

*А. В. Хохлов**

*НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, лаборатория
“Полимерные композиты для Севера”, Якутск, Россия*

ПОЛЗУЧЕСТЬ И ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ СЛОЕВ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ, НАГРУЖЕННОЙ ВНУТРЕННИМ И ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

*A. V. Khokhlov**

CREEP AND LONG-TERM STRENGTH OF A LAMINATED THICK-WALLED TUBE OF NONLINEAR VISCOELASTIC MATERIALS LOADED BY EXTERNAL AND INTERNAL PRESSURES

Keywords: multilayer thick-walled tubes, nonlinear viscoelasticity, creep, rupture time, long-term strength curve, Rabotnov constitutive equation, relaxation modulus, integral equations, laminated composites

An exact solution to the creep and long-term strength problem for pressurized thick-walled tubes consisting of several layers of physically nonlinear viscoelastic materials obeying the Rabotnov constitutive equation with two arbitrary material functions for each layer (creep compliance and a function that governs the physical nonlinearity) was constructed and studied. All layer materials are homogeneous, isotropic, and incompressible, and the tube is loaded by internal and external pressures creating a plain strain state, i.e., zero axial displacements are given on the edge of tube cross sections. Closed expressions were found for displacement, strain, and stress fields in relation to the single unknown function of time and integral operators involving this function, pairs of (arbitrary) material functions of each tube layer, preset pressure values and ratios of tube layers radii, and an integral equation to determine this unknown function was derived. Expressions and three creep failure criteria with three

*Автор, с которым следует вести переписку: andrey-khokhlov@ya.ru
Corresponding author: andrey-khokhlov@ya.ru

measures of damage (the effective shear strain, the maximum shear strain, or the maximum principal strain) were used to derive formulas for the creep rupture time of a tube to mark the layer in which the fracture will occur earlier and to find a simple strength parameter for the tube (depending on layers thicknesses and their fracture strains) which should be increased to enhance its long-term strength. Assuming that the relaxation moduli of layer materials are proportional to a single (arbitrary) function of time and the material functions that govern the nonlinearity coincide with a power function with a positive exponent, an exact solution of the resolving functional equation was constructed. All integrals involved in the general representation of the tube stress field were calculated and reduced to simple algebraic formulas convenient for an analysis. Explicit formulas were derived for the creep rupture time of the tube, and closed equations for the long-term strength curves based on three creep failure criteria mentioned above were found. The general properties of the long-term strength curves were studied for arbitrary material functions of the constitutive relation and compared with each other. It is proved that the long-term strength curves (rupture time as a function of pressures difference) are decreasing and convex down and that their shape is controlled mainly by the compliance functions of layer materials rather than by the radii of tube layers and the nonlinearity of the governing physical function, because they influence only the factor responsible for the long-term strength in tension along the pressure axis.

Ключевые слова: трубы толстостенные, вязкоупругость нелинейная, ползучесть, время до разрушения, кривые длительной прочности, определяющее соотношение Работнова, функция нелинейности, уравнения интегральные, композиты слоистые

Построено и исследовано точное решение задачи о ползучести и длительной прочности толстостенной трубы, состоящей из нескольких слоев нелинейно-вязкоупругих изотропных материалов (полимеров, дисперсно-наполненных композитов, металлов и сплавов), каждый из которых подчиняется определяющему соотношению Работнова с разными парами произвольных материальных функций и постулату несжимаемости, при нагружении давлениями на внутренней и внешней поверхностях трубы и задании нулевого осевого перемещения на торцах трубы. Деформации и напряжения в любой точке трубы в любой момент времени выражены явными формулами (содержащими интегральные операторы) через одну функцию времени, которая находится из нелинейного интегрального уравнения, зависящего от материальных функций слоев трубы, их относительных толщин и заданных на границах трубы давлений. На их основе выведено уравнение для времени разрушения трубы при ползучести

для трех вариантов деформационного критерия разрушения. Указан слой, в котором произойдет разрушение в зависимости от заданных предельных значений деформации слоев и их относительных толщин, найдена простая расчетная характеристика трубы, которую следует повышать при проектировании слоев трубы, чтобы повысить ее длительную прочность. Для модели многослойной трубы с пропорциональными друг другу функциями сдвиговой релаксации материалов слоев и со степенной функцией нелинейности (с любым показателем) построено точное решение ключевого интегрального уравнения, вычислены все интегральные операторы и выведены простые алгебраические формулы для деформаций и напряжений в любой точке трубы в любой момент времени и для времени разрушения трубы при ползучести. Выведены уравнения кривых длительной прочности для трех вариантов деформационного критерия разрушения, аналитически исследованы их свойства. Доказано, что они убывают и выпуклы вниз, что их форма определяется в основном функцией ползучести материалов слоев и слабо зависит от материальной функции, задающей нелинейность, и от отношения радиусов слоев трубы (хотя от них и зависят время разрушения и слой, в котором оно произойдет).

Введение

Настоящая работа опирается на статьи [1, 2], в которых построено и аналитически исследовано точное решение квазистатической задачи об определении напряженно-деформированного состояния (НДС) полого цилиндра из физически нелинейного несжимаемого однородного изотропного материала, подчиняющегося определяющему соотношению (ОС) вязкоупругости Работнова

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \Phi(L(t)) \sigma(t)^{-1} [\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}] + \frac{1}{3} \Phi_0(L_0(t)) \delta_{ij}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$L(t) := \Pi \sigma, \quad L_0(t) := \Pi_0 \sigma_0,$$

$$\Pi y = \int_0^t \Pi(t-\tau) dy(\tau), \quad \Pi_0 y = \int_0^t \Pi_0(t-\tau) dy(\tau), \quad (2)$$

при нагружении внутренним и внешним давлениями, медленно меняющимися во времени, и задании нулевого осевого перемещения оснований цилиндра. Поля перемещений, деформаций и напряжений в любой момент времени выражены через одну функцию времени, которая находится в результате решения нелинейного функционального уравнения, содержащего материальные функции (МФ) ОС (1) и заданную нагрузку (см. далее). В частности, показано, что построенные поля деформаций и напряжений совпадают в частных случаях (при специальном выборе одной из МФ) с известными классическими решениями для несжимаемого материала в

рамках линейной теории вязкоупругости, упругости и упругопластичности с произвольным упрочнением [1].

ОС (1) содержит четыре произвольных МФ $\Pi(t)$, $\Pi_0(t)$ (функции сдвиговой и объемной ползучести), $\Phi(x)$, $\Phi_0(x)$ (функции нелинейности) и описывает изотермические процессы деформирования нестареющих изотропных вязкоупругих материалов, связывая истории изменения тензоров напряжений $\sigma(t)$ и малых деформаций $\varepsilon(t)$ в точке тела; $\sigma_0 = \sigma_{ii}(t)/3$ — среднее напряжение, $\sigma = (1,5s_{ij}s_{ij})^{0,5}$ — интенсивность напряжений (второй инвариант девиатора $\mathbf{s} = \sigma - \sigma_0\mathbf{I}$). Напряжение и время считаются обезразмеренными.

В настоящей работе результаты [1, 2] использованы для построения точного решения задачи о ползучести и длительной прочности толстостенной трубы из нескольких слоев нелинейно-вязкоупругих несжимаемых материалов (например полимеров, дисперсно-наполненных композитов, металлов и сплавов), каждый из которых подчиняется ОС (1) с разными парами произвольных МФ $\{\Pi_i, \Phi_i\}$ (допущение о несжимаемости материала оставляет в ОС только две МФ — см. далее). В частности, любой из слоев может быть задан упругим, упругопластическим (с упрочнением, но без наследственных свойств, без ползучести) или линейно-вязкоупругим при надлежащем выборе МФ [1]. Основные задачи работы: 1) аналитически исследовать эволюцию деформированного состояния многослойной трубы в условиях ползучести под действием постоянных внутреннего и внешнего давлений, 2) получить общее выражение для времени разрушения трубы через величины давлений, толщины слоев, их МФ и предельные значения деформации для каждого слоя при использовании трех вариантов деформационного критерия разрушения (в качестве меры поврежденности выбраны интенсивность деформаций или максимальная деформация сдвига или растяжения), 3) вывести уравнения соответствующих кривых длительной прочности и аналитически исследовать их свойства при произвольных МФ ОС (1). Эти задачи не решены в общем виде даже для трубы из изотропного материала, подчиняющегося линейному ОС вязкоупругости с произвольными функциями сдвиговой и объемной ползучести, хотя задача о расчете толстой трубы в рамках теории упругости и упругопластичности является классической и хорошо исследована [3—6].

Статические и динамические задачи об НДС однородных полых цилиндров и многослойных толстостенных труб, нагруженных давлением на внутренней и внешней поверхностях, в рамках теории упругости (задача Ламе, задача Гадолина и др.) и разных вариантов упругопластичности являются классическими в силу обилия приложений их результатов (расчет артиллерийских стволов, газопроводов, шлангов, обделок туннелей, скважин, шахт, процессов запрессовки, проектирование труб и баллонов, расчет на ползучесть поверхностно упрочненных труб и труб, подвергающихся агрессивному воздействию среды, моделирование поведения кровеносных сосудов и т.п.) и благодаря возможности построить точное решение (при тех или иных упрощающих предположениях) или хотя бы достаточно

простой и эффективный аналитически проработанный алгоритм вычисления приближенного решения. Эти задачи хорошо исследованы (и продолжают активно исследоваться) в случае упругих и упругопластических изотропных и трансверсально-изотропных материалов без упрочнения и с линейным упрочнением [3—15] и в теории установившейся ползучести (как правило, для степенной зависимости скорости ползучести от напряжения) [16—19]. Строили и решения в рамках линейной вязкоупругости, но, как правило, не для произвольных функций сдвиговой и объемной ползучести, а только для их конкретных классов, задаваемых конечным набором параметров (например, задаваемых конечными суммами экспонент, т.е. рядами Прони) и в пространстве преобразований Фурье или Лапласа (Лапласа—Карсона) [20—23], нередко — без восстановления оригиналов (из-за сложности или невозможности точного восстановления). При этом в большинстве случаев используется одно из трех дополнительных упрощающих допущений, позволяющих (в частности) уменьшить количество независимых материальных функций: 1) о несжимаемости материала, 2) о линейно-упругой зависимости объемной деформации от среднего напряжения (т.е. об отсутствии объемной ползучести), 3) о независимости коэффициента Пуассона от времени. Качественные свойства построенных полей деформаций и напряжений не подвергали системному аналитическому исследованию в общем виде при произвольных МФ, а, как правило, рассчитывали на компьютерах для конкретных функций релаксации с несколькими параметрами. В случае нелинейной вязкоупругости построение решений резко усложняется из-за несправедливости принципа соответствия Вольтерры и неприменимости классических интегральных преобразований.

1. Определяющее соотношение Работнова, ограничения на материальные функции

Нелинейное ОС (1) — один из простейших вариантов обобщения одноосного соотношения Работнова [23—27, 17, 21] с двумя МФ $\varphi(u)$, $\Pi(t)$ ($\varphi = \Phi^{-1}$)

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) \varphi'(\varepsilon(\tau)) d\varepsilon(\tau), \quad t > 0, \quad (3)$$

на сложное напряженное состояние в предположениях изотропности и тензорной линейности материала, отсутствия взаимного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров (независимости объемной деформации $\theta = \varepsilon_{ii}(t)$ от касательных напряжений, а сдвиговых деформаций — от σ_0) и пренебрежения влиянием их третьих инвариантов. Данная работа продолжает цикл [28—31] по системному аналитическому изучению ОС (1) с целью выявления комплекса моделируемых ОС (1) реологических эффектов и границ области применимости, сфер влияния его МФ и феноменологических ограничений на них, разработки способов идентификации,

верификации и настройки ОС. Такой анализ до сих пор не был проведен для ОС (1). Подробные обзоры литературы и областей приложения ОС (3) приведены в [29—31].

Одноосное ОС (3) предложено Ю. Н. Работновым для описания нелинейной ползучести как обобщение одномерного линейного ОС вязкоупругости

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau) = \mathbf{P}\sigma, \quad \sigma(t) = \int_0^t \mathbf{R}(t - \tau) d\varepsilon(\tau) = \mathbf{R}\varepsilon, \quad t > 0, \quad (4)$$

посредством введения дополнительной МФ $\varphi(u)$ [23—26, 17, 21]. В (4) и (3) функции ползучести и релаксации $\Pi(t)$, $R(t)$, связаны интегральным уравнением

$$\mathbf{R}\Pi = h(t), \text{ или } \mathbf{P}R = h(t), \quad t > 0 \quad (5)$$

($h(t)$ — функция Хевисайда), выражающим условие взаимной обратности операторов (4) и (3) [19]. В англоязычных работах ОС (3) именуется уравнением квазилинейной вязкоупругости (QLV), а его автором считается Y. C. Fung [32—41]. В работах [17, 21, 23—27] и др. ОС (3) применяли к описанию одномерного поведения графита, металлов и сплавов, композитов, а в [32—41] — связок, сухожилий и других биологических тканей.

В одномерном случае (3) обратное ОС имеет вид $\sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon)$ (композиция оператора действия функции φ и линейного оператора \mathbf{R} из (4)). Обращение трехмерного ОС (1) для любых возрастающих МФ Φ и Φ_0 —

$$\sigma_0 = \mathbf{R}_0\varphi_0(\theta), \quad \sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon), \quad s_{ij}(t) = \frac{2}{3}\sigma(t)\varepsilon(t)^{-1}e_{ij}(t), \quad (6)$$

где $\varphi = \Phi^{-1}$, $\varphi_0 = \Phi_0^{-1}$, $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0\mathbf{I}$ и $\varepsilon = (\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij})^{0.5}$ — девиатор и интенсивность деформаций, а функции релаксации $R(t)$, $R_0(t)$ связаны с Π и Π_0 уравнениями вида (5). Из трех МФ φ , Π , R в ОС (3) лишь две независимы, а в ОС (1) — четыре независимых МФ.

На функции ползучести и релаксации в ОС (1) (или (6)) наложим те же минимальные ограничения, что и в линейной теории вязкоупругости [42, 43]: $\Pi(t)$, $\Pi_0(t)$, $R(t)$, $R_0(t)$ предполагаем положительными и дифференцируемыми на $(0; \infty)$, функции Π и Π_0 — возрастающими и выпуклыми вверх, а R и R_0 — убывающими и выпуклыми вниз на $(0; \infty)$, R и R_0 могут иметь интегрируемую особенность или δ -сингулярность в точке $t = 0$ (слагаемое $\eta\delta(t)$, $\eta > 0$, $\delta(t)$ — дельта-функция). Из этих условий следует существование предела $\Pi(0) = \inf \Pi(t) \geq 0$ ($y(0) := y(0+)$ — предел функции $y(t)$ справа в точке $t = 0$). На МФ φ и φ_0 в ОС (6) и на МФ Φ и Φ_0 в ОС (1) наложим следующие минимальные требования [29—31]: функция $\varphi(u)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $(0; \omega)$, $\omega > 0$, а $\varphi_0(u)$ — на множестве $(\omega_-; 0) \cup (0; \omega_+)$ (где $\omega_- \omega_+ < 0$), причем $\varphi(0+) = 0$ и $\varphi_0(0+) = \varphi_0(0-) = 0$ (иначе процессу $\varepsilon(t) \equiv 0$ соответствует ненулевой отклик $\sigma(t)$). Из возрастания φ и φ_0 следует существование обратных функций $\Phi(x) = \varphi^{-1}$, $x \in (0; X)$, $X := \sup \varphi(u)$ и $\Phi_0(x) = \varphi_0^{-1}$, $x \in (\underline{x}; \bar{x})$, где $\underline{x} = \varphi_0(\omega_- + 0)$, $\bar{x} = \varphi_0(\omega_+ - 0)$, и обратимость ОС (1). При-

меры семейств функций, которые удобно использовать для задания МФ Φ , Φ_0 или φ , φ_0 , приведены в [29—31].

Отметим, что ОС (1) (т.е. (6)) с $\varphi(x) = x$, $\varphi_0(x) = x$ в трехмерном случае не совпадает с линейным ОС вязкоупругости для изотропных сред

$$s_{ij}(t) = \frac{2}{3} \mathbf{R} e_{ij}, \quad \sigma_0 = \mathbf{R}_0 \theta, \quad (7)$$

так как ОС (7) не обеспечивает пропорциональность девиаторов тензоров деформаций и напряжений в случае сложных нагружений. Эти два ОС совпадают лишь на множестве процессов простых нагружений $\sigma_{ij} = \gamma(t) \bar{\sigma}_{ij}$ (или простых деформирований $\varepsilon_{ij} = \gamma(t) \bar{\varepsilon}_{ij}$), где $\dot{\gamma} > 0$, а $\bar{\sigma}$ — постоянный тензор, на которых ОС (7) обеспечивает пропорциональность девиаторов тензоров. Из построенного в [1] решения задачи об НДС трубы следует, что в любой точке трубы реализуется процесс простого деформирования, и потому НДС для ОС (1) с МФ $\varphi(x) = Ax$ совпадает с НДС для линейно-вязкоупругой несжимаемой среды [1].

Если задать ФП постоянной (пренебечь сдвиговой ползучестью), то ОС (1) для несжимаемого материала вырождается в ОС для упрочняющегося упругопластического несжимаемого материала (без наследственности) с произвольной МФ $\Phi(x)$, связывающей интенсивности напряжений и деформаций в точности так, как в деформационной теории пластичности, а построенное решение задачи об НДС трубы из материала, подчиняющегося ОС (1), превращается (как показано в [1]) в классическое решение [3—6].

2. Постановка и решение задачи для однородной толстостенной трубы

Рассмотрим задачу об определении НДС полого цилиндра из наследственного несжимаемого материала, подчиняющегося ОС (1) с произвольными материальными функциями, под действием давлений $p_1(t)$ и $p_2(t)$, заданных на внутренней и внешней поверхности цилиндра при $t > 0$. Считаем, что давления меняются медленно: так, чтобы влиянием инерционных членов в уравнениях движения можно было пренебечь (квазистатическая постановка). Будем использовать цилиндрическую систему координат, ось z направим вдоль оси цилиндра. Пусть r_1 и r_2 — внутренний и внешний радиусы ненагруженного цилиндра (при $t = 0$). Тогда краевые условия будут иметь вид

$$\sigma_r |_{r_1} = -p_1(t), \quad \sigma_r |_{r_2} = -p_2(t), \quad \sigma_{r\theta} |_{r_1} = \sigma_{rz} |_{r_1} = 0, \quad \sigma_{r\theta} |_{r_2} = \sigma_{rz} |_{r_2} = 0. \quad (8)$$

Задача осесимметрична, и в любой точке (r, θ, z) в любой момент времени все компоненты перемещений, деформаций и напряжений не зависят от угла θ и

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} &\equiv 0, \quad \sigma_{\theta z} \equiv 0, \quad u_\theta \equiv 0, \\ \varepsilon_\theta(r, t) &= r^{-1}(u_{\theta, \theta} + u_r) = r^{-1} u_r, \quad \varepsilon_r(r, t) = u_{r, r}, \quad \varepsilon_z(r, t) = u_{z, z}. \end{aligned} \quad (9)$$

Предполагаем, что труба закреплена на торцах так, что $u_z = 0$ и касательные напряжения на торцах отсутствуют: $\sigma_{z\theta} = 0\varphi$ и $\sigma_{rz} = 0$. Тогда труба находится в состоянии плоской деформации, u_r и σ_z не зависят от z и (помимо (9)) справедливы равенства

$$\sigma_{rz} \equiv 0, S_\theta(x) > S_z(x) > S_r(x), \varepsilon_{r\theta} \equiv 0, \varepsilon_z \equiv 0, u_z \equiv 0,$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}(u_{r,z} + u_{z,r}) \equiv 0, \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}(u_{\theta,z} + r^{-1}u_{z,\theta}) \equiv 0.$$

Поэтому тензоры деформаций и напряжений диагональны: $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{diag}\{\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, 0\}$, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{diag}\{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z\}$, а зависимости ненулевых компонент от координат имеют вид $u_r(r, t)$, $\varepsilon_r(r, t)$, $\varepsilon_\theta(r, t)$, $\sigma_r(r, t)$, $\sigma_\theta(r, t)$, $\sigma_z(t)$. Будем считать материал несжимаемым. Тогда $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{s} := \mathbf{diag}\{\sigma_r - \sigma_0, \sigma_\theta - \sigma_0, \sigma_z - \sigma_0\}$, а ОС (1) (и обратное ему ОС (6)) сводится к одномерному ОС $\boldsymbol{\varepsilon} = \Phi(\Pi\boldsymbol{\sigma})$ с двумя МФ (Φ , Π или φ , R), связывающему интенсивности напряжений и деформаций, и условию подобия девиаторов (6): $s_{ij}(t) = \frac{2}{3}\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t)^{-1}e_{ij}(t)$, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon})$ (первое уравнение ОС (6) не используем, и среднее напряжение σ_0 находим из решения краевой задачи, как обычно бывает при допущении несжимаемости).

В работе [1] (в предположениях плоской деформации трубы и однородности, изотропности и несжимаемости материала) поля перемещений, деформаций и напряжений в трубе из материала, подчиняющегося ОС (1) с двумя произвольными МФ $\Pi(t)$ и $\Phi(x)$ (или $R(t)$ и $\varphi(x)$ в (6)) выражены через одну (искомую) функцию времени $y(t)$:

$$u_r(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2}y(t)r_1/\bar{r}, \quad u_\theta \equiv 0, \quad u_z \equiv 0, \quad (10)$$

$$\varepsilon_\theta(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2}y(t)\bar{r}^{-2}, \quad \varepsilon_r(r, t) = -\varepsilon_\theta(r, t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}y(t)\bar{r}^{-2}, \quad \varepsilon_z \equiv 0, \quad (11)$$

$$\sigma_r(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}[F(|y(t)|) - F(|y(t)|/\bar{r}^2)], \quad (12)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}[F(|y(t)|) - F(|y(t)|/\bar{r}^2) + 2\varphi(|y(t)|/\bar{r}^2)], \quad (13)$$

$$\sigma_z(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}[F(|y(t)|) - F(|y(t)|/\bar{r}^2) + \varphi(|y(t)|/\bar{r}^2)]. \quad (14)$$

При этом $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2$ и $\sigma_0 = \sigma_z$. Интенсивности деформаций и напряжений —

$$\boldsymbol{\varepsilon}(r, t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{\varepsilon}_\theta = |y(t)|/\bar{r}^2, \quad \boldsymbol{\sigma}(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_r - \sigma_\theta| = \mathbf{R}\boldsymbol{\varphi}(|y(t)|/\bar{r}^2). \quad (15)$$

В формулах (10)–(15) $\bar{r} := r/r_1 \in [1, r_2/r_1]$, $z(t) = \text{sgn } p(t)$, $p(t) := p_1(t) - p_2(t)$,

$$F(s) := \int_0^s \varphi(x)x^{-1}dx, \quad s > 0 \quad (16)$$

(из $\varphi(x) > 0$ при $x > 0$ следует возрастание $F(s)$), а $y(t)$ — решение уравнения

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R}[F(|y(t)|) - F(q|y(t)|)], \quad (17)$$

или эквивалентного ему уравнения

$$F(Y(t)) - F(qY(t)) = P(t), \quad P(t) := \sqrt{3}\Pi[zp(t)] = \sqrt{3}\Pi|p(t)|, \quad t > 0. \quad (18)$$

Здесь $Y := |y(t)|$, $q := (r_1/r_2)^2 \in (0;1)$, а $P(t)$ — известная функция, если задана функция ползучести и разность давлений $p(t)$. Из (15) и (11) следует, что $Y(t) = \varepsilon(t, r_1) = \varepsilon(t, r_2) / q$ — интенсивность деформаций, а $y(t)$ — измеримая в испытаниях физическая величина, пропорциональная окружной деформации на поверхности трубы: $y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_\theta(r_2, t) / q$. Интеграл от на-

пряжения (13) по отрезку $[r_1, r_2]$ равен $p_1(t)r_1 - p_2(t)r_2$, т.е. выполнено условие равновесия половины трубы в проекции на ось, ортогональную z .

После определения $y(t)$ из уравнения (18) (в общем случае приближённого, хотя в [1] получено и аналитическое решение для важного класса МФ) можно вычислить поля перемещений и напряжений (10)—(14). В [1] исследованы свойства НДС (11)—(14).

В случае ОС (1) с ФР $R(t) = E = \text{const}$ и произвольной МФ φ общее решение (12), (11) превращается в решение для случая нелинейной упругости материала (или упругопластичности при активном нагружении), поскольку МФ φ связывает интенсивности деформаций и напряжений в точности так, как в деформационной теории пластичности, и задает упрочнение материала. Действие оператора \mathbf{R} на произвольную функцию (см. (2)) сводится к умножению на E и формулы (12)—(14) упростятся и совпадут с классическими решениями [3—6]. Если дополнительно $\varphi(x) = x$, то $F(s) = s$ и поле напряжений совпадет с решением квазистатической задачи в рамках линейной теории упругости:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} E (q - \bar{r}^{-2}) y(t), \\ \sigma_\theta &= -p_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} E (q + \bar{r}^{-2}) y(t), \quad \sigma_z = -p_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} E q y(t). \end{aligned}$$

3. Решение задачи о нагружении давлениями двухслойной трубы

При тех же основных допущениях (несжимаемость материала, плоская деформация, те же краевые условия) рассмотрим квазистатическую задачу об определении напряжений и деформаций в трубе, состоящей из двух слоев разных однородных изотропных вязкоупругих материалов (с радиусами границ r_0, r_1, r_2), каждый из которых подчиняется нелинейному ОС (1) (т.е. (6)) с разными (произвольными) парами МФ $\{R_i, \varphi_i\}$, $i = 1, 2$, под действием давлений $p_0(t)$ и $p_2(t)$, $t > 0$, заданных на вну-

тренней и внешней поверхности трубы (при $r = r_0$ и $r = r_2$). Считаем, что давления меняются медленно: так, что влиянием инерционных членов в уравнениях движения можно пренебречь.

Пусть $p_1(t) = -\sigma_r(r_1, t)$ — неизвестное давление на границе слоев $r = r_1$ (поверхностная плотность силы их контактного взаимодействия). Для каждого слоя справедливы формулы (10)—(18) с заменой МФ R, φ на $\{R_i, \varphi_i\}$, $y(t)$ — на $y_i(t)$ (а для внутреннего слоя еще нужно пару радиусов r_1, r_2 заменить на r_0, r_1). Интегральное уравнение (17) для искомой функции $y_i(t)$ каждого слоя имеет вид

$$p_0 - p_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_1(t) \mathbf{R}_1 [F_1(|y_1(t)|) - F_1(q_1 |y_1(t)|)], \quad (19)$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_2(t) \mathbf{R}_2 [F_2(|y_2(t)|) - F_2(q_2 |y_2(t)|)], \quad (20)$$

где $z_1(t) = \text{sgn}(p_0(t) - p_1(t))$, $z_2(t) = \text{sgn}(p_1(t) - p_2(t))$, $q_1 := (r_0/r_1)^2$,

$q_2 := (r_1/r_2)^2$, $q_i \in (0; 1)$, а радиальное перемещение (10) в любой точке трубы —

$$u(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} r_0^2 r^{-1} y_1(t), \quad r \in [r_0, r_1], \quad u(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} r_1^2 r^{-1} y_2(t), \quad r \in [r_1, r_2] \quad (u_\theta \equiv 0, \quad u_z \equiv 0) \quad (21)$$

Так как касательные напряжения и перемещения равны нулю, условия сопряжения на границе слоев $r = r_1$ — непрерывность $\sigma_r(r_1, t)$ (уже использована в (19), (20)) и перемещения (21), т.е. тождество $r_0^2 y_1(t) = r_1^2 y_2(t)$, или

$$y_2(t) = q_1 y_1(t). \quad (22)$$

Определив функции $p_1(t)$, $y_1(t)$ и $y_2(t)$ из системы уравнений (19), (20), (22), можно вычислить поля перемещений, деформаций и напряжений по формулам (10)—(14) для каждого слоя трубы. Эту систему можно решить методом исключения неизвестных и свести к одному интегральному уравнению для $y = y_1(t)$. Для упрощения формул будем рассматривать случай нагрузки $p_0(t) \geq p_2(t)$, $t > 0$, когда $z_i(t) = 1$, $y_i(t) \geq 0$. Сложим (19) и (20) (исключая $p_1(t)$) и подставим (22):

$$\mathbf{R}_1 [F_1(y(t)) - F_1(q_1 y(t))] + \mathbf{R}_2 [F_2(q_1 y(t)) - F_2(q_1 q_2 y(t))] = \sqrt{3} (p_0 - p_2). \quad (23)$$

После определения $y(t)$ из интегрального уравнения (23) (в общем случае приближённого, хотя далее будет получено и аналитическое решение для одного класса МФ) можно вычислить $y_2(t)$ и $p_1(t)$ по формулам (22), (19) (или (20)) и поля перемещений, деформаций и напряжений в каждом слое трубы по (10)—(14):

$$p_1(t) = p_0(t) - \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_1 [F_1(y(t)) - F_1(q_1 y(t))] =$$

$$= p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2 [F_2(q_1 y(t)) - F_2(q_2 q_1 y(t))], \quad (24)$$

$$u(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} r_0^2 r^{-1} y(t) \text{ при } r \in [r_0, r_1] \cup [r_1, r_2], t > 0, u \equiv 0, u_z \equiv 0, \quad (25)$$

$$\varepsilon_\theta(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} r_0^2 r^{-2} y(t), \varepsilon_r(r, t) = -\varepsilon_\theta(r, t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} r_0^2 r^{-2} y(t), \varepsilon_z \equiv 0 \quad (26)$$

(в силу (22) формулы (21) сливаются). По (12)—(14) напряжения в каждом слое трубы выражаются разными формулами (через свою пару МФ): при $r \in [r_0, r_1]$

$$\sigma_r(r, t) = -p_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_1 [F_1(y(t)) - F_1(y(t) r_0^2 r^{-2})], \quad (27)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = -p_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_1 [F_1(y(t)) - F_1(y(t) r_0^2 r^{-2}) + 2\varphi_1(y(t) r_0^2 r^{-2})], \quad (28)$$

$$\sigma_z(r, t) = -p_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_1 [F_1(y(t)) - F_1(y(t) r_0^2 r^{-2}) + \varphi_1(y(t) r_0^2 r^{-2})]; \quad (29)$$

а при $r \in (r_1, r_2]$ —

$$\sigma_r = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2 [F_2(q_1 y(t)) - F_2(q_1 y(t) r_1^2 r^{-2})],$$

$$\sigma_\theta(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2 [F_2(q_1 y(t)) - F_2(q_1 y(t) r_1^2 r^{-2}) + 2\varphi_2(q_1 y(t) r_1^2 r^{-2})],$$

$$\sigma_z(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2 [F_2(q_1 y(t)) - F_2(q_1 y(t) r_1^2 r^{-2}) + \varphi_2(q_1 y(t) r_1^2 r^{-2})];$$

подстановка $q_1 r_1^2 = r_0^2$, $q_2 q_1 = r_0^2 r_2^{-2}$ и второго выражения (24) для $p_1(t)$ дает

$$\sigma_r(r, t) = -p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2 [F_2(r_0^2 r_2^{-2} y(t)) - F_2(y(t) r_0^2 r^{-2})], \quad (30)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = -p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2 [F_2(r_0^2 r_2^{-2} y(t)) - F_2(y(t) r_0^2 r^{-2}) + 2\varphi_2(y(t) r_0^2 r^{-2})], \quad (31)$$

$$\sigma_z(r, t) = -p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2 [F_2(r_0^2 r_2^{-2} y(t)) - F_2(y(t) r_0^2 r^{-2}) + \varphi_2(y(t) r_0^2 r^{-2})], \quad (32)$$

где $y(t)$ — решение уравнения (23). Интенсивность напряжений вычисляем по (15):

$$\sigma(r, t) = \mathbf{R}_1 [\varphi_1(y(t) r_0^2 r^{-2})], \quad r \in [r_0, r_1], \quad (33)$$

$$\sigma(r, t) = \mathbf{R}_2 [\varphi_2(y(t) r_0^2 r^{-2})], \quad r \in (r_1, r_2].$$

Радиальное напряжение (как и деформации) непрерывно на границе слоев $r = r_1$, а окружное и осевое напряжения, вообще говоря, имеют разрыв

первого рода. Вычислим их скачки в точке $r = r_1$. Из (29) и (32) при $r = r_1$ получим

$$\begin{aligned} \sigma_z(r_1 - 0, t) &= -p_0(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_1[F_1(y(t)) - F_1(q_1 y(t))] + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_1[\varphi_1(q_1 y(t))], \\ \sigma_z(r_1 + 0, t) &= -p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2[F_2(q_1 q_2 y(t)) - F_2(q_1 y(t))] + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2[\varphi_2(q_1 y(t))], \\ \sigma_z(r_1 + 0, t) - \sigma_z(r_1 - 0, t) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2[\varphi_2(q_1 y(t))] - \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_1[\varphi_1(q_1 y(t))], \quad t > 0, \end{aligned} \quad (34)$$

поскольку сумма всех остальных слагаемых тождественно равна нулю в силу (23). Скачок (34) зависит от времени и может обращаться в нуль в некоторые моменты. Аналогично вычисляем скачок окружного напряжения на границе слоев $r = r_1$:

$$\sigma_\theta(r_1 + 0, t) - \sigma_\theta(r_1 - 0, t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2[\varphi_2(q_1 y(t))] - \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_1[\varphi_1(q_1 y(t))], \quad t > 0. \quad (35)$$

В любой момент времени он в два раза больше скачка осевого напряжения (34). Скачок интенсивности напряжений (33) в $\sqrt{3}$ раз больше скачка (34).

4. Решение задачи о ползучести трубы из материалов с пропорциональными функциями релаксации и степенной функцией нелинейности

В случае $R_i = G_i R(t)$ уравнение (23) принимает вид

$$\mathbf{R}[G_1 F_1(y(t)) - G_1 F_1(q_1 y(t)) + G_2 F_2(q_1 y(t)) - G_2 F_2(q_1 q_2 y(t))] = \sqrt{3}(p_0 - p_2).$$

Применив обратный \mathbf{R} оператор Π , получим функциональное уравнение для $y(t)$

$$G_1 F_1(y(t)) - G_1 F_1(q_1 y(t)) + G_2 F_2(q_1 y(t)) - G_2 F_2(q_1 q_2 y(t)) = P(t), \quad (36)$$

$$P(t) := \sqrt{3} \Pi p(t).$$

Здесь $P(t) \geq 0$ — известная функция, если задана опорная функция релаксации $R(t)$ (и следовательно, функция ползучести, связанная с ней интегральным уравнением (5)) и разность давлений $p = p_0(t) - p_2(t) \geq 0$, $t > 0$ (например, в задаче о ползучести трубы при постоянной при $t > 0$ нагрузке $p(t) = \bar{p}h(t)$ имеем $P(t) = \sqrt{3} \bar{p} \Pi(p)$).

Рассмотрим двухслойную трубу из материалов с МФ

$$R_i = G_i R(t), \quad \varphi_i(x) = Ax^\alpha, \quad \alpha, A > 0, \quad G_i > 0, \quad (37)$$

где функция $R(t)$ (положительная, убывающая, выпуклая вниз) и показатель степени произвольны. Модель (37) обеспечивает классическую сте-

пенную зависимость кривых ползучести (и скорости ползучести) каждого материала от уровня напряжения (от его интенсивности при трехосном НДС) [29] и степенную аппроксимацию диаграмм деформирования [31]. В частности, при $R(t) = \text{const}$ получим слой упругопластических материалов со степенной функцией упрочнения и разными модулями сдвига.

Построим аналитическое решение ключевого интегрального уравнения (23), вычислим все интегральные операторы, входящие в общее представление для поля напряжений (27)—(32), и выведем простые алгебраические формулы для деформаций и напряжений в любой точке трубы. По (16) $F_i(s) = A\alpha^{-1}s^\alpha$, и уравнение (36) упрощается:

$$W y(t)^\alpha = P(t), \quad W := A\alpha^{-1}[G_1(1 - q_1^\alpha) + G_2q_1^\alpha(1 - q_2^\alpha)].$$

Здесь $W(q_1, q_2, \alpha) > 0$, так как $q_i \in (0; 1)$ и $q_i^\alpha \in (0; 1)$ при $\alpha > 0$, и решение $y(t)$ находим аналитически для произвольных функции релаксации в (37) и нагружения $p(t) \geq 0$:

$$y(t) = a(q_i, G_i, \alpha)P(t)^{1/\alpha} = [\sqrt{3}W^{-1}p\Pi(t)]^{1/\alpha}, \quad a(q_i, G_i, \alpha) = W^{-1/\alpha} > 0, \quad t > 0. \quad (38)$$

Подстановка $y(t)$ в формулы (25), (26) дает выражения

$$u(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} a(q_i, G_i, \alpha) r_0^2 r^{-1} P(t)^{1/\alpha} \quad \text{при } r \in [r_0, r_1] \cup [r_1, r_2], \quad (39)$$

$$\varepsilon_\theta(r, t) = u / r = \frac{\sqrt{3}}{2} a r_0^2 r^{-2} P(t)^{1/\alpha}, \quad \varepsilon_r = -\varepsilon_\theta, \quad \varepsilon = a r_0^2 r^{-2} P(t)^{1/\alpha} \quad (40)$$

для перемещения и деформаций. Их зависимость от времени полностью определяется функцией $P(t)^{1/\alpha}$, зависящей от программы нагружения $p(t)$ и функции релаксации $R(t)$. Влияние относительных толщин слоев трубы характеризуется множителем $a(q_i, G_i, \alpha)$ из (38). При фиксированном t модули деформаций (40) — убывающие функции r .

Однородность функций φ_i в (37) и $F_i = \varphi_i(x) / \alpha$ позволяет вычислить все интегральные операторы в формулах (27)—(32) и получить для напряжений в любой точке трубы простые алгебраические формулы. Сначала необходимо вычислить функции, на которые действуют операторы $\mathbf{R}_i = G_i \mathbf{R}$ в (27)—(32):

$$F_1(y(t)) = A\alpha^{-1} a^\alpha P(t) = w(q_1, q_2, \alpha) P(t),$$

где

$$w = [G_1(1 - q_1^\alpha) + G_2q_1^\alpha(1 - q_2^\alpha)]^{-1} = A(W\alpha)^{-1},$$

$$F_1(y(t)r_0^2 r^{-2}) = w r_0^{2\alpha} r^{-2\alpha} P(t), \quad \varphi_1(y(t)r_0^2 r^{-2}) = \alpha w r_0^{2\alpha} r^{-2\alpha} P(t), \quad (41)$$

$$F_1(y(t)) - F_1(y(t)r_0^2 r^{-2}) = w(1 - r_0^{2\alpha} r^{-2\alpha}) P(t),$$

$$F_1(y(t)) - F_1(y(t)r_0^2r^{-2}) + 2\varphi_1(y(t)r_0^2r^{-2}) = w[1 + (2\alpha - 1)r_0^{2\alpha}r^{-2\alpha}]P(t), \quad (41)$$

$$F_1(y(t)) - F_1(y(t)r_0^2r^{-2}) + \varphi_1(y(t)r_0^2r^{-2}) = w[1 + (\alpha - 1)r_0^{2\alpha}r^{-2\alpha}]P(t).$$

Все функции пропорциональны $P(t)$, и вычисление всех интегральных операторов $\mathbf{R}_1 = G_1\mathbf{R}$ в (27)–(29) сводится к вычислению образа $\mathbf{R}_1P(t) = G_1\mathbf{R}P(t) = \sqrt{3}G_1\mathbf{R}\Pi p(t) = \sqrt{3}G_1p(t)$ (поскольку $\mathbf{R}\Pi = \mathbf{I}$) и умножению на выражение, не зависящее от времени. Поэтому формулы (27)–(29) для напряжений при $r \in [r_0, r_1)$ принимают вид

$$\sigma_r(r, t) = -p_0(t) + G_1w[1 - (r/r_0)^{-2\alpha}]p(t), \quad (42)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = -p_0(t) + G_1w[1 + (2\alpha - 1)(r/r_0)^{-2\alpha}]p(t), \quad (43)$$

$$\sigma_z(r, t) = -p_0(t) + G_1w[1 + (\alpha - 1)(r/r_0)^{-2\alpha}]p(t). \quad (44)$$

В этих формулах $w(q_i, G_i, \alpha) > 0$, поскольку $q_i \in (0; 1)$ и $q_1^\alpha \in (0; 1)$ при $\alpha > 0$. Из (41) также следует оценка $w > 1 / (G_1 + q_1^\alpha G_2)$.

Так как у модели (37) $F_1(x) = F_2(x)$, то вычисление напряжений при $r \in (r_1, r_2]$ по формулам (30)–(32) отличается только множителем в операторе $\mathbf{R}_2 = G_2\mathbf{R}$ и наличием множителя $r_0^2r_2^{-2} = q_1q_2$ в аргументе функции $F_2(s) = A\alpha^{-1}s^\alpha$ в первом слагаемом под знаком оператора в каждой из формул (30)–(32). Постоянный множитель $(q_1q_2)^\alpha$ выносится из оператора, и потому при $r \in (r_1, r_2]$

$$\sigma_r(r, t) = -p_2(t) + G_2wq_1^\alpha q_2^\alpha [1 - (r/r_2)^{-2\alpha}]p(t), \quad (45)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = -p_2(t) + G_2wq_1^\alpha q_2^\alpha [1 + (2\alpha - 1)(r/r_2)^{-2\alpha}]p(t), \quad (46)$$

$$\sigma_z(r, t) = -p_2(t) + G_2wq_1^\alpha q_2^\alpha [1 + (\alpha - 1)(r/r_2)^{-2\alpha}]p(t). \quad (47)$$

Функции релаксации и ползучести модели (37) не входят в формулы для напряжений (42)–(47), т.е. напряжения не зависят от наследственных свойств материала и предыстории нагружения, а зависят лишь от величин давлений $p_i(t)$ в данный момент времени (для модели (37) напряжения такие же, как в квазистатической задаче для трубы из нелинейно-упругого материала). Для произвольных функций нелинейности это не так: напряжения зависят от наследственных свойств материала и предыстории нагружения.

Зависимости напряжений (42)–(47) от r (интервалы монотонности и выпуклости, наличие точек экстремума) в любой момент времени определяются поведением функций

$$S_r(x) = 1 - x^{-2\alpha}, \quad S_z(x) = 1 + (\alpha - 1)x^{-2\alpha}, \quad S_\theta(x) = 1 + (2\alpha - 1)x^{-2\alpha}$$

($x = r/r_0 \geq 1$ для $r \in [r_0, r_1]$ и $x = r/r_2$, $0 < r_1/r_2 \leq x \leq 1$ для $r \in [r_1, r_2]$), поскольку $w > 0$, $q_i > 0$, $G_i > 0$ и $p(t) \geq 0$, т.е. полностью определяются величиной α и знаком $x - 1$. На знак напряжений еще влияют отношения $p_2(t)/p_0(t)$ и q_i .

Поскольку $S_\theta(x) > S_z(x) > S_r(x)$ при $\alpha > 0$, $S_r(x) > 0$ при $x > 1$ и $S_r(x) < 0$ при $x < 1$, то из (42)—(47) в любой момент времени, когда $p(t) > 0$, следуют неравенства

$$\sigma_\theta(r, t) > \sigma_z(r, t) > \sigma_r(r, t), \quad -p_0(t) < \sigma_r(r, t) < -p_2(t) \leq 0, \quad r \in (r_0, r_1) \cup (r_1, r_2).$$

Так как $\alpha > 0$ и $S_r(x)$ возрастает при $x > 0$, то в любой момент времени, когда $p(t) > 0$, напряжение $\sigma_r(r)$ возрастает по r (а $|\sigma_r(r)|$ убывает). Осевое напряжение $\sigma_z(r)$ в любой момент времени (когда $p(t) > 0$) возрастает по r на каждом из интервалов (r_0, r_1) и (r_1, r_2) , если $\alpha \in (0; 1)$ (как и функция $S_z(x)$), убывает, если $\alpha > 1$, и постоянно по сечению лишь при $\alpha = 1$ (т.е. в случае линейно-вязкоупругого материала). Окружное напряжение (43), (46) возрастает на каждом из интервалов (r_0, r_1) и (r_1, r_2) , если $\alpha \in (0; 0,5)$, убывает, если $\alpha > 0,5$, и не зависит от координат при $\alpha = 0,5$. Так как при любом $\alpha > 0$ в любой момент времени $\sigma_r(r, t)$, $\sigma_\theta(r, t)$, $\sigma_z(r, t)$ монотонны по r , то наибольшее и наименьшее значения они принимают на границах слоев при $r = r_i$.

Интенсивность напряжений (и максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}(r, t) = \sigma(r, t) / \sqrt{3}$) выразим по формуле (33) как

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{3}G_1\alpha w p(t) (r/r_0)^{-2\alpha}, \quad r \in [r_0, r_1], \\ \sigma &= \sqrt{3}G_2\alpha w p(t)(r/r_0)^{-2\alpha}, \quad r \in (r_1, r_2]. \end{aligned} \tag{48}$$

При любом $\alpha > 0$ в любой момент времени, кроме тех, когда $p(t) = 0$, интенсивность напряжений убывает по r на каждом из двух интервалов, максимальна на внутренней границе каждого слоя и при $r = r_1$ имеет скачок $\bar{\sigma}(t) = \sqrt{3}(G_2 - G_1)\alpha w(q_i, G_i, \alpha)q_1^\alpha p(t)$.

Поэтому максимальное значение интенсивности напряжений в сечении трубы равно

$$\sigma_{\max} = \sqrt{3}\alpha w p(t) \max\{G_1, G_2q_1^\alpha\}.$$

Формулы (34), (35) для скачков осевого и окружного напряжений на границе слоев трубы $\bar{\sigma}_z(t)$ и $\bar{\sigma}_\theta(t)$ дают для модели (37) $\bar{\sigma}_z(t) = \bar{\sigma}(t) / \sqrt{3}$, $\bar{\sigma}_\theta(t) = 2\bar{\sigma}_z(t)$.

При $\alpha = 1$ (т.е. в случае линейно-вязкоупругих материалов) все компоненты тензора напряжений (42)—(47) совпадают с решением задачи для трубы из несжимаемых линейно-упругих материалов, в частности σ_z не зависит от r .

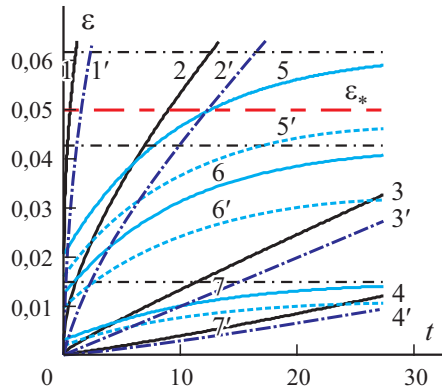


Рис. 1. Кривые ползучести двухслойной трубы при $r_1/r_2 = 0,8$, $r_0/r_2 = 0,6$ и постоянной разности давлений $p = 0,02$, порождаемые моделями (37). Пояснения в тексте.

На рис. 1 приведены кривые ползучести трубы при $r_1 / r_2 = 0,8$, $r_0 / r_2 = 0,6$ (т.е. $q_2 = 0,64$, $q_1 = 9 / 16$) и постоянной разности давлений $p = 0,02r$, порождаемые моделями (37) с $A = 1$, $G_1 = 1$, $G_2 = 2G_1$ и $\alpha = 1; 0,7; 0,5; 0,4$ и функцией ползучести

$$\Pi = Bt^m + b, m \in (0;1], B > 0, b \geq 0 \tag{49}$$

(как в модели Максвелла с дробной производной, если $b > 0$) или $\Pi = \beta - \gamma e^{-\lambda t}$, $\beta > \gamma$, $\lambda > 0$ (как в модели Кельвина, $1/\beta$ и $1/(\beta - \gamma)$ — длительный и мгновенный модули, $1/\lambda$ — время ретардации). Это графики интенсивности деформаций на внутренней поверхности трубы $\varepsilon(r_0, t) = u_1(t)$, построенные по формуле (38) для восьми моделей вида (49) с параметрами $m = 0,5$, $B = 1$, $b = 0,5$ (кривые 1—4 при $\alpha = 1; 0,7; 0,5; 0,3$) или $b = 0$ (штрих-пунктирные кривые 1'—4') и трех моделей с $\Pi = \beta - \gamma e^{-\lambda t}$, $\lambda = 0,1$, $\beta = 1,5$, $\gamma = 1$ при $\alpha = 1; 0,9; 0,7$ (кривые 5—7, штрих-пунктирные прямые — их горизонтальные асимптоты при $t \rightarrow \infty$). Интенсивность деформаций на внешней границе трубы $\varepsilon(r_2, t)$ отличается от $\varepsilon(r_0, t)$ множителем $r_0^2 r_2^{-2} = q_1 q_2 = 0,36$. Графики деформации $\varepsilon_\theta(r_1, t)$ отличаются от $\varepsilon(r_1, t)$ лишь множителем $\sqrt{3} / 2$.

Если переставить слои трубы, не меняя их толщину (сделать более жесткий слой внутренним: $G_1 = 2G_2 = 2$), то коэффициент w (41) уменьшится и понизятся деформации (40) (ср. кривые ползучести 5'—7' и кривые 5—7). Докажем общее утверждение: если $\eta = G_2 / G_1 > 1$ и q_i фиксированы, то $w_{21} < w_{12}$ тогда и только тогда, когда $q_1^{-\alpha} + q_2^\alpha > 2$ (при этом условии об относительной толщине слоев изготовление внутреннего слоя из более жесткого материала понижает деформации). Действительно, согласно (41) $(w_{21}^{-1} - w_{12}^{-1}) / G_1 = (\eta - 1)[(1 - q_1^\alpha) - q_1^\alpha(1 - q_2^\alpha)]$ и $w_{21} < w_{12}$ равносильно $(1 - q_1^\alpha) - q_1^\alpha(1 - q_2^\alpha) > 0$.

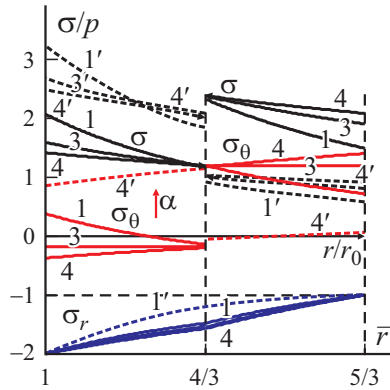


Рис. 2. Зависимость напряжений $\sigma(\bar{r})$, $\sigma_\theta(\bar{r})$, $\sigma_r(\bar{r})$ от радиальной координаты $\bar{r} = r / r_0$ при $r_1/r_2 = 0,8$, $r_0/r_2 = 0,6$ под действием постоянных давлений $p_0 = 2$, $p_2 = 1$ в предположении, что материалы слоев трубы описываются моделями (37) с $G_1 = 1$, $G_2 = 2G_1$ и показателями $\alpha = 1; 0,5; 0,3$ (кривые 1,3,4). Пояснения в тексте.

На рис. 2 приведены кривые напряжений $\sigma(\bar{r})$ (черные), $\sigma_\theta(\bar{r})$ (красные), $\sigma_r(\bar{r})$ (синие) в зависимости от радиальной координаты $\bar{r} = r / r_0$ в трубе с $r_1/r_2 = 0,8$, $r_0/r_2 = 0,6$ (как на рис. 1) под действием постоянных давлений $p_0 = 2$, $p_2 = 1$ в предположении, что материалы слоев трубы описываются моделями (37) с $A = 1$, $G_1 = 1$, $G_2 = 2G_1$ и показателями $\alpha = 1; 0,5; 0,3$ (кривые 1, 3, 4 — нумерация, как на рис. 1). Окружное напряжение $\sigma_\theta(\bar{r})$ постоянно в каждом слое при $\alpha = 0,5$ (кривая 3), а при $\alpha < 0,5$ возрастает в пределах каждого слоя (кривая 4) и принимает наибольшее значение при $r = r_2$. Интенсивность напряжений максимальна при $r \rightarrow r_1 + 0$. Штриховые кривые 1', 3', 4' — графики напряжений в трубе при той же толщине слоев, но с более жестким материалом во внутреннем слое: $G_1 = 2G_2 = 2$. Как и следовало ожидать, окружные напряжения и интенсивность напряжений во внешнем слое существенно упали (σ_θ — почти до нуля), но возросли во внутреннем слое. Модуль радиального напряжения также уменьшился (см. кривую 1'), в частности, снизилось давление $p_1 = |\sigma_r(r_1)|$ на границе слоев.

5. Решение задачи для многослойной трубы

Построенное для двухслойной трубы решение обобщается на задачу о многослойной трубе, состоящей из любого количества слоев вязкоупругих материалов (с радиусами внешних границ r_i , $i = 1; \dots; n$), каждый из которых подчиняется нелинейному ОС (1) с разными парами МФ $\{R_i, \varphi_i\}$, нагруженной давлениями $p_0(t)$ и $p_n(t)$, $t > 0$, на внутренней и внешней поверхности трубы (при $r = r_0$ и $r = r_n$). Радиальное перемещение в любой точке трубы описывается формулами

$$u_i(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} r_{i-1}^2 r^{-1} y_i(t) \text{ при } r \in [r_{i-1}, r_i], \quad i = 1; \dots; n, \quad (50)$$

условия непрерывности радиального перемещения (50) на границах слоев $r = r_i, \quad i = 1; \dots; N - 1$, имеют вид $r_{i-1}^2 y_i(t) = r_i^2 y_{i+1}(t)$, т.е. $y_{i+1}(t) = q_i y_i(t)$, или

$$y_{i+1}(t) = Q_i y_1(t), \quad Q_i := q_1 \dots q_i = (r_0/r_i)^2, \quad i = 1; \dots; n - 1. \quad (51)$$

Интегральное уравнение (17) для неизвестной функции $y_i(t)$ каждого слоя имеет вид

$$p_{i-1} - p_i = \frac{1}{\sqrt{3}} z_i(t) \mathbf{R}_i [F_i(|y_i(t)|) - F_i(q_i |y_i(t)|)], \quad q_i := (r_{i-1}/r_i)^2, \quad i = 1; \dots; n, \quad (52)$$

где $p_i(t)$ — давления на границах слоев. Система из $2n - 1$ уравнения для неизвестных функций $y_i(t)$ и $p_i(t), \quad i = 1; \dots; n - 1$, сводится к одному интегральному уравнению для функции $y = y_1(t)$ в результате сложения всех уравнений (52):

$$\sum_1^n \mathbf{R}_i [F_i(Q_{i-1} y(t)) - F_i(Q_i y(t))] = \sqrt{3}(p_0 - p_n), \quad (53)$$

т.е.

$$\sum_1^n \int_0^t R_i(t - \tau) [\varphi_i(Q_{i-1} y(\tau)) - \varphi_i(Q_i y(\tau))] \frac{\dot{y}(\tau)}{y(\tau)} d\tau = \sqrt{3}(p_0 - p_n),$$

где $Q_0 = 1, \quad Q_i = q_i Q_{i-1} < Q_{i-1} < 1$. После определения $y(t)$ из уравнения (53) по формулам (51) легко вычисляем функции $y_i(t)$ для каждого слоя, последовательно определяем все давления на границах слоев $p_i(t)$ и, наконец, по формулам (10)—(14) вычисляем поля перемещений и напряжений в каждом слое трубы. В частности,

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2} r_0^2 r^{-1} y(t), \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} r_0^2 r^{-2} y(t), \quad (54)$$

$$\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta, \quad \varepsilon = \frac{2}{\sqrt{3}} |\varepsilon_\theta| \text{ при } r \in [r_0, r_n], \quad t > 0$$

(деформации непрерывны, разрывы есть только у напряжений $\sigma_\theta(\bar{r})$ и $\sigma_z(\bar{r})$ — см. (35)).

Рассмотрим многослойную трубу из материалов с МФ (37), где опорная функция релаксации $R(t)$ (положительная, убывающая, выпуклая вниз) и параметры $\alpha, G_i > 0$ произвольны. Применив к (53) оператор Π , обратный \mathbf{R} , получим функциональное уравнение для $y(t)$, обобщающее (36):

$$\sum_1^n G_i [F_i(Q_{i-1} y(t)) - F_i(Q_i y(t))] = P(t), \quad P(t) := \sqrt{3} \Pi p(t). \quad (55)$$

Здесь $P(t) \geq 0$ — известная функция, если задана $R(t)$ ($P = \sqrt{3} p \Pi(t)$ в случае ползучести).

6. Зависимость времени разрушения многослойной трубы от давлений для критерия разрушения по максимальной деформации растяжения

Результаты испытаний образцов и элементов конструкций показывают, что при постоянной нагрузке, даже достаточно малой и вызывающей напряжения, которые значительно ниже предела прочности, деформация образца нарастает во времени (наблюдается ползучесть) и через некоторое время t_* после приложения нагрузки происходит разрушение (вследствие ползучести и связанных с ней механизмов накопления повреждений). Время жизни t_* зависит от нагрузки, температуры и других параметров и может измеряться годами. График зависимости t_* от нагрузки (или напряжения в образце) $t_*(\sigma)$ или обратной зависимости $\sigma(t_*)$ называется кривой длительной прочности (КДП). Данные испытаний разных вязкоупругопластичных материалов [7, 16—18, 44—46] показывают, что КДП $t_*(\sigma)$ всегда убывают, $t_*(\sigma) \rightarrow +\infty$ при $\sigma \rightarrow \sigma_0$ и $t_*(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \sigma_*$, где $\sigma_0 \geq 0$ — (условный) порог ползучести, $\sigma_* > 0$ — предел мгновенной прочности σ_* .

Для прогнозирования времени жизни при ползучести и моделирования длительной прочности вязкоупругопластичных материалов к выбранному (или построенному) ОС, описывающему их деформирование, необходимо добавить критерий разрушения, характеризующий момент разрушения t_* по достижении критических значений некоторой меры поврежденности $\omega(t)$ (скалярной, векторной или тензорной [7, 16—18, 44—46]). Простейший тип критериев разрушения — классические деформационные критерии разрушения, постулирующие, что $\omega(t) = C\varepsilon(t)$, и разрушение происходит в момент $t = t_*$, когда некоторая мера деформации $\varepsilon(t, \sigma)$ достигает предельного значения ε_* : $\varepsilon(t_*, \sigma) = \varepsilon_*$. Они могут описывать две разные ситуации: разрушение материала или элемента конструкции. Важно, чтобы выбранные критерий разрушения и ОС хорошо взаимодействовали друг с другом, т.е. позволяли вывести уравнения теоретических кривых ползучести $\varepsilon = \varepsilon(t; \sigma, T)$ и кривой длительной прочности $t_* = f(\sigma, T)$ (или $\sigma = F(t_*, T)$, где t_* — время разрушения при заданных напряжении σ и температуре T), *аналитически* исследовать в общем виде зависимость свойств КДП от (произвольных) материальных функций (МФ) и параметров ОС и критерия разрушения и указать ограничения на них, обеспечивающие совпадение качественных свойств теоретических КДП с типичными свойствами экспериментальных КДП [46, 47].

Найдем время разрушения многослойной трубы при ползучести, используя деформационный критерий разрушения. Рассмотрим случай $p := p_0 - p_2 > 0$; тогда функция $y = y_1(t) > 0$ и возрастает по t [1], и в силу (54) $\varepsilon_\theta(r, t) > 0$ и $\varepsilon_\theta(r, t)$ возрастает по t и убывает по r (это верно и для интенсивности деформаций $\varepsilon(r, t)$). Примем условие прочности трубы в виде системы деформационных условий прочности всех ее слоев

$$\max \{ \varepsilon_\theta(r, t) \mid r_{i-1} \leq r \leq r_i \} < \varepsilon_{*i}, \quad i = 1; \dots; n. \quad (56)$$

т.е. примем за критерий разрушения условие достижения максимальной

растягивающей деформацией $\varepsilon_\theta(r, t)$ в некоторой точке хотя бы одного из слоев предельного значения ε_{*i} для материала этого слоя. Пусть t_{*i} — верхняя грань множества значений t , для которых выполнено условие прочности (56) i -го слоя. Тогда время разрушения трубы равно $t_* = \min\{t_{*i}\}$. Поскольку в любой момент времени деформация $\varepsilon_\theta(r, t)$ убывает по r (см. (54)), то в пределах каждого слоя окружная деформация ε_θ принимает наибольшее значение на внутренней границе слоя, условие прочности (56) эквивалентно системе неравенств $\varepsilon_\theta(r_{i-1}, t) < \varepsilon_{*i}$ и все t_{*i} — корни уравнений $\varepsilon_\theta(r_{i-1}, t) = \varepsilon_{*i}$, $i = 1; \dots; n$, или

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} c_i \varepsilon_{*i}, \quad c_i = r_{i-1}^2 r_0^{-2} = 1 / Q_{i-1} = c_{i-1} / q_{i-1}. \quad (57)$$

Очевидно, $1 < c_i < c_{i+1} < r_{n-1}^2 r_0^{-2}$. Так как $y(t) > 0$ и возрастает по t , то каждое уравнение (57) имеет не более одного корня t_{*i} , а время разрушения $t_* = \min\{t_{*i}\}$ — корень уравнения

$$y(t) = c \varepsilon_*, \quad \varepsilon_* := \min\{c_i \varepsilon_{*i} \mid i = 1; \dots; n\}, \quad c_i = r_{i-1}^2 r_0^{-2}, \quad c = 2 / \sqrt{3}, \quad (58)$$

где $y(t)$ — решение интегрального уравнения (53); c_i, ε_{*i} — известные параметры; ε_* — критическая величина произведения $c_i \varepsilon_{*i}$ для самого слабого слоя трубы, в котором раньше произойдет разрушение (при проектировании трубы следует стремиться к увеличению значения ε_* , чтобы повысить ее долговечность, так как из (58) и возрастания $y(t)$ следует возрастание t_* с ростом ε_*). Подставив в (53) $t = t_*$, получим уравнение для t_* , т.е. уравнение кривой длительной прочности трубы.

Для модели с $R_i = G_i R(t)$, $G_i > 0$, уравнение (53) принимает вид (55), и подстановка в него $t = t_*$, $y(t_*) = c \varepsilon_*$ из (58) и $P = \sqrt{3} p \Pi(t)$ дает гораздо более простое уравнение для t_* :

$$\Pi(t_*) = C(q, \varepsilon_*) / p, \quad (59)$$

$$C(q, \varepsilon_*) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_1^n G_i [F_i(Q_{i-1} c \varepsilon_*) - F_i(Q_i c \varepsilon_*)], \quad (60)$$

$$\varepsilon_* = \min\{c_i \varepsilon_{*i}\}, \quad c_i = r_{i-1}^2 r_0^{-2}.$$

Здесь $C(q, \varepsilon_*) > 0$ — известная постоянная, зависящая от параметров q_i, G_i, ε_* и функций нелинейности слоев φ_i , но не зависящая от давления и функции ползучести $\Pi(t)$ ($C(q, \varepsilon_*) > 0$ вследствие возрастания функций φ_i и F_i и неравенств $Q_i < Q_{i-1}$).

В силу возрастания $\Pi(t)$ уравнение (59) для t_* имеет не более одного решения. Поскольку при $t > 0$ $\Pi(0) < \Pi(t) < \Pi(\infty)$, где $\Pi(0) \geq 0$ и $\Pi(\infty) \leq \infty$, то возможны ровно три случая:

1) если $\Pi(0) < C(q, \varepsilon_*) / p < \Pi(\infty)$, то уравнение (59) имеет ровно одно решение и время разрушения $t_*(p)$ определяется по формуле

$$t_* = \Psi(C(q, \varepsilon_*) / p), \quad C(q, \varepsilon_*)E_\infty < p < C(q, \varepsilon_*)E, \quad (61)$$

где $\Psi := \Pi^{-1}$ — обратная функция для $\Pi(t)$ (она определена на промежутке $[\Pi(0), \Pi(\infty))$), а $E := 1/\Pi(0)$ и $E_\infty := 1/\Pi(\infty)$ — мгновенный и длительный модули линейного ОС вязкоупругости (4) [43];

2) если $\Pi(\infty) < \infty$ ($\Pi(t)$ ограничена) и $C(q, \varepsilon_*)/p \geq \Pi(\infty)$, т.е. $E_\infty > 0$ и $p \leq C(q, \varepsilon_*)E_\infty$, то уравнение (59) не имеет решений и разрушение не происходит в течение сколь угодно большого времени;

3) если $C(q, \varepsilon_*)/p \leq \Pi(0)$ (для этого необходимо, чтобы $\Pi(0) > 0$), т.е. $p \geq p_*$, где $p_* = C(q, \varepsilon_*)E$, то разрушение наступает сразу в момент приложения нагрузки $t = 0$ (т.е. $t_* = 0$), а p_* — предельная величина давления для трубы согласно деформационному критерию разрушения.

Уравнение КДП (61) показывает, что форма и основные качественные свойства КДП $t_*(p)$, характер ее зависимости от разности давлений p определяются в основном функцией ползучести и слабо зависят от МФ φ_i , задающих нелинейность материалов слоев трубы в ОС (1), и от отношения радиусов: ведь φ_i и q_i влияют только на положительный коэффициент (60), вызывающий растяжение КДП (61) вдоль оси p , и потому не влияют на наличие точек экстремума или перегиба, на характер монотонности или выпуклости, на горизонтальные асимптоты. Этот результат тем интереснее, что МФ φ сильно влияет (как доказано в [8, 10]) на качественное разнообразие форм кривых ползучести, порождаемых ОС (1), в частности, делает возможным моделирование третьей стадии кривых ползучести (линейное ОС вязкоупругости на это не способно, так как порождает только выпуклые вверх кривые ползучести).

В силу монотонного возрастания $\Pi(t)$ функция $\Psi := \Pi^{-1}$ тоже возрастает, и потому зависимость (КДП) $t_*(p)$ (61) убывает, а из выпуклости вверх и возрастания $\Pi(t)$ следует выпуклость Ψ и $t_*(p)$ вниз при любых МФ ОС (1), подчиняющихся минимальным ограничениям, наложенным в п. 2. Конечно, обратная функция

$$p = p(t_*) = C(q, \varepsilon_*) / \Pi(t_*), \quad t_* > 0,$$

тоже возрастает и выпукла вниз. КДП $p(t_*)$ обладает горизонтальной асимптотой $p = C(q, \varepsilon_*)E_\infty$ при $t_* \rightarrow \infty$, а КДП $t_*(p)$ — вертикальной асимптотой $p = C(q, \varepsilon_*)E_\infty$, к которой стремится справа. Если $\Pi(\infty) < \infty$, то $E_\infty > 0$, а если $\Pi(\infty) = \infty$, то $E_\infty = 0$ и асимптота имеет вид $p = 0$. Если $\Pi(0) = 0$, то $E = \infty$, $\Psi(0) = 0$ и КДП (61) обладает асимптотой $t_* = 0$ при $p \rightarrow \infty$, а КДП $p(t_*)$ — вертикальной асимптотой $t_* = 0$.

Например, для моделей трубы с произвольными МФ φ_i и функцией ползучести (49) имеем $E = b^{-1}$, $E_\infty = 0$, $\Psi = ((x - b)/B)^{1/m}$,

$$t_*(p) = B^{-1/m} (C(q, \varepsilon_*)p^{-1} - b)^{1/w}, \quad p \in (0; p_*), \quad p_* = C(q, \varepsilon_*)/b.$$

В частности, для моделей со степенной функцией ползучести $\Pi = Bt^m$, $m \in (0; 1]$, будет $E = \infty$, $E_\infty = 0$, $p_* = \infty$, КДП принимает вид $t_* = (C/B)^{1/m} p^{-1/m}$, или $p = C(q, \varepsilon_*) B^{-1} t_*^{-m}$, и в осях $\lg t_* - \lg p$ КДП представляется прямой линией с угловым коэффициентом $-m < 0$. КДП такой формы часто наблюдаются в испытаниях многих материалов.

В случае $p_0 - p_2 < 0$ имеем $\varepsilon_\theta(r, t) < 0$, но время разрушения выражено той же формулой (61), поскольку $\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta$ в силу условия несжимаемости.

7. Время разрушения для меры поврежденности, равной интенсивности деформации

Если выбрать в качестве меры поврежденности каждого слоя максимальную деформацию сдвига $\gamma_{\max} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) / 2$ (а не максимальную деформацию растяжения $\varepsilon_1 = \varepsilon_\theta$), то получим в точности такое же время разрушения (61) (при тех же предельных значениях деформаций ε_{*i}), так как в каждом слое $\varepsilon_z \equiv 0$ и $\gamma_{\max} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) / 2 = (\varepsilon_\theta - \varepsilon_r) / 2 = \varepsilon_\theta$.

Если принять в качестве условия прочности систему ограничений на *интенсивность* деформации $\varepsilon(r, t)$ в пределах каждого слоя трубы

$$\max \{ \varepsilon(r, t) \mid r_{i-1} \leq r \leq r_i \} < \varepsilon_{*i}, \quad i = 1; \dots; n,$$

т.е. принять за критерий разрушения достижение интенсивностью деформации хотя бы в одном из слоев предельного для материала слоя значения ε_{*i} , то получим качественно аналогичный результат, как и в случае меры поврежденности $\varepsilon_\theta(r, t)$, поскольку $\varepsilon(r, t)$ отличается от $\varepsilon_\theta(r, t)$ лишь множителем $c = 2 / \sqrt{3}$ (см. (54)) и тоже достигает наибольшего в пределах каждого слоя значения на его внутренней границе. Поэтому все формулы (57)—(61) и следствия из них сохранятся ($c = 1$ вместо $c = 2 / \sqrt{3} > 1$ в (58)—(60)), и критерий разрушения $\varepsilon(r_{i-1}, t) = \varepsilon_{*i}$ для некоторого i даст для времени разрушения $t_{**} = \min \{ t_{**i} \}$ уравнение $y(t_{**}) = \varepsilon_*$ (t_{**i} — корни уравнений $\varepsilon(r_{i-1}, t) = \varepsilon_{*i}$). Так как $y(t)$ возрастает, то $t_{**} < t_*$ для любых МФ и p , а вместо (59) получим (в случае $R_i = G_i R(t)$)

$$\Pi(t_{**}) = C_2(q, \varepsilon_*) / p, \quad \varepsilon_* := \min \{ c_i \varepsilon_{*i} \},$$

$$C_2(q, \varepsilon_*) := \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^n G_i [F_i(Q_{i-1} \varepsilon_*) - F_i(Q_i \varepsilon_*)],$$

где $C_2(q, \varepsilon_*) > 0$ — постоянная, зависящая от параметров G_i, q_i, ε_* и МФ φ_i , но не зависящая от p и функции ползучести $\Pi(t)$. Аналогично (61) найдем

$$t_{**} = \Psi(C_2(q, \varepsilon_*) / p), \quad E_\infty C_2(q, \varepsilon_*) < p < E C_2(q, \varepsilon_*). \quad (62)$$

Таким образом, зависимость времени разрушения от G_i , q_i и ε_* будет иная, но КДП (62) получается из (61) растяжением вдоль оси p с коэффициентом $k = C_2(q, \varepsilon_*) / C(q, \varepsilon_*) < 1$.

8. Кривые длительной прочности моделей со степенной функцией нелинейности

Рассмотрим модель (37) с произвольной функцией релаксации (ползучести) и произвольным показателем α . Тогда по (16) $F_i(s) = A\alpha^{-1}s^\alpha$ и потому $C_2(q, \varepsilon_*) = W\varepsilon_*^\alpha / \sqrt{3}, W = A\alpha^{-1} \sum_1^n G_i(Q_{i-1}^\alpha - Q_i^\alpha) = A\alpha^{-1} \sum_1^n G_i Q_{i-1}^\alpha (1 - q_i^\alpha)$, (63)

и $C(q, \varepsilon_*) = c^\alpha C_2(q, \varepsilon_*)$, т.е. КДП (62) получается из (61) сжатием вдоль оси давления с коэффициентом $k = C_2 / C = c^{-\alpha} = (\sqrt{3} / 2)^\alpha > 1$, не зависящим от G_i , q_i и ε_* . Для модели (37) решение $y(t)$ интегрального уравнения (23) выражено формулой (38):

$$y(t) = [\sqrt{3}W^{-1}p\Pi(t)]^{1/\alpha} = [\sqrt{3}A^{-1}\alpha wp\Pi(t)]^{1/\alpha}, t \geq 0. \quad (64)$$

Его подстановка в (10), (11) дает выражения для полей перемещений и деформаций в условиях ползучести при постоянных давлениях. В силу (64) кривые ползучести $\varepsilon(r, t)$, $\varepsilon_\theta(r, t)$ и $\varepsilon_r(r, t)$ ограничены на полуоси $t \geq 0$ тогда и только тогда, когда ограничена $\Pi(t)$. Примеры кривых ползучести двухслойной трубы приведены на рис. 1.

На рис. 3 приведены КДП (62) двухслойной трубы с $r_1 / r_2 = 0,8$, $r_0 / r_2 = 0,6$ (т.е. $q_2 = 0,64$, $q_1 = 9/16$) при постоянной разности давлений $p = 0,02$ и предельной интенсивности деформации $\varepsilon_* = 0,05$, порождаемые моделями (37), (49) с показателями $\alpha = 1; 0,7; 0,5$, что и на рис. 1

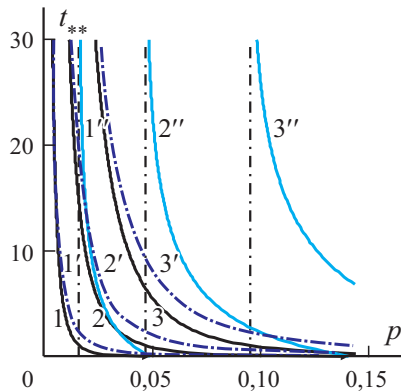


Рис. 3. Кривые длительной прочности (62) трубы ($r_1 / r_2 = 0,8$, $r_0 / r_2 = 0,6$) при постоянной разности давлений $p = 0,02$ и $\varepsilon_* = 0,05$, порождаемые моделями (37), (49), с показателями $\alpha = 1; 0,7; 0,5$, что и на рис. 1.

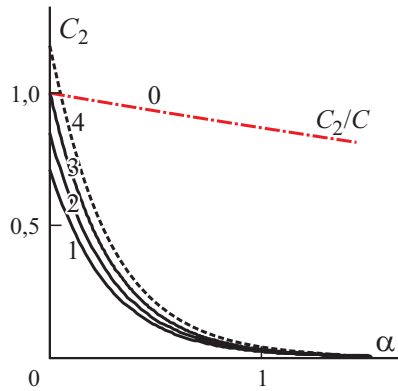


Рис. 4. Зависимость коэффициента C_2 (63), определяющего длительную прочность трубы, от показателя α при относительной толщине слоев трубы $r_0 / r_2 = 0,6$ и $r_1 / r_2 = 0,9; 0,8; 0,7; 0,6$. Пояснения в тексте.

(нумерация кривых сохранена). КДП 1—3 (для $b = 0,5$ с функцией ползучести (49)) и 1'—3' (штрих-пунктирные кривые для $b = 0$) имеют общую вертикальную асимптоту $p = 0$, а КДП 1''—3'' моделей с функцией ползучести $\Pi = \beta - \gamma e^{-\lambda t}$ — асимптоты $p = p_{\min}(q, \varepsilon^*, \alpha)$, $p_{\min} = E_{\infty} C_2 = C_2 / \beta > 0$ (штриховые прямые на рис. 3), т.е. моделируют материалы с ненулевым порогом ползучести p_{\min} .

На рис. 4 приведены зависимости коэффициента C_2 (63) от показателя α при относительной толщине слоев двухслойной трубы $r_0 / r_2 = 0,6$ и $r_1 / r_2 = 0,9; 0,8; 0,7; 0,6$ (кривые 1—4). Чем толще внешний (более жесткий) слой, тем больше $C_2(\alpha)$ и время разрушения (62). Кривая 0 — график отношения $k(\alpha) = C_2 / C = c^{-\alpha}$, т.е. коэффициент сжатия КДП (62) вдоль оси p для получения КДП (61), порождаемой критерием разрушения по максимальной растягивающей деформации $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$.

Заключение

Построено точное решение квазистатической задачи об определении напряженно-деформированного состояния толстостенной трубы, состоящей из любого количества (соединенных без натяга, ненапряженных) слоев нелинейно-вязкоупругих изотропных материалов, каждый из которых подчиняется ОС Работнова (1) с разными парами произвольных материальных функций и постулату несжимаемости при нагружении давлениями на внутренней и внешней поверхностях трубы, медленно меняющимися во времени. В частности, некоторые слои могут быть нелинейно-упругими, упругопластическими или линейно-вязкоупругими. Система из $2n-1$ нелинейных интегральных уравнений для неизвестных функций, описывающих поле деформаций каждого слоя, и радиального напряжения на границе слоев сведена к одному интегральному уравне-

нию (53) для одной неизвестной функции времени, зависящему от МФ слоев трубы, их относительных толщин и заданных на границах трубы давлений. Перемещения, деформации и напряжения в любой точке трубы в любой момент времени выражены через эту функцию времени явными формулами (24)—(32). На основе этих выражений получено решение задачи о ползучести и длительной прочности многослойной трубы. Используются три варианта деформационного критерия разрушения: в качестве меры поврежденности выбраны максимальная деформация растяжения в каждом слое трубы, или интенсивность деформаций, или максимальная деформация сдвига. В зависимости от заданных предельных значений деформации слоев и их относительных толщин указан слой, в котором произойдет разрушение (см. (58)), выведено уравнение для времени разрушения трубы $t_*(p)$ при ползучести, найдена простая характеристика многослойной трубы (см. ε_* в (58)), которую следует повышать при проектировании слоев трубы, чтобы повысить ее долговечность.

Для модели многослойной трубы (37) с пропорциональными функциями сдвиговой релаксации слоев и со степенной функцией нелинейности (с любым показателем) построено точное решение ключевого интегрального уравнения (23), вычислены все интегральные операторы в общих выражениях для напряжений (27)—(32), выведены простые алгебраические формулы (39), (40), (42)—(47) для деформаций и напряжений в любой точке трубы в любой момент времени и для времени разрушения трубы $t_*(p)$ при ползучести. Для трех вариантов деформационного критерия разрушения выведены уравнения КДП (61), (62) и аналитически исследованы их общие свойства. Доказано, что форма и основные качественные свойства КДП $t_*(p)$, определяются в основном функцией ползучести материалов слоев и слабо зависят от функции φ , задающей нелинейность в ОС (1), и от отношения радиусов слоев трубы (хотя от них зависят время разрушения и слой, в котором оно произойдет): ведь φ и q_i влияют только на коэффициенты $C(q_i, \varepsilon_*)$ и $C_2(q_i, \varepsilon_*)$, вызывающие растяжение КДП (61) и (62) вдоль оси p , и потому не влияют на существование точек экстремума или перегиба, на характер монотонности или выпуклости, на горизонтальные асимптоты КДП $t_*(p)$. Для всех трех критериев разрушения доказано, что КДП $t_*(p)$ убывает и выпукла вниз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хохлов А. В. Особенности эволюции напряженно-деформированного состояния толстостенной трубы из нелинейно-вязкоупругого материала под действием постоянных давлений // *Механика композиц. материалов и конструкций*. — 2020. — Т. 26, № 2. — С. 224—246. DOI: 10.33113/mkmc.ras.2020.26.02.224_246.06
2. Khokhlov A. V. Deformation and long-term strength of a thick-walled tube of physically non-linear viscoelastic material under constant pressure // *Rus. Metallurgy (Metally)*. — 2020. — No. 10. — P. 1079-1087. DOI: 10.1134/S0036029520100122
3. Соколовский В. В. Теория пластичности. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1946. — 306 с.

4. *Nadai A. L.* Theory of flow and fracture of solids. Vol.1. — N.-Y.: McGraw-Hill, 1950. — 572 p.
5. *Hill R.* The Mathematical Theory of Plasticity. — Oxford: Clarendon Press, 1950. — 356 p.
6. *Ильюшин А. А., Огибалов П. М.* Упругопластические деформации полых цилиндров. — М.: Изд-во МГУ, 1960. — 227 с.
7. *Gao X.-L.* An exact elasto-plastic solution for an open-ended thick-walled cylinder of a strain-hardening material // *Int. J. Pressure Vessels and Piping*. — 1992. — Vol.52, No. 1. — P. 129–144.
8. *Wong H., Simionescu O.* An analytical solution of thermoplastic thick-walled tube subject to internal heating and variable pressure, taking into account corner flow and nonzero initial stress // *Int. J. Eng. Sci.* — 1996. — Vol.34, No. 11. — P. 1259–1269.
9. *Gao X.-L.* Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory // *Int. J. Solids Struct.* — 2003. — Vol. 40. — P. 6445–6455.
10. *Zhao W., Seshadri R., Dubey R. N.* On thick-walled cylinder under internal pressure // *J. Pressure Vessel Technol.* — 2003. — Vol. 125, No. 3. — P. 267–273.
11. *Шарафутдинов Г. З.* Осесимметричная деформация толстостенной трубы из высокоэластичного материала // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. — 2009. — № 2. — С. 108–120.
12. *Радченко В. П., Кубышкина С. Н.* Математическая модель реологического формирования и разрушения толстостенной трубы // *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. — 1998. — Вып. 6. — С. 23–34. doi: 10.14498/vsgtu4
13. *Радченко В. П., Цветков В. В.* Напряжённо-деформированное состояние цилиндрического образца из сплава Д16Т в условиях осевого растяжения и кручения при ползучести // *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. — 2013. — Вып. 3 (32). — С.77–86.
14. *Зингерман К. М., Левин В. А.* Обобщение задачи Ламе—Гадолина для больших деформаций и ее аналитическое решение // *Прикл. математика и механика*. — 2013. — Т. 77, вып. 2. С. 322–336.
15. *Бухалов В. И., Попов А. Л., Челюбеев Д. А.* Задача Гадолина в упругопластической постановке // *Прикл. математика и механика*. — 2018. — Т. 82, вып. 6. — С. 804–812.
16. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. — М.: Физматгиз, 1960. — 456 с.
17. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966. — 752 с.
18. *Локощенок А. М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. — М.: Физматлит, 2016. — 504 с.
19. *Cristensen R. M.* Theory of Viscoelasticity. An introduction. — N.-Y., L.: Acad. Press, 1971. — 256 p.
20. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязкоупругих материалов (применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе). — М.: Наука, 1972. — 328 с.
21. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977. — 384 с.
22. *Tschoegl N. W.* The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior. — Heidelberg: Springer, 1989. — 769 p.
23. *Работнов Ю. Н.* Равновесие упругой среды с последствием // *Прикл. математика и механика*. — 1948. — Т.12, № 1. — С. 53–62.
24. *Дергунов Н. Н., Паперник Л. Х., Работнов Ю. Н.* Анализ поведения графита на основе нелинейной наследственной теории // *Журнал прикл. механики и техн. физики*. — 1971. — № 2. — С. 76–82.

25. *Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Степанычев Е. И.* Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах // *Механика полимеров*. — 1971. — № 1. — С. 74—87.
26. *Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Степанычев Е. И.* Описание ползучести композиционных материалов при растяжении и сжатии // *Механика полимеров*. — 1973. — № 5. — С. 779—785.
27. *Суворова Ю. В.* О нелинейно-наследственном уравнении Ю. Н. Работнова и его приложениях // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. — 2004. — № 1. — С. 174—181.
28. *Khokhlov A. V.* Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions // *Moscow Univ. Mech. Bulletin*. — 2017. — Vol. 72. — No. 5. — P. 103-107. doi: 10.3103/S0027133017050016
29. *Хохлов А. В.* Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупруго-пластичных материалов // *Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естествен. науки*. — 2017. — № 3. — С. 93—123. doi: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123
30. *Khokhlov A. V.* Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory // *Mech. Compos. Mater*. — 2018. — Vol. 54, No. 4. — P. 473—486. doi: 10.1007/s11029-018-9757-1
31. *Khokhlov A. V.* Properties of the set of strain diagrams produced by Rabotnov nonlinear equation for rheonomous materials // *Mech. Solids*. — 2019. — Vol. 54, No. 3. — P. 384—399. doi: 10.3103/S002565441902002X
32. *Fung Y. C.* Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation // *Biomechanics, Its Foundations and Objectives* / Eds. Y. C. Fung et al. — New Jersey: Prentice-Hall, 1972. — P. 181—208.
33. *Fung Y. C.* *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. — N.-Y.: Springer, 1993. — 568 p.
34. *Funk J. R., Hall G. W., Crandall J. R., Pilkey W. D.* Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments // *J. Biomech. Eng.* — 2000. — Vol. 122. — P. 15—22.
35. *Sarver J. J., Robinson P. S., Elliott D. M.* Methods for quasi-linear viscoelastic modeling of soft tissue: application to incremental stress-relaxation experiments // *J. Biomech. Eng.* — 2003. — Vol. 125, No. 5. — P. 754—758.
36. *Abramowitch S. D., Woo S. L.-Y.* An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory // *J. Biomech. Eng.* — 2004. — Vol. 126. — P. 92—97.
37. *Nekouzadeh A., Pryse K. M., Elson E. L., Genin G. M.* A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling // *J. Biomech.* — 2007. — Vol. 40. — No. 14. — P. 3070—3078.
38. *De Frate L. E., Li G.* The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model // *Biomech. Modeling Mechanobiology*. — 2007. — Vol. 6. — No. 4. — P. 245—251.
39. *Duenwald S. E., Vanderby R., Lakes R. S.* Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment // *Acta Mechanica*. — 2009. — Vol. 205. — P. 23—33.
40. *Lakes R. S.* *Viscoelastic Materials*. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. — 461 p.
41. *De Pascalis R., Abrahams I. D., Parnell W. J.* On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model // *Proc. R. Soc. London, Ser. A*. — 2014. — Vol. 470. — 20140058.

42. *Khokhlov A. V.* Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification // *Mech. Solids*. — 2018. — Vol. 53, No 3. — P. 307—328. DOI: 10.3103/S0025654418070105

43. *Хохлов А. В.* Анализ влияния объемной ползучести на кривые нагружения с постоянной скоростью и эволюцию коэффициента Пуассона в рамках линейной теории вязкоупругости // *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. — 2019. — Т. 23, № 4. — С. 671—704. doi: 10.14498/vsgtu1710

44. *Махутов Н. А.* Деформационные критерии разрушения и расчёт элементов конструкций на прочность. — М.: Машиностроение, 1981. — 272 с.

45. *Betten J.* *Creep Mechanics*. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. — 367 p.

46. *Khokhlov A. V.* Fracture criteria under creep with strain history taken into account, and long-term strength modeling // *Mech. Solids*. — 2009. — Vol. 44, No. 4. — P. 596–607. doi: 10.3103/S0025654409040104

47. *Хохлов А. В.* Кривые длительной прочности нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла и правило суммирования повреждённости при ступенчатых нагружениях // *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки*. — 2016. — Т. 20, №3. — С. 524—543. doi: 10.14498/vsgtu1512

Поступила в редакцию 05.02.2021

Окончательный вариант поступил 28.06.2021

Received Feb 5, 2021 (June 28, 2021)
