 12. — P. 39—44.
6. Chandran G. and Rajendran M. G. Study on buckling of column made of functionally graded material // Int. J. Mech. Prod. Eng. — 2014. — Vol. 2. — P. 52—54.
7. Ranganathan S., Abed F., and Aldadah M. G. Buckling of slender columns with functionally graded micro-structures // Mech. Adv. Mater. Struct. — 2016. — Vol. 23. — P. 1360—1367.
8. Elishakoff I., Eisenberger M., and Delmas A. Buckling and vibration of functionally graded material columns sharing Duncan's mode shape, and new cases // Structures. — 2018. — Vol. 5. — P. 170—174.
9. Rezaiee-Pajand M. and Masoodi A. R. Exact natural frequencies and buckling loads of functionally graded material tapered beam-columns considering semi-rigid connections // J. Vib. Control. — 2018. — Vol. 24. — P. 1787—1808.
10. Huang Y. and Li X. F. A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross section // J. Sound Vib. — 2010. — Vol. 329. — P. 2291—2303.

11. *Shahba A. and Rajasekaran S.* Free vibration and stability of tapered Euler—Bernoulli beams made of axially functionally graded materials // *Appl. Math. Model.* — 2012. — Vol. 36. — P. 3094—3111.
12. *Soltani M. and Asgarian B.* Lateral-torsional stability analysis of a simply supported axially functionally graded beam with a tapered I-section // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 56. — P. 39—53.
13. *Akgoz B. and Civalek O.* Free vibration analysis of axially functionally graded Bernoulli-Euler microbeams based on the modified couple stress theory // *Compos. Struct.* — 2013. — Vol. 98. — P. 314—322.
14. *Malekzadeh P., Atashi M. M., and Karami G.* In-plane free vibration of functionally graded circular arches with temperature-dependent properties under thermal environment // *J. Sound Vib.* — 2009. — Vol. 326. — P. 837—851.
15. *Malekzadeh P.* Two-dimensional in-plane free vibrations of functionally graded circular arches with temperature-dependent properties // *Compos. Struct.* — 2009. — Vol. 91. — P. 38—47.
16. *Noori A. R., Aslan T. A., and Temel B.* An efficient approach for in-plane free and forced vibrations of axially functionally graded parabolic arches with non-uniform cross section // *Compos. Struct.* — 2018. — Vol. 200. — P. 701—710.
17. *Rajasekaran S.* Free vibration of tapered arches made of axially functionally graded materials // *Struct. Eng. Mech.* — 2013. — Vol. 45. — P. 569—594.
18. *Zhou Z., Chen M., and Xie K.* NURBS-based free vibration analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko curved beams // *Appl. Math. Mech.* — 2020. — Vol. 41. — P. 567—586.
19. *Tsiatas G. C. and Charalampakis A. E.* Optimizing the natural frequencies of axially functionally graded beams and arches // *Compos. Struct.* — 2017. — Vol. 160. — P. 256—266.
20. *Lee J. K. and Lee B. K.* In-plane free vibration of circular arches made of axially functionally graded materials // *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* — 2019. — Vol. 19. — P. 1950084.
21. *Malekzadeh P., Haghghi M. R. G., and Atashi M. M.* Out-of-plane free vibration of functionally graded circular curved beams in thermal environment // *Compos. Struct.* — 2010. — Vol. 92. — P. 541—552.
22. *Malekzadeh P., Haghghi M. R. G., and Atashi M. M.* Out-of-plane free vibration analysis of functionally graded circular curved beams supported on elastic foundation // *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* — 2010. — Vol. 2. — P. 635—652.
23. *Lee S. Y. and Chao J. C.* Exact solutions of out-of-plane vibration of curved non-uniform beam // *J. Appl. Mech.* — 2000. — Vol. 68. — P. 186—191.
24. *Lee B. K., Oh S. J., Mo J. M., and Lee T. E.* Out-of-plane free vibrations of curved beams with variable curvature // *J. Sound Vib.* — 2008. — Vol. 318. — P. 227—246.
25. *Borg S. F. and Gennaro J. J.* *Advanced Structural Analysis.* — N. Y.: Van Nostrand Reinhold, 1959.
26. *Timoshenko S. P.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // *Philos. Mag.* — 1921. — No. 41. — P. 744—746.
27. *Lee J. K. and Jeong S.* Flexural and torsional free vibrations of horizontally curved beams on Pasternak foundation // *Appl. Math. Model.* — 2016. — Vol. 40. — P. 2242—2256.
28. *Chopra A. K.* *Dynamics of Structures.* — Upper Saddle River: Prentice Hall Inc., 2001.

29. *Cowper G. R.* The shear coefficient in Timoshenko beam theory // *J. Appl. Mech.* — 1966. — Vol. 33. — P. 335—340.

30. *Young W. C. and Budynas R. G.* Roark's Formulas for Stress and Strain. — N. Y.: McGraw-Hill Inc., 2001.

31. *Burden R. L., Faires D. J., and Burden A. M.* Numerical Analysis. — Boston: Cengage Learning, 2016.

Поступила в редакцию 25.01.2021

Окончательный вариант поступил 05.05.2021

Received Jan. 25, 2021 (May 5, 2021)
