

*В. М. Ахундов**

Национальная металлургическая академия Украины, Днепропетровск, Украина

**МЕТОД НЕЯВНЫХ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ В МЕХАНИКЕ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОДНОРОДНЫХ
И КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ**

*V. M. Akhundov**

**THE IMPLICIT FINITE DIFFERENCE METHOD
IN THE DEFORMATION MECHANICS OF HOMOGENEOUS
AND PIECEWISE HOMOGENEOUS BODIES**

Keywords: method of finite differences, piecewise homogeneous body, round fibers, square fibers, isotropic cylinder, centrifugal forces

The method of implicit finite differences for solving problems of deformation mechanics of piecewise homogeneous bodies is presented. The method is based on approximating the sought-for quantities by polynomials with indeterminate coefficients. It allows one to approximate the derivatives in resolving equations based on a grid with an irregular, in general, arrangement of nodal points. Relations were given for one-, two-, and three-dimensional approximations of the second-order of accuracy. This method was applied to studying the deformation of an elastic rotating cylinder whose matrix is reinforced in the circumferential directions with one layer of round fibers. The material configuration of the cylinder at large displacements and deformations are presented together with the stresses of contact interaction between the matrix and fibers. Its deformation characteristic, which reflects the continuation of the solution of the problem in terms of rotation speed, is determined. The results obtained are compared with the solution of the problem for a cylinder with square fibers at the same filling found by the methods of implicit finite differences and the traditional method of finite differences. Boundary-value problems for a thick-walled cylinder made of an isotropic material are also solved in nonlinear and linear

*Автор, с которым следует вести переписку: akhundov@ua.fm
Corresponding author: akhundov@ua.fm

formulations with uniform and nonuniform distributions of nodal points across the cylinder thickness, and the results obtained are compared with the exact solution of the corresponding linear problem.

Ключевые слова: метод конечных разностей, тело кусочно-однородное, волокна круглого сечения, волокна квадратного сечения, цилиндр изотропный, силы центробежные

Изложен метод неявных конечных разностей для решения задач механики деформирования кусочно-однородных тел. Метод основывается на аппроксимации искомых величин полиномами с неопределенными коэффициентами, позволяет аппроксимировать производные в разрешающих уравнениях на основе сетки с нерегулярным, в общем, расположением узловых точек. Соотношения неявных конечных разностей приведены для одно-, двух- и трехмерных аппроксимаций второго порядка точности. Метод применили для исследования деформирования эластичного цилиндра под воздействием вращения, матрица которого армирована по окружным направлениям одним слоем волокон круглого сечения. Представлена материальная конфигурация цилиндра при больших перемещениях и деформациях вместе с напряжениями контактного взаимодействия матрицы и волокон. Построена его деформационная характеристика, которая отражает продолжение решения задачи по скорости вращения. Результаты сопоставлены с решением задачи для цилиндра с волокнами квадратного сечения вместо круглого при одинаковом наполнении на основе схемы неявных конечных разностей и традиционного метода конечных разностей. Решены также краевые задачи для толстостенного цилиндра из изотропного материала в нелинейной и линейной постановках при равномерном и неравномерном распределении узловых точек по толщине цилиндра, результаты сравнены с результатами точного решения соответствующей линейной задачи.

Постановка проблемы

Задачи о деформировании композитных тел обычно решаются на основе моделирования их материала с исходным строением как однородного анизотропного с макроскопически эквивалентными свойствами. Преимущество подхода, основанного на определении механических характеристик материала тела по механическим свойствам составляющих компонентов в том, что для его реализации требуются сравнительно небольшие вычислительные ресурсы, сопоставимые с численным исследованием однородного тела. Однако на его основе не выявляются непосредственно внутренние поля в компонентах материала, анализ разрушения имеет ограниченный характер. К тому же формулы для расчетов эффективных модулей основаны

на линейных соотношениях механики деформирования, при которых они применимы в диапазоне достаточно малых деформаций. В случае больших деформаций обычно используют некоторые из эффективных модулей, которые определяют из натуральных экспериментов при частных видах деформирования материала. Выявленные при этом механические характеристики могут быть использованы для исследования тела из испытанного материала лишь при соответственно ограниченных деформациях.

Остановившись в основном на исследованиях цилиндрических тел волокнистого строения, отметим работу [1], где рассмотрена безмоментная цилиндрическая оболочка, однонаправленно армированная волокнами, на основе использования эффективных модулей ее материала. В [2, 3] изучали оболочки из четного количества слоев с перекрестным расположением волокон. Материал каждого из слоев учитывается с помощью его эффективных модулей. Основным материалом цилиндрической оболочки, армированной малорастяжимыми волокнами по перекрестной схеме, рассмотрен как физически нелинейный в [4]. В [5] исследована артерия в виде круговой цилиндрической трубы из двух слоев при больших деформациях, в которых армирующими элементами являются коллагеновые волокна. Потенциальный закон при нелинейно-упругом поведении требует трех материальных констант для каждого из слоев, чтобы учесть совместную реакцию стенки сосуда на воздействие осевого растяжения, давления и кручения, определяемых из эксперимента. В [6] изучали также вязкоупругое деформирование артерии на основе моделирования ее материала как эффективно ортотропного.

Наиболее общий подход в исследовании тел с волокнистой структурой основан на применении модели кусочно-однородной среды. В данной модели матрицу и волокна рассматриваем как контактно взаимодействующие компоненты на основе уравнений механики деформирования с выявлением внутренних полей композитной структуры. В качестве примера укажем работу [7], где представлено исследование металлокомпозита с медной матрицей и вольфрамовыми волокнами при макроскопически однородном поперечном сжатии. Методом конечных элементов (МКЭ) рассчитаны внутренние поля для ограниченной области материала с небольшим количеством нерегулярно расположенных волокон при упругопластическом деформировании компонентов. Конечно-элементное моделирование процессов деформирования волокнистых композитов при больших пластических деформациях и деформациях ползучести изложено в [8]. В [9] построена конечно-элементная модель для характеристики напряженно-деформированного состояния при одноосном растяжении однонаправленно армированного материала. В [10] с помощью сетки плоских конечных элементов исследовано поведение упругопластической балки, армированной в поперечном направлении упругими волокнами квадратного сечения. В [11] на базе соотношений линейной теории упругости решена задача о краевых эффектах в слоистом композитном материале с изотропными слоями постоянной толщины при одноосном нагружении, приближенное решение задачи производится вариационно-разностным методом. В [12] с помощью метода конечных элементов в двух-

мерной постановке исследовано обжатие между двумя жесткими плитами пучка круглых волокон в режимах малой и конечной упругих деформаций.

В рамках двухуровневой каркасной теории отметим применение модели кусочно-однородной среды для блоков представления материала среды [13]. В [14] решение задачи для тела в целом по каркасной теории завершается решением экстремальных задач по высокоградиентной схеме подхода для сборок блоков возле граничной поверхности тела. При круглых волокнах армирующих систем решения микрокраевых задач для блоков материала или их сборок производятся методом локальных вариаций [15] на базе конечно-элементной аппроксимации [16]. В [17] решена задача о больших упругих деформациях многослойного цилиндра с кольцевыми волокнами квадратного сечения под воздействием вращения. Правильные формы осевого сечения цилиндра и сечений волокон в нем обусловили возможность решения задачи о его деформировании методом конечных разностей (МКР). В [18] с помощью метода конечных разностей исследовано поведение трехслойной трубы, армированной волокнами квадратного сечения и нагруженной внутренним давлением.

Важное преимущество МКР по сравнению с МКЭ при исследовании проблематики на основе дифференциальных уравнений — это достаточно простое формирование численных аналогов уравнений задачи в узловых точках её дискретной схемы. Однако данная процедура обычно выполняется на основе стандартной сетки узловых точек, которую можно применять для тела, ограниченного координатными поверхностями. Известны случаи использования неравномерного расположения узловых точек возле граничной поверхности тела неправильной конфигурации, когда они расположены на пересечениях линий сетки с его границей. Применяемые формулы для производных в таких точках имеют частный характер (см., например, [19]). Нерегулярное расположение узловых точек внутри тела и на его граничной поверхности, какое может быть в случае МКЭ, на базе МКР не учитывается.

Существенным обстоятельством является определение напряжений по схеме метода конечных разностей с такой же точностью, с какой находят перемещения, когда в решаемой краевой задаче данные величины рассматривают как взаимно независимые и определяют вместе на основе сформированной системы уравнений. В МКЭ в форме перемещений деформации и напряжения определяют с помощью численного дифференцирования по координатным переменным предварительно найденных из решения задачи перемещений. Данная операция является источником существенных погрешностей, с которыми могут находить указанные величины при сравнительно незначительных погрешностях самих перемещений.

В настоящей работе в рамках расширения возможностей МКР применительно к исследованиям тел кусочно-однородного строения изложена более общая схема метода. Данная схема предполагает наличие неравномерного распределения узловых точек дискретного аналога тела в решаемой для него задаче. Неравномерное распределение узловых точек учитывается на основе полиномиальных аппроксимаций искомых величин с неопреде-

ленными коэффициентами. Коэффициенты аппроксимаций вычисляют в процессе численной реализации задачи, исходя из значений аппроксимируемой функции в узловых точках. Подход применительно к численному дифференцированию одномерных функций как метод неопределенных коэффициентов представлен в [20]; распространяется на вычисление частных производных в двух- и трехмерной проблематиках под названием метода неявных конечных разностей (МНКР). Указанный метод можно применять для решения задач механики деформирования; он основан на прогнозировании решения задачи с последующим его уточнением. Это в одинаковой мере имеет место как для линейных, так и нелинейных формулировок задач.

Схема неявных конечных разностей

Рассмотрим двухмерный случай аппроксимации производных по координатам x и y (обозначим вместо $\hat{\theta}^1$ и $\hat{\theta}^2$). Координаты x и y в общем криволинейные, могут быть прямоугольными декартовыми. В поверхности переменных x и y выделим девять компактно расположенных узловых точек сетки численного решения краевой или экстремальной задачи (рис. 1). Точки расположены неравномерно по приращениям координат с переходом от одной точки к другой, на рисунке их соединили между собой криволинейными отрезками (это может быть отрезок координатной линии или контур разделения областей смежных материалов). Узловые точки дискретной схемы, как и при использовании МКЭ, могут располагаться на произвольных (некоординатных) кривых, порядок которых определяется количеством тех точек, через которые кривые проходят.

Аппроксимируемую функцию, как, например, одну из компонент вектора перемещения или тензора напряжений, обозначим как u . Исходя из значений функции в узловых точках $1, \dots, 9$, искомую величину u в урав-

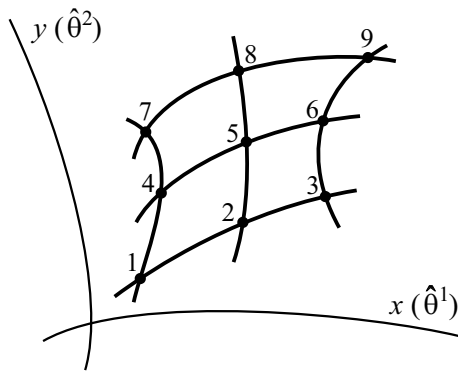


Рис. 1. Конфигурация положений девяти узловых точек для аппроксимации производной по координатам $x (\hat{\theta}^1)$ и $y (\hat{\theta}^2)$.

нениях задачи аппроксимируем полным полиномом второго порядка по обоим координатным переменным:

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9x^2y^2. \quad (1.1)$$

Соответствующие выражения первых производных по координатам имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a_2 + a_4y + 2a_5x + 2a_7xy + a_8y^2 + 2a_9xy^2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= a_3 + a_4x + 2a_6y + a_7x^2 + 2a_8xy + 2a_9x^2y. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Выражения для производных более высокого порядка очевидны и их не приводим. Обозначим значения координат x и y узловых точек $1, \dots, 9$ как $x_1, y_1, \dots, x_9, y_9$, а значения функции в этих точках — как u_1, \dots, u_9 соответственно. Записав выражения значений функции для каждой из узловых точек с помощью (1.1), придем к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно коэффициентов a_1, \dots, a_9

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 + a_4x_1y_1 + \dots + a_9x_1^2y_1^2, \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_9 &= a_1 + a_2x_9 + a_3y_9 + a_4x_9y_9 + \dots + a_9x_9^2y_9^2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Решение данной системы уравнений можно доводить, как в случае обычно применяемого МКР, до получения конечных формул для a_i и применять производные (1.2) в уравнениях задачи, выраженные непосредственно через узловые значения искомой величины. Но данные коэффициенты даже при сравнительно небольшом количестве узловых точек в рассматриваемой конфигурации их расположения находят с помощью столь громоздких выкладок, что такая реализация задачи нецелесообразна.

Решение системы конечно-разностных уравнений задачи о деформировании тела по схеме неявных коэффициентов производим на основе задания начального приближения узловых значений искомых величин и его последующего уточнения. Узловые значения величин уточняем с помощью одного из методов решения систем нелинейных уравнений; в качестве удобного метода назовём дискретный метод Ньютона [21]. Данный метод не требует представления в явном виде уравнений, необходимо знать лишь способ вычисления выражения их левых частей (слева от знака равенства нулю). Метод обладает высокой эффективностью на основе продолжения решения по параметрам нагружения исследуемого тела. В случае линейной задачи продолжения ее решения не требуется, одна итерация метода приводит к искомому решению при любом начальном приближении узловых значений.

СЛАУ (1.3) решаем на основе алгоритма компьютерного решения задачи о деформировании однородного или кусочно-однородного тела. В результате коэффициенты аппроксимации a_1, \dots, a_9 для текущей узловой точки определяем в зависимости от значений функции u_1, \dots, u_9 в узлах включающей конфигурации точек. Линейная форма зависимостей между указанными величинами при рассматриваемом подходе не является востребованной (как особенность рассматриваемого подхода), поэтому приведем их в общем виде:

$$a_1 = a_1(u_1, u_2, \dots, u_9), \dots, a_9 = a_9(u_1, u_2, \dots, u_9)$$

(напоминаем, СЛАУ относительно узловых значений искомым функций и при решении линейной задачи в явном виде не формируется).

Определив a_i , вычисляем в узловой точке требуемые производные (1.2), переходя по ходу численной реализации задачи от одной узловой точки к другой. Это могут быть производные по x и y для точки 5, центральной в конфигурации расположения точек 1, ..., 9. Для других точек производные определяются на основе своих прилегающих конфигураций (наборов) узловых точек, для которых они являются центральными. В случае нахождения производных в точках, расположенных в граничной поверхности тела или в поверхности раздела его составляющих компонентов, используется та же конфигурация узловых точек, которая применяется для вычисления центральных производных.

В качестве другого набора узловых точек для аппроксимации производных на рис. 2 показана конфигурация из восьми неравномерно расположенных узловых точек. Взаимное расположение точек может отличаться от приведенного, но на форму применяемой аппроксимации это не повлияет. На рис. 3 показаны две конфигурации с тремя узловыми точками в каждой из них, расположенными на координатных линиях x и y .

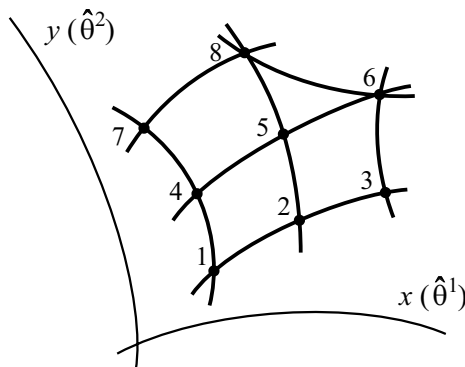


Рис.2. Конфигурация положений восьми узловых точек для аппроксимации производной по координатам $x(\hat{\theta}^1)$ и $y(\hat{\theta}^2)$.

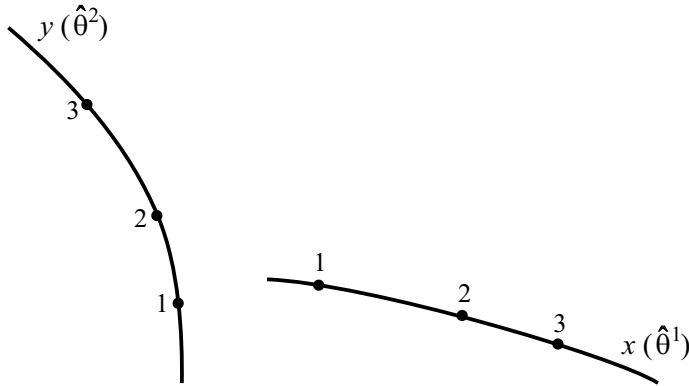


Рис. 3. Конфигурация положений на базе трех узловых точек, расположенных на каждой из координатных линий.

В случае конфигурации из восьми точек для функции и ее производных применяем аппроксимации

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_2 + a_4y + 2a_5x + 2a_7xy + a_8y^2, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a_3 + a_4x + 2a_6y + a_7x^2 + 2a_8xy;$$

в случае конфигурации из трех точек, расположенных вдоль x -координатной линии — аппроксимации

$$u = a_1 + a_2x + a_3x^2; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = a_2 + 2a_3x, \quad (1.6)$$

а расположенных вдоль y -координатной линии —

$$u = a_1 + a_2y + a_3y^2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = a_2 + 2a_3y. \quad (1.7)$$

Соответствующие СЛАУ для определения коэффициентов a_i в (1.4)—(1.7) через значения u_i функции в узловых точках (x_i, y_i) не приводим в силу их очевидности.

При расположении трех узловых точек на координатной линии при равных расстояниях h между ними как приращения координаты при переходе от одной точки к смежной с ней другой выкладки на основе аппроксимаций (1.6), (1.7) существенно упрощаются. В этих случаях приходим к известным формулам [19] для правой, центральной и левой производных по координате в данных точках в соответствии с их расположением на линии. Так, если точки 1, 2, 3 расположены на x -линии и

разделены равными координатными расстояниями h , то для производных по x в этих точках найдем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_1 = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2h}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_2 = \frac{u_3 - u_1}{2h}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_3 = \frac{u_1 - 4u_2 + 3u_3}{2h}. \quad (1.8)$$

Аналогично двумерным аппроксимациям (1.1), (1.2) и (1.4), (1.5), одномерным (1.6) и (1.7) строится и трехмерная аппроксимация величин и их производных на основе, в общем случае, системы криволинейных пространственных координат x, y, z . Данная аппроксимация второго порядка в наиболее полном виде основывается на использовании 27 узловых точек. Положения этих точек определяют конфигурацию косоугольного шестигранника с кривыми гранями и расположением восьми точек в его вершинах, шести — на гранях, 12 — на ребрах и одной — внутри тела. Соответствующие представления аппроксимируемой функции и ее производных записываем как

$$u = \sum_{i,j,k=0}^2 a_{ijk} x^i y^j z^k, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{j,k=0,i=1}^2 i a_{ijk} x^{i-1} y^j z^k, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{i,k=0,j=1}^2 j a_{ijk} x^i y^{j-1} z^k, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sum_{i,j=0,k=1}^2 k a_{ijk} x^i y^j z^{k-1}.$$

Могут также применяться аппроксимирующие полиномы при отсутствии узловых точек на гранях и внутри шестигранника конфигурации их расположения. На рис. 4 изображена конфигурация второго порядка из 20 узловых точек, восемь из которых располагаются в вершинах configura-

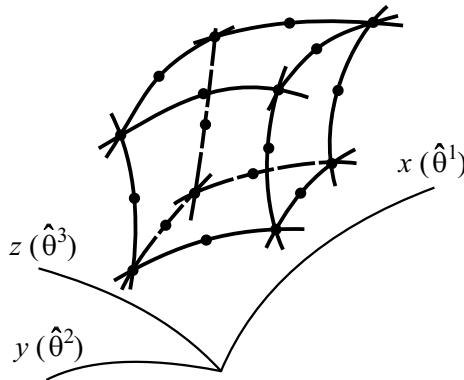


Рис. 4. Конфигурация положений 20 узловых точек для аппроксимации производных по координатам $x(\hat{\theta}^1)$, $y(\hat{\theta}^2)$ и $z(\hat{\theta}^3)$.

ции, а остальные 12 — на ее контурных ребрах. Аппроксимацию функции для данного набора узловых точек представим в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
 u = & a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6yz + a_7xz + a_8x^2 + a_9y^2 + a_{10}z^2 + \\
 & + a_{11}xyz + a_{12}xy^2 + a_{13}xz^2 + a_{14}yz^2 + a_{15}x^2y + a_{16}x^2z + a_{17}y^2z + \\
 & + a_{18}x^2yz + a_{19}y^2xz + a_{20}z^2xy,
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

соответствующие производные очевидны. Полином (1.11) содержит те произведения степеней координатных переменных $x^i y^j z^k$, которые включаются функциями формы трехмерного конечного элемента второго порядка из серендипова семейства [3].

В МНКР производные на основе применяемой конфигурации узловых точек, в отличие от МКЭ, обычно вычисляются для центральной из них. С переходом к другой узловой точке используется иная, включающая ее совокупность узловых точек, — как это имеет место в применяемом методе конечных разностей с определенными коэффициентами. Данный порядок, как и в случае МКР, нарушается на граничной поверхности тела и на поверхностях раздела в нем разнородных материалов. Подход достаточно просто алгоритмируется и может быть распространен на аппроксимации более высоких порядков.

Вместе с тем может применяться и неявная схема метода конечных элементов. Данная версия метода конечных элементов основана на вычислении по неявной схеме коэффициентов a_{ijk} аппроксимации перемещений (1.9) и их производных (1.10). Аппроксимация производится исходя из одной и той же совокупности узловых точек конечного элемента, пока вычисления выполняются для области данного КЭ, — в соответствии с кусочной гладкостью аппроксимируемой функции.

Выполнение трудоемкой процедуры по формированию матрицы жесткости тела (конструкции) не требуется. К тому же ее осуществление возможно лишь на базе линейной или линеаризованной постановки задачи. В случае неявной схемы МКЭ в узловых точках, общих для смежных КЭ, суммируются непосредственно сами уравнения, относящиеся к вариациям перемещений этих точек. Данная процедура более проста, чем формирование матрицы жесткости, ее можно применять как к линейным, так и геометрически и физически нелинейным задачам. Получаемые уравнения метода решаются относительно узловых перемещений на основе непосредственного выполнения в уравнениях операции численного интегрирования. Интегрирование производится по каждому конечному элементу на базе очередного приближения значений его узловых перемещений. В качестве метода, уточняющего приближение узловых перемещений, можно применять дискретный метод Ньютона или один из методов оптимизации [22] с продолжением по истории нагружения.

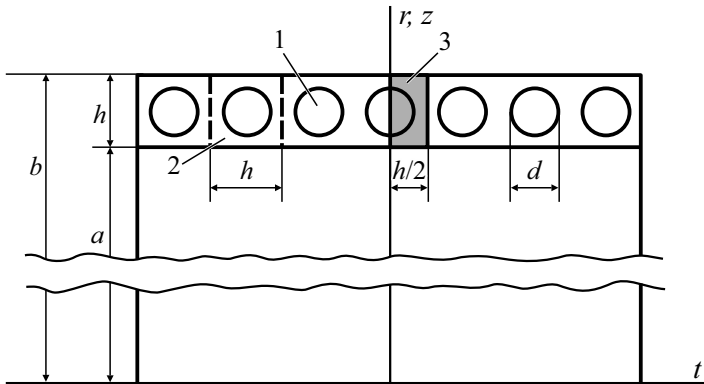


Рис. 5. Осевое сечение цилиндрического тела в исходном состоянии: 1 — волокно круглого сечения; 2 — кольцевой элемент; 3 — половина кольцевого элемента справа от центрального сечения.

Условия постановки задачи

Схема однослойного круглого цилиндра с волокнами кругового сечения, расположенными в нем по окружным направлениям, представлена на рис. 5. Цилиндрическое тело моделировали как сборку кольцевых элементов вдоль горизонтального направления (образующей). Кольцевой элемент представляет собой кольцо квадратного сечения $h \times h$ из эластомерного материала, включающее волокно круглого сечения диаметром d из более жесткого эластомера в качестве его сердцевины. Внутренний радиус цилиндра $r = a$, внешний радиус $r = a + h = b$.

Исследовали осесимметричное деформирование цилиндра под воздействием вращательного движения в условиях деформации, когда перемещения в поперечных по отношению к оси цилиндра граничных поверхностях кольцевых элементов имеют место в плоскостях исходного расположения. В силу условий симметрии задачу решали для правой половины кольцевого элемента, заключенной между поперечными сечениями цилиндра, одно из которых проходит через осевую линию волокна кольцевого элемента ($t = 0$), а другое — через матрицу посередине между осевыми линиями двух волокон в смежных кольцевых элементах ($t = h/2$).

Применяли материальные цилиндрические координаты $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$, обозначаемые как t, φ, r в отсчетной конфигурации цилиндрического тела (осевая, окружная и радиальная координаты соответственно). Осевая координата t отсчитывается от поперечного сечения цилиндра, в котором расположена осевая линия волокна кольцевого элемента. Наряду с радиальной координатой r применяли координату $z = r - a$, отмеряемую от внутренней поверхности цилиндра радиусом a . Физические компоненты векторных и тензорных величин отмечаем координатными индексами, заключенными в круглые скобки. Величины, относящиеся к матрице и волокнам, отмечаем индексом n ; значение $n = 0$ отвечает матрице, $n = 1$ — волокну, также применяем индексы m и f соответственно.

Уравнения математической модели

Исходили из кинематических уравнений нелинейной механики, определяющих компоненты меры деформации Коши—Грина [23]. Для компонент данного тензора при осесимметричной деформации матрицы и волокна в кольцевом элементе цилиндра приходим к выражениям, в соответствии с которыми они определяются как функции осевой и радиальной координат t и r :

$$\begin{aligned}
 g_{n(11)} &= \lambda_{n1}^2 = \left(1 + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t}\right)^2, \\
 g_{n(22)} &= \lambda_{n2}^2 = \left(1 + \frac{u_{n(3)}}{r}\right)^2, \\
 g_{n(33)} &= \lambda_{n3}^2 = \left(1 + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r}\right)^2, \\
 g_{n(13)} &= \lambda_{n1}\lambda_{n3} \cos \omega_{n13} = \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t} + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t} \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r}, \\
 & n = 0, 1
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

(компоненты векторных и тензорных величин, равные нулю в условиях симметрии решаемой задачи, не приводим), где λ_{n1} , λ_{n2} , λ_{n3} — кратности удлинений по направлениям координатных линий θ^1 , θ^2 , θ^3 (t , ϕ , r) соответственно; ω_{n13} — координатный угол между θ^1 - и θ^3 -координатными линиями.

В случае сжимаемых материалов матрицы и волокон компоненты симметричных тензоров напряжений Пиола—Кирхгофа связаны с компонентами тензоров деформации соотношениями

$$J_n \sigma_{n(ij)} = 2 \sum_{p=1}^q \frac{\partial W_n}{\partial I_p} \cdot \frac{\partial I_p}{\partial g_{n(ij)}}, \quad i, j = 1, \dots, 3, \quad n = 0, 1 \quad (J_n = |g_{n(ij)}|^{1/2}), \tag{3.2}$$

где $W_n = W_n [I_1(g_{n(ij)}), I_2(g_{n(ij)}), \dots, I_q(g_{n(ij)})]$ — упругий потенциал материала матрицы ($n = 0$) или волокна ($n = 1$), определяемый в зависимости от инвариантов I_1, I_2, \dots, I_q тензора его деформации; J_n — кратность изменения локального объема компоненты материала.

Уравнения равновесия МДТТ при больших (конечных) деформациях приводят к следующим уравнениям равновесия для связующего и волокна при осесимметричной деформации в метрике отсчетной конфигурации:

$$\frac{\partial t_{n(11)}}{\partial t} r + \frac{\partial t_{n(31)}}{\partial r} r + t_{n(31)} = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial t_{n(13)}}{\partial t} r + \frac{\partial t_{n(33)}}{\partial r} r + t_{n(33)} - t_{n(22)} + \rho_n r F_{n(3)} = 0, \quad (3.3)$$

$$n = 0, 1.$$

Здесь $t_{n(ij)}$ — физические компоненты несимметричного тензора напряжений Пиола для матрицы и волокна, из которых отличные от нуля определяются выражениями

$$\begin{aligned} t_{n(11)} &= J_n \sigma_{n(11)} \left(1 + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t} \right) + J_n \sigma_{n(13)} \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r}, \\ t_{n(13)} &= J_n \sigma_{n(13)} \left(1 + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r} \right) + J_n \sigma_{n(11)} \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} t_{n(31)} &= J_n \sigma_{n(31)} \left(1 + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t} \right) + J_n \sigma_{n(33)} \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r}, \\ t_{n(33)} &= J_n \sigma_{n(33)} \left(1 + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r} \right) + J_n \sigma_{n(31)} \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t}, \\ t_{n(22)} &= J_n \sigma_{n(22)} \left(1 + \frac{u_{n(3)}}{r} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Во втором из уравнений (3.3) при изменении расстояний от материальных точек цилиндра до его оси под воздействием вращения радиальная компонента плотности массовых сил равна

$$F_{n(3)} = (r + u_{n(3)}) \omega^2, \quad n = 0, 1,$$

где $\omega = 2\pi f$ — угловая скорость вращения; f — количество оборотов вращения в секунду.

Компоненты $J\sigma_{(ij)}$ симметричного тензора напряжений Пиола—Кирхгофа выражены через компоненты p_{ij} векторов напряжений на $\hat{\theta}^i$ -координатных поверхностях, отнесенные к нормированному векторному базису системы координат в деформированной конфигурации цилиндра, по формулам [24]

$$\begin{aligned} J\sigma_{(11)} &= \lambda_1^{-1} \lambda_2 \lambda_3 \sin \omega_{23} p_{11}, \quad J\sigma_{(22)} = \lambda_2^{-1} \lambda_1 \lambda_3 \sin \omega_{13} p_{22}, \\ J\sigma_{(33)} &= \lambda_3^{-1} \lambda_1 \lambda_2 \sin \omega_{12} p_{33}, \quad J\sigma_{(13)} = \lambda_2 \sin \omega_{23} p_{13}, \\ J\sigma_{(31)} &= \lambda_2 \sin \omega_{12} p_{31} \quad (= J\sigma_{(13)}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

(индекс “ n ” принадлежности матрице или волокну опускаем).

Формулировка краевой задачи и схема ее численного решения

Геометрические уравнения (3.1), физические (определяющие) уравнения (3.2) и уравнения равновесия (3.3) вместе с (3.4), (3.5) являются разрешающими уравнениями краевой задачи для кусочно-однородного цилиндра. Компоненты векторов перемещений $u_{n(1)}$, $u_{n(3)}$ и компоненты тензоров напряжений $t_{n(11)}$, $t_{n(13)}$, $t_{n(31)}$, $t_{n(33)}$ в матрице и волокнах принимали в качестве основных величин. Содержащиеся в разрешающих уравнениях компоненты тензора меры деформации $g_{n(11)}$, $g_{n(22)}$, $g_{n(33)}$, $g_{n(13)}$ и компоненту тензора напряжений $t_{n(22)}$ выражали через основные величины с помощью (3.1), (3.2) и (3.5).

Граничные условия для связующего и волокна цилиндра, при которых решали краевую задачу, выражают отсутствие осевых перемещений в поверхностях $t = 0$ и $t = h/2$ и поперечных сдвигов из этих поверхностей:

$$u_{n(1)}|_{t=0} = 0, \quad g_{n(13)}|_{t=0} = 0, \quad u_{n(1)}|_{t=h/2} = 0, \quad g_{n(13)}|_{t=h/2} = 0, \quad (4.1)$$

$$n = 0, 1.$$

При свободных от нагрузок внутренней и внешней поверхностях $r = a$ и $r = b$ условия в них приводим к тривиальному виду

$$t_{m(31)}|_{r=a} = 0, \quad t_{m(33)}|_{r=a} = 0, \quad (4.2)$$

$$t_{m(31)}|_{r=b} = 0, \quad t_{m(33)}|_{r=b} = 0,$$

где индексом m отметили величины в граничных поверхностях как относящиеся к матрице (связующему).

Условия совместного деформирования задавали равенствами компонент векторов перемещений и напряжений для матрицы и волокна между собой в границах их раздела

$$u_{m(1)}(t, r) = u_{f(1)}(t, r), \quad u_{m(3)}(t, r) = u_{f(3)}(t, r), \quad (4.3)$$

$$t_{m(11)}(t, r)\overset{\circ}{n}_1 + t_{m(31)}(t, r)\overset{\circ}{n}_3 = t_{f(11)}(t, r)\overset{\circ}{n}_1 + t_{f(31)}(t, r)\overset{\circ}{n}_3, \quad (4.4)$$

$$t_{m(13)}(t, r)\overset{\circ}{n}_1 + t_{m(33)}(t, r)\overset{\circ}{n}_3 = t_{f(13)}(t, r)\overset{\circ}{n}_1 + t_{f(33)}(t, r)\overset{\circ}{n}_3,$$

$$(t, r) \in A_{mf},$$

где $\overset{\circ}{n}_1$, $\overset{\circ}{n}_3$ — компоненты вектора ориентации поверхности (контура) A_{mf} раздела матрицы с волокном в недеформированном состоянии.

Производные первого порядка от основных величин по осевой и радиальной координатам t и r аппроксимировали с помощью конечно-разностных соотношений второго порядка точности по схеме неявных коэффициентов (1.2), (1.5) или из соотношений (1.6), (1.7) в зависимости от позиционирования узловых точек.

Для каждой из внутренних точек конечно-разностной сетки узловых точек в поперечном сечении кольцевого элемента формируются разностные аналоги двух уравнений равновесия (3.3) и четырех физических уравнений (3.4). Уравнения (3.4) в дискретном виде образуем с использованием определяющих соотношений (3.2) и деформационных (3.1). В точках граничных поверхностей кольцевого элемента с применением (3.1) составляем конечно-разностные аналоги двух соответствующих граничных условий из (4.1), (4.2) и четырех физических уравнений (3.4).

Если узловая точка принадлежит границе раздела составляющих компонентов A_{mf} , то такую точку рассматриваем как сдвоенную, одна из сдвоенных точек считается принадлежащей матрице, а другая — волокну. На одной стороне поверхности раздела компонентов материала формируем два уравнения непрерывности перемещений (4.3) и физические уравнения для материала в ней (3.4); на другой — два уравнения непрерывности напряжений (4.4) вместе с физическими уравнениями для материала в этой же стороне (3.4). Таким образом, всего составляем по шесть уравнений для каждой из совмещенных узловых точек, как и для всех остальных узловых точек в сечении кольцевого элемента.

Особенностью применяемой схемы численного решения задачи является формирование конечно-разностных аналогов уравнений равновесия только во внутренних точках областей, занимаемых в теле отдельными компонентами (матрицей и волокнами) материала. Тогда как численные аналоги физических уравнений формируются во всех узловых точках дискретной схемы задачи: во внутренних точках, точках во внешней граничной поверхности тела и в поверхностях раздела фазовых материалов.

Сформированную систему нелинейных уравнений относительно основных величин в узловых точках двумерной области $0 \leq t \leq h/2$, $a \leq r \leq a+h$ решали на основе процедуры дискретного метода Ньютона. Устойчивую реализацию краевой задачи обеспечивали продолжением решения по угловой скорости вращения цилиндра. В результате решения краевой задачи при задаваемой конечной скорости вращения с привлечением (3.6) определяли узловые значения компонент вектора перемещений $u_{n(i)}$ и тензора напряжений $t_{n(ij)}$, деформаций λ_{ni} , ω_{nij} и напряжений p_{nij} для матрицы ($n=0$) и волокна ($n=1$).

Компоненты вектора напряжений на границе раздела матрицы с волокном относительно системы координат в исходном состоянии, отнесенные к единице деформированной площади, вычисляли по формулам

$$\sigma_{(1)} = (\dot{n}_{(1)} t_{(11)} + \dot{n}_{(3)} t_{(31)})(dA / d\dot{A})^{-1},$$

$$\sigma_{(3)} = (\dot{n}_{(1)} t_{(13)} + \dot{n}_{(3)} t_{(33)}) (dA / d\dot{A})^{-1},$$

$$dA / d\dot{A} = J(g^{(ij)} \dot{n}_{(i)} \dot{n}_{(j)})^{1/2}, \quad i, j = 1, 3$$

(индекс принадлежности компоненте материала для применяемых здесь величин опускаем), где $\dot{n}_{(1)}, \dot{n}_{(3)}$ — отличные от нуля компоненты единичного вектора внешней нормали поверхности раздела волокна с матрицей в недеформированном состоянии; $dA/d\dot{A}$ — кратность локального изменения площади поверхности раздела компонентов в результате деформирования; J — кратность локального изменения объема материала по одну или другую сторону раздела; $g^{(ij)}$ — компоненты тензора, обратного мере деформации Коши—Грина.

Нормальное и касательное напряжения контактного взаимодействия σ_n и τ_n находили как

$$\sigma_n = \sigma_{(1)}n_{(1)} + \sigma_{(3)}n_{(3)}, \quad \tau_n = -\sigma_{(1)}n_{(3)} + \sigma_{(3)}n_{(1)}$$

(растягивающее напряжение σ_n и касательное на стороне волокна τ_n , направленное против часовой стрелки, положительны). Здесь $n_{(1)}, n_{(3)}$ —

отличные от нуля компоненты вектора ориентации $\mathbf{n} = n_{(i)} \mathring{\mathbf{r}}_i = n_m \mathbf{r}^m$, $i, m = 1, 3$, деформированной поверхности раздела относительно системы цилиндрических координат в исходной конфигурации; $\mathring{\mathbf{r}}_1, \mathring{\mathbf{r}}_3$ — базисные векторы с осевым и радиальным направлениями, единичной длины и ортогональные между собой для используемых координат. Компоненты $n_{(1)}, n_{(3)}$ вектора ориентации поверхности раздела в деформированном состоянии определяли через компоненты n_1, n_3 данного вектора относительно деформированного координатного базиса по формуле

$$n_{(i)} = n_m g^{(mk)} \left(\delta_k^i + \frac{\partial u_{(i)}}{\partial \hat{\theta}^k} \right), \quad i, m, k = 1, 3 \quad (\hat{\theta}^1 = t, \hat{\theta}^3 = r). \quad (4.5)$$

Формулы связи между компонентами векторов ориентаций деформированной и недеформированной поверхностей в свою очередь имеют вид [23]

$$n_m = \left(g^{(jl)} \dot{n}_{(j)} \dot{n}_{(l)} \right)^{\frac{1}{2}} \dot{n}_{(m)}, \quad m, j, l = 1, 3 \quad (4.6)$$

Соотношения (4.5) получили, используя зависимости между взаимными и основными векторами деформированного базиса $\mathbf{r}^m = g^{(mk)} \mathbf{r}_k$, $k, m = 1, 3$, и зависимости между векторами деформированного и исходного базисов $\mathbf{r}_k = (\delta_k^i + \partial u_{(i)} / \partial \hat{\theta}^k) \mathring{\mathbf{r}}_i$, $i, k = 1, 3$. Величины $n_{(i)}$ и n_m определяем, вычисляя в (4.5) и (4.6) односторонние производные по координатным переменным t ($\hat{\theta}^1$) и r ($\hat{\theta}^3$) из контактной поверхности.

Результаты численного исследования

Результаты численного исследования представляем для тонкостенного цилиндра, внутренний радиус которого $a = 100$ мм, толщина стенки $h = 1$ мм,

внешний радиус $b = a + h = 101$ мм (см. рис. 5). Волокна в нем кольцевые круглого сечения диаметром $d_f = \sqrt{4 \cdot 0,36 / \pi} = 0,677$ мм. Расстояние между осевыми линиями смежных волокон равно толщине стенки цилиндра $h = 1$ мм. Коэффициент армирования цилиндра $k_f = \pi d^2 / 4 / h^2 = 0,36$, плотность материалов матрицы и волокон $\rho_m = \rho_f = 1,1 \cdot 10^3$ кг/м³. Физические уравнения для материала матрицы строили, используя потенциал Левинсона—Буржеса [4]

$$W_m = \frac{E_m}{4(1+\nu_m)} \left[\beta_m (I_1 - 3) + (1 - \beta_m)(I_2 I_3^{-1} - 3) + 2(1 - 2\beta_m)(\sqrt{I_3} - 1) + \left(2\beta_m + \frac{4\nu_m - 1}{1 - 2\nu_m} \right) (\sqrt{I_3} - 1)^2 \right], \quad (5.1)$$

где I_1, I_2, I_3 — инварианты тензора меры деформации Коши—Лагранжа. Параметры E_m, ν_m характеризуют жесткость и сжимаемость материала; β_m — дополнительная константа материала. Для модуля упругости связующего принимали $E_m = 4$ МПа, параметр сжимаемости $\nu_m = 0,46$, параметр β_m считали равным единице. Поведение материала волокон моделировали потенциалом Блейтца [4]

$$W_f = \frac{E_f}{4(1+\nu_f)} \left[(I_1 - 3) - \frac{2}{1 - 2\nu_f} \ln \sqrt{I_3} + \frac{4\nu_f}{1 - 2\nu_f} (\sqrt{I_3} - 1) \right]$$

с модулем упругости $E_f = 68$ МПа и параметром сжимаемости $\nu_f = 0,40$.

Результаты приводим на основе сетки узловых точек 25×25 для целого поперечного сечения кольцевого элемента, считая две совмещенные точки на контуре раздела матрицы и волокна как одну.

На рис. 6 для большей наглядности изобразили материальные конфигурации поперечного сечения полного кольцевого элемента, заключенного между сечениями цилиндра $t = 0$ и $t = h$, в исходном и деформированном при $\omega = 2\pi \cdot 130$ с⁻¹ состояниях. Визуализацию координатных линий и контура сечения волокна производили с помощью интерполяционных кубических сплайнов. Ограничивающие поверхности цилиндрического тела под воздействием вращения приобретают волнообразную форму (гофрируются) с периодом вдоль образующей, равным периоду армирования h . Стрелы прогибов волнообразования (двойные амплитуды) во внутренней и внешней поверхностях оболочки, определяемые как

$$f_a = |u(3) |_{t=0, r=a} - u(3) |_{t=h/2, r=a}|,$$

$$f_b = |u(3) |_{t=0, r=b} - u(3) |_{t=h/2, r=b}|,$$

несущественно различаются между собой. При указанной скорости вращения $f_a = 0,102$ мм, $f_b = 0,098$ мм их различие равно 4%. Срединная

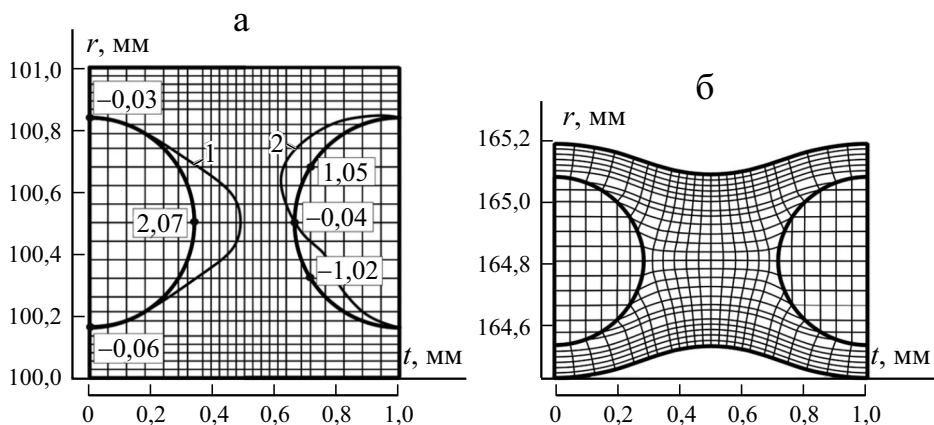


Рис. 6. Исходная (а) и деформированная (б) при $\omega = 2\pi \cdot 130 \text{ с}^{-1}$ конфигурации осевого сечения кольцевого элемента цилиндра с волокнами круглого сечения: 1 и 2 — распределения нормального σ_n и касательного τ_n напряжений соответственно на левой и правой половинах контура раздела матрицы и волокна; для характерных точек на левой половине контура указаны значения σ_n , на правой половине контура — значения τ_n .

поверхность $z = h/2$ ($r = a + h/2$) в деформированном теле остается практически цилиндрической. В целом материальная конфигурация цилиндрического тела в деформированном состоянии близка к цилиндрически симметричной относительно поверхности $r = a + h/2$ в силу тонкой стенки тела.

Площадь сечения кольцевого элемента, поперечного по отношению к его осевой линии, как и поперечного сечения волокна, в достигнутом состоянии становится в 1,5 раза меньше, чем в исходном. В целом объем, занимаемый материалом цилиндра, возрастает на 8% по сравнению с исходным состоянием — как следствие сжимаемости материалов матрицы и волокна. Поперечное сечение волокна в деформированном состоянии приобретает слабую эллипсоидальность, характеризуемую отношением между осями сечения с ориентациями по t - и r -направлениям, равным 1,06. Данное изменение геометрии при деформировании объясняется слабыми удлинением и укорочением по t - и r -направлениям в поперечном сечении волокна под воздействием мягкой матрицы.

Были также проведены расчеты цилиндров, армированных волокнами квадратного сечения, по методу неявных конечных разностей. Результаты совпали с результатами расчетов данных цилиндров по методу конечных разностей — в силу вырождения формул (1.2) или (1.5) в формулы МКР с определенными коэффициентами (1.8) для производных по соответствующим координатам t и r в качестве x .

На рис. 7 приведены исходная и деформированная при $\omega = 2\pi \cdot 130 \text{ с}^{-1}$ конфигурации кольцевого элемента цилиндра с волокнами квадратного

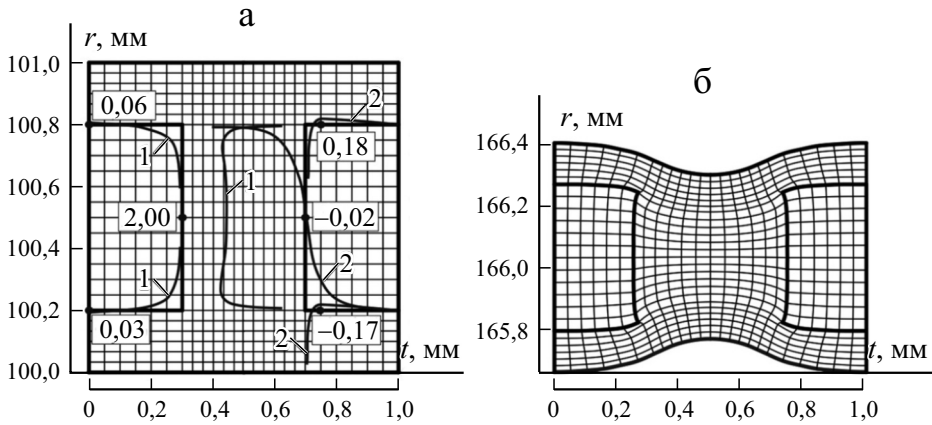


Рис. 7. То же для кольцевого элемента цилиндра с волокнами квадратного сечения.

сечения $\delta \times \delta = 0,6 \times 0,6$ мм (площадь поперечного сечения та же, что и круглых волокон при одинаковом наполнении $k_f = 0,36$). Остальные геометрические и физические параметры цилиндра такие же, как у рассмотренного с круглыми волокнами. Отметим несколько большие амплитуды волнообразования во внутренней и внешней поверхностях, когда $f_a = 0,106$ мм, $f_b = 0,103$ мм. При этом в деформированном состоянии площади поперечного сечения кольцевого элемента и волокна в нем практически такие же, как для цилиндра с круглыми волокнами.

Вместе с изображениями недеформированных конфигураций кольцевых элементов с круглым и квадратным волокнами (рис. 6—а и 7—а) представили графики распределения нормального σ_n и касательного τ_n напряжений на поверхности раздела волокна с матрицей со стороны волокна. Кривые строили, откладывая на нормалях к разделяющим контурам величины соответствующих напряжений. График нормального напряжения σ_n построили на границе раздела для левой половины волокна, а касательного напряжения τ_n — на границе раздела для правой половины волокна.

Отметим малые напряжения обжатия на поверхности круглого волокна и растяжения на поверхности квадратного волокна в достаточно узких окрестностях центрального сечения $t = 0$ по сравнению с растягивающими напряжениями на поверхностях волокон в окрестностях их срединных окружностей $t = d/2$, $z = h/2$ и $t = \delta/2$, $z = h/2$. Значения растягивающих напряжений на этих окружностях оказываются близки: $\sigma = 2,07$ и $2,00$ МПа для волокон круглого и квадратного сечений соответственно. Результаты в случае волокон квадратного сечения для его угловых точек (окружных линий) являются формальными в силу их особого (нерегулярного) характера [25]. С увеличением степени дискретизации напряжения в этих точках сильно возрастают, а окрестности этих точек сильно уменьшаются. Поэтому при подходе к данным точкам приводимые кривые напряжений обрываем.

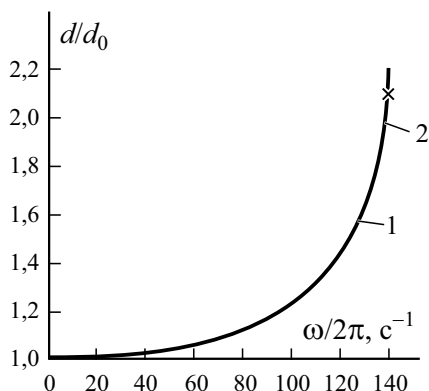


Рис. 8. Зависимость кратности изменения диаметров цилиндров с волокнами круглого (1) и квадратного (2) сечений от скорости вращения $\omega / 2\pi$; “x” — конечная точка кривой зависимости для цилиндра с круглыми волокнами.

На рис. 8 показаны зависимости кратности изменения диаметральных размеров d / d_0 цилиндрических тел с волокнами круглого и квадратного сечений от угловой скорости вращения ω . В данной зависимости $d_0 = 2b$ и $d = d_0 + 2u_b$ — диаметры цилиндра в исходном и деформированном состояниях; $u_b = u_{(3)} |_{t=0, z=h}$ — перемещение в радиальном направлении точек внешней поверхности цилиндра по месту сечения $t = 0$. Обе кривые совпадают в пределах погрешности их графического представления на задаваемом интервале изменения скорости вращения. Исключением является малая окрестность значения $\omega = 2\pi \cdot 140 \text{ с}^{-1}$, близкого к предельному значению скорости вращения, на которой диаметр цилиндра с квадратными волокнами заметно больше, чем с круглыми волокнами.

В табл. 1 приведены значения радиальных перемещений $u_{(3)} |_{t=0, z=0}$ и $u_{(3)} |_{t=0, z=h}$ внутренней и внешней поверхностей цилиндров с волокнами круглого и квадратного сечений при разной скорости вращения. В диапазоне $0 \leq \omega / 2\pi \leq 115 \text{ с}^{-1}$ значения $u_{(3)}$ цилиндра с круглыми волокнами незначительно превосходят соответствующие перемещения цилиндра с квадратными волокнами, различия изменяются примерно от 1% при малых скоростях вращения до 0 при $\omega / 2\pi \approx 115 \text{ с}^{-1}$. При $\omega / 2\pi > 115 \text{ с}^{-1}$ перемещения цилиндра с квадратными волокнами становятся большими, чем с круглыми волокнами. При этом существенные различия достигаются лишь вблизи предельной скорости вращения, практически одинаковой для обоих цилиндров. На это влияет неодинаковое распределение армирующего материала в цилиндрах с волокнами с разной формой поперечного сечения.

Аналитическое решение в конечных формулах исходной задачи и даже предельной при волокнах из связующего материала, которая остаётся геометрически и физически нелинейной, не представляется возможным. Чтобы убедиться в достоверности реализации предельной задачи, наряду с ней решили соответствующую задачу по соотношениям линейной теории

Табл. 1

Значения перемещения внутренней и внешней поверхностей цилиндров с круглыми (числитель) и квадратными (знаменатель) волокнами

$\omega/2\pi$	20	40	100	120	130	135	140
$u_{(3)} _{t=0, z=0}$, мм	0,6271	2,6052	22,915	43,582	64,431	81,984	110,78
	0,6208	2,5790	22,743	43,664	65,663	85,424	122,79
Разность, %	1,00	1,01	0,75	-0,19	-1,91	-4,20	-10,8
$u_{(3)} _{t=0, z=h}$, мм	0,6235	2,5905	22,802	43,391	64,180	81,690	110,43
	0,6171	2,5641	22,628	43,468	65,401	85,114	122,40
Разность, %	1,03	1,02	0,76	-0,18	-1,90	-4,19	-10,8

упругости, формально — в двухмерной постановке с дискретизациями в случае цилиндров с волокнами квадратного и круглого сечений. Перемещения на основе данных дискретизаций совпали между собой, а также с результатами точного аналитического решения по конечным формулам из [26], до пятой значащей цифры включительно. Результаты решения предельной задачи в нелинейной постановке продемонстрировали высокую сходимость к точному решению соответствующей линейной задачи с уменьшением скорости вращения цилиндрического тела.

Решили также задачу для толстостенного цилиндра из изотропного материала в нелинейной и линейной одномерных постановках, результаты по которым сопоставили с результатами аналитического решения. Внутренний и внешний радиусы цилиндра $a = 100$ мм, $b = 200$ мм. Материал цилиндра такой, как связующее в армированных волокнами цилиндрах, граничные условия аналогичны. Численные решения выполняли на базе узловых точек с равномерным и неравномерным расположением по радиальной координате (рис. 9). Неравномерное расположение точек получали исходя из равномерного смещением точек с четными номерами относительно точек с нечетными номерами при неизменяемом положении последних. В случае аппроксимации второго порядка (по трём точкам) результаты расчётов практически не зависели от взаимного расположения точек, хотя соседние промежутки между ними могли различаться в десятки раз. Но при некотором дальнейшем сближении чётных точек с нечетными практически скачкообразно происходила потеря устойчивости расчёта. Результаты расчётов получались с высокой точностью при сравнительно небольшом количестве узловых точек.

Качественно иная картина — при линейной (по двум точкам) аппроксимации. Количество узловых точек при их равномерном расположении потребовалось на порядок больше, чем в случае аппроксимации второго порядка, для достижения одинаковой с ней погрешности в пределах 1% по отношению к точным результатам. При сближении положений четных точек с нечетными устойчивость расчёта сохраняется. Точность результатов решения задачи снижается с уменьшением расстояния между сближаемы-

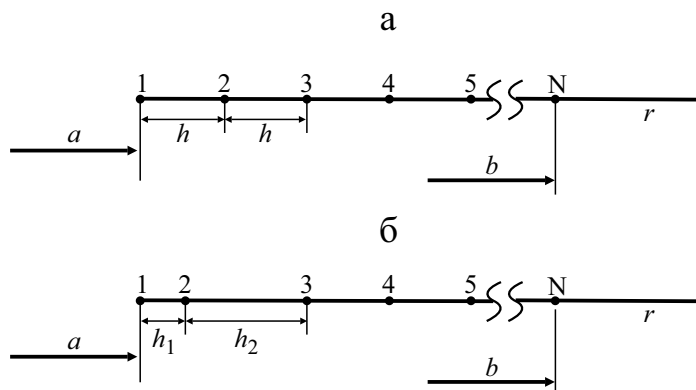


Рис. 9. Равномерное (а) и неравномерное (б) расположение узловых точек по радиальной координате для изотропного цилиндра: $a = 100$ мм, $b = 200$ мм; N — общее нечетное количество узловых точек; $h_1 + h_2 = 2h$.

ми точками. Стремится к той точности, которая достигается при меньшем в два раза количестве одинаковых промежутков между узловыми точками, получаемых при изъятии точек с четными номерами.

В табл. 2 приведены значения радиального перемещения u_a внутренней поверхности цилиндра, найденные при $\omega = 2\pi \cdot 10$ с⁻¹ из решения краевой задачи в линейной постановке. Аппроксимации первого и второго порядков выполняли с использованием равномерного расположения узловых точек $h_1 = h_2 = h$ и неравномерного, когда соседние промежутки между точками были равны $h_1 = 0,2h$, $h_2 = 1,8h$. В круглых скобках — различие значений перемещения из численного решения задачи и перемещения $u_a = 3,394251$, найденного по формулам точного решения (точное значение перемещения внешней поверхности $u_b = 1,939572$). Изменение этих различий с переходом от одной плотности расположения узлов к другой достаточно чётко отражает линейную и квадратичную сходимость для применяемых аппроксимаций. Такая же точность результатов достигается по всем величинам деформированного состояния во всех узловых точках по толщине стенки цилиндра.

В табл. 3 представлены значения радиального перемещения внутренней и внешней поверхностей цилиндра при разной скорости вращения из численного решения краевой задачи в нелинейной и линейной постановках и точного решения линейной задачи. Численные решения задачи были выполнены на базе аппроксимации второго порядка при общем количестве точек дискретизации $N = 161$. Данные представлены для равномерного по толщине цилиндра расположения узловых точек, поскольку неравномерность расположения, особенно при таком их количестве, практически не сказывается. При больших перемещениях численное и аналитическое решения линейной задачи имеют, разумеется, формальный характер. Из решения нелинейной задачи нашли угловую скорость вращения $\omega = 2\pi \cdot 37$ с⁻¹ как

Табл. 2

Значения перемещения внутренней поверхности изотропного цилиндра ($a = 100$ мм, $b = 200$ мм) при $\omega = 2\pi \cdot 10$ с⁻¹ из решений краевой задачи в линейной постановке

N	Аппроксимация первого порядка		Аппроксимация второго порядка	
	$h_1 = h_2 = h$	$h_1 = 0,2h$ $h_2 = 1,8h$	$h_1 = h_2 = h$	$h_1 = 0,2h$ $h_2 = 1,8h$
11	3,835521 (13,0005%)	4,117346 (21,3035%)	3,427536 (0,9806%)	3,428572 (1,0112%)
21	3,609545 (6,3429%)	3,747731 (10,4141%)	3,402725 (0,2497%)	3,403911 (0,2846%)
41	3,500575 (3,1325%)	3,568789 (5,1422%)	3,396381 (0,0628%)	3,396773 (0,0743%)
81	3,447084 (1,5565%)	3,480947 (2,5542%)	3,394784 (0,0157%)	3,394893 (0,0189%)
161	3,420585 (0,7758%)	3,437453 (1,2728%)	3,394384 (0,0039%)	3,394413 (0,0048%)

близкую к предельной, при которой в условиях отсутствия разрушения конфигурация цилиндра неограниченно развивается. Приведенные резуль-

Табл. 3

Значения перемещения внутренней (числитель) и внешней (знаменатель) поверхностей изотропного цилиндра ($a = 100$ мм, $b = 200$ мм) под воздействием вращения из решений краевой задачи в нелинейной и линейной постановках и точного решения линейной задачи

$\frac{\omega}{2\pi}$, с ⁻¹	Нелинейная теория упругости	Линейная теория упругости	Точное решение по линейной теории упругости
2,5	<u>0,21274</u>	<u>0,21215</u>	<u>0,21214</u>
	0,12161	0,12123	0,12122
5	<u>0,85807</u>	<u>0,84860</u>	<u>0,84856</u>
	0,49109	0,48492	0,48489
10	<u>3,55213</u>	<u>3,39438</u>	<u>3,39425</u>
	2,04292	1,93967	1,93957
20	<u>16,6025</u>	<u>13,5775</u>	<u>13,5770</u>
	9,78121	7,75868	7,75829
30	<u>54,3049</u>	<u>30,5495</u>	<u>30,5483</u>
	34,2008	17,4570	17,4562
35	<u>118,090</u>	<u>41,5812</u>	<u>41,5796</u>
	81,4048	23,7610	23,7598
37	<u>220,022</u>	<u>46,4691</u>	<u>46,4673</u>
	166,709	26,5541	26,5527

таты отражают характер сходимости результатов нелинейного решения задачи к линейному с уменьшением скорости вращения цилиндра.

Заключение

Изложен метод неявных конечных разностей (МНКР), который удобно использовать при нерегулярном расположении узловых точек дискретной схемы тела в задаче о его деформировании. Данный метод можно использовать при исследовании тел с неправильной конфигурацией и неправильными формами включений. Применяемый метод позволяет исходя из формулировки краевой задачи в перемещениях и напряжениях как независимых между собой основных величин разрешающей системы уравнений определять напряжения с более высокой точностью, чем МКЭ в форме метода перемещений. Отметим и более простую реализацию проблематики, особенно нелинейной, с помощью МНКР, чем в случае МКЭ на базе вариационной формулировки, использующей кусочную аппроксимацию искомых функций. (Разумеется, если задача решается на основе экстремальной формулировки, предполагающей прямую оптимизацию функционала состояния, то конечно-элементная аппроксимация альтернативы по схеме конечных разностей не имеет.)

Получение на основе изложенного подхода результатов высокой точности продемонстрировали на примерах исследования вращающихся цилиндров с волокнами круглого и квадратного сечений. Поведение цилиндров с разными волокнами при одинаковом наполнении заметно различается лишь при приближении скорости вращения к предельной, когда сказывается неодинаковое распределение материала волокон в цилиндрах при разной форме их поперечных сечений. Достоверность компьютерной реализации непосредственно подтверждается результатами решения задачи для цилиндра, армированного квадратными волокнами, методом конечных разностей с определенными коэффициентами.

Возможности подхода были также проиллюстрированы результатами решения краевой задачи в нелинейной и линейной постановках для вращающегося толстостенного цилиндра из изотропного материала. Краевую задачу решали с применением аппроксимации первого и второго порядков для основных величин на базе равномерного и неравномерного распределения узловых точек по толщине стенки цилиндра. Результаты численных реализаций сопоставили с результатами аналитического решения линейной задачи в конечных формулах. Выявили высокую точность решения задачи в случае квадратичной аппроксимации при достаточно неплотной сетке узловых точек, которая практически не зависела от их неравномерного расположения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. — Рига: Зинатне, 1980. — 572 с.
2. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. — М.: Машиностроение, 1988. — 288 с.
3. Куричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. — К.: Наук. думка, 2002. — 655 с.
4. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. — Л.: Машиностроение, 1986. — 336 с.
5. Holzapfel G. A., Gasser T. C., and Ogden R. W. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models // J. Elasticity. — 2000. — Vol. 61. — P. 1—48.
6. Holzapfel G. A., Gasser T. C., and Stadler M. A structural model for the viscoelastic behavior of arterial walls: Continuum formulation and finite element analysis // Eur. J. Mech. A / Solids. — 2002. — Vol. 21. — P. 441—463.
7. Poole W. J., Embury J. D., MacEwen S., and Kocks U. Large strain deformation of a copper–tungsten composite system. 1. Strain distribution // Philosoph. Mag. A. — 1994. — Vol. 69, No. 4. — P. 645—665.
8. Nicolaou P. D., Piehler H. R., and Saigal S. Process parameter selection for the consolidation of continuous fiber reinforced composites using finite element simulations // Int. J. Mech. Sci. — 1995. — Vol. 37, No. 7. — P. 669—690.
9. Gotoh M. and Idris A. B. M. Finite-element simulation of deformation of fiber-reinforced materials in the plastic range. Model proposition and tensile behaviors // JSME Int. J. Ser. A. Mech. Mater. Eng. — 1997. — Vol. 40, No. 2. — P. 149—157.
10. Banks-Sills L. and Leiderman V. Macro-mechanical material model for fiber reinforced metal matrix composites // Composites: Part B. — 1999. — Vol. 30, Jan. — P. 443—452.
11. Коханенко Ю. В. Численное исследование краевых эффектов в слоистых композитах при одноосном нагружении // Прикл. механика. — 2010. — Т. 46, № 5. — С. 29—45.
12. Sockalingam S., Gillespie J. W., and Keefe M. On the transverse compression response of Kevlar KM2 using fiber-level finite element model // Int. J. Solids Struct. — 2014. — Vol. 51, June. — P. 2504—2517.
13. Ахундов В. М. Формоизменения торообразного тела с перекрестным расположением волокон на основе двухуровневой каркасной теории // Механика композит. материалов. — 2017. — Т. 53, № 2. — С. 359—378.
14. Ахундов В. М. Метод расчета приповерхностного эффекта в кусочно-однородных телах при больших деформациях на основе двухуровневого подхода // Механика композит. материалов. — 2020. — Т. 56, № 2. — С. 253—278.
15. Черноусько Ф. Л., Баничук В. П. Вариационные задачи механики и управления. — М.: Наука, 1973. — 238 с.
16. Зенкевич О. К., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. — М.: Мир, 1986. — 312 с.
17. Ахундов В. М., Кострова М. М. Нелинейное деформирование кусочно-однородного цилиндра под воздействием вращения // Механика композит. материалов. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 345—360.
18. Ахундов В. М., Наумова И. Ю., Забродская А. А. Эластоармированная труба из трех слоев с кольцевыми волокнами под воздействием внутреннего давления // Вісник Запорізького нац. ун-ту. — 2019. — № 1. — С. 4—13.

19. *Шун Т.* Решение инженерных задач на ЭВМ. — М.: Мир, 1982. — 238 с.
20. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 600 с.
21. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — М.: Мир, 1975. — 558 с.
22. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. — М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2002. — 824 с.
23. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
24. *Ахундов В. М.* Анализ эластомерных композитов на основе систем волокон. 1. Разработка методики расчета композитных материалов // *Механика композит. материалов.* — 1998. — Т. 34, №6. — С. 733—745.
25. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. — М.: Наука, 1981. — 688 с.
26. *Пономарев С. Д.* Расчеты на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарев и др. — 1959. — Т. 3. — С. 32—41.

Поступила в редакцию 26.10. 2020

Окончательный вариант поступил 18.06.2021

Received Oct. 26, 2020 (June 18, 2021)
