

Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко*

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ В НЕЙТРОННОМ ПОТОКЕ

E. I. Starovoitov and D. V. Leonenko

DEFORMATION OF AN ELASTIC CIRCULAR SANDWICH PLATE IN A NEUTRON FLOW

Keywords: three-layer circular plate, elasticity, neutron flow

The deformation of an elastic circular three-layer plate with an asymmetric thickness under neutron irradiation is considered. To describe the kinematics of the package, polyline hypotheses are used. In the thin load-carrying layers, Kirchhoff's hypotheses are assumed. In a relatively thick aggregate with an incompressible thickness, the Timoshenko hypothesis of straightness and incompressibility of the deformed normal is employed. The operation of filler in the tangential direction is taken into account, and the corresponding boundary-value problem is formulated. A system of differential equations of equilibrium is obtained by the Lagrange variational method, and boundary conditions on the plate contour are formulated. The solution of the boundary-value problem is reduced to finding three desired functions: the deflection, shear, and radial displacement of the median plane of the filler. An inhomogeneous system of ordinary linear differential equations is written for these functions. The boundary conditions prescribed correspond to the spherical support of the plate contour, and its numerical parametric analysis is carried out.

Ключевые слова: пластина круговая трехслойная, упругость, поток нейтронный

Рассмотрено деформирование упругой круговой трехслойной несимметричной по толщине пластины при нейтронном облуче-

*Автор, с которым следует вести переписку: edstar0@yandex.by
Corresponding author: edstar0@yandex.by

нии. Для описания кинематики пакета использованы гипотезы ломаной линии. В тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа. В несжимаемом по толщине относительно толстом заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Учтена работа заполнителя в тангенциальном направлении. Приведена постановка соответствующей краевой задачи. Система дифференциальных уравнений равновесия получена вариационным методом Лагранжа. Сформулированы граничные условия на контуре пластины. Решение краевой задачи сведено к нахождению трех искомых функций — прогиба, сдвига и радиального перемещения срединной плоскости заполнителя. Для этих функций выписана неоднородная система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Граничные условия соответствуют шарнирному опиранию контура пластины. Проведен его численный параметрический анализ.

Введение. Вопросам расчета напряженно-деформированного состояния композитных, в том числе трехслойных, элементов конструкций уделяется большое внимание, так как во многих случаях они являются составляющими сложных и ответственных сооружений. Необходимость оценки прочностных характеристик подобных элементов, работающих в условиях комплексных внешних воздействий, обуславливает необходимость создания соответствующих расчетных моделей для описания их деформирования при разных нагрузках, включая радиационные. Этой проблеме посвящены многие работы.

Результаты, связанные с динамическим воздействием на трехслойные элементы конструкций, в том числе опирающихся на упругое основание, геометрия и движение которых описывается с помощью тех или иных гипотез, приведены в публикациях [1—11]. Свободные, вынужденные и нестационарные колебания трехслойных пластин и оболочек, в том числе связанных с упругим основанием, исследовали в [1—4]. Кинематические предположения принимали соответствующими гипотезе прямой линии. Решение получено в перемещениях в виде разложения в ряды по системам собственных функций. Численно исследованы частоты и амплитуды колебаний. Работы [5—11] посвящены развитию математических моделей ударных и нестационарных воздействий на неоднородные и трехслойные системы, в том числе с подвижными границами. В [12] предложена модель динамического изгиба композитной эллиптической пластины с жестким заполнителем.

В [13—18] проведен анализ квазистатического нагружения слоистых оболочек, пластин и балок при конечных прогибах. В [19, 20] рассмотрено деформирование жесткопластичных армированных пластин с учетом 2D напряженного состояния в волокнах. Изгиб и предельный анализ

ортотропных сандвич-пластин с ячеистым наполнителем исследовали в [21—23]. Изотермическое упругопластическое и физически нелинейное деформирование трехслойных круговых пластин рассмотрено в [24—28]. Термосиловое нагружение трехслойных пластин проанализировано в работах [29—32].

Влияние нейтронного облучения на механические свойства материалов описано в монографии [33]. В [34] исследовано деформирование трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем в нейтронном потоке.

В настоящей работе представлена постановка и получено аналитическое решение краевой задачи о нагружении трехслойной упругой круговой пластины в условиях нейтронного облучения. Исследовано распространение нейтронного потока по толщине пластины и его влияние на ее деформирование.

1. Постановка задачи. Внешние несущие слои несимметричной по толщине трехслойной круговой пластины предполагаем тонкими, толщиной $h_1 \neq h_2$. Для них приняты гипотезы Кирхгофа о несжимаемости, прямолинейности и перпендикулярности деформированных нормалей к срединной поверхности слоев. Заполнитель считается жестким, достаточно толстым ($h_3 = 2c$), учитывается его работа в тангенциальном направлении. Для заполнителя справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали, которая поворачивается относительно срединной поверхности на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. Постановка задачи и ее решение проведены в цилиндрической системе координат r, φ, z . Срединная плоскость заполнителя принята за координатную, ось z направлена перпендикулярно вверх, к первому слою.

Предположим, что на внешнюю поверхность $z = c + h_1$ круговой трехслойной пластины подводится нейтронный поток плотностью $\varphi_0 = \text{const}$ в направлении, противоположном внешней нормали (рис. 1). В силу симметрии нагружения тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют:

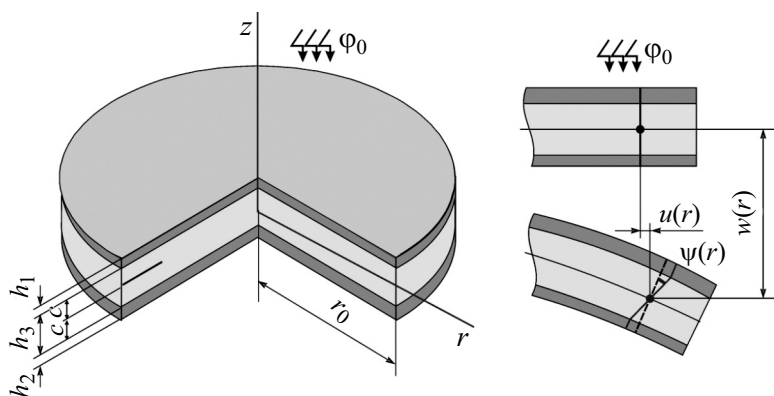


Рис. 1. Расчетная схема.

$u_\varphi^{(k)} = 0$ ($k = 1, 2, 3$ — номер слоя), а прогиб пластины w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ . Далее эти функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ считаем искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0 , относительная толщина k -го слоя обозначена как h_k . На контуре предполагаем жесткую диафрагму, препятствующую относительному сдвигу слоев, т.е. $\psi = 0$ при $r = 1$.

Согласно экспериментальным данным при малых деформациях в линейном приближении можно считать, что изменение объема материала в слоях θ_{Ik} прямо пропорционально интегральному нейтронному потоку [33]

$$\theta_{Ik} = B_k I_k(z), \quad (1)$$

где $I_k(z) = \varphi_k(z)t$ — интегральный нейтронный поток в k -м слое; φ_k — интенсивность потока, нейтрон/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$), дошедшего за время t к поверхности с координатой z в k -м слое; B_k — константа материала, получаемая из опыта.

Влияние нейтронного облучения на параметры упругости (модуль Юнга, коэффициент Пуассона и т. д.) незначительно и далее не учитывается.

Если на поверхность пластины $z = c + h_1$ параллельно оси z падают нейтроны с интенсивностью φ_0 , то интенсивность потока нейтронов, доходящих до плоскости, параллельной границе $z = \text{const}$, будет убывать по экспоненте [33]. В нашем случае в верхнем слое интенсивность потока нейтронов будет равна

$$\varphi_1(z) = \varphi_0 \exp(-\mu_1(h_1 + c - z)), \quad \mu_1 = \sigma_1 n_0 = \sigma_1 \frac{A_0 \rho_1}{A_1}, \quad (2)$$

где μ_1 — величина макроскопического эффективного сечения (1/см); σ_1 — эффективное сечение, отнесенное к одному ядру; n_0 — количество ядер в 1 см^3 ; A_0 — число Авогадро; ρ_1 — плотность; A_1 — атомный вес; нижний индекс — номер слоя, если другое не указано.

Для алюминия $\sigma_1 = 0,21 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, $A_0 = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$, плотность $\rho_1 = 2,7 \text{ г/см}^3$, $A_1 = 27 \text{ а.е.м.}$ Подставив эти данные в (2), получим $\mu_1 = 1,26 \text{ м}^{-1}$. Отметим, что величина μ_1 обратна величине свободного пробега нейтронов, которая для быстрых нейтронов в алюминии равна $\lambda_1 = 14,1$ — $15,9 \text{ см}$, в полиэтилене — $5,5$ — $13,9 \text{ см}$.

Следовательно, к моменту времени t через сечение z внешнего слоя пройдет интегральный поток, равный

$$I_1(z, t) = \varphi_0 t \exp(-\mu_1(c + h_1 - z)). \quad (3)$$

При $z = c + h_1$ величина $I_0 = \varphi_0 t$ дает суммарный поток нейтронов на единицу площади поверхности тела. В реакторах $\varphi_0 \approx 10^{17} - 10^{18}$ нейтрон/(м²·с), а величина I_0 достигает значений $10^{23} - 10^{27}$ нейтрон/м², причем θ_I достигает значений около 0,1. Следовательно, в зависимости от энергии нейтронов и облучаемого материала значение параметра B может быть равным $10^{-28} - 10^{-23}$ м²/нейтрон.

При $z = c$ из формулы (2) получим интенсивность нейтронного потока на границе перехода из первого слоя 1 к заполнителю 3:

$$\varphi_{13} = \varphi_1(c) = \varphi_0 \exp(-\mu_1 h_1). \quad (4)$$

В заполнителе интенсивность потока нейтронов на плоскости $z = \text{const}$ и интегральный поток к моменту t будут равны

$$\varphi_3(z) = \varphi_{13} \exp(-\mu_3(c-z)), \quad I_3(z,t) = \varphi_{13} t \exp(-\mu_3(c-z)). \quad (5)$$

На границе $z = -c$ (из заполнителя 3 к нижнему несущему слою 2) из соотношения (5) найдем интенсивность нейтронного потока:

$$\varphi_{32} = \varphi_3(-c) = \varphi_{13} \exp(-2\mu_3 c). \quad (6)$$

В нижнем слое интенсивность потока нейтронов на плоскости $z = \text{const}$ и интегральный поток к моменту t будут равны

$$\varphi_2(z) = \varphi_{32} \exp(-\mu_2(-c-z)), \quad I_2(z,t) = \varphi_{32} t \exp(-\mu_2(-c-z)). \quad (7)$$

Таким образом, формулы (2)–(7) позволяют рассчитать интегральный нейтронный поток в слоях трехслойной пластины на плоскостях с координатой $z = \text{const}$.

Принимаем, что материалы слоев пластины в процессе деформирования проявляют упругие свойства. Для описания их деформирования используем физические уравнения состояния, учитывающие радиационное изменение объема (1):

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}, \quad (8)$$

$$\sigma^{(k)} = K_k (3\varepsilon^{(k)} - B_k I_k) \quad (k=1, 2, 3; \alpha=r, \varphi),$$

где $s_\alpha^{(k)}, \varepsilon_\alpha^{(k)}$ — девиаторные, а $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ — шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k, K_k — модули сдвига и объемного деформирования; $s_{rz}^{(3)}, \varepsilon_{rz}^{(3)}$ — касательное напряжение и сдвиговая деформация в заполнителе.

При принятых кинематических гипотезах выражения для радиальных перемещений в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции будут иметь вид

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}, & c \leq z \leq c + h_1, \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}, & -c \leq z \leq c, \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, & -c - h_2 \leq z \leq -c, \end{aligned} \quad (9)$$

где запятая в нижнем индексе означает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Обобщенные внутренние усилия и моменты вводим соотношениями

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, & M_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), & Q &= \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\sigma_\alpha^{(k)}, \sigma_{rz}^{(k)}$ — компоненты тензора напряжений.

Система уравнений равновесия упругой трехслойной пластины в обобщенных усилиях (10) приведена в [31]. При отсутствии внешней силовой нагрузки она будет однородной. Система получена без использования уравнений связи напряжений и деформаций, поэтому остается справедливой и в рассматриваемом случае:

$$\begin{aligned} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) &= 0, & H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q &= 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

На границе пластины $r = 1$ должны выполняться силовые граничные условия

$$T_r = T_r^0, \quad H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0, \quad (12)$$

где T_r^0, M_r^0, Q^0 — заданные усилия на контуре.

Выразив напряжения в формулах (10) через деформации с помощью закона Гука (8), а затем деформации — через перемещения (9) с помощью соотношений Коши [5], получим для обобщенных внутренних усилий выражения через искомые функции, в которые войдет интегральный нейтронный поток к моменту t :

$$\begin{aligned}
 T_r &= \sum_{k=1}^3 \left[h_k (K_k^+ u_{,r} + \frac{u}{r} K_k^-) - K_k B_k \int_{h_k} I_k dz \right] + \\
 &+ c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) \psi_{,r} + c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \frac{\psi}{r} - \\
 &- \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] w_{,rr} - \\
 &- \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{w_{,r}}{r}, \\
 T_\varphi &= \sum_{k=1}^3 \left[h_k (K_k^- u_{,r} + \frac{u}{r} K_k^+) - K_k B_k \int_{h_k} I_k dz \right] + \\
 &+ c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \psi_{,r} + c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) \frac{\psi}{r} - \\
 &- \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] w_{,rr} - \\
 &- \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{w_{,r}}{r}, \tag{13} \\
 M_r &= \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \\
 &+ \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} + \\
 &+ \left[cK_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + cK_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \\
 &+ \left[cK_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + cK_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \\
 &- \left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[K_1^- h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r} - \\
 & \quad - \sum_{k=1}^3 K_k B_k \int_{h_k} I_k z dz, \tag{13} \\
 & H_r = c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) u_{,r} + c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \frac{u}{r} + \\
 & + \left[c^2 (K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \left[c^2 (K_1^- h_1 + K_2^- h_2) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \\
 & - \left[c \left(K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} - \\
 & - \left[c \left(K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r} - \\
 & - K_3 B_3 \int_{h_3} I_3 z dz - A \left(K_1 B_1 \int_{h_1} I_1 dz - K_2 B_2 \int_{h_2} I_2 dz \right), \\
 & Q = 2cG_3 \psi, \quad K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+, \quad K_k - \frac{2}{3} G_k \equiv K_k^-.
 \end{aligned}$$

Соотношения для обобщенных моментов M_φ , H_φ следуют из (13), если в одноименных внутренних усилиях поменять местами параметры K_k^+ и K_k^- .

Подставив полученные выражения внутренних усилий (13) в уравнения (11) и проведя необходимые преобразования, получим систему однородных дифференциальных уравнений равновесия для определения искомых функций $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ в задаче о деформировании трехслойной круговой пластины в нейтронном потоке:

$$\begin{aligned}
 & L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) = 0, \\
 & L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) - 2cG_3 \psi = 0, \tag{14} \\
 & L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь дифференциальные операторы L_2 (оператор Бесселя), L_3 и коэффициенты a_i определяются соотношениями

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}, \\
 a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \\
 a_3 &= h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+, \\
 a_4 &= c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right), \\
 a_5 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \\
 a_6 &= h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Следует отметить, что интегральный нейтронный поток в систему (14) явным образом не входит, так как его производные по радиальной координате равны нулю, а в разностях обобщенных усилий в уравнениях (11)₁, (11)₂ соответствующие слагаемые сокращаются.

2. Общее решение краевой задачи. Точное общее аналитическое решение системы уравнений (14) можно выписать в виде

$$\begin{aligned}
 \psi &= C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r), \\
 w &= \frac{b_2}{b_3} \int \psi \, dr - \frac{1}{4b_3} C_1 r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5 r^2}{4b_3} + C_6 \ln r + C_4, \\
 u &= \frac{a_3}{a_1} w_{,r} - \frac{a_2}{a_1} \psi + \frac{C_7 r}{2} + \frac{C_8}{r},
 \end{aligned} \tag{16}$$

где $I_1(\beta r)$ — модифицированная функция Бесселя первого порядка, $K_1(\beta r)$ — функция Макдональда; интегралы берутся в пределах от 0 до r ; L_2^{-1} , L_3^{-1} — интегральные операторы, обратные дифференциальным операторам L_2 , L_3 :

$$\begin{aligned}
 L_2^{-1}(f) &\equiv \frac{1}{r} \int r \int f \, dr \, dr, \quad L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f \, dr \, dr \, dr, \\
 \beta^2 &= \frac{2cb_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2}, \quad b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2^2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{a_1}.
 \end{aligned}$$

Все интегралы, встречающиеся в решении (16) и далее, являются определенными с переменным верхним пределом, т.е.

$$\int f(x)dx \equiv \int_0^r f(z)dz .$$

Из граничных условий интерес представляют те, в которых ограничения накладываются на внутренние усилия. В этом случае интегральный нейтронный поток входит в решение краевой задачи через константы интегрирования. Например, при шарнирном опирании контура пластины должны выполняться условия

$$u = \psi = w = M_r = 0 \text{ при } r = 1 . \tag{17}$$

Подставив решение (16) в (17) и учитывая ограниченность перемещений в центре пластины, получим следующие константы интегрирования:

$$\begin{aligned} C_1 = C_2 = C_3 = C_6 = C_8 = 0 , \\ C_5 = -t \left[\frac{\varphi_0 K_1 B_1}{\mu_1} \left(h_1 + c - \frac{1}{\mu_1} - \left(c - \frac{1}{\mu_1} \right) \exp(-\mu_1 h_1) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\varphi_{32} K_2 B_2}{\mu_2} \left(\left(c + h_2 + \frac{1}{\mu_2} \right) \exp(-\mu_2 h_2) - c - \frac{1}{\mu_2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\varphi_{13} K_3 B_3}{\mu_3} \left(c - \frac{1}{\mu_3} + \left(c + \frac{1}{\mu_3} \right) \exp(-2\mu_3 c) \right) \right] , \tag{18} \end{aligned}$$

$$C_4 = -\frac{C_5 r^2}{4b_3} \Big|_{r=1} , \quad C_7 = -\frac{a_3}{a_1 b_3} C_5 .$$

Следовательно, соотношения (16), (18) дают аналитическое решение краевой задачи о деформировании круговой трехслойной пластины в нейтронном потоке.

3. Численные результаты получены для пластины, материалы слоев которой Д16Т—фторопласт—Д16Т. Принято, что: $B_1 = B_2 = B_3 = 10^{23}$ м²/нейтрон, что обеспечивает объемную деформацию в слоях 3—3,5 %; для дюралюминия $\mu_1 = 1,26$ см, для фторопласта $\mu_3 = 3,21$ см, время действия нейтронного потока 1 ч.

На рис. 2 показано изменение величины нейтронного потока по высоте пластины в зависимости от толщины верхнего несущего слоя $h_1 = 0,01, 0,02, 0,04$. Толщина остальных слоев принята постоянной: $h_2 = 0,04, h_3 = 0,4$, интенсивность потока $\varphi_1 = 10^{18}$ нейтрон/(м²·с). Увеличение толщины

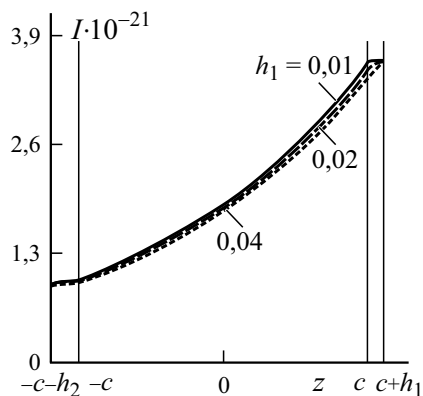


Рис. 2. Зависимость величины нейтронного потока I от толщины верхнего слоя h_1 .

несущего слоя в малой степени влияет на изменение величины нейтронного потока.

Изменение прогиба w вдоль радиуса и распределение линейных деформаций ε_r^k по высоте поперечного сечения на контуре ($r = 1$) пластины при облучении нейтронными потоками интенсивностью $\varphi_1 = 10^{17}$, 10^{18} нейтрон/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$) иллюстрируют данные рис. 3. Относительная толщина слоев равна $h_1 = 0,02$; $h_2 = 0,06$; $h_3 = 0,4$.

Следует отметить, что при воздействии нейтронного облучения происходит увеличение объемной деформации в каждом слое, при этом верхний слой облучается потоком большей интенсивности, что вызывает прогиб, направленный вверх. Радиальная деформация в верхнем слое и примыкающей части заполнителя положительна, что свидетельствует об

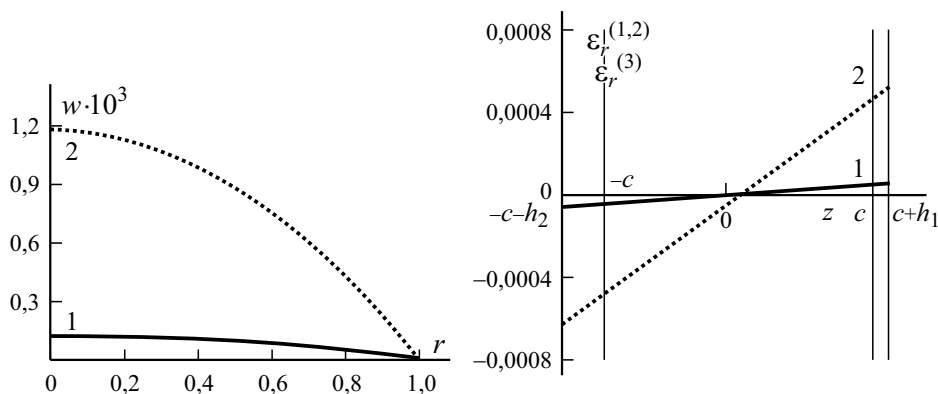


Рис. 3. Прогиб w и радиальные деформации ε_r^k при нейтронном облучении: $\varphi_1 = 10^{17}$ (1); 10^{18} нейтрон/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$) (2).

их растянутости. Усиление интенсивности потока на порядок вызывает примерно такое же увеличение прогиба и деформации. Нейтронное облучение не оказывает влияния на сдвиги в заполнителе.

Численные результаты для перемещений получены при облучении нейтронным потоком интенсивностью $\varphi_1 = 10^{18}$ нейтрон/(м²·с).

Зависимость прогиба от толщины верхнего слоя $h_1 = 0,01, 0,02, 0,04, 0,06$ при постоянной толщине заполнителя $h_3 = 0,4$ и нижнего слоя $h_2 = 0,04$ показана на рис. 4. С увеличением толщины верхнего слоя прогиб увеличивается. В силу этого прогиб меняет знак и тогда существует такое значение $h_1 = h_1^*$, при котором прогиб равен нулю. Для определения этого значения в решении (16) положим $w(h_1^*) = 0$. Это возможно, если выполняется уравнение, следующее из условия $C_5 = 0$:

$$\begin{aligned}
 & -t \left[\frac{\varphi_0 K_1 B_1}{\mu_1} \left(h_1 + c - \frac{1}{\mu_1} - \left(c - \frac{1}{\mu_1} \right) \exp(-\mu_1 h_1) \right) + \right. \\
 & + \frac{\varphi_{32} K_2 B_2}{\mu_2} \left(\left(c + h_2 + \frac{1}{\mu_2} \right) \exp(-\mu_2 h_2) - c - \frac{1}{\mu_2} \right) + \\
 & \left. + \frac{\varphi_{13} K_3 B_3}{\mu_3} \left(c - \frac{1}{\mu_3} + \left(c + \frac{1}{\mu_3} \right) \exp(-2\mu_3 c) \right) \right] = 0. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Уравнение (19) исследовали численно. Было получено, что при выбранных параметрах пластины и величины нейтронного потока критическая толщина верхнего слоя $h_1^* \approx 0,012$. Если $h_1 < h_1^*$, то прогиб направлен вниз, в случае $h_1 = h_1^*$ прогиб приблизительно нулевой, при $h_1 > h_1^*$ пластина выпукла вверх.

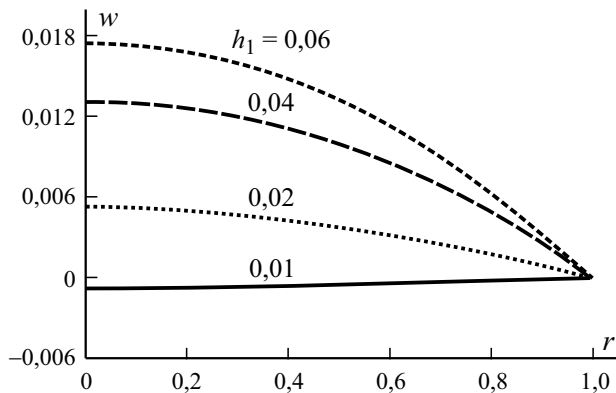


Рис. 4. Зависимость прогиба w от толщины верхнего слоя пластины h_1 .

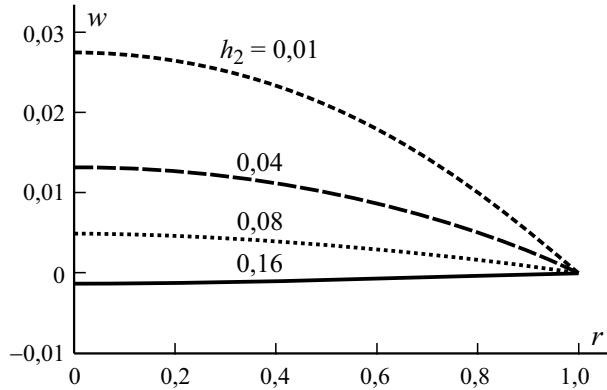


Рис. 5. Зависимость прогиба w от толщины нижнего слоя пластины h_2 .

На рис. 5 представлена зависимость прогиба от толщины нижнего слоя $h_2 = 0,01, 0,04, 0,08, 0,16$ при постоянной толщине заполнителя $h_3 = 0,4$ и верхнего слоя $h_1 = 0,04$. С увеличением толщины нижнего слоя прогиб последовательно уменьшается. При численном исследовании уравнения (19) ($h_3 = 0,4, h_1 = 0,04$) было получено, что при выбранных параметрах пластины и величины нейтронного потока критическая толщина нижнего слоя $h_2^* = 0,134$. Если $h_2 < h_2^* = 0,134$, то прогиб направлен вниз, в случае $h_2 = h_2^*$ прогиб приблизительно нулевой, при $h_2 > h_2^*$ пластина выпукла вверх.

Зависимость прогиба от толщины заполнителя $h_3 = 0,2, 0,3, 0,4, 0,5$ при постоянной толщине несущих слоев $h_1 = h_2 = 0,04$ показана на рис. 6. В этом случае увеличение толщины заполнителя вызывает уменьшение прогиба пластины.

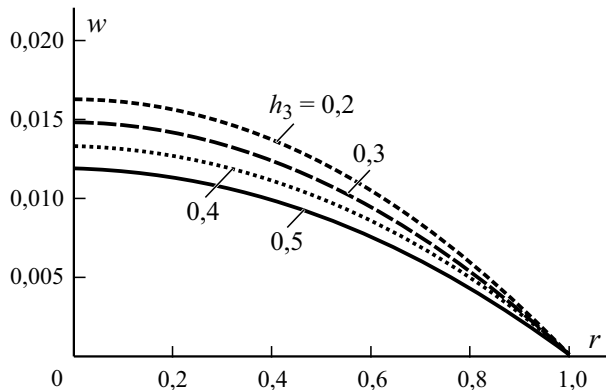


Рис. 6. Зависимость прогиба w от толщины заполнителя h_3 .

Заключение. Предложенная постановка краевой задачи и полученное общее решение уравнений равновесия позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние упругих трехслойных круговых пластин в нейтронном потоке при шарнирном опирании контура. Численные расчеты показали возможность возникновения напряженно-деформированного состояния в пластине только за счет нейтронного воздействия и его существенную зависимость от геометрических и упругих параметров материалов слоев.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект № T20P-047).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Tarlakovsky D. V.* Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation // *Mech. Compos. Mater.* — 2015. — Vol. 51, No. 5. — P. 561—570.
2. *Starovoitov E. I., Kubenko V. D., Tarlakovskii D. V.* Vibrations of circular sandwich plates connected with an elastic foundation // *Russian Aeronautics.* — 2009. — Vol. 52, No. 2. — P. 151—157.
3. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V.* Vibrations of circular composite plates on an elastic foundation under the action of local loads // *Mech. Compos. Mater.* — 2016. — Vol. 52, No. 5. — P. 665—672.
4. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V.* Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation // *Int. Appl. Mech.* — 2011. — Vol. 47, No. 5. — P. 580—589.
5. *Mikhailova E. Yu., Fedotenkov G. V.* Nonstationary axisymmetric problem of the impact of a spherical shell on an elastic half-space (initial stage of interaction) // *Mech. Solids.* — 2011. — Vol. 46, No. 2. — P. 239—247.
6. *Fedotenkov G. V., Tarlakovskiy D. V.* Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries // *J. Math. Sci.* — 2009. — Vol. 162, No. 2. — P. 246—253.
7. *Ivañez I., Moure M. M., Garcia-Castillo S. K., Sanchez-Saez S.* The oblique impact response of composite sandwich plates // *Compos. Struct.* — 2015. — No. 133. — P. 1127—1136.
8. *Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V.* Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells // *J. Machinery Manufacture and Reliability.* — 2014. — Vol. 43, No. 2. — P. 145—152.
9. *Suvorov Ye. M., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V.* The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. // *J. Appl. Math. Mech.* — 2012. — Vol. 76, No. 5. — p. 511—518.
10. *Paimushin V. N., Gazizullin R. K.* Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate // *Mech. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 53, No. 3. — P. 407—436.
11. *Paimushin V. N., Firsov V. A., and Shishkin V. M.* Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping // *Mech. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 53, No. 4. — P. 609—630.

12. *Romanova T. P.* Modeling the dynamic bending of rigid-plastic hybrid composite elliptical plates with a rigid insert // *Mech. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 53, No. 5. — P. 809—828.
13. *Paimushin V. N.* Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour // *Mech. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 53, No. 1. — P. 3—26.
14. *Škec L., Jelenić G.* Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection // *Acta Mech.* — 2014. — Vol. 225, No. 2. — P. 523—541.
15. *Belinha J., Dints L. M.* Nonlinear analysis of plates and laminates using the element free Galerkin method // *Compos. Struct.* — 2007. — Vol. 78, No. 3. — P. 337—350.
16. *Wang Zh., Lu G., Zhu F., Zhao L.* Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection // *J. Eng. Mech.* — 2017. — Vol. 143, No. 9.
17. *Takele K. T.* Interfacial strain energy continuity assumption-based analysis of an orthotropic sandwich plate using a refined layer-by-layer theory // *Mech. Compos. Mater.* — 2018. — Vol. 54, No. 3. — P. 419—444.
18. *Zadeh H.V., Tahani M.* Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load // *Int. J. Recent Adv. Mech. Eng.* — 2017. — Vol.6, No.1.
19. *Romanova T. P., Yankovskii A. P.* Constructing yield loci for rigid-plastic reinforced plates considering the 2d stress state in fibers // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 54, No. 6. — P. 697—718.
20. *Romanova T. P., Yankovskii A. P.* Yield loci of reinforced plates made from rigid-plastic unequiresistant materials considering the two-dimensional stress state in fibers 1. Unidirectional reinforcement // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 55, No. 6. — P. 699—714.
21. *Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D. A.* Comparison of bending properties for cellular core sandwich panels // *Mater. Sci. Appl.* — 2013. — Vol. 4, No. 8. — P. 471—477.
22. *Lee C. R., Sun S. J., Kam T. Y.* System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates // *AIAA J.* — 2007. — Vol. 45, No. 9. — P. 2312—2322.
23. *Julien D., Karam S.* Limit analysis of multi-layered plates. Pt. I: The homogenized Love—Kirchhoff model // *J. Mech. Phys. Solids.* — 2008. — Vol. 56, No. 2. — P. 561—580.
24. *Xie Z.* An approximate solution to the plastic indentation of circular sandwich panels // *Mech. Compos. Mater.* — 2018. — Vol. 54, No. 2. — P. 361—370.
25. *Kudin A., Al-Omari M. A. V., Al-Athamneh B. G. M., Al-Athamneh H. K. M.* Bending and buckling of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material // *Int. J. Mech. Eng. Inform. Technol.* — 2015. — Vol. 3, No. 8. — P. 1487—1493.
26. *Yankovskii A. P.* Refined modeling of flexural deformation of layered plates with a regular structure made from nonlinear hereditary materials // *Mech. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 53, No. 6. — P. 1015—1042.
27. *Moskvitin V. V., Starovoitov E. I.* Deformation and variable loading of two-layer metal-polymer plates // *Mech. Compos. Mater.* — 1985. — Vol. 21, No. 3. — P. 267—273.
28. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Suleyman M.* Deformation of a composite plate on an elastic foundation by local loads // *Mech. Compos. Mater.* — 2007. — Vol. 43, No. 1. — P. 75—84.
29. *Zenkour A. M., Alghamdi N. A.* Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates // *J. Sandwich Struct. Mater.* — 2009. — Vol. 12, No. 1. — P. 7—46.

30. *Zenkour A. M., Alghamdi N. A.* Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2010. — Vol. 17, No. 6. — P. 419—432.

31. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Tarlakovskii D. V.* Thermoelastic deformation of a circular sandwich plate by local loads // *Mech. Compos. Mater.* — 2018. — Vol. 54, No. 3. — P. 299—312.

32. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V.* Deformation of an elastoplastic three-layer circular plate in a temperature field // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 55, No. 4. — P. 503—512.

33. *Ильюшин А. А., Огибалов П. М.* Упругопластические деформации полых цилиндров — М.: Изд-во МГУ, 1960. — 224 с.

34. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V.* Deformation of a three-layer rod with a compressible core in a neutron flow // *Int. Appl. Mech.* — 2020. — Vol. 56, No. 1. — P. 81—91.

Поступила в редакцию 22.12.2020

Окончательный вариант поступил 25.03.2021

Received Dec. 22, 2020 (March 25, 2021)
