

Д. Чаттерджи, А. Гош, Д. Чакраворти*

Department of Civil Engineering, Jadavpur University, Kolkata, India

АНАЛИЗ РАЗРУШЕНИЯ ПЕРВОГО СЛОЯ В КОСОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНАХ ИЗ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ ПРИ РАЗНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ НА КРОМКАХ¹

D. Chatterjee, A. Ghosh, and D. Chakravorty*

FIRST-PLY FAILURE BEHAVIOR OF LAMINATED COMPOSITE SKEW PLATES OF VARIOUS EDGE CONDITIONS

Keywords: skew plate, first-ply failure, finite-element method, post-failure response

Applications of skew plates in the practical civil engineering are well-established. A look into the papers about the failure of laminated composite structural elements revealed that composite skew plates have not been studied for failure in detail. The first-ply failure load and frequency reduction due to such a failure are reported considering practical parametric variations of composite skew plates. Different well-established failure criteria, including the most recent Puck failure criterion, are used to investigate the first-ply failure response by the finite-element method. The results obtained are post processed to formulate specific recommendations regarding the relative behaviour of different skew plate combinations in terms of the first-ply failure.

Ключевые слова: пластина косоугольная, разрушение слоя первого, метод конечно-элементный, отклик после разрушения

В настоящей работе с учетом практических параметрических изменений косоугольных пластин из слоистых композитов определена нагрузка разрушения первого слоя и выявлено уменьшение в силу этого собственной частоты свободных колебаний. Для исследования реакции на разрушение первого слоя методом конечных элементов использовали разные общепринятые кри-

*Автор, с которым следует вести переписку: donajdvu@gmail.com
Corresponding author: donajdvu@gmail.com

¹Перевод с англ.

терии разрушения, включая недавно предложенный критерий Пака. Полученные результаты проанализированы с целью формулирования конкретных рекомендаций относительно поведения косоугольных пластин с точки зрения разрушения первого слоя.

Введение

Косоугольные пластины из слоистых композитов стали хорошим выбором для инженеров-строителей. Надежное применение этих конструктивных элементов требует глубокого понимания их механического поведения, включая характеристики разрушения первого слоя (РПС). Неудивительно, что исследователи уделили много внимания изучению поведения композитных пластин при разрушении. Однако довольно мало работ было посвящено анализу разрушения первого слоя в композитных пластинах.

Первые статьи об изотропных и ортотропных косоугольных пластинах опубликованы в начале 90-х годов [1—9]. В основном изучали влияние угла скоса на максимальный центральный прогиб, а также центральный и краевой моменты косоугольных пластин со свободно опертыми и защемленными кромками при поперечных нагрузках. Деформационное поведение толстых и тонких изотропных косоугольных пластин исследовали в [10] и [11] соответственно. Позднее геометрический нелинейный анализ изотропной толстой косоугольной пластины выполнили в [12] с использованием теории пластин Рейсснера—Миндлина для разных граничных условий и условий нагружения. В [13] поведение косоугольной пластины средней толщины из слоистого композита при больших деформациях изучали, используя нелинейность фон Кармана и теорию сдвигового деформирования третьего порядка при граничных условиях защемленных и свободно опертых кромок.

Свободные изгибные колебания изотропных прямоугольных и косоугольных пластин анализировали в [14]. Основные моды колебаний разных изотропных подкрепленных и неподкрепленных пластин рассмотрены в [15, 16]. Подобные исследования композитных квадратных, прямоугольных, косоугольных и ромбических пластин при разных граничных условиях выполнили в [17]. В [18] исследовали основные частоты первых восьми мод колебаний квадратной изотропной пластины с вырезом и без него при граничных условиях защемленных и свободно опертых кромок. Аналогичные проблемы косоугольных пластин из слоистых композитов рассмотрели в [4, 19]. Нелинейный анализ свободных колебаний разных косоугольных пластин из слоистых композитов выполнили в [20—22].

Помимо изотропных и ортотропных пластин внимание привлекают пластины из слоистых композитов с другими укладками, а разрушение круглых и прямоугольных пластин изучали в [5, 9]. Подобные исследования косоугольных пластин малочисленны; в этой связи стоит упомянуть работу [23].

Многие исследователи изучали разрушение прямоугольных пластин, но аналогичным характеристикам разрушения косоугольных пластин не уделяли достаточного внимания. В [24—28] исследовали поведение при разрушении первого слоя (РПС) свободно опертых прямоугольных пластин

с разной укладкой слоев при поперечных нагрузках. В [25] рассмотрены различия в поведении при РПС прямоугольных пластин, подвергнутых поперечным и плоскостным нагрузкам, а также поведение при РПС пластин из слоистых композитов с вырезами и без них. В [29, 30] описали результаты исследований РПС и линейного прогрессирующего разрушения прямоугольных пластин при поперечных и одноосных растягивающих нагрузках. В [31] представили результаты РПС и предельные разрушающие нагрузки для пластин, подвергнутых только поперечным нагрузкам. Нелинейное поведение пластин при РПС исследовали в [32—35]. Результаты экспериментальных исследований РПС прямоугольных пластин представлены в [36]. Помимо линейных и нелинейных нагрузок РПС линейные и геометрически нелинейные предельные нагрузки разрушения пластин из слоистых композитов также численно исследовали в [34, 37].

Из представленного обзора литературы следует, что анализ РПС композитных конструктивных элементов и косоугольных пластин привлек внимание исследователей, но изучение разрушения косоугольных пластин из слоистых композитов выполнено только в [23]. В настоящей работе характеристики РПС косоугольных пластин из слоистых композитов исследовали путем изменения их практически важных параметров с целью получения результатов, имеющих инженерное значение.

1. Математическая постановка

1.1. Определяющие уравнения косоугольных пластин. Рассмотрим косоугольную пластину из слоистого композита размером $l \times b$ с углом скоса α и общей постоянной толщиной t в косоугольной системе координатах x', y', z' (рис. 1). Волокна в каждом слое пластины ориентированы вдоль локальной оси слоя под углом φ к глобальной оси x . Оси x' и

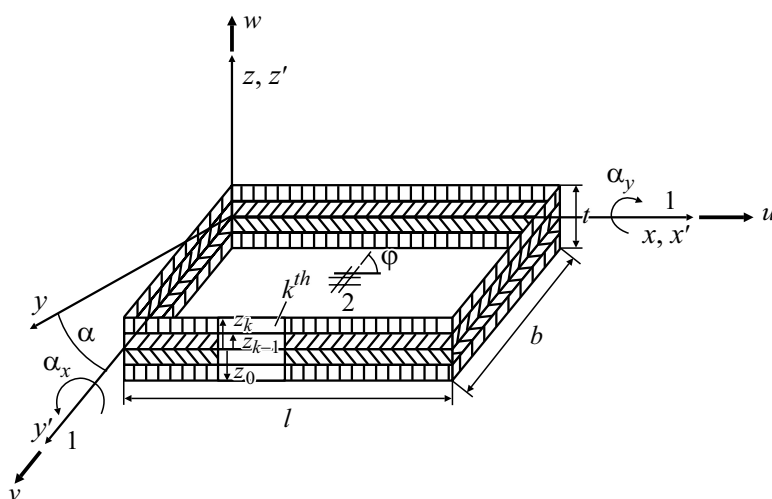


Рис. 1. Косоугольная пластина из слоистого композита. В случае прямоугольной пластины $\alpha = 0$: 1 — срединная плоскость; 2 — k -й слой.

y' находятся на срединной поверхности пластины. Соотношения между косоугольной и ортогональной системами координат запишем как

$$x = x' + y' \sin \alpha, \quad y = y' \cos \alpha; \quad z = z'. \quad (1)$$

Для выведения определяющего уравнения для косоугольной пластины из слоистого композита используем принцип минимума полной потенциальной энергии E . Полная потенциальная энергия E — это сумма энергии деформирования U и внешней работы W_e :

$$E = U + W_e. \quad (2)$$

Энергию деформирования пластины зададим как интеграл по объему

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV, \quad (3)$$

а работу, совершенную внешней нагрузкой $\{q\}$, — как интеграл по площади:

$$W_e = \iint_A \{U\}^T \{q\} dA. \quad (4)$$

Внешнюю нагрузку можно выразить как $\{q\} = \{0 \quad 0 \quad -q_z \quad 0 \quad 0\}^T$, где $\{-q_z\}$ — интенсивность равномерно распределенной поперечной нагрузки, действующей на пластину.

1.2. Определяющее уравнение для пластины можно записать как

$$\{F\} = [D] \{\varepsilon\}. \quad (5)$$

Результирующий вектор напряжений $\{F\}$, вектор деформаций $\{\varepsilon\}$ и матрицу упругости $[D]$ слоистого композита запишем как

$$\begin{aligned} \{F\} &= \{N_{x'}, N_{y'}, N_{x'y'}, M_{x'}, M_{y'}, M_{x'y'}, Q_{x'}, Q_{y'}\}^T = \\ &= \int_{-t/2}^{+t/2} \left\{ \sigma_{x'} \quad \sigma_{y'} \quad \tau_{x'y'} \quad \sigma_{x' \cdot Z} \quad \sigma_{y' \cdot Z} \quad \tau_{x'y' \cdot Z} \quad \tau_{x'z'} \quad \tau_{y'z'} \right\} dZ, \quad (6) \end{aligned}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{11} & S_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{12} & S_{22} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{x'} \quad \varepsilon_{y'} \quad \gamma_{x'y'} \quad \kappa_{x'y'} \quad \kappa_{x'z'} \quad \kappa_{y'z'} \quad \gamma_{x'z'} \quad \gamma_{y'z'}\}. \quad (8)$$

Компоненты жесткости пластины определим как

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (z_k - z_{k-1}), \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2),$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3), \quad i = 1, 2, 6,$$

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^n (G_{ij})_k (Z_k - Z_{k-1}), \quad i = 4, 5,$$

где Q_{ij} и G_{ij} — элементы матриц упругих постоянных в повернутых осях,

$$[Q_{ij}]_{off} = [T]^T [Q_{ij}]_{on} [T], \quad i, j = 1, 2, 6,$$

$$[G_{ij}]_{off} = [T']^T [G_{ij}]_{on} [T'], \quad i, j = 4, 5,$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi \\ -\sin 2\varphi & \sin 2\varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix}, \quad [T'] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

(9)

$$[Q_{ij}]_{on} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 6,$$

$$[G_{ij}]_{on} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}, \quad i, j = 4, 5,$$

$$Q_{11} = (1 - \nu_{12}\nu_{21})^{-1} E_1, \quad Q_{22} = (1 - \nu_{12}\nu_{21})^{-1} E_2,$$

$$Q_{12} = (1 - \nu_{12}\nu_{21})^{-1} E_1 \nu_{21}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{31}.$$

В теории сдвигового деформирования первого порядка, используемой в настоящей работе,

$$\{\varepsilon_{x'} \quad \varepsilon_{y'} \quad \gamma_{x'y'} \quad \gamma_{x'z'} \quad \gamma_{y'z'}\}^T = \{\varepsilon_{x'}^0 \quad \varepsilon_{y'}^0 \quad \gamma_{x'y'}^0 \quad \gamma_{x'z'}^0 \quad \gamma_{y'z'}^0\}^T +$$

$$+z \left\{ \kappa_{x'} \quad \kappa_{y'} \quad \kappa_{x'y'} \quad \kappa_{x'z'} \quad \kappa_{y'z'} \right\}^T, \quad (10)$$

где

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'}^0 \\ \varepsilon_{y'}^0 \\ \gamma_{x'y'}^0 \\ \gamma_{x'z'}^0 \\ \gamma_{y'z'}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x'} \\ \frac{\partial v}{\partial y'} \\ \frac{\partial u}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial x'} \\ \alpha_x + \frac{\partial w}{\partial x'} \\ \alpha_y + \frac{\partial w}{\partial y'} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \kappa_{x'} \\ \kappa_{y'} \\ \kappa_{x'y'} \\ \kappa_{x'z'} \\ \kappa_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x'} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial y'} \\ \frac{\partial \alpha_x}{\partial y'} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x'} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

1.3. Конечно-элементная формулировка. В настоящей работе формулировку конечно-элементного метода (МКЭ) разработали с использованием восьмиузловых изопараметрических серендиповых криволинейных квадратичных элементов с пятью степенями свободы в узловой точке (три перемещения u , v , w вдоль осей x' , y' , z' соответственно и два поворота α_y , α_x вокруг осей x' , y' соответственно). Вектор перемещений $\{u\}$ конечного элемента выразим через функции формы $[N]$ и узловые перемещения $\{\delta\}$ как

$$\{u\} = [N] \{\delta\}. \quad (11)$$

Вектор деформаций $\{\varepsilon\}$ связан с узловыми степенями свободы конечного элемента $\{\delta\}$ матрицей деформации—перемещения $[B]$ как

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta\}. \quad (12)$$

Здесь матрицы $[B]$ и $[N_i]$ имеют такой же вид, как в [38].

Энергию деформирования косоугольной пластины выразим как

$$U = \frac{1}{2} \iint_A \{\delta\}^T [B]^T [D][B] \{\delta\} dx' dy', \quad (13)$$

а внешнюю работу — как

$$W_e = - \iint_A \{\delta\}^T [N]^T [q] dx' dy'. \quad (14)$$

Согласно теореме о минимуме потенциальной энергии

$$\frac{\partial E}{\partial \{\delta\}} = 0. \quad (15)$$

Подставив уравнения (13) и (14) в (15), получим матрицу жесткости конечного элемента $[K_e]$ и вектор внешней нагрузки $\{Q_e\}$:

$$[K_e] = \int_A [B]^T [D] [B] dx' dy', \quad (16)$$

$$\{Q_e\} = \int_A [N]^T [q] dx' dy'. \quad (17)$$

Матрицу жесткости элемента $[K_e]$ и вектор нагрузки $\{Q_e\}$ преобразуем в изопараметрические координаты ξ и η для численного интегрирования с использованием квадратурного правила Гаусса 2×2 . Наконец, глобальную матрицу жесткости $[K]$ и глобальный вектор нагрузки $[Q]$ получим путем сборки матриц конечных элементов. Определяющее уравнение

$$[K]\{d\} = \{Q\}, \quad (18)$$

где

$$[K] = \sum_{i=1}^n [K_e], \quad \{Q\} = \sum_{i=1}^n [Q_e],$$

решено методом исключения Гаусса.

Перемещения $\{d\}$ пластины из слоистого композита, полученные из решения уравнения (18), используем для нахождения вектора деформаций. Деформации, действующие на поверхности слоя, расположенного на расстоянии Oz от срединной поверхности слоистого композита, вычисляем в глобальных осях, используя уравнение (10). Деформации слоя преобразуем из глобальных осей пластины в локальные оси слоя с помощью матрицы преобразования $[T]$:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \frac{\gamma_{x'y'}}{2} \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

Напряжения в слое вычисляем с помощью уравнения

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [Q_{ij}]_{on} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} . \quad (20)$$

Нагрузку РПС P^{fl} в косоугольной пластине из слоистого композита определяем, подставив значения напряжений и деформаций слоев в хорошо известные критерии разрушения, такие как критерий максимального напряжения, максимальной деформации, Цая—Хилла, Цая—Ву, Хоффмана, Хашина и Пака.

1.3.1. Критерий максимального напряжения. Разрушение происходит, если удовлетворяется хотя бы одно из следующих условий:

- мода разрушения волокна при растяжении $\frac{\sigma_1}{\sigma_{1T}^u} \geq 1$,
- мода разрушения волокна при сжатии $-\sigma_1 \geq \sigma_{1C}^u$,
- мода растрескивания матрицы $\frac{\sigma_2}{\sigma_{2T}^u} \geq 1$, (21)
- мода смятия матрицы $-\sigma_2 \geq \sigma_{2C}^u$,
- мода разрушения матрицы при сдвиге $\frac{\tau_{12}}{\tau_{12}^u} \geq 1$.

1.3.2. Критерий максимальной деформации. Разрушение происходит, если удовлетворяется хотя бы одно из следующих условий:

- мода разрушения волокна при растяжении $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{1T}^u} \geq 1$,
- мода разрушения волокна при сжатии $-\varepsilon_1 \geq \varepsilon_{1C}^u$,
- мода растрескивания матрицы $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_{2T}^u} \geq 1$, (22)
- мода смятия матрицы $-\varepsilon_2 \geq \varepsilon_{2C}^u$,
- мода разрушения матрицы при сдвиге $\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{12}^u} \geq 1$.

1.3.3. Критерий разрушения Цая—Хилла. Разрушение происходит, если удовлетворяется хотя бы одно из следующих условий:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{1T}^u} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2T}^u} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sigma_{1T}^u} + \frac{1}{\sigma_{2T}^u} \right) \sigma_1 \sigma_2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12}^u} \right)^2 \geq 1, \quad \sigma_1, \sigma_2 > 0, \quad (23)$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{1C}^u}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2C}^u}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sigma_{1C}^u} + \frac{1}{\sigma_{2C}^u}\right)\sigma_1\sigma_2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12}^u}\right)^2 \geq 1, \quad \sigma_1, \sigma_2 < 0. \quad (23)$$

1.3.4. Критерий разрушения Цая—Ву:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sigma_{1T}^u} - \frac{1}{\sigma_{1C}^u}\right)\sigma_1 + \left(\frac{1}{\sigma_{2T}^u} - \frac{1}{\sigma_{2C}^u}\right)\sigma_2 + \left(\frac{1}{\sigma_{1T}^u\sigma_{1C}^u}\right)\sigma_1^2 + \\ & + \left(\frac{1}{\sigma_{2T}^u\sigma_{2C}^u}\right)\sigma_2^2 - \left(\sqrt{\sigma_{1T}^u\sigma_{1C}^u\sigma_{2T}^u\sigma_{2C}^u}\right)\sigma_1\sigma_2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12}^u}\right)^2 \geq 1. \end{aligned} \quad (24)$$

1.3.5. Критерий разрушения Хоффмана:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_{1T}^u\sigma_{1C}^u} - \frac{1}{\sigma_{2T}^u\sigma_{2C}^u}\right)\sigma_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_{1T}^u\sigma_{1C}^u} + \frac{1}{\sigma_{2T}^u\sigma_{2C}^u}\right)(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \\ & + \left(\frac{1}{\sigma_{1T}^u} - \frac{1}{\sigma_{1C}^u}\right)\sigma_1 + \left(\frac{1}{\sigma_{2T}^u} - \frac{1}{\sigma_{2C}^u}\right)\sigma_2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12}^u}\right)^2 \geq 1. \end{aligned} \quad (25)$$

1.3.6. Критерий разрушения Хашина:

— мода разрушения волокна при растяжении $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{1T}^u}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12}^u}\right)^2 \geq 1,$

— мода разрушения волокна при сжатии $-\sigma_1 \geq \sigma_{1C}^u,$

— мода растрескивания матрицы $\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2T}^u}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12}^u}\right)^2 \geq 1, \quad (26)$

— мода смятия матрицы $\left[\left(\frac{\sigma_{2C}^u}{2\tau_{12}^u}\right)^2 - 1\right] \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2C}^u}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{2\tau_{23}^u}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12}^u}\right)^2 \geq 1.$

1.3.7. Критерий разрушения Пака:

— мода разрушения волокна при растяжении $\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\sigma_1}{\sigma_{1T}^u}\right| + \left|\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{1T}^u}\right|\right) \geq 1,$

— мода разрушения волокна при сжатии $\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\sigma_1}{\sigma_{1C}^u}\right| + \left|\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{1C}^u}\right|\right) \geq 1,$

— мода А растрескивания матрицы ($\sigma_2 > 0$)

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12}^u}\right)^2 + \left[1 - p_{12}^{(+)} \frac{\sigma_{2T}^u}{\tau_{12}^u}\right]^2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2T}^u}\right)^2} + p_{12}^{(+)} \frac{\sigma_2}{\tau_{12}^u} \geq 1, \quad (27)$$

— мода В смятия матрицы

$$\left[(\sigma_2 < 0); 0 \leq \left| \frac{\sigma_2}{\tau_{12}} \right| \leq \left| \frac{\tau_{23}^A}{\tau_{12}^C} \right| \right] : \frac{1}{\tau_{12}^u} \left[\sqrt{(\tau_{12})^2 + (p_{12}^{(-)} \sigma_2)^2} + p_{12}^{(+)} \sigma_2 \right] \geq 1,$$

— мода С смятия матрицы

$$\left[(\sigma_2 < 0); 0 \leq \left| \frac{\tau_{12}}{\sigma_2} \right| \leq \left| \frac{\tau_{12}^C}{\tau_{23}^A} \right| \right] : \left[\left(\frac{\tau_{12}}{2(1 + p_{12}^{(-)} \tau_{23}^A)} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2C}^u} \right)^2 \right] \frac{\sigma_{2C}^u}{(-\sigma_2)} \geq 1,$$

где

$$p_{12}^{(+)} = 0,3, \quad p_{12}^{(-)} = 0,3,$$

$$\tau_{23}^A = \frac{\tau_{12}^u}{2p_{12}^{(-)}} \left[\sqrt{1 + 2p_{12}^{(-)} \frac{\sigma_{2C}^u}{\tau_{12}^u}} - 1 \right], \quad \tau_{12}^C = \tau_{12}^u \sqrt{1 + 2p_{12}^{(-)} \frac{\tau_{23}^A}{\tau_{12}^u}}.$$

Важно отметить, что в интерактивных теориях разрушения при оценке прочности не рассматривают отдельные компоненты напряжений слоев. Фактически, разрушение обусловлено взаимодействием напряжений слоев. Отдельные компоненты напряжений можно сравнить с допустимыми для выявления компоненты напряжения, играющей наиболее значительную роль в разрушении.

1.4. Анализ свободных колебаний. Путем сборки матриц конечных элементов получим соответствующие глобальные матрицы жесткости $[K]$ и массы $[M]$ и запишем основное уравнение в виде

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0, \quad (28)$$

где ω — частота колебаний.

2. Численные примеры

Для подтверждения обоснованности предложенной конечно-элементной формулировки значения нагрузки РПС для пластины из ортогонально армированного композита $[0^\circ/90^\circ]$, вычисленные в [33], сравнивали с полученными в настоящей работе (табл. 1).

Табл. 1

Значения нормированной нагрузки \bar{P}^{fl} для пластины с укладкой $[0^\circ/90^\circ]_s$

Критерий разрушения	Отношение длины стороны к толщине	Разрушающая нагрузка, эксперимент [33]	\bar{P}^{fl} , расчет МКЭ			
			[33] (при конечно-элементной сетке 3×3 для четверти пластины)	Настоящая работа (при конечно-элементной сетке для полной пластины)		
				4×4	6×6	8×8
Максимальное напряжение	152,67	158,08	64,94	74,80	64,56	63,93
Максимальная деформация			76,04	113,34	94,48	92,90
Хоффмана			63,60	68,75	58,66	58,02
Цая—Хилла			64,03	86,25	73,35	72,48
Цая—Ву			68,30	76,47	65,03	64,26

Примечание: длина пластины 100 мм, толщина слоя 0,155 мм, нагрузка приложена в центре пластины.

Для подтверждения правильности внедрения косоугольной пластины из слоистого композита в вычислительную программу МКЭ, разработанную с помощью настоящего подхода, определили безразмерные основные частоты косоугольных пластин с двумя разными углами скоса и сравнили с рассчитанными в [22] (табл. 2).

Помимо решения тестовых задач выполнили численные исследования косоугольных пластин из эпоксидного слоистого углепластика Q-1115 при разных граничных условиях. В табл. 3 приведены значения свойств материалов; геометрические параметры рассматриваемых конфигураций косоугольных пластин следующие: $l/b = 1$, $b/t = 100$, $\alpha = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30^\circ$.

Табл. 2

Значения безразмерных частот $\bar{\omega} = \omega l^2 / \pi^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_{22}}}$ косоугольной свободно опертой пластины с укладкой $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ($l/b = 1$)

Угол скоса α , град Источник	Сетка	Мода		
		1	2	3
0 Настоящая работа [22]	8×8	1,9673	4,0223	6,6882
		1,9137	3,9730	6,6448
30 Настоящая работа [22]	8×8	2,9076	5,2589	8,4974
		2,8380	5,1945	8,4640

Примечание: $E_{11}/E_{22} = 40$, $G_{12}/E_{22} = 0,6$, $G_{23}/E_{22} = 0,5$, $\nu_{12} = 0,25$, $l/t = 1000$, $\rho = 1$. Размер пластины в плане $l \times b$, ρ — плотность материала пластины.

Механические свойства эпоксидного углепластика Q-1115

Упругие постоянные, ГПа		Прочность, МПа		Предельная деформация	
E_{11}	142,50	σ_{1T}	2193,50	ε_{1T}	0,01539
E_{22}	9,79	σ_{1C}	2457,0	ε_{1C}	0,01724
E_{33}	9,79	$\sigma_{2T} = \sigma_{3T}$	41,30	$\varepsilon_{2T} = \varepsilon_{3T}$	0,00412
$G_{12} = G_{13}$	4,72	$\sigma_{2C} = \sigma_{3C}$	206,80	$\varepsilon_{2C} = \varepsilon_{3C}$	0,02112
G_{23}	1,192	τ_{12}^u	61,28	γ_{12}^u	0,05141
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0,27	τ_{23}^u	78,78	γ_{23}^u	0,01669
ν_{23}	0,25	τ_{13}^u	78,78	γ_{13}^u	0,01669

Рассматривали граничные условия защемления (C) и свободного опирания (S) кромок пластин. Комбинируя эти два граничных условия, сгенерировали четыре типа пластин с граничными условиями CCCC, SSSS, CSCS и CCSS (рис. 2).

Исследовали четыре разные последовательности укладки слоев, комбинируя антисимметричные (AS) и симметричные (SY) ортогонально армированные (CP) и перекрестно-угловые (AP) слоистые композиты. В настоящем численном исследовании рассматривали укладки композита, образованные комбинациями слоев $\pm 45^\circ, 0^\circ, 90^\circ$. Помимо упомянутых параметрических изменений дискретно варьировали угол скоса от 0° до 30° с шагом 5° .

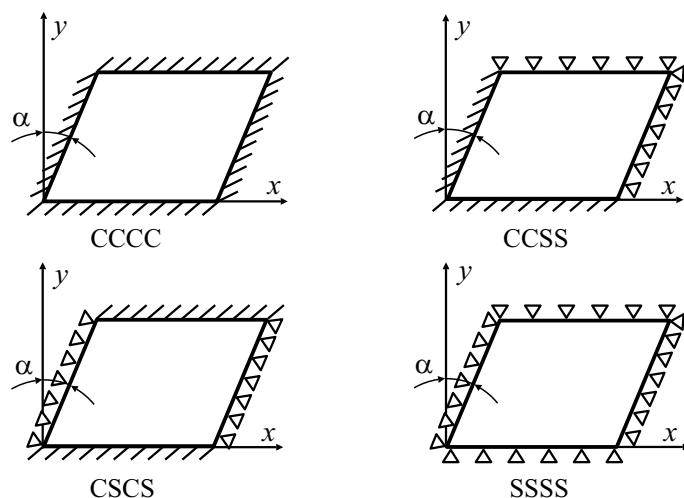


Рис. 2. Разные типы граничных условий на кромках: C — защемленная (//); S — свободно опертая ($\Delta \Delta \Delta$).

Табл. 4

Значения \bar{P}^{β} для косоугольных пластин с граничными условиями СССС

Укладка	Угол скоса α , град	\bar{P}^{β}	Критерий разрушения	Номер первого разрушенного слоя	Мода разрушения
ASAP [+45°/-45°]	0	492,339	МД*	1	ТРМ**
	5	434,116	То же	1	То же
	10	388,151	" "	1	" "
	15	364,6578	" "	1	" "
	20	360,572	" "	1	" "
	25	367,722	" "	1	" "
	30	374,872	" "	1	" "
ASCP [0°/90°]	0	1071,501	Хоффмана	1	ВІР***
	5	1084,780	То же	1	То же
	10	1121,553	" "	1	" "
	15	1170,582	" "	1	" "
	20	1221,655	" "	1	" "
	25	1310,521	" "	1	ТРМ
	30	1459,653	" "	1	То же
SYAP [+45°/45°/+45°]	0	1039,836	МД	3	" "
	5	980,592	То же	3	" "
	10	801,839	Хоффмана	1	" "
	15	680,286	МД	1	" "
	20	576,098	То же	1	" "
	25	522,983	" "	1	" "
	30	517,875	" "	1	" "
SYCP [0°/90°/0°]	0	1692,543	" "	1	" "
	5	1689,479	Пака	1	СМ****
	10	1758,937	МД	1	ТРМ
	15	1432,073	Пака	3	СМ
	20	1067,416	То же	3	То же
	25	938,713	" "	3	" "
	30	945,863	" "	3	" "

Примечание: $l/b = 1$, $b/t = 100$, размер конечно-элементной сетки 8×8 .

Для табл.4—8:

*МД — максимальная деформация.

**ТРМ — трансверсальное растрескивание матрицы.

***ВІР — волокно при растяжении.

****СМ — смятие матрицы, мода С.

Табл. 5

Значения \bar{P}^{fl} для косоугольных пластин с граничными условиями SSSS

Укладка	Угол скоса α , град	\bar{P}^{fl}	Критерий разрушения	Номер первого разрушенного слоя	Мода разрушения
ASAP [+45°/-45°]	0	427,988	МД	1	TRM
	5	351,379	То же	1	То же
	10	317,671	" "	1	" "
	15	299,285	" "	1	" "
	20	292,135	" "	1	" "
	25	293,156	" "	1	" "
	30	302,349	" "	1	" "
ASCP [0°/90°]	0	536,261	Пака	1	СМ
	5	404,494	То же	1	То же
	10	596,527	"	1	" "
	15	586,312	"	1	" "
	20	642,492	"	1	" "
	25	989,785	"	1	" "
	30	1008,172	"	1	" "
SYAP [+45°/45°/+45°]	0	268,641	МД	3	TRM
	5	281,920	То же	3	То же
	10	336,057	" "	3	" "
	15	307,456	" "	1	" "
	20	291,113	" "	1	" "
	25	289,070	" "	1	" "
	30	291,113	" "	1	" "
SYCP [0°/90°/0°]	0	653,728	Пака	1	СМ
	5	528,089	То же	1	То же
	10	518,896	"	1	" "
	15	280,899	"	3	" "
	20	393,258	"	3	" "
	25	393,258	"	3	" "
	30	376,915	"	3	" "

3. Результаты и обсуждение

3.1. Тестовые задачи. Из данных табл. 1 видно хорошее согласование значений статической нагрузки РПС пластины из слоистого композита, вычисленной в настоящей работе и в [33], свидетельствующее о правильном включении формулировки РПС в вычислительную программу МКЭ.

Табл. 6

Значения \bar{P}^I для косоугольных пластин с граничными условиями CCSS

Укладка	Угол скоса α , град	\bar{P}^I	Критерий разрушения	Номер первого разрушенного слоя	Мода разрушения
ASAP [+45°/-45°]	0	400,408	МД	1	TRM
	5	347,293	То же	1	То же
	10	315,628	" "	1	" "
	15	306,435	" "	1	" "
	20	297,242	" "	1	" "
	25	302,349	" "	1	" "
	30	307,456	" "	1	" "
ASCP [0°/90°]	0	655,771	Пака	1	СМ
	5	742,594	То же	1	То же
	10	787,538	Хоффмана	1	ВПР
	15	843,718	То же	1	То же
	20	923,391	" "	1	" "
	25	995,914	" "	1	TRM
	30	1085,802	" "	1	То же
SYAP [+45°/45°/+45°]	0	350,357	МД	3	" "
	5	357,507	То же	3	" "
	10	407,559	" "	3	" "
	15	412,666	" "	1	" "
	20	384,065	" "	1	" "
	25	374,872	" "	1	" "
	30	382,022	" "	1	" "
SYCP [0°/90°/0°]	0	637,385	Пака	1	СМ
	5	820,225	То же	1	То же
	10	875,383	"	1	" "
	15	536,261	"	3	" "
	20	448,417	"	3	" "
	25	550,562	"	3	" "
	30	556,690	"	3	" "

Сравнение рассчитанных значений безразмерных линейных частот косоугольных пластин с укладкой [90°/0°/90°/0°/90°] со свободно опертыми кромками с приведенными в [22] (см. табл. 2) также свидетельствует о правильном включении геометрии косоугольной пластины из слоистого композита в предложенную формулировку.

Табл. 7

Значения \bar{P}^{β} для косоугольных пластин с граничными условиями CSCS

Укладка	Угол скоса α , град	\bar{P}^{β}	Критерий разрушения	Номер первого разрушенного слоя	Мода разрушения
ASAP [+45°/-45°]	0	366,701	МД	1	TRM
	5	377,937	То же	1	То же
	10	401,430	" "	1	" "
	15	411,644	" "	1	" "
	20	399,387	" "	1	" "
	25	400,408	" "	1	" "
	30	415,730	" "	1	" "
ASCP [0°/90°]	0	990,807	Пака	2	СМ
	5	1016,343	То же	2	То же
	10	1205,311	" "	2	" "
	15	1221,655	" "	2	" "
	20	1343,207	" "	1	" "
	25	1539,326	" "	1	" "
	30	1599,591	" "	1	" "
SYAP [+45°/45°/+45°]	0	509,704	МД	3	TRM
	5	645,557	То же	3	То же
	10	584,270	" "	1	" "
	15	517,875	" "	1	" "
	20	494,382	" "	1	" "
	25	497,446	" "	1	" "
	30	518,897	" "	1	" "
SYCP [0°/90°/0°]	0	1607,763	Пака	1	СМ
	5	1188,968	То же	1	То же
	10	1499,489	" "	1	" "
	15	1208,376	" "	3	" "
	20	691,522	" "	3	" "
	25	775,281	" "	3	" "
	30	1035,751	" "	3	" "

3.2. Поведение РПС косоугольных пластин из слоистых композитов при разных граничных условиях. Значения нагрузки РПС для косоугольных пластин из симметричных и антисимметричных слоистых композитов с разными углами скоса и граничными условиями рассчитали с использованием настоящей формулировки МКЭ и критериев разрушения максимального напряжения, максимальной деформации,

Табл. 8

Список определяющих критериев разрушения при разных укладках и условиях опирания пластин

Граничные условия	Укладка			
	ASAP [+45°/-45°]	ASCP [0°/90°]	SYAP [+45°/-45°/45°]	SYCP [0°/90°/0°]
CCCC	МД	Хоффмана	Хоффмана (МД)	МД (Пака)
CCSS	МД	Хоффмана (Пака)	МД	Пака
CSCS	МД	Пака	То же	То же
SSSS	МД	То же	" "	"

Хоффмана, Цая—Хилла, Цая—Ву, Хашина и Пака. Минимальные безразмерные разрушающие нагрузки, полученные при разных критериях разрушения, рассматривали как определяющие нагрузки РПС (\bar{P}^{fl}) в каждом случае и представили в табл. 4—7. Указаны безразмерные равномерно распределенные нагрузки РПС: $\bar{P}^{fl} = (P^{fl}/E_{22})(l/t)^4$, где P^{fl} — нагрузка РПС, Н/мм², а основные результаты из этих таблиц обобщены в табл. 8 с определяющими критериями разрушения для разных комбинаций граничных условий и укладки композита. Для пластин из слоистых композитов SYAP и SYCP с защемленными кромками и композита ASCP с граничными условиями CCSS в скобках указан дополнительный критерий разрушения, который не был определяющим, но дал значения нагрузок РПС, очень близкие (в пределах 10%) к контрольным значениям. Из данных табл. 8 видно, что критерий максимальной деформации для пластин из перекрестно-угловых композитов (как антисимметричных, так и симметричных) и критерий Пака для пластин из симметричных перекрестно-угловых композитов — единственные критерии разрушения, которые можно предложить для нахождения нагрузок РПС.

В случае косоугольной пластины из ASCP можно использовать критерий Хоффмана или Пака.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что для оценки нагрузки РПС для рассмотренных комбинаций косоугольных пластин можно рекомендовать только критерий максимального разрушения, Пака или Хоффмана.

3.3. Влияние углов скоса на поведение РПС косоугольных пластин из слоистых композитов. Зависимости нагрузки РПС от угла скоса α для пластин с разной укладкой слоев и разными граничными условиями приведены на рис. 3. Поскольку РПС изучали при дискретных значениях угла скоса, предложены аппроксимирующие зависимости (рабочие формулы), коррелирующие нагрузку РПС с углом α . Вычисляли минималь-

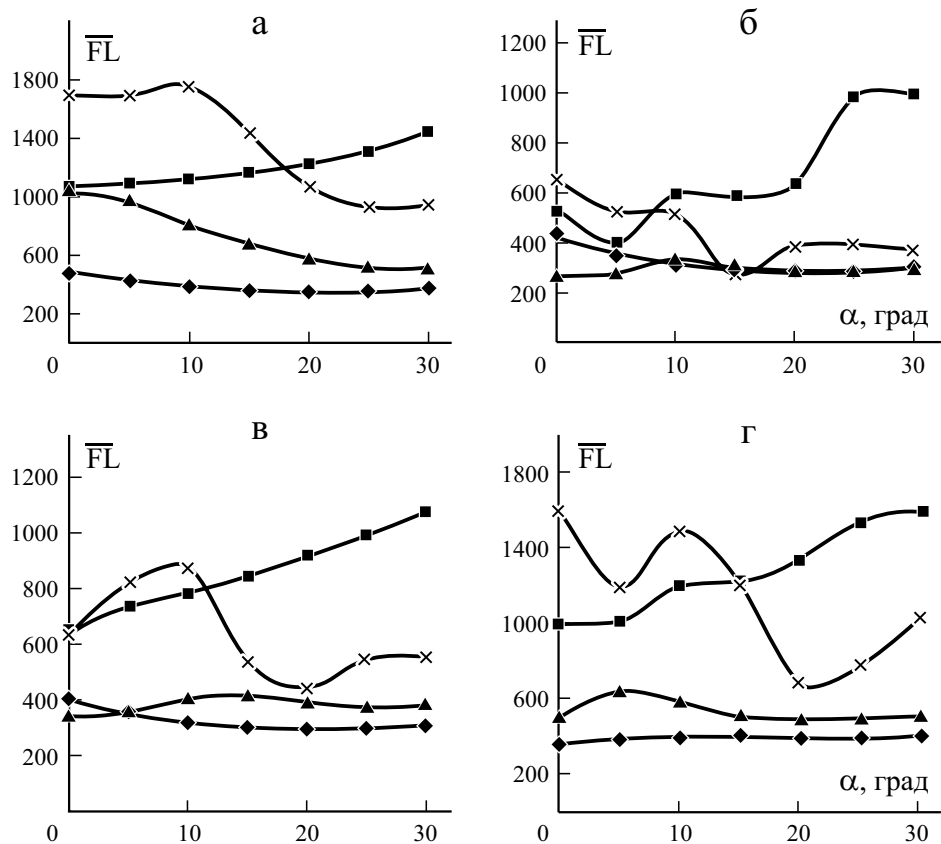


Рис. 3. Зависимость нагрузки \overline{P}^{fl} от угла скоса α при граничных условиях CCCC (а), SSSS (б), CCSS (в), CSCS (г) для пластин из ASAP (—◆—), ASCP (—■—), SYAP (—▲—), SYCP (—×—).

ную нагрузку РПС при соответствующем угле скоса и находили наиболее подходящую подгоночную кривую с коэффициентом корреляции Пирсона, близким к 1 (см. рис. 3). Аппроксимирующие уравнения этих кривых можно использовать для предсказания нагрузки РПС для любого угла скоса в диапазоне от 0 до 30°. В некоторых случаях изменение нагрузки РПС с углом скоса демонстрировали единые тенденции (для этих случаев уравнения, связывающие нагрузку РПС и углы скоса, представлены в табл. 9); во многих других случаях прямой корреляции между ними не наблюдали. Настоящая работа посвящена практическим оценкам нагрузок РПС, которые могут непосредственно использовать практикующие инженеры. Естественно, поставленная цель — оценить консервативные значения разрушающих нагрузок. Поскольку в слоистых композитах, в отличие от изотропных, последовательность укладки, свойства волокон и матрицы

Табл. 9

Зависимость между величиной \bar{P}^{fl} и углом скоса α

Укладка	Зависимость	R^2
ASAP/CCCC	$\bar{P}^{\text{fl}} = 0,3\alpha^2 - 12,68\alpha + 490$	0,990
ASCP/CCCC	$\bar{P}^{\text{fl}} = 0,449\alpha^2 - 1,225\alpha + 1078$	0,992
SYAP/CCCC	$\bar{P}^{\text{fl}} = 0,444\alpha^2 - 32,67\alpha + 1076$	0,978
ASAP/SSSS	$\bar{P}^{\text{fl}} = 0,297\alpha^2 - 12,63\alpha + 419$	0,976
ASAP/CCSS	$\bar{P}^{\text{fl}} = 0,226\alpha^2 - 9,55\alpha + 395$	0,979
ASCP/CCSS	$\bar{P}^{\text{fl}} = 0,095\alpha^2 + 10,94\alpha + 666,9$	0,995
ASAP/CSCS	$\bar{P}^{\text{fl}} = 0,001\alpha^4 - 0,055\alpha^3 + 0,790\alpha^2 - 0,005\alpha + 366,2$	0,976
SYAP/CSCS	$\bar{P}^{\text{fl}} = -0,004\alpha^4 + 0,320\alpha^3 - 7,459\alpha^2 + 55,19\alpha + 511,5$	0,985

Примечание: R^2 — коэффициент корреляции.

сложным образом взаимодействуют с геометрией косоугольных пластин, определяющий критерий разрушения может изменяться с изменением угла скоса.

На основе представленных наблюдений можно сделать вывод о том, что проектировщик должен использовать конкретные рабочие формулы для некоторых комбинаций косоугольных пластин (см. данные табл. 9), а для других комбинаций необходимо подобрать значения нагрузки РПС, соответствующие заданному углу скоса исходя из данных рис. 3.

3.4. Рекомендации по выбору конкретной комбинации пластины из нескольких вариантов. Вполне естественно, что косоугольная пластина после РПС повреждается и частота ее колебаний изменяется. Поэтому исследовали свободные колебания неповрежденной пластины (до РПС) и поврежденной сразу после РПС.

Один из наиболее распространенных способов оценки повреждения конструкции с помощью неразрушающего контроля — измерение ее собственной частоты и сравнение с частотой неповрежденной конструкции. Фактически отношение частот поврежденной и неповрежденной пластин указывает на степень повреждения пластины, обусловленного РПС. Чем меньше это отношение, тем больше степень повреждения пластины. Установлено, что в большинстве случаев основная частота в силу повреждения РПС резко падала и, за некоторым исключением, снижалась почти на 50%.

Первый 21 из 120 рассмотренных вариантов косоугольных пластин представлен в табл. 10 в порядке ранжирования и может быть назван “предпочтительные варианты”. В таблице указан коэффициент снижения частоты для этих вариантов. Оказалось, что наиболее предпочтительные комбинации — пластины из ортогонально армированного композита с

четырьмя защемленными кромками либо с двумя противоположными защемленными кромками и двумя другими свободно опертыми.

После РПС вклад в жесткость разрушенных конечных элементов исключали из анализа и заново вычисляли глобальную матрицу жесткости косоугольных пластин из слоистых композитов для расчета частоты повреждений пластины (см. уравнение (28)). Кроме того, коэффициент снижения частоты оценивали как отношение частоты пластины после РПС к собственной частоте неповрежденной пластины, как указано в табл. 10.

В инженерной практике отклонение на 10% обычно считают номинальным. Из данных табл. 10 видно, что первые пять комбинаций пластин

Табл. 10

Ранжирование косоугольных пластин в зависимости от отношения нагрузки РПС P^{fl} к разрушающей нагрузке P^{ult}

Ранг в зависимости от нагрузки P^{fl}	Версия пластины	\bar{P}^{fl}	$(P^{fl} / P^{ult}) \times 100\%$	Уменьшение частоты в силу РПС
1	SYCP/CCCC/10*	1758,938	100,00	0,50
2	SYCP/CCCC/0	1692,543	96,23	0,50
3	SYCP/CCCC/5	1689,479	96,05	0,50
4	SYCP/CSCS/0	1607,763	91,41	0,50
5	ASCP/CSCS/30	1599,591	90,94	0,84
6	ASCP/CSCS/25	1539,326	87,51	0,87
7	SYCP/CSCS/10	1499,489	85,25	0,50
8	ASCP/CCCC/30	1459,653	82,98	0,53
9	SYCP/CCCC/15	1432,073	81,42	0,49
10	ASCP/CSCS/20	1343,207	76,36	0,92
11	ASCP/CCCC/25	1310,521	74,51	0,56
12	ASCP/CCCC/20	1221,655	69,45	0,60
12	ASCP/CSCS/15	1221,655	69,45	0,93
13	SYCP/CSCS/15	1208,376	68,70	0,50
14	ASCP/CSCS/10	1205,312	68,52	0,93
15	SYCP/CSCS/5	1188,968	67,60	0,50
16	ASCP/CCCC/15	1170,582	66,55	0,65
17	ASCP/CCCC/10	1121,552	63,76	0,72
18	ASCP/CCSS/30	1085,802	61,73	0,50
19	ASCP/CCCC/5	1084,780	61,67	0,81
20	ASCP/CCCC/0	1071,501	60,92	0,927

*SYCP/CCCC/10 — пластина из симметричного ортогонально армированного композита/защемленные кромки/угол скоса $\alpha = 10^\circ$.

имеют близкие значения нагрузок РПС — в пределах 10% по сравнению с наилучшим вариантом. Результаты показывают, что при рассмотрении пяти лучших вариантов снижение основной частоты при РПС минимально для комбинации ASCP/CSCS/30°. Также видно, что конфигурации пластин без скашивания ($\alpha = 0$), так и со скосом ($\alpha \neq 0$) могут демонстрировать хорошие и сопоставимые результаты при надлежащем выборе структуры слоистого композита и граничных условий. Результаты, полученные в настоящей работе, послужат практикующим инженерам основой при выборе конкретной комбинации пластин с учетом практических ограничений (на нагрузку, граничные условия, последовательность укладки слоев, угол скоса и т. д.).

Таким образом, в результате настоящего исследования пришли к выводу, что используемая вычислительная программа МКЭ пригодна для изучения поведения РПС косоугольных пластин из слоистых композитов. Критерий максимальной деформации для пластин из перекрестно-угловых композитов (как антисимметричных, так и симметричных) и критерий Пака для пластин из симметричных ортогонально армированных композитов можно предложить для получения наиболее консервативных значений нагрузок РПС. Хотя единый критерий разрушения для пластин из антисимметричных перекрестно-угловых композитов не идентифицировали, можно рекомендовать критерий Хоффмана или Пака. Для получения наиболее консервативной оценки несущей способности косоугольных пластин можно использовать рабочие формулы и графические зависимости для предсказания разрушающих нагрузок пластин с разным углом скоса. Для идентификации хорошей косоугольной пластины из рассмотренных вариантов можно использовать процедуру ранжирования на основе отношения разрушающих нагрузок. Установлено, что наилучшие комбинации — пластины из ортогонально армированного композита с четырьмя защемленными кромками либо с двумя противоположными защемленными и двумя другими свободно опертыми кромками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Morley L. S. D.* Bending of clamped rectilinear plates // *J. Mech. Appl. Math.* — 1963. — Vol. XVII, No. 3. — P. 293—317.
2. *Kennedy J. B.* On the bending of clamped skewed plates under uniform pressure // *J. Roy. Aero. Soc.* — 1965. — Vol. 69, No. 653. — P. 352—355.
3. *Sundara K. T., Iyenger R., and Srinivasan R. S.* Clamped skewed plates under uniform normal loading // *J. Roy. Aero. Soc.* — 1966. — Vol. 71, No. 674. — P. 139—140.
4. *Srinivasa C. V., Suresh Y. J., and Kumar W. P. P.* Experimental and finite element studies on free vibration of skew plates // *Int. J. Adv. Struct. Eng.* — 2014. — Vol. 6, No. 48. — P. 1—11.

5. *Rajaiah T. and Rao A. K.* Exact analysis of simply supported rhombic plates under uniform pressure // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* — 1974. — Vol. 76, No. 1. — P. 381—388.
6. *Mukhopadhyay M.* Finite strip method of analysis of clamped skewed plate in bending // *Proc. Inst. Civil Eng.* — 1976. — Vol. 61, No. 2. — P. 189—195.
7. *Wang C. M., Kitipornchai S., Xiang Y., and Liew K. M.* Stability of skew Mindlin plates under isotropic inplane pressure // *J. Eng. Mech.* — 1993. — Vol. 119, No. 2. — P. 393—401.
8. *Liew K. M. and Han J. B.* Bending analysis of simply supported shear deformable skew plates // *J. Eng. Mech.* — 1997. — Vol. 123, No. 3. — P. 214—221.
9. *Muhammad T. and Singh A. V.* A p-type solution for the bending of rectangular, circular, elliptic and skew plates // *Int. J. Solids Struct.* — 2004. — Vol. 41, No. 15. — P. 3977—3997.
10. *Das D., Sahoo P., and Saha K.* Large deflection analysis of skew plates under uniformly distributed load for mixed boundary conditions // *Int. J. Eng. Sci. Tech.* — 2010. — Vol. 2, No. 4. — P. 100—112.
11. *Chun P. J., Fu G., and Lim Y. M.* Analytical solutions for skewed thick plates subjected to transverse loading // *Struct. Eng. Mech.* — 2011. — Vol. 38, No. 5. — P. 549—571.
12. *Wankhade R. L.* Geometric nonlinear analysis of skew plates using finite element method // *Int. J. Adv. Eng. Tech.* — 2011. — Vol. 2, No. 2. — P. 154—163.
13. *Upadhyay A. K. and Shukla K. K.* Large deformation flexural behaviour of laminated composite skew plates: An analytical approach // *Compos. Struct.* — 2012. — Vol. 94, No. 12. — P. 3722—3735.
14. *Singh B. and Chakraverty S.* Flexural vibration of skew plates using boundary characteristic orthogonal polynomials in two variables // *J. Sound Vib.* — 1994. — Vol. 173, No. 2. — P. 157—178.
15. *Barik M. and Mukhopadhyay M.* Free flexural vibration analysis of arbitrary plates with arbitrary stiffeners // *J. Vib. Cont.* — 1997. — Vol. 5, No. 5. — P. 667—683.
16. *Barik M. and Mukhopadhyay M.* Finite element free flexural vibration analysis of arbitrary plates // *Fin. Elem. Anal. Des.* — 1998. — Vol. 29, No. 2. — P. 137—151.
17. *Gurses M., Civalek O., Korkmaz A. K., and Ersoy H.* Free vibration analysis of symmetric laminated skew plates by discrete singular convolution technique based on first-order shear deformation theory // *Int. J. Num. Meth. Eng.* — 2009. — Vol. 79, No. 3. — P. 290—313.
18. *Park I., Lee U., and Park D.* Transverse vibration of the thin plates: Frequency-domain spectral element modeling and analysis // *Math. Probl. Eng.* — 2015. — Vol. 2015. — P. 1—15.
19. *Wang S.* Free vibration analysis of skew fibre-reinforced composite laminates based on first order shear deformation plate theory // *Comput. Struct.* — 1997. — Vol. 63, No. 3. — P. 525—538.
20. *Singha M. K. and Ganapathy M.* Large amplitude free flexural vibrations of laminated composite skew plates // *Int. J. Non-Linear Mech.* — 2004. — Vol. 39, No. 10. — P. 1709—1720.

21. *Malekzadeh P.* A differential quadrature nonlinear free vibration analysis of laminated composite skew thin plates // *Thin Walled Struct.* — 2007. — Vol. 45, No. 2. — P. 237—249.
22. *Singha M. K. and Daripa R.* Nonlinear vibration of symmetrically laminated composite skew plates by finite element method // *Int. J. Non-Linear Mech.* — 2007. — Vol. 42, No. 9. — P. 1144—1152.
23. *Kumar A. and Chakrabarti A.* Failure analysis of laminated composite skew laminates // *Proc. Eng.* — 2017. — Vol. 173, No. 2017. — P. 1560—1566.
24. *Turvey G. J.* An initial flexural failure analysis of symmetrically laminated cross-ply rectangular plates // *Int. J. Solids Struct.* — 1979. — Vol. 16, No. 5. — P. 451—463.
25. *Reddy J. N. and Pandey A. K.* A first ply failure analysis of composite laminates // *Compos. Struct.* — 1987. — Vol. 25, No. 3. — P. 371—393.
26. *Kam T. Y. and Jan T. B.* First ply failure analysis of laminated composite plates based on the layerwise linear displacement theory // *Compos. Struct.* — 1995. — Vol. 32, Nos. 1—4. — P. 583—591.
27. *Echaabi J., Trochu F., Pham X. T., and Ouellet M.* Theoretical and experimental investigation of failure and damage progression of graphite epoxy composites in flexural bending test // *J. Reinf. Plast. Compos.* — 1996. — Vol. 15, No. 7. — P. 740—755.
28. *Prusty B. G., Satsangi S. K., and Ray C.* First ply failure analysis of laminated panels under transverse loading // *J. Reinf. Plast. Compos.* — 2001. — Vol. 20, No. 8. — P. 671—684.
29. *Ochoa O. O. and Engblom J. J.* Analysis of progressive failure in composite // *Compos. Sci. Tech.* — 1987. — Vol. 28, No. 2. — P. 87—102.
30. *Tolson S. and Zabarar N.* Finite element analysis of progressive failure in laminated composite plates // *Comput. Struct.* — 1991. — Vol. 38, No. 3. — P. 361—376.
31. *Pal P. and Ray C.* Progressive failure analysis of laminated composite plate by finite element method // *J. Reinf. Plast. Compos.* — 2002. — Vol. 21, No. 16. — P. 1505—1513.
32. *Chattopadhyay B., Sinha P. K., and Mukhopadhyay M.* Geometric nonlinear analysis of composite stiffened plate using finite element // *Compos. Struct.* — 1995. — Vol. 31, No. 2. — P. 107—118.
33. *Kam T. Y., Sher H. F., Chao T. N., and Chang R. R.* Predictions of deflection and first ply failure load of thin laminated composite plates via the finite element approach // *Int. J. Solids Struct.* — 1996. — Vol. 33, No. 3. — P. 375—398.
34. *Padhi G. S., Sheno R. A., Moy S. S. J., and Hawkins G. L.* Progressive failure and ultimate collapse of laminated composite plates in bending // *Compos. Struct.* — 1998. — Vol. 40, No. 3. — P. 277—291.
35. *Reddy Y. S. N. and Reddy J. N.* Linear and nonlinear failure analysis of composite laminates with transverse shear // *Compos. Sci. Technol.* — 1992. — Vol. 44, No. 3. — P. 227—255.
36. *Kam T. Y. and Lai F. M.* Experimental and theoretical predictions of first ply failure strength of laminated composite plates // *Int. J. Solids Struct.* — 1999. — Vol. 36, No. 16. — P. 2379—2395.

37. Reddy Y. S. N., Dakshina Moorthy C. M., and Reddy J. N. Nonlinear progressive failure analysis of laminated composite plates // Int. J. Non-Linear Mech. — 1995. — Vol. 30, No. 5. — P. 629—649.

38. Das H. S. and Chakravorty D. Design aids and selection guidelines for composite conoidal shell roofs — A finite element application // J. Reinf. Plast. Compos. — 2007. — Vol. 26, No. 17. — P. 1793—1819.

Поступила в редакцию 25.05.2020

Окончательный вариант поступил 29.03.2021

Received May 25, 2020 (March 29, 2021)
