

*А. Н. Полилов\*, О. Ю. Склемина, Н. А. Татусь*

*Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия*

## **МЕТОД ПРОЕКТИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ АРМИРОВАНИЯ СИММЕТРИЧНЫМИ ПАРАМИ СЛОЕВ НА ПРИМЕРЕ КОМПОЗИТНОГО БАЛЛОНА ДЛЯ СЖАТОГО ГАЗА**

*A. N. Polilov, O. Yu. Sklemina and N. A. Tatus'*

### **DESIGN METHOD OF REINFORCEMENT STRUCTURE WITH SYMMETRIC PAIRS OF LAYERS BY THE EXAMPLE OF COMPOSITE GAS TANK**

**Keywords:** fiber-reinforced plastic, strength criterion, wound pressure vessel, symmetrical pair of layers, safety factor, ply-by-ply calculation method, optimum design

A simple method for calculating wound fiber-reinforced composite gas tanks, with a symmetric reinforcement structure, using pairs of layers (plies) is proposed. The calculation with pairs of layers instead of monolayers turns out to be simpler and uses elastic and strength parameters that are reliably determined in experiments. The using of simple strength criteria is substantiated, which, under a biaxial tension, led to a limiting surface bounded by three rectilinear segments that determine various fracture mechanisms. A simple way to optimize the reinforcement structure using a thread model is shown. The goal of the optimization considered was the achievement of a minimum difference between the safety factors for all pairs of layers. An increasing critical pressure in the composite pressure vessel was achieved by a simple selection of the number of layers and reinforcement angles.

**Ключевые слова:** материал композитный волокнистый полимерный (ПКМ), критерий прочности, сосуд давления намоточный, пара слоев симметричная, коэффициент запаса, метод расчета послойный, проектирование оптимальное

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [polilovan@mail.ru](mailto:polilovan@mail.ru)  
Corresponding author: [polilovan@mail.ru](mailto:polilovan@mail.ru)

Предложена простая схема расчета композитных, намотанных волокнами, сосудов давления, структура армирования которых состоит из симметричных пар слоёв. Расчет через пары слоёв оказывается проще, чем через монослои, так как опирается на надежно определяемые в экспериментах упругие и прочностные параметры. Обосновано применение простых критериев прочности, приводящих при двухосном растяжении к предельной поверхности, ограниченной тремя прямыми отрезками, определяющими разные механизмы разрушения. Показан простой способ оптимизации структуры армирования с использованием нитяной модели. Цель оптимизации — достижение минимального различия коэффициентов запаса для всех пар слоёв. Повышение критического давления в композитном баллоне достигается простым подбором количества слоёв и углов армирования.

### Введение

Использование полимерных волокнистых композитов чрезвычайно перспективно не только для космической и авиационной техники, но и для наземного транспорта, оно обуславливает новые возможности дизайна, снижение массы и энергоёмкости производства, экономию топлива, уменьшение количества деталей, отсутствие коррозии.

Одними из объектов, в которых применение композитов очень эффективно, можно считать сосуды давления, и поэтому расчетам композитных оболочек [1—3] и баллонов [4, 5], в том числе металлокомпозитных [6, 7] и многополостных [8] посвящено много работ. Применительно к сосудам давления одним из основных преимуществ волокнистых композитов (наряду с безопасным видом разрушения, высокой удельной прочностью и коррозионной стойкостью) можно считать возможность выбора оптимальной структуры армирования [9, 10], согласованной с возникающим полем напряжений [11]. Это определяет большой интерес к исследованию композитных баллонов не только технологов, изучающих влияние разных факторов [12, 13], но и механиков [14], использующих современные программные комплексы [15] в расчетах донной части баллонов и зоны полюсных отверстий. Наряду с оптимизацией структуры армирования важным направлением следует считать топологическую оптимизацию формы композитных изделий. Особое прикладное значение имеют попытки анализа влияния статистического разброса свойств материалов, геометрических размеров изделия, приложенных нагрузок [16], что предлагается учитывать методом рассчитанных интервалов [17].

В данной работе рассмотрена гораздо более простая задача подбора структуры армирования на основе критериев прочности, учитывающих разные механизмы разрушения. Исследовали А-структуру армирования цилиндрической части стеклопластикового баллона для газового топлива. Подобные баллоны выпускали в США и массово использовали на лёгких

грузовиках в качестве ёмкости для альтернативного автомобильного топлива.

Цели настоящей работы — обоснование послыонного метода расчета напряжений в симметричных парах слоев и способа поиска равнонапряженной структуры армирования, обеспечивающей повышение критического давления. Как альтернатива классическим критериям прочности [18—21] применяются простые критерии, учитывающие направленные механизмы разрушения [22—24]. При уточненном анализе несущей способности следует использовать алгоритмы учета деградации свойств в процессе прогрессирующего разрушения [25—28].

Для иллюстрации достижения поставленных целей решены следующие прямые задачи для простой модели композитной трубы в условиях двухосного растяжения:

— рассчитаны напряжения во всех парах слоев для исходной А-структуры армирования, а затем для улучшенных В- и С-структур;

— на основе модели ромба построены предельные поверхности для всех пар слоев;

— при условно выбранном начальном давлении определены коэффициенты запаса для всех пар слоев, а по минимальному коэффициенту запаса оценено критическое давление;

— на основании нитяной модели выбраны более эффективные В- и С-структуры армирования, приближающиеся к равнонапряженным;

— показано, насколько можно повысить критическое давление за счет даже незначительного улучшения структуры армирования (при тех же прочностных и упругих свойствах с сохранением общего количества пар слоев, т.е. при прежней массе баллона).

Предлагаемая методика решения обратной задачи поиска оптимальной структуры армирования, обладающей равными коэффициентами запаса для всех пар слоев, осуществляется на основе серии прямых задач для улучшенных структур армирования, выбранных на базе простейшей нитяной модели, что позволяет избежать чрезвычайно громоздких вычислительных процедур, характерных для большинства подобных исследований.

## 1. Преимущества метода расчета композитных баллонов через пары слоев

**1.1. Нитяная модель.** Наиболее простая схема проектирования намоточных сосудов давления заключается в использовании “нитяной модели” [1], согласно которой все напряжения воспринимаются только равнонапряженными волокнами.

Для известных средних осевых  $\bar{\sigma}_z$  и окружных  $\bar{\sigma}_\theta$  напряжений в цилиндрической части баллона средним радиусом  $R$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{pR}{2h}, \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{pR}{h}, \quad (1)$$

нитяная модель позволяет оценить наименьшую допустимую толщину стенки  $h$  (обеспечивающую минимально возможную массу баллона) для выбранных углов армирования. В предельном состоянии при действии критического внутреннего давления  $p^*$  напряжение в слоях достигает предела прочности  $\sigma_0$  вдоль волокон, что из (1) соответствует выполнению двух условий:

$$\frac{p^* R}{2\sigma_0} = \sum_{i=1}^m h_i \cos^2 \alpha_i, \quad \frac{p^* R}{\sigma_0} = \sum_{i=1}^m h_i \sin^2 \alpha_i. \quad (2)$$

Например, при числе семейств волокон  $m=1$  из двух уравнений (2) находим два параметра  $h_1 = h = \frac{3p^* R}{2\sigma_0}$ ;  $\alpha_1 = \alpha^* = 54^\circ 44'$  ( $\operatorname{tg}^2 \alpha^* = 2$ ). Если

число семейств  $m \geq 2$ , то число параметров структуры (толщин  $h_i$  и углов  $\alpha_i$ ) становится больше числа уравнений (2), и надо задавать значения углов, чтобы определить необходимые толщины слоёв. Например, при армировании цилиндрической части баллона двумя семействами волокон — 1) с ориентацией  $\pm\alpha_1$  и толщиной слоя  $h_1$  и 2) с ориентацией  $\pm\alpha_2$ , толщиной  $h_2$  можно выбрать углы армирования ( $0^\circ/90^\circ$ ), ( $\pm 30^\circ/90^\circ$ ), ( $\pm 45^\circ/90^\circ$ ), ( $0^\circ/\pm 60^\circ$ ) и другие, но чтобы  $\alpha_1 < \alpha^*$ ,  $\alpha_2 > \alpha^*$ , и тогда легко убедиться, что суммарная толщина стенки  $h = h_1 + h_2 = 3p^* R / (2\sigma_0)$  остаётся прежней. Отсюда следует, что по нитяной модели любая труба (баллон) с равнонапряженными волокнами имеет одинаковую массу, и эта масса — минимально возможная при заданных геометрии баллона, прочности вдоль волокон и внутреннем давлении.

**1.2. Послойный метод расчета композитных симметрично намотанных труб.** Традиционный послойный (ply-by-ply) метод компьютерного расчета напряжений в слоях композитных пластин (laminates) удобно применять не к однонаправленным препрегам, а к парам симметрично намотанных слоев ( $\pm\alpha_i$ ), что сопряжено с рядом преимуществ. Пара слоев ортотропна, что упрощает формулы преобразований тензора модулей упругости. Прочность пары слоев оценивается при корректных испытаниях симметрично намотанных ортотропных труб, в то время как прочности монослоя вынужденно определяются при растяжении однонаправленных пластинок под углами к волокнам, и при этом в неортотропных образцах возникают дополнительные деформации и изгибающие моменты, влияние которых трудно оценить аналитически.

Прямая задача послойного метода расчета композитного баллона (рис. 1) формулируется в следующем виде.

**Заданы** форма, размеры баллона и внутреннее давление, а также структура армирования цилиндрической части, т.е. углы намотки  $\pm\alpha_i$  и число  $n_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) пар слоев ( $\pm\alpha_{1n_1} / \pm\alpha_{2n_2} / \dots / \pm\alpha_{mn_m}$ ). Общее число монослоев  $N = 2 \sum_{i=1}^m n_i$ , и расчеты можно провести, отнеся нагрузку не к

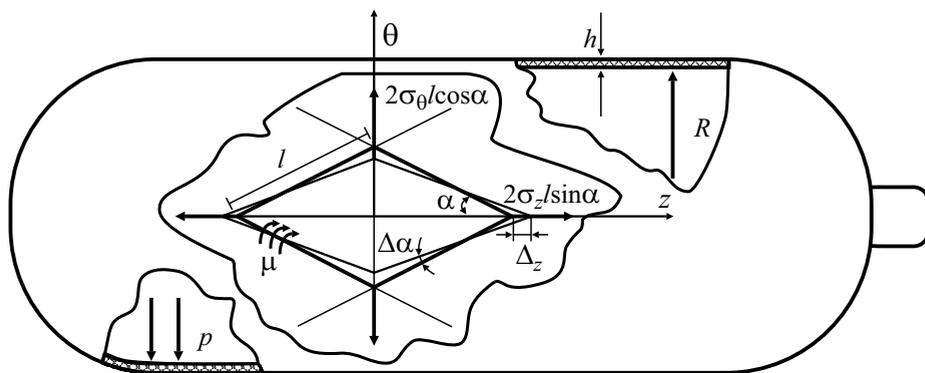


Рис. 1. Схемы баллона и ромбического элемента структуры армирования при двухосном растяжении под действием внутреннего давления  $p$ .

толщине стенки, а к числу слоев, которое точно задано, а толщина может локально изменяться из-за условий намотки.

**Требуется** рассчитать напряжения  $\sigma_z(\alpha_i)$  и  $\sigma_\theta(\alpha_i)$  в каждой паре слоев и определить, при каком давлении баллон начнет разрушаться и какое предельное давление он сможет выдержать.

Для начала расчета напряжений в парах слоев нужно знать четыре независимые технические упругие константы для однонаправленного композита (отмечены верхним индексом 0) в осях 1-2, связанных с направлением волокон (рис. 2): модули Юнга  $E_1^0, E_2^0$ , модуль сдвига  $G_{12}^0$ , коэффициент Пуассона  $\nu_{12}^0$ ;  $\nu_{21}^0 = \nu_{12}^0 E_2^0 / E_1^0$ .

На **первом этапе**, чтобы далее применять известные формулы преобразования тензоров, надо пересчитать технические константы в тензорные компоненты модулей упругости и податливостей:

$$E_{11}^0 = E_1^0 \Delta_0^{-1}, \quad E_{12}^0 = E_2^0 \nu_{12}^0 \Delta_0^{-1}, \quad E_{22}^0 = E_2^0 \Delta_0^{-1}, \quad \Delta_0 = 1 - \nu_{12}^0 \nu_{21}^0, \quad E_{66}^0 = G_{12}^0, \quad (3)$$

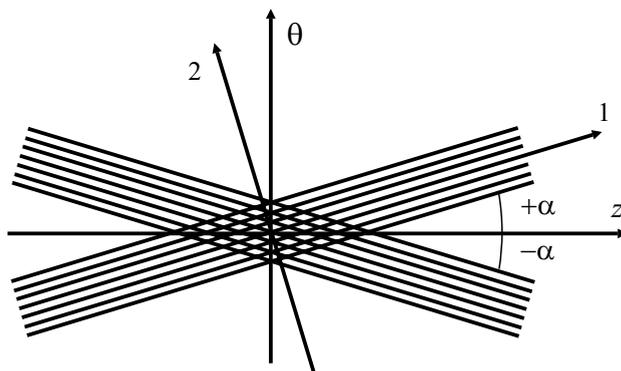


Рис. 2. Схема поворота системы координат для пары слоев.

$$S_{11}^0 = \frac{E_{22}^0}{\Delta} = \frac{1}{E_1^0}, \quad S_{22}^0 = \frac{E_{11}^0}{\Delta} = \frac{1}{E_2^0}, \quad S_{12}^0 = -\frac{E_{12}^0}{\Delta} = -\frac{\nu_{12}^0}{E_1^0},$$

$$\Delta = E_{11}^0 E_{22}^0 - (E_{12}^0)^2, \quad S_{66}^0 = \frac{1}{E_{66}^0} = \frac{1}{G_{12}^0}. \quad (4)$$

В (3), (4) применена обычная замена пары индексов на один:  $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 12 \rightarrow 6, zz \rightarrow z, \theta\theta \rightarrow \theta$ , чтобы можно было внешне представить четырехвалентный тензор модулей в виде квадратной матрицы, а тензор напряжений второго ранга — в виде вектора.

На *втором этапе* необходимо пересчитать для каждой пары слоёв  $(\pm\alpha_i)$  (см. рис. 2) компоненты модулей упругости и податливостей в проекциях на оси  $z - \theta$ , привязанные к баллону:

$$E_{zz}(\alpha) = E_{11}^0 c^4 + E_{22}^0 s^4 + 2(E_{12}^0 + 2E_{66}^0) s^2 c^2,$$

$$E_{z\theta}(\alpha) = (E_{11}^0 + E_{22}^0 - 4E_{66}^0) s^2 c^2 + E_{12}^0 (s^4 + c^4), \quad (5)$$

$$E_{\theta\theta}(\alpha) = E_{11}^0 s^4 + E_{22}^0 c^4 + 2(E_{12}^0 + 2E_{66}^0) s^2 c^2,$$

$$S_{zz}(\alpha) = S_{11}^0 c^4 + S_{22}^0 s^4 + (2S_{12}^0 + S_{66}^0) s^2 c^2,$$

$$S_{z\theta}(\alpha) = (S_{11}^0 + S_{22}^0 - S_{66}^0) s^2 c^2 + S_{12}^0 (s^4 + c^4), \quad (6)$$

$$S_{\theta\theta}(\alpha) = S_{11}^0 s^4 + S_{22}^0 c^4 + (2S_{12}^0 + S_{66}^0) s^2 c^2.$$

В (5), (6) принято  $c = \cos \alpha_i, s = \sin \alpha_i$ .

На *третьем этапе* нужно вычислить эффективные модули упругости для слоистого композита, считая, что в тонкостенной трубе деформации всех слоёв равны средним деформациям композита  $\bar{\varepsilon}_z, \bar{\varepsilon}_\theta$ :

$$\bar{E}_{ks} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^m n_i E_{ks}(\alpha_i), \quad k, s = z, \theta. \quad (7)$$

Эффективные податливости композита определяем из (4):

$$\bar{S}_{zz} = \bar{E}_{\theta\theta} \bar{\Delta}^{-1}, \quad \bar{S}_{\theta\theta} = \bar{E}_{zz} \bar{\Delta}^{-1}, \quad \bar{S}_{z\theta} = -\bar{E}_{z\theta} \bar{\Delta}^{-1}, \quad \bar{\Delta} = \bar{E}_{zz} \bar{E}_{\theta\theta} - \bar{E}_{z\theta}^2. \quad (8)$$

При симметричных парах слоёв композит остается ортотропным, поэтому в плоском случае тензоры модулей и податливостей определяются не шестью, а четырьмя независимыми компонентами (8), лишь три из которых важны при двухосном растяжении.

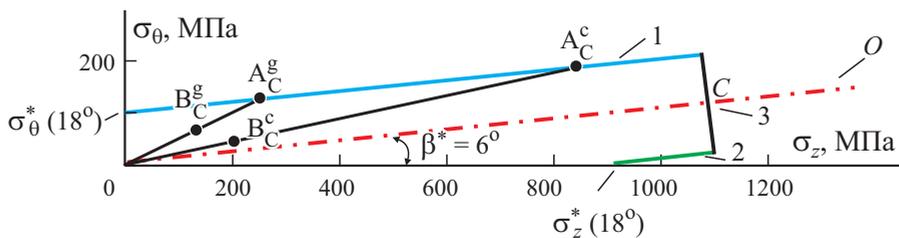


Рис. 3. Предельная поверхность в пространстве напряжений для пары слоев  $\pm 18^\circ$  при двухосном растяжении.

На **четвертом этапе** через средние напряжения (1) и податливости (8) рассчитываем средние деформации

$$\bar{\varepsilon}_z = \bar{S}_{zz}\bar{\sigma}_z + \bar{S}_{z\theta}\bar{\sigma}_\theta, \quad \bar{\varepsilon}_\theta = \bar{S}_{z\theta}\bar{\sigma}_z + \bar{S}_{\theta\theta}\bar{\sigma}_\theta. \quad (9)$$

**Пятый этап** — это расчет осевых и окружных напряжений в парах слоев:

$$\begin{aligned} \sigma_z(\alpha_i) &= E_{zz}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_z + E_{z\theta}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_\theta, \\ \sigma_\theta(\alpha_i) &= E_{z\theta}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_z + E_{\theta\theta}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_\theta; \end{aligned} \quad (10)$$

эти напряжения — точка  $B$  в координатах  $\sigma_z — \sigma_\theta$  (рис. 3—6), в которых для каждой пары слоев по обоснованным далее критериям прочности строится предельная поверхность в виде трех отрезков 1-2-3 либо участка эллипса 4. С ростом давления пропорционально растут напряжения в каждой паре слоёв, и соответствующая им точка смещается вдоль луча  $OB$  пока не достигнет некоторой точки  $A$  на предельной поверхности. Отно-

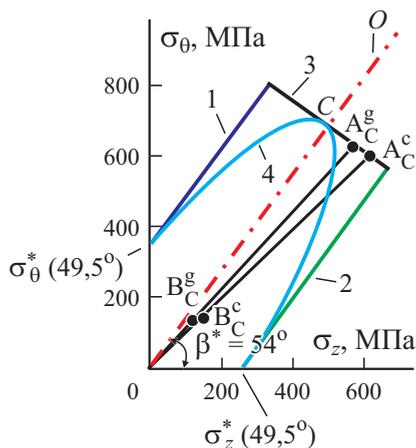


Рис. 4. Предельная поверхность для пары слоев  $\pm 49,5^\circ$ ; прямые 1, 2 — условия перекашивания ромба (см. рис. 1); прямая 3 — условие разрыва волокон; 4 — предельный эллипс.

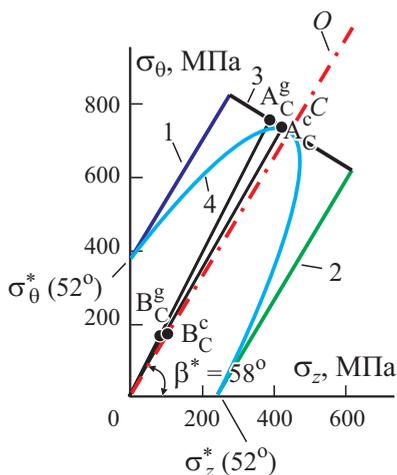


Рис. 5. Предельные поверхности (см. рис. 4) для пары слоев  $\pm 52^\circ$ .

шение  $OA/OB$  определяет коэффициент запаса  $k$  для каждой пары слоев при условно выбранном начальном давлении. За критическое давление  $p^*$  можно принять соответствующее первому выходу луча нагружения на предельную поверхность (в точку  $A$ ) для самой нагруженной пары слоев, обладающей наименьшим коэффициентом запаса при начальном давлении.

Оценка условия окончательного разрушения по первому нарушению критерия прочности хотя бы в одной паре слоев (“first ply criterion”) может оказаться слишком консервативной, с завышенным запасом прочности. Более аккуратный результат даёт анализ последовательных разрушений в парах слоёв, но для такого анализа критерии прочности должны учитывать разные механизмы разрушения, а традиционные критерии [7—11]

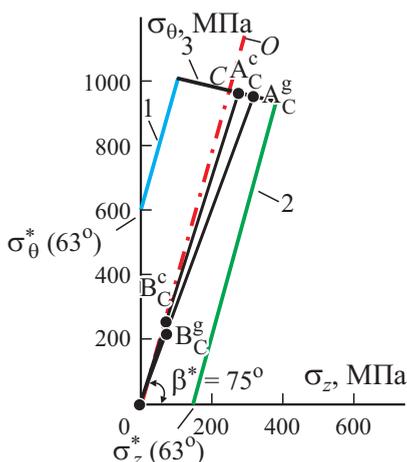


Рис. 6. Предельная поверхность для пары слоев  $\pm 63^\circ$ .

в отличие от [12—16] такой возможности не дают. В данной работе при оценке коэффициентов запаса, для наглядности, использовали критерий первого разрушения; важно отметить, что предельная поверхность в виде трёх прямых отрезков позволяет судить о механизме разрушения, а в виде гладкого эллипса – нет.

## 2. Построение предельных поверхностей

**2.1. Критерии прочности по модели ромба.** Для симметрично намотанных труб была предложена [14, 15] и обоснована [16, 17] на базе экспериментов [18—21] модель ячейки в виде ромба (с длиной стороны  $l$ ) из нерастяжимых стержней (см. рис. 1), повороту которых (изменению угла  $\alpha$ ) при двухосном растяжении силами  $P_z = 2\sigma_z l \sin \alpha$ ,  $P_\theta = 2\sigma_\theta l \cos \alpha$  (условная толщина пары слоёв в ячейке принята равной единице) препятствует суммарный момент  $M = 2\mu l^2 \sin \alpha \cos \alpha$ , пропорциональный площади ромба. Здесь  $\mu$  — отнесенный к единице площади распределенный момент от касательных напряжений, возникающих при сдвиге матрицы.

Силы  $P_z$ ,  $P_\theta$ , приложенные к вершинам ромба, совершают работу при смещениях вершин:  $\Delta_z = (2l \cos \alpha)' d\alpha = -2l \sin \alpha \cdot d\alpha$ ;  $\Delta_\theta = 2l \cos \alpha \cdot d\alpha$ , и эту работу можно приравнять к работе суммарного момента при изменении угла ромба  $d\alpha$ :

$$|P_z \Delta_z + P_\theta \Delta_\theta| = M d\alpha. \quad (11)$$

Разрушение матрицы начинается по достижении критического значения распределенного момента  $\mu^*$ , которое определяет прочность  $\sigma_z^*(45^\circ) = \sigma_{45} = \mu^* / 2$  при растяжении трубы с намоткой ( $\pm 45^\circ$ ). Критерий (11) приводит в координатах  $\sigma_z - \sigma_\theta$  к двум уравнениям прямых линий 1, 2 (см. рис. 3—6) с углом наклона  $\beta^* = \arctg \operatorname{tg}^2 \alpha$ :

$$|\sigma_z \operatorname{tg} \alpha - \sigma_\theta \operatorname{ctg} \alpha| = \sigma_{45} \Rightarrow$$

$$1) \sigma_\theta = t^2 \sigma_z + t \sigma_{45} \text{ при } \sigma_z < \operatorname{tg} \beta^* \sigma_\theta, \operatorname{tg} \beta^* = \operatorname{tg}^2 \alpha = t^2, \quad (12)$$

$$2) \sigma_\theta = t^2 \sigma_z - t \sigma_{45} \text{ при } \sigma_z > \operatorname{tg} \beta^* \sigma_\theta, \operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_z}.$$

Прямыми скобками в (12) обозначено абсолютное значение, а минус в скобках связан с тем, что напряжения  $\sigma_z$ ,  $\sigma_\theta$  искажают ромб в противоположных направлениях, “мешая” друг другу: одно стремится увеличить, а другое — уменьшить угол  $\alpha$ .

Из (12) получаем очень простые выражения для прочности трубы в зависимости от угла намотки ( $\pm\alpha$ ) при одноосном растяжении в осевом  $\sigma_z^*(\alpha)$  или окружном  $\sigma_\theta^*(\alpha)$  направлениях:

$$\sigma_z^*(\alpha) = \sigma_z^*(45^\circ)t^{-1} = \sigma_{45} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_\theta^*(\alpha) = \sigma_{45} \operatorname{tg} \alpha. \quad (13)$$

Для симметричной намотки ( $\pm 45^\circ$ ) растягивающие и окружные напряжения геометрически равнозначны, но окружные напряжения в баллонах для сжатого газа создаются внутренним давлением, и потеря несущей способности может определяться не потерей прочности волокон или матрицы, а потерей герметичности, поэтому, строго говоря,  $\sigma_z^*(45^\circ) \neq \sigma_\theta^*(45^\circ)$ , но для сохранения простоты методики не будем это учитывать, считая, что герметичность обеспечивается внутренним лайнером или дополнительными герметизирующими слоями. Поэтому принято

$$\sigma_z^*(45^\circ) = \sigma_\theta^*(45^\circ) = \sigma_{45}, \quad \sigma_z^*(0^\circ) = \sigma_\theta^*(90^\circ) = \sigma_0, \\ \sigma_z^*(90^\circ) = \sigma_\theta^*(0^\circ) = \sigma_{90}, \quad \sigma_z^*(\alpha) = \sigma_\theta^*(90^\circ - \alpha).$$

Если необходимо учесть пусть небольшую, но всё же ненулевую прочность при осевом растяжении трубы с окружной намоткой  $\sigma_z^*(90^\circ) = \sigma_{90}$  (фактически прочность матрицы), то можно вместо (13) использовать чуть более сложные зависимости

$$\sigma_z^*(\alpha) = (\sigma_{45} - \sigma_{90}) \operatorname{ctg} \alpha + \sigma_{90}, \quad \sigma_\theta^*(\alpha) = (\sigma_{45} - \sigma_{90}) \operatorname{tg} \alpha + \sigma_{90}. \quad (14)$$

При  $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha \rightarrow \infty$ , и мы вынуждены в (13) ограничить осевую прочность для малых углов и окружную прочность для углов, близких к  $90^\circ$ , значением прочности  $\sigma_0$  вдоль волокон. Таким образом, зависимость прочности при осевом растяжении от угла разориентации разбивается на два участка: на первом (при достаточно больших углах) прочность определяется механизмом перекашивания ромба, а на втором (при малых углах) — разрывом волокон. Угол смены механизмов разрушения определяется равенством критических напряжений для двух механизмов — перекашивания и разрыва:

$$\sigma_z^*(\alpha) = \sigma_\theta^*(90^\circ - \alpha) = \begin{cases} \sigma_{45} \operatorname{ctg} \alpha, & \alpha > \alpha_0, \\ \approx \sigma_0, & \alpha \leq \alpha_0, \end{cases} \quad (15) \\ \sigma_\theta^*(\alpha) = \begin{cases} \sigma_{45} \operatorname{tg} \alpha, & \alpha < 90^\circ - \alpha_0, \\ \approx \sigma_0, & \alpha \geq 90^\circ - \alpha_0, \end{cases} \quad \operatorname{ctg} \alpha_0 = \sigma_0 / \sigma_{45}.$$

Например, при  $\sigma_0 = 1200$  МПа,  $\sigma_{45} = 300$  МПа из [19] имеем

$$\operatorname{ctg} \alpha_0 = \sigma_0 / \sigma_{45} = 1200 / 300 = 4 \Rightarrow \alpha_0 = 0,245 = 14^\circ. \quad (16)$$

Для уточнения зависимости (15) воспользуемся согласно [16, 17] критерием разрушения в виде достижения критического значения линейной комбинацией нормальных и касательных напряжений вдоль волокон (ось 1):

$$\sigma_1 + m_0 \tau_{12} = \sigma_0,$$

$$\sigma_1 = \sigma_z \cos^2 \alpha, \quad \tau_{12} = \sigma_z \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\sigma_z^*(\alpha) = \sigma_\theta^*(90^\circ - \alpha) = \frac{\sigma_0}{\cos^2 \alpha + m_0 \sin \alpha \cos \alpha}, \quad \alpha \leq \alpha_0 \quad (17)$$

$$\sigma_z^*(\alpha) = \sigma_\theta^*(90^\circ - \alpha) = \sigma_{45} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow$$

$$\alpha_0 \Leftrightarrow \frac{\sigma_0}{\cos^2 \alpha_0 + m_0 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0} = \sigma_{45} \operatorname{ctg} \alpha_0.$$

Для приближенного решения нижнего уравнения (17) воспользуемся двумя упрощающими допущениями:

1) угол  $\alpha_0$  мал, поэтому ограничимся линейным приближением, полагая  $\sin \alpha_0 \approx \alpha_0$ ,  $\cos \alpha_0 \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha_0^2 \approx 1$ ;

2) ввиду сложности экспериментального определения  $m_0$  в малом диапазоне углов  $\alpha \in [0; \alpha_0]$  положим произвольно  $m_0 = 0,3$ . Тогда из (17)

$$\sigma_0 \alpha_0 \approx \sigma_{45} (1 + 0,3 \alpha_0) \Rightarrow \quad (18)$$

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{45}}{\sigma_0 - 0,3 \sigma_{45}} = 0,27 = 15,5^\circ.$$

Различие оценок (18) и (16) невелико (10%), и поправки (15), (17) играют роль только для малых углов (или близких к  $90^\circ$  при окружном растяжении), поэтому при построении предельных зависимостей для углов намотки, например,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  или  $60^\circ$  подобные уточнения необязательны.

При малых углах, например  $\pm 16^\circ$  можно оценивать осевую прочность по усложненной формуле (14), приняв  $\sigma_{90} = 100$  МПа:

$$\sigma_z^*(\alpha) = (\sigma_{45} - \sigma_{90}) \operatorname{ctg} \alpha + \sigma_{90} \Rightarrow \sigma_z^*(16^\circ) = 690 \text{ МПа}. \quad (19)$$

По аналогии с (17), используя (14) и (19), можно записать уточненное условие равенства критических напряжений для разных механизмов разрушения

$$\frac{\sigma_0}{\cos^2 \alpha_0 + m_0 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0} = (\sigma_{45} - \sigma_{90}) \operatorname{ctg} \alpha_0 + \sigma_{90} \Rightarrow$$

$$\alpha_0 \approx \frac{\sigma_{45} - \sigma_{90}}{\sigma_0 - m_0 \sigma_{45} + (1 - m_0) \sigma_{90}} = \frac{200}{1180} \approx 10^\circ.$$
(20)

Оценка (20) получена при тех же упрощающих допущениях, что и (18), и  $m_0 = 0,3$ .

**2.2. Построение предельных поверхностей в виде трех отрезков или эллипса.** Часть предельной поверхности для пар слоёв ( $\pm\alpha$ ), связанных с разрушением матрицы, строим в осях  $\sigma_z$  —  $\sigma_\theta$  с помощью проведения двух прямых линий 1 и 2 (см. рис. 3—6) под оптимальным углом  $\beta^* = \arctg \operatorname{tg}^2 \alpha$  через точки  $\sigma_z^*(\alpha)$ ,  $\sigma_\theta^*(\alpha)$  на осях, соответствующих прочностям при одноосном растяжении. В простейшем случае эти прочности можно принять в виде (13) или (14), а для малых углов (или близких к  $90^\circ$ ) — в виде (15) или (17).

На оптимальном луче  $O$  надо указать точку  $C$ , соответствующую разрыву волокон по нитяной модели. В этой точке напряжение вдоль волокон считается равным пределу прочности  $\sigma_0$ , а проекции этого напряжения на оси определяются из (2) соотношениями

$$\sigma_{zC} = \sigma_0 \cdot \cos^2 \alpha = \sigma_0 \cdot \frac{c^2}{s^2 + c^2} = \sigma_0 \frac{1}{1 + t^2},$$

$$\sigma_{\theta C} = \sigma_0 \cdot \sin^2 \alpha = \sigma_0 \cdot \frac{s^2}{s^2 + c^2} = \sigma_0 \frac{t^2}{1 + t^2}.$$
(21)

Отрезок прямой 3, соответствующий разрыву волокон, должен быть перпендикулярен лучу  $O$ :  $\sigma_\theta = t^2 \sigma_z$ ; поэтому уравнение прямой 3 должно иметь вид (с неизвестным  $K$ )

$$\sigma_\theta = -\frac{\sigma_z}{t^2} + K.$$

Из условия прохождения прямой 3 через точку  $C$  с координатами (21)

$\Rightarrow K = \sigma_0 \frac{t^4 + 1}{t^2(t^2 + 1)}$ , и уравнение прямой 3 будет иметь вид

$$t^2 \sigma_\theta + \sigma_z = \sigma_0 (1 + t^4) (1 + t^2)^{-1}.$$
(22)

Чтобы аппроксимировать кусочно-линейную предельную поверхность единым уравнением, можно провести наклонный эллипс через три точки: две — на осях (13) и точку  $C$  (21) на оптимальном луче  $O$ . Уравнение эллипса 4 (см. рис. 4, 5) приобретает вид

$$t^2\sigma_z^2 + t^{-2}\sigma_\theta^2 - \sigma_z\sigma_\theta \left( 2 - \frac{\sigma_{45}^2(1+t^2)^2}{t^2\sigma_0^2} \right) = \sigma_{45}^2, \quad t = \operatorname{tg}\alpha. \quad (23)$$

Для определения коэффициентов запаса при выбранном давлении можно использовать предельную поверхность в виде эллипса (23), но он, как и другие тензорно-полиномиальные критерии [18—20], не даёт возможности различить условия разных видов разрушения: разрыва волокон (прямая 1) или растрескивания матрицы вследствие перекашивания ромбической ячейки (прямые 1 или 2). Поэтому в данной работе для определения коэффициентов запаса использовали предельную поверхность в виде прямоугольника, ограниченного тремя отрезками прямых (12), (22). При этом необходимо для каждой пары слоев рассчитать напряжения  $\sigma_{zB}$ ,  $\sigma_{\theta B}$ , соответствующие точке  $B$  на рис. 3—6. Луч  $OB$  определяется уравнением

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_{\theta B}} = \frac{\sigma_z}{\sigma_{zB}}, \quad (24)$$

и при продолжении он пересечет предельные прямые 1, 2 или 3 в некоторой точке  $A$ , координаты которой находим совместным решением уравнений (24) и (12) — прямые 1, 2 или (22) — прямая 3. Отношение длин отрезков  $OA$  к  $OB$  определяет коэффициент запаса  $k = \sigma_{zA} / \sigma_{zB} = \sigma_{\theta A} / \sigma_{\theta B}$ :

— для случая пересечения с прямой 1 —

$$k = \frac{\sigma_{45}}{\sigma_{zB}} \left( \frac{\sigma_{\theta B}}{\sigma_{zB}} \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha \right)^{-1};$$

— для пересечения с прямой 2 —

$$k = \frac{\sigma_{45}}{\sigma_{zB}} \left( \operatorname{tg}\alpha - \frac{\sigma_{\theta B}}{\sigma_{zB}} \operatorname{ctg}\alpha \right)^{-1};$$

— для пересечения с прямой 3 —

$$k = \frac{\sigma_{\theta A}}{\sigma_{\theta B}} = \frac{\sigma_0}{\sigma_{\theta B}} \frac{t^4 + 1}{t^2(t^2 + 1)} \left( 1 + \frac{\sigma_{zB}}{\sigma_{\theta B}t^2} \right)^{-1}.$$

Табл. 1

Схемы армирования баллонов со структурами армирования А, В и С (всего число слоев  $N = 28$ ;  $n_i$  — число пар слоёв)

$i$	$\pm\alpha_i$ , град	$n_i$		
		А	В	С
1	16	2	0	0
2	18	4	4	2
3	52	2	2	2
4	63	2	2	2
5	90	4	6	4
1-С	49	0	0	4

### 3. Рациональное проектирование структуры армирования

**3.1. Исходная структура армирования.** В качестве примера рассмотрим выбранную из некоторых технологических соображений реальную А-структуру армирования пятью семействами пар слоев (табл. 1) баллонов из стеклопластика, массово используемых в легких грузовиках для хранения газового топлива.

Размеры цилиндрической части баллона: толщина стенки  $h = 8$  мм, средний радиус  $R = 150$  мм. Примем начальное (расчетное) давление  $p = 100$  атм = 10 МПа. Тогда из (1)

$$\bar{\sigma}_z \approx 93,7 \text{ МПа}, \bar{\sigma}_\theta \approx 187,5 \text{ МПа}. \quad (25)$$

Для расчета напряжений послойным методом примем для однонаправленного стеклопластика условные упругие свойства, пересчитанные по формулам (3), равные

$$E_{11}^0 = 45 \text{ ГПа}, E_{22}^0 = 9 \text{ ГПа}, G_{12}^0 = 7 \text{ ГПа}, E_{12}^0 = 3 \text{ ГПа}. \quad (26)$$

Эти данные качественно соответствуют реальным, но их точное значение не играет принципиальной роли в иллюстрации предлагаемого метода проектирования.

Упругие эффективные свойства однонаправленного композита можно рассчитывать [2, 24] по моделям Фойгта и Рейсса, Хашина—Штрикмана и других, зная модули упругости волокон и матрицы и объемную долю волокон. Здесь эти известные соотношения не приводим, считая, что более надёжные значения упругих свойств композитов можно получить только в макроэкспериментах, а не на основании приближенных верхних и нижних оценок, основанных на гипотезах о равенстве деформаций (Фойгт) или напряжений (Рейсс) в компонентах.

Табл. 2

Значения модулей упругости (ГПа) пар слоев для стеклопластика (индекс g) и углепластика (индекс c)

$\pm\alpha_i$ , град	$E_{zz}^g(\alpha_i)$	$E_{\theta\theta}^g(\alpha_i)$	$E_{z\theta}^g(\alpha_i)$	$E_{zz}^c(\alpha_i)$	$E_{\theta\theta}^c(\alpha_i)$	$E_{z\theta}^c(\alpha_i)$
16	41,0	10,3	4,4	122,0	10,9	11,1
18	39,8	10,7	4,7	117,6	11,6	12,9
49,5	19,3	24,9	7,9	36,2	56,7	31,0
52	17,9	26,6	7,7	32,0	63,3	30,1
63	13,1	34,3	6,3	17,2	94,2	21,8
90	9,0	45,0	3,0	9,0	140,0	3,0

В силу линейности задачи все напряжения пропорциональны внутреннему давлению, поэтому для оптимального проектирования структуры армирования важны не конкретные коэффициенты запаса прочности, а лишь соотношения между ними. Задачей оптимального проектирования считаем построение такой структуры армирования, при которой коэффициенты запаса прочности в разных парах слоев принимают примерно равные значения. Эта обратная задача оптимизации решается на основе серии прямых задач, и поэтому расчетные схемы должны быть достаточно простыми, чтобы ускорить процесс подбора путем перебора.

Использование критериев прочности, основанных на модели ромба, требует знания всего трёх параметров: прочностей однонаправленного композита вдоль  $\sigma_0$  и поперек  $\sigma_{90}$  волокон и прочности  $\sigma_{45}$  при растяжении трубы с намоткой  $\pm 45^\circ$ . Значения этих параметров для иллюстрации метода могут быть приняты равными

$$\sigma_0 = 1200 \text{ МПа}, \sigma_{90} = 100 \text{ МПа} \text{ и } \sigma_{45} = 300 \text{ МПа}; \quad (27)$$

на их основе были построены предельные поверхности для всех используемых в А-баллоне углов намотки, часть из которых представлена на рис. 3—6. Многочисленные попытки напрямую связать прочность композита с прочностями волокон и матрицы с использованием распределения Вейбулла для прочности волокон и модели типа Дау—Даниэльса—Розена

Табл. 3

Значения средних деформаций (%) для А-, В-, С-структур баллонов из стекло- и углепластика

Материал	$\bar{\varepsilon}_z(\alpha_i)$ А	$\bar{\varepsilon}_\theta(\alpha_i)$ А	$\bar{\varepsilon}_z(\alpha_i)$ В	$\bar{\varepsilon}_\theta(\alpha_i)$ В	$\bar{\varepsilon}_z(\alpha_i)$ С	$\bar{\varepsilon}_\theta(\alpha_i)$ С
Glass	0,253	0,672	0,346	0,551	0,338	0,555
Carbon	0,0965	0,258	0,156	0,195	0,153	0,198

Табл. 4

Значения напряжений (МПа) в точках В в парах слоев для А-, В- и С-структур из стеклопластика со свойствами (26) при  $p=10$  МПа

$\pm\alpha_i$ , град	$\sigma_z(\alpha_i)$ А	$\sigma_\theta(\alpha_i)$ А	$\sigma_z(\alpha_i)$ В	$\sigma_\theta(\alpha_i)$ В	$\sigma_z(\alpha_i)$ С	$\sigma_\theta(\alpha_i)$ С
16	133,3	80,3	-	-	-	-
18	132,3	83,8	164	75,2	161	75,2
49,5	-	-	-	-	109	165
52	97,0	198,2	105	175	104	176
63	75,5	246,4	79,5	210	79	211
90	42,9	310	47,7	258	47,1	260

для прочности пучка волокон эффективной длины не приводят к надёжному результату, как и использование экспериментов на микропластиках, поэтому входными параметрами предложено считать значения прочности, непосредственно определенные на модельных трубчатых образцах.

Средние деформации вычисляли по закону Гука (табл. 3)

$$\bar{\varepsilon}_i = \bar{S}_{ij} \bar{\sigma}_j, \quad i, j = z, \theta \quad (28)$$

через компоненты эффективной матрицы податливостей, которые рассчитывали по формулам (4) для значений (26) при вычислении эффективных модулей по формулам (7) через данные табл. 2. Например, для А-структуры

$$\begin{aligned} \bar{S}_{zz} &= \bar{E}_{\theta\theta} \bar{\Delta}^{-1} = 4,29 \cdot 10^{-2} \text{ ГПа}^{-1}, \quad \bar{S}_{\theta\theta} = \bar{E}_{zz} \bar{\Delta}^{-1} = 3,98 \cdot 10^{-2} \text{ ГПа}^{-1}, \\ \bar{S}_{z\theta} &= -\bar{E}_{z\theta} \bar{\Delta}^{-1} = -0,794 \cdot 10^{-5} \text{ ГПа}^{-1}, \quad \bar{\Delta} = \bar{E}_{zz} \bar{E}_{\theta\theta} - \bar{E}_{z\theta}^2 = 608,5 \text{ ГПа}^2, \end{aligned} \quad (29)$$

Табл. 5

Значения напряжений (МПа) в точках В в парах слоев для А-, В- и С-структур из углепластика со свойствами (26), (27), (31) при  $p=10$  МПа

$\pm\alpha_i$ , град	$\sigma_z(\alpha_i)$ А	$\sigma_\theta(\alpha_i)$ А	$\sigma_z(\alpha_i)$ В	$\sigma_\theta(\alpha_i)$ В	$\sigma_z(\alpha_i)$ С	$\sigma_\theta(\alpha_i)$ С
16	146	38,9	-	-	-	-
18	147	42,4	208	42,6	205,5	42,7
49,5	-	-	-	-	117	160
52	108	193	108	170	108,6	171,4
63	73,1	265	69,3	218	69,5	220
90	16,5	365	19,9	278	19,7	282

Табл. 6

Коэффициенты запаса  $k = OA/OB$  для пар слоёв при внутреннем давлении  $p = 10$  МПа и критическое давление  $p^* = p \cdot k_{\min}$  (МПа) для А-, В- и С-структур армирования баллона из стеклопластика (g) со свойствами (26), (27) и углепластика (с) со свойствами (26), (31), (27)

$\pm\alpha$ , град Структура	$\pm 16$ , град	$\pm 18$ , град	$\pm 49,5$ , град	$\pm 52$ , град	$\pm 63$ , град	90, град	$p^*$	%
A-g	1,2	1,4	-	3,8	3,8	2,3	12	100
B-g	-	1,7	-	4,0	4,4	2,1	17	141
C-g	-	1,7	4,3	4,0	4,4	2,1	17	142
A-c	3,2	3,6	-	4,0	3,6	5,9	32	267
B-c	-	3,9	-	4,3	4,3	5,0	39	325
C-c	-	4,0	4,3	4,3	4,3	5,1	40	333

$$\bar{\varepsilon}_z = \bar{S}_{zz}\bar{\sigma}_z + \bar{S}_{z\theta}\bar{\sigma}_\theta = 2,53 \cdot 10^{-3}, \tag{30}$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \bar{S}_{z\theta}\bar{\sigma}_z + \bar{S}_{\theta\theta}\bar{\sigma}_\theta = 6,72 \cdot 10^{-3}.$$

Через среднюю деформацию рассчитывали напряжения в парах слоев вначале для А-структуры, а затем для В- и С-структур. Рассчитанные послойным методом напряжения для пар слоев приведены в табл. 4, а внутри предельных поверхностей в пространстве напряжений на рис. 3—6 показаны точками *B*.

Для исследования влияния на результаты модуля упругости вдоль волокон все расчеты (табл. 5) были проделаны также для модуля упругости, примерно соответствующего однонаправленному углепластику; в данных (26) использована единственная замена:

$$E_{11}^0 = 140 \text{ ГПа}, \tag{31}$$

а все остальные упругие (26) и прочностные (27) свойства оставлены прежними. Выбор других упругих и прочностных свойств, определенных на современных композитных материалах, не вносит существенных изменений в методику и результаты оптимизации.

**3.2. Подбор рационального количества пар слоёв.** В табл. 6 приведены значения коэффициентов запаса для пар слоев в исходной А-структуре (см. табл. 1). Как видно, они сильно различаются для разных углов, т.е. выбранная схема армирования далека от оптимальной. В этом можно убедиться на основе анализа нитяной модели, согласно которой из (2) сред-

нее взвешенное от квадратов синусов (SIN) должно вдвое превосходить подобное среднее от квадратов косинусов (COS):

$$2 \sum_{i=1}^m n_i \cos^2 \alpha_i = \sum_{i=1}^m n_i \sin^2 \alpha_i \Rightarrow \frac{\text{SIN}}{\text{COS}} = 2; \tag{32}$$

для А  $\Leftrightarrow \frac{\text{SIN}}{\text{COS}} = \frac{\sin^2 16^\circ + 2 \sin^2 18^\circ + \sin^2 52^\circ + \sin^2 63^\circ + 2}{\cos^2 16^\circ + 2 \cos^2 18^\circ + \cos^2 52^\circ + \cos^2 63^\circ} \approx 1,11 \ll 2??!$

Ситуацию несложно исправить, изменив количество пар слоев с разной ориентацией.

**Способ 1. В-структура.** Оставляем те же углы армирования и общее количество пар слоев, меняя лишь соотношения между числами пар слоев. Поскольку пары слоев с ориентацией  $63^\circ > 55^\circ = \alpha^*$  перегружены, а слои  $16^\circ < \alpha^*$  недогружены, заменяем все пары слоёв с ориентацией  $16^\circ$  на слои  $90^\circ$ . Теперь условие оптимальности (32) выполняется более точно:

$$\frac{2 \sin^2 18^\circ + \sin^2 52^\circ + \sin^2 63^\circ + 3}{2 \cos^2 18^\circ + \cos^2 52^\circ + \cos^2 63^\circ} \approx 1,92 \approx 2 !!$$

Из данных табл. 6 видно, что вариант В лучше, чем вариант А. Найти необходимое число  $x$  заменяемых пар слоев можно из простого уравнения (объединив для краткости  $16^\circ$  и  $18^\circ$ ):

$$\frac{(6-x) \sin^2 18^\circ + 2 \sin^2 52^\circ + 2 \sin^2 63^\circ + (4+x)}{(6-x) \cos^2 18^\circ + 2 \cos^2 52^\circ + 2 \cos^2 63^\circ} = 2 \Rightarrow x = 2,13 \approx 2.$$

Значит, замена двух пар  $16^\circ$  на  $90^\circ$  дает структуру, близкую к рациональной. При оптимальном проектировании кроме числа слоев можно менять также углы намотки и модули упругости (например, варьируя стеклянные, углеродные и органические (Kevlar) волокна), что приведет к требуемому перераспределению напряжений в слоях, обеспечивая максимально близкие коэффициенты запаса для пар слоев с разными углами намотки.

**Способ 2. С-структура.** Выберем из условия (32) для четырех пар слоев другой угол армирования  $\psi$  — вместо двух пар  $16^\circ$  и двух пар  $18^\circ$  — при сохранении других углов ориентации и числа пар слоёв:

$$\frac{2 \sin^2 \psi + \sin^2 18^\circ + \sin^2 52^\circ + \sin^2 63^\circ + 2}{2 - 2 \sin^2 \psi + \cos^2 18^\circ + \cos^2 52^\circ + \cos^2 63^\circ} = 2 \Rightarrow$$

$$\sin^2 \psi = 0,5782; \psi = 0,864 \approx 49,5^\circ.$$

Таким образом, если две пары слоёв под углом  $16^\circ$  и две пары слоев под углом  $18^\circ$  заменить на четыре пары слоев под углом  $49,5^\circ$ , то полу-

чится равнонапряженная структура (по нитяной модели). Заметим, что подбор угла можно проводить “плавно”, а не только по целым числам пар слоев, что делает метод *C* более эффективным, чем *B*, как видно из данных табл. 6.

**3.3. Оценка критического давления.** Расчет напряжений послойным методом и определение коэффициентов запаса по предельным поверхностям для каждой пары слоев (см. рис. 3—6) позволяют оценить критическое давление через минимальный коэффициент запаса (см. табл. 6), если принять за условие окончательного разрушения выход из строя хотя бы одной, наиболее нагруженной пары слоев. Из данных табл. 6 видно, что для исходной А-структуры критическое давление равно  $p_A^* = p \cdot k_{A\min} = 10 \cdot 1,2 \approx 12$  МПа; критическое давление для В-структуры —  $p_B^* = 10 \cdot 1,7 \approx 17$  МПа выше, чем для А-структуры на 41%, как и для С-структуры:  $p_C^* = 10 \cdot 1,7 = 17$  МПа.

Таким образом, даже простейшие способы создания почти равнонапряженной структуры армирования путем подбора всего одного параметра на основе нитяной модели могут существенно повысить критическое давление.

**3.4. Использование высокомодульных волокон (углепластика).** Все предыдущие расчеты были также проведены для данных, соответствующих упругим свойствам углепластика, с сохранением всех прежних упругих и прочностных свойств (26), (27) кроме модуля упругости вдоль волокон (31). Оптимизация по нитяной модели, как видно из данных табл. 6, для углепластика оказывается еще более эффективной, чем для стеклопластика, так как с ростом продольного модуля упругости поведение композита приближается к нитяной модели, согласно которой работают только высокомодульные и высокопрочные волокна, а роль матрицы не учитывается. Луч нагружения при улучшении структуры армирования упирается в прямую 3, соответствующую разрыву волокон, а не разрушению связующего (прямые 1 и 2), что означает более “правильное” распределение нагрузок на прочные волокна и приводит к росту критического давления.

**3.5. Учет деградации свойств при нагружении.** Более строгий анализ требует рассмотрения процессов последовательного разрушения, и используемые линейные критерии (12), (22) оказываются удобнее, чем эллиптическая аппроксимация (23) предельной поверхности. Если для пары слоев луч нагружения упирается в прямую 3, то пару слоёв можно считать вышедшей из строя, так как эта ситуация соответствует разрыву волокон. Если же луч нагружения упирается в прямые 1 или 2, можно считать, что в данной паре слоев разрушается матрица, и следует повторить расчет с уменьшенными значениями упругих свойств для данной пары слоев.

Если выполнено условие разрыва волокон, то данная пара слоев должна быть исключена при очередной итерации расчета. Если разрушилась полимерная матрица, то в этих парах слоев назначают существенно пониженные модули сдвига и Юнга поперек волокон, а далее вновь проводится послойный расчет, начиная с этапа 2. При такой процедуре пошагово добавляется внутреннее давление до тех пор, пока все пары слоев не выйдут из строя. Подробный анализ рассмотренных модельных задач здесь не приводится, но подобные подходы к описанию прогрессирующего разрушения широко используются [25—28].

## Выводы

1. Новый подход, основанный на послойном методе расчета для симметричных пар слоев, оказывается более простым и надёжным, чем традиционный расчет по монослоям.

2. Предложена простая методика решения обратной задачи подбора равнонапряженной структуры армирования на основе нитяной модели, позволяющая избежать громоздких вычислительных процедур, характерных для традиционных методов оптимального проектирования.

3. Использование критериев прочности, учитывающих разные механизмы разрушения, позволяет построить предельные поверхности для каждой пары слоев и, добиваясь равнонагруженности всех пар слоев, обеспечить повышение расчетного критического давления в баллоне для сжатого газа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1977. — 144 с.

2. *Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов В. Г.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1984. — 264 с.

3. *Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я., Андрияшин В. А.* Методы расчета цилиндрических оболочек из композиционных материалов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 264 с.

4. *Huang Ch., Ren M., Li T., Chang X., Lei Y.* Trans-scale modeling framework for failure analysis of cryogenic composite tanks // *Composites: Part B*. — 2016. — Vol. 85. — P. 41—49.

5. *Grogan D. M., Ó Brádaigh C. M., McGarry J. P., Leen S. B.* Damage and permeability in tape-laid thermoplastic composite cryogenic tanks // *Composites: Part A*. — 2015. — Vol. 78. — P. 390—402.

6. *Амелина Е. В., Буров А. Е., Голушко С. К., Лепихин А. М., Москвичев В. В., Юрченко А. В.* Расчетно-экспериментальная оценка прочности металлокомпозитного бака высокого давления // *Вычислит. технологии*. — 2016. — Т. 21, № 5. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27249206> (дата обращения: 20.05.2021)

7. Буров А. Е., Лепихин А. М. Количественное моделирование несущей способности металлокомпозитного бака высокого давления // Пробл. машиностроения и надежности машин. — 2016. — № 5. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27178560> (дата обращения: 25.06.2021)

8. Sklemina O. Yu., Polilov A. N., Tatus' N. A. Analytical and finite element method of calculation of multi-shell gas tanks // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng., Moscow, 4–6 December, 2020.

9. Masakazu K., Iwasaki K., Reis P., Butter Bez C., De Medeiros R. Methodology for composite pressure vessel optimization based on CLT // 5th Brazilian Conference on Composite Materials (BCCM5), Jan., 2021.

10. Mahdy W., Kamel H. Design of optimum filament wound pressure vessel with integrated end domes // Int. Conf. Aerospace Sciences and Aviation Technology 16 (AEROSPACE SCIENCES), May, 2015.

11. Zhang L. W., Pan Z., Liew K. M. Adaptive surrogate-based harmony search algorithm for design optimization of variable stiffness composite materials // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2021. — Vol. 379. — P.113754.

12. Cohen D., Mantell S. C., Zhao L. The effect of fiber volume fraction on filament wound composite pressure vessel strength // Composites: Part B. — 2001. — Vol. 32. — No. 5. — P. 413—429.

13. Guo Z., Li Z., Cui J., Li Y., Luan Y. The effect of winding patterns on the mechanical behavior of filament-wound cylinder shells // Multidiscipline Modeling Mater. Struct. — 2019. — Vol. 16. — No. 3. — P. 508—518.

14. Geng P., Wang Q., Xing J. Analytical model for stress and deformation of multiple-winding-angle filament-wound composite pipes/vessels under multiple combined loads // Appl. Math. Modelling. — 2021. — Vol. 94. — P. 576—596.

15. Heidari-Rarani M., Ahmadi-Jebeli M. Finite element modeling of failure in IV type composite pressure vessel using WCM plug-in in ABAQUS software // Modares Mech. Eng. — 2018. — Vol. 18, — No. 4. — P. 191—200.

16. Hwang T. K., Hong C. S., Kim C. G. Probabilistic deformation and strength prediction for a filament wound pressure vessel // Composites: Part B. — 2003. — Vol. 34, — No. 5. — P. 481—497.

17. Rao S. S., Alazwari M. A. Failure modeling and analysis of composite laminates: Interval-based approaches // J. Reinf. Plastics Compos. — 2020. — Vol. 39. — P. 817—836.

18. Малмейстер А. К. Геометрия теорий прочности // Механика полимеров. — 1966. — № 4. — С. 519—534.

19. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопrotивление жестких полимерных материалов. — Рига: Зинатне, 1967. — 398 с.

20. Tsai S. W., Wu E. M. A general theory of strength for anisotropic materials // J. Compos. Mater. — 1971. — Vol. 2, — No. 1. — P. 191—206.

21. Hashin Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites // J. Appl. Mech. — 1980. — Vol. 47. — P. 329—334.

22. Полилов А. Н. Схема расчёта прочности косоугольно армированных композитов при плоском напряженном состоянии // Механика композит. материалов. — 1980. — № 2. — С. 221—226.

23. Полилов А. Н., Татусь Н. А. Экспериментальное обоснование критериев прочности волокнистых композитов, проявляющих направленный характер разрушения // Вестн. ПНИПУ — 2012. — № 2. — С. 140—166.

24. Полилов А. Н. Этюды по механике композитов. — М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 320 с.

25. *Lapczyk I., Hurtado J. A.* Progressive damage modeling in fiber-reinforced materials // *Composites: Part A.* — 2007. — Vol. 38. — P. 2333—2341.

26. *Kozlov M. V., Sheshenin S. V.* Modeling the progressive failure of laminated composites // *Mech. Compos. Mater.* — 2016. — Vol. 51. — P. 695—706.

27. *Hoos K., Iarve E. V., Braginsky M., Zhou E., Mollenhauer D. H.* Static strength prediction in laminated composites by using discrete damage modeling // *J. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 51. — P. 1473—1492.

28. *Zhu H., Guo Z. X., Zhu M., Cui J. J., He Q., Li Y. C.* A progressive FE failure model for laminates under biaxial loading // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 56, — No. 2. — P. 207—214.

Поступила в редакцию 30.06.2021

Окончательный вариант поступил 18.10.2021

Received June 30, 2021 (Oct. 18, 2021)

---