

*В. В. Михаськив<sup>а</sup>, Б. М. Стасюк<sup>б</sup>*

*<sup>а</sup>Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН  
Украины, Львов, Украина*

*<sup>б</sup>Национальный университет “Львовская политехника”, Львов, Украина*

## **ЭФФЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ УПРУГОСТИ КОРОТКОВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕМ КОНТАКТЕ НА МЕЖФАЗНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ**

*V. V. Mykhas'kiv and B. M. Stasyuk\**

### **EFFECTIVE ELASTIC MODULI OF A SHORT-FIBER COMPOSITE WITH SLIDING CONTACT CONDITIONS AT INTERFACES**

**Keywords:** 3D elastic composite, short fibers, sliding interface contact, Mori—Tanaka averaging scheme, boundary element method, effective elastic moduli

The effective elastic moduli of a 3D composite with uniformly distributed short fibers under sliding contact conditions at interfaces are determined by means of the Mori—Tanaka averaging scheme modified for the case of discontinuous displacements case and the numerical boundary element method. Both ordered unidirectional and randomly oriented fillers are considered. The influence of various constituent material combination, fiber length, and fiber volume fraction on the effective elastic properties of the composite is investigated. The elastic moduli of composites with sliding and perfect contacts at interfaces are compared. The numerical results showed both decreasing and increasing individual effective elastic moduli owing to the nonideal contact between composite components.

**Ключевые слова:** композит упругий трёхмерный, волокна короткие, контакт межфазный скользящий, схема усреднения Мори—Танакана, метод граничных элементов, модули упругости эффективные

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [stasyuk.bohdan.m@gmail.com](mailto:stasyuk.bohdan.m@gmail.com)  
Corresponding author: [stasyuk.bohdan.m@gmail.com](mailto:stasyuk.bohdan.m@gmail.com)

Посредством модифицированной на случай разрывных перемещений схемы усреднения Мори—Танака и численного метода граничных элементов определены эффективные модули упругости трехмерного композита с равномерно распределенными короткими волокнами при условии скользящего контакта на межфазных поверхностях. Рассмотрены варианты как упорядоченных однонаправленных, так и случайно ориентированных наполнителей. Исследовано влияние на эффективные упругие свойства композита комбинации материалов составляющих компонентов, а также длины и объемной фракции волокон. Проведено сравнение эффективных модулей упругости композитов со скольжением и идеальным контактом на межфазных поверхностях. Численными результатами зафиксировано как уменьшение, так и увеличение отдельных эффективных модулей упругости за счет неидеального контакта компонентов композита.

## Введение

Наряду с материалом и объемной долей включений форма и качество межфазных поверхностей либо условия контакта с окружающей средой относятся к ключевым факторам, определяющим механические свойства матричных композитов. В этой связи важным является рассмотрение трехмерных структур, образованных внедрением в упругий матричный материал коротких упругих волокон. Такой класс композитов обеспечивает особые жесткостные и деформационные характеристики, а также при упорядочении волокон обладает управляемой анизотропией, что нашло значительное применение в инженерной практике [1—3]. С целью аналитического решения соответствующих задач микромеханики, как правило, исходят из рассмотрения композитов с волокнами в виде вытянутых сфероидальных включений [4—8]. Вовлечение в анализ конечных цилиндрических волокон требует специальных подходов к исследованию, базирующихся на применении численных методов расчета, в частности методов конечных и граничных элементов.

В большинстве работ численного определения локальных и эффективных упругих свойств коротковолокнистых композитов предполагается идеальное соединение компонент, описывающееся непрерывностью векторов перемещений и усилий на межфазных поверхностях [9—15]. Однако во многих случаях необходимо предусматривать возможность разрывов этих величин для моделирования межфазных повреждений и поверхностных эффектов разного физического происхождения (например, вследствие трещинообразования, частичной потери адгезионных связей, разрыхления в зоне сцепления материалов, поверхностного натяжения и собственной поверхностной упругости). Межфазные особенности влияют не только на микроразрушение композита, но и на его упругие макрохарактеристики [16—21]. К одной из разновидностей неклассических межфазных условий с присутствием скачков перемещений принадлежит скользящий контакт, характеризующийся отсутствием на межфазных поверхностях касательных напряжений либо

их пропорциональной зависимостью от нормальных напряжений для учета трения. В такой постановке рассмотрены трехмерные задачи определения напряженного состояния матрицы с одиночным включением при скольжении на межфазной поверхности [22—26]. Для композитов с распределенными упругими включениями и указанным типом контактных условий эффективные модули упругости получены аналитически методами Мори—Танака и самосогласования для случая сферических наполнителей [27, 28].

Следует отметить, что численный метод граничных элементов хорошо приспособлен к микромеханическому анализу композитов с включениями общей формы и разрывами перемещений на межфазных поверхностях. Это обосновывается возможностью неявного учета условий неидеального контакта компонент в результирующих граничных интегральных уравнениях на стадии решения задачи для репрезентативного объемного элемента структуры, а также непосредственным вхождением гранично-элементных решений в формулы расчета эффективных модулей упругости композита по схеме Мори—Танака. Указанная стратегия использована в данной статье для исследования влияния скользящего межфазного контакта на эффективные упругие свойства композита с однонаправленными и случайно ориентированными короткими цилиндрическими волокнами.

### 1. Сочетание методов гомогенизации и граничных элементов при микромеханическом анализе эффективных упругих свойств композита

Рассмотрим трехмерный линейно-упругий двухфазный композит, состоящий из изотропной матрицы и случайно расположенных в ней с однородным распределением и объемной концентрацией  $f$  одинаковых непересекающихся изотропных коротких цилиндрических волокон с закругленными концами. Ориентация волокон предполагается либо упорядоченной вдоль параллельных линий, либо хаотической (рис. 1). Геометрическая форма

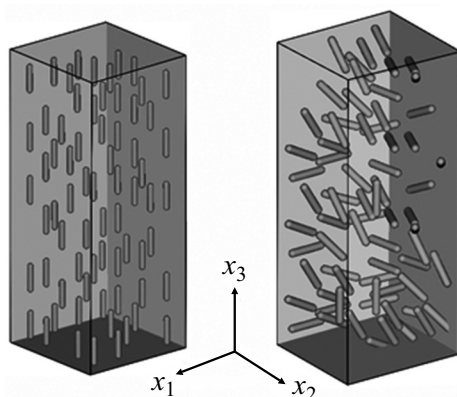


Рис. 1. Схемы ориентации однородно распределенных коротких волокон в композите: слева — упорядоченная вдоль оси  $Ox_3$ , справа — случайная.

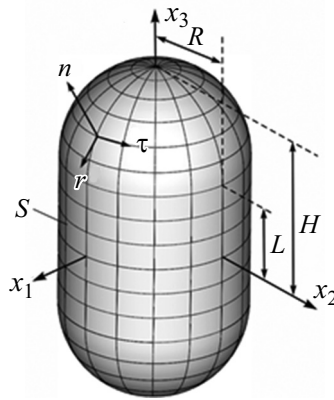


Рис. 2. Геометрия волокна и сетка граничных элементов на его поверхности.

каждого волокна определяется его общей длиной  $2H$ , длиной цилиндрической части  $2L$ , а также радиусом  $R$  поперечного сечения его цилиндрической части и скругления на концах, чем обеспечивается гладкость межфазных поверхностей (тогда  $L = H - R$ , а частный случай сферических включений достигается при  $H = R$ , рис. 2). Механические свойства композита задаются модулями Юнга  $E^{(i)}$  и коэффициентами Пуассона  $\nu^{(i)}$  его компонентов ( $i = 1, 2$ ; здесь и далее все величины, относящиеся к матрице, обозначаем верхним индексом (1), а к включениям — индексом (2)).

На поверхностях раздела матрицы и волокон имеют место условия скользящего механического контакта, описываемого равенством нормальных перемещений  $u_n^{(k)}$  и усилий  $t_n^{(k)}$ , а также характеризуемого отсутствием касательных усилий  $t_r^{(k)}, t_\tau^{(k)}$  при подходе к этим поверхностям со стороны матрицы ( $k = 1$ ) и наполнителя ( $k = 2$ ). Иными словами, на межфазной поверхности  $S$  для каждого отдельного волокна должны выполняться следующие равенства относительно граничных значений перемещений и усилий:

$$\begin{aligned}
 u_n^{(1)}(\mathbf{x}) &= u_n^{(2)}(\mathbf{x}) = u_n(\mathbf{x}), \\
 t_n^{(1)}(\mathbf{x}) &= t_n^{(2)}(\mathbf{x}) = t_n(\mathbf{x}), \\
 t_r^{(1)}(\mathbf{x}) &= t_r^{(2)}(\mathbf{x}) = 0, \\
 t_\tau^{(1)}(\mathbf{x}) &= t_\tau^{(2)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S.
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Здесь  $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$ ,  $\mathbf{r}(r_1, r_2, r_3)$  и  $\boldsymbol{\tau}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  — нормальный со стороны волокна и касательные к поверхности  $S$  ортогональные векторы единичной длины соответственно.

Следует отметить, что вследствие условий неидеального контакта (1.1) деформирование композита сопровождается скачками касательных перемещений на межфазных поверхностях. Для учета этого обстоятельства с микромеханической точки зрения предложено использовать гомогенизацию композита, снабдив его эффективными свойствами на основании обобщения на случай разрывных полей перемещений схемы усреднения Мори—Танака [29]. Она предусматривает введение для композита репрезентативного объемного элемента (РОЭ) с объемом  $V$  и границей  $\partial V$ , который содержит матричную фазу  $V^{(1)}$  и описанное одиночное короткое волокно с объемом  $V^{(2)}$  (тогда  $f = V^{(2)}/V$ ,  $1 - f = V^{(1)}/V$ ). Также принимается естественное для “внешнего наблюдателя” описание поведения РОЭ как целостной среды с соответствующей формулировкой для усредненных по объему РОЭ тензоров деформаций  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  и напряжений  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  через поверхностные интегралы [30]:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int \int_{\partial V} (u_i N_j + u_j N_i) dA, \\ \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle &= \langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int \int_{\partial V} \sigma_{ik} N_k x_j dA. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь и далее индексы принимают значения от 1 к 3, оговаривается также “немое” суммирование по повторяющимся индексам;  $u_i$  и  $\sigma_{ik}$  — компоненты перемещений и напряжений;  $N_i$  — компоненты внешней к поверхности  $\partial V$  единичной нормали;  $dA$  — площадь элемента поверхности  $\partial V$ , по которой ведется интегрирование.

В предположении этих зависимостей при непрерывности усилий и наличии скачков перемещений на поверхности  $S$  раздела фаз в РОЭ получим

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = (1 - f) \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(1)} + f \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} - f \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(12)}, \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = (1 - f) \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(1)} + f \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(2)}, \tag{1.3}$$

где классические фазовые усреднения запишем в виде [30]

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(1)} &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle^{(1)} = \frac{1}{2V^{(1)}} \int \int_{\partial V} (u_i N_j + u_j N_i) dA - \frac{1}{2V^{(1)}} \int \int_S \left( u_i^{(1)} n_j + u_j^{(1)} n_i \right) dS, \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle^{(2)} = \frac{1}{2V^{(2)}} \int \int_S \left( u_i^{(2)} n_j + u_j^{(2)} n_i \right) dS, \\ \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(1)} &= \langle \sigma_{ij} \rangle^{(1)} = \frac{1}{V^{(1)}} \int \int_{\partial V} \sigma_{ik} N_k x_j dA - \frac{1}{V^{(1)}} \int \int_S t_i^{(1)} x_j dS, \\ \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(2)} &= \langle \sigma_{ij} \rangle^{(2)} = \frac{1}{V^{(2)}} \int \int_S t_i^{(2)} x_j dS. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Дополнительный член в усреднении деформаций отличает формулы (1.3) от аналогичных зависимостей для случая идеального межфазного контакта и отображает вклад скачков контактных перемещений, а именно:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(12)} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \rangle^{(12)} = \frac{1}{2V^{(2)}} \int_S \int \left[ \left( u_i^{(2)} - u_i^{(1)} \right) n_j + \left( u_j^{(2)} - u_j^{(1)} \right) n_i \right] dS. \quad (1.5)$$

Следует иметь в виду, что в соотношениях (1.4) и (1.5)  $t_i^{(k)}$ ,  $u_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — межфазные значения компонент усилий и перемещений на поверхности  $S$  со стороны матрицы ( $k = 1$ ) и со стороны включения ( $k = 2$ ), которые связаны с соответствующими компонентами (1.1) известными формулами перехода от глобальной к локальной системе координат.

Из зависимостей (1.2) следует также, что при условии задания на границе РОЭ  $\partial V$  постоянного поля деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \text{const}$ , вызванного линейным распределением перемещений  $u_i = \varepsilon_{ij}^0 x_j$ , усредненные деформации будут равны  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}_0$  или  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}^0$ . В этом случае внешнего воздействия введем также два тензора концентраций деформаций либо матрицы влияния для волокна  $\mathbf{A}^{(2)}$  и межфазной поверхности  $\mathbf{A}^{(12)}$  соотношениями

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} = \mathbf{A}^{(2)} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{A}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(12)} = \mathbf{A}^{(12)} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{A}^{(12)} : \boldsymbol{\varepsilon}_0. \quad (1.6)$$

Их компоненты определяем из набора решений краевых задач теории упругости для РОЭ при поочередном задании на его границе ненулевых составляющих тензора  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ ; ввиду соотношений (1.4) и (1.5) они выражены через перемещения на межфазной поверхности  $S$  интегралами

$$A_{ijml}^{(2)} = \frac{1}{2V^{(2)}} \int_S \int \left( u_i^{(2)ml} n_j + u_j^{(2)ml} n_i \right) dS, \quad (1.7)$$

$$A_{ijml}^{(12)} = A_{ijml}^{(2)} - \frac{1}{2V^{(2)}} \int_S \int \left( u_i^{(1)ml} n_j + u_j^{(1)ml} n_i \right) dS,$$

где  $u_i^{(k)ml}$  —  $i$ -я компонента вектора перемещений на межфазной поверхности со стороны матрицы ( $k = 1$ ) и волокна ( $k = 2$ ) в результате деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ml}^0$  на границе  $\partial V$ .

Для усреднения упругих свойств РОЭ запишем второе уравнение (1.3) в терминах искомого эффективного тензора упругости  $\mathbf{C}^*$  и заданных тензоров упругости матрицы  $\mathbf{C}^{(1)}$  и волокна  $\mathbf{C}^{(2)}$  с учетом первого соотношения (1.3) в виде

$$\mathbf{C}^* : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{C}^{(1)} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + f \left[ \left( \mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)} \right) : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} + \mathbf{C}^{(1)} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(12)} \right]. \quad (1.8)$$

Обобщение на случай разрывных перемещений схемы Мори—Танака для определения эффективного тензора упругости  $\mathbf{C}^*$  базируется на учете взаимодействия волокон рассмотрением на границе  $\partial V$  постоянной дефор-

мации, равной средней деформации в матричной фазе  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(1)}$ . Тогда ввиду представлений (1.6) и (1.3) имеют место соотношения  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} = \mathbf{A}^{(2)} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(1)}$ ,  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(12)} = \mathbf{A}^{(12)} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(1)}$ ,  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(1)} = \left[ (1-f)\mathbf{I} + f(\mathbf{A}^{(2)} - \mathbf{A}^{(12)}) \right]^{-1} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ , где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор, отрицательный единичный показатель обозначает обратный тензор. Подставив их в формулу (1.8), окончательно имеем

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}_1 + f \left[ \left( \mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)} \right) : \mathbf{A}^{(2)} + \mathbf{C}^{(1)} : \mathbf{A}^{(12)} \right] : \left[ (1-f)\mathbf{I} + f(\mathbf{A}^{(2)} - \mathbf{A}^{(12)}) \right]^{-1}. \quad (1.9)$$

Здесь классический случай композита с идеальным соединением компонентов достигается при нулевом тензоре  $\mathbf{A}^{(12)}$ .

Таким образом, задача определения эффективных модулей упругости армированного короткими волокнами композита сводится на основании формулы (1.9) к отысканию тензоров концентрации деформаций  $\mathbf{A}^{(2)}$  и  $\mathbf{A}^{(12)}$  для РОЭ. Следует отметить, что при использовании схемы гомогенизации Мори—Танака наиболее удобным для получения этих тензоров является выбор РОЭ в виде бесконечной матрицы с одиночным волокном рассмотренной конфигурации. Тогда случай композита с однонаправленными волокнами (слева на рис. 1) как макроскопически трансверсально-изотропной среды получим посредством тензоров  $\mathbf{A}^{(2)}$  и  $\mathbf{A}^{(12)}$ , компоненты которых определяем из шести вариантов однородной деформации растяжения и сдвига на бесконечности в продольном и поперечном относительно оси волокна направлениях. Такой композит характеризуется пятью независимыми эффективными модулями упругости  $C_{11}^*, C_{12}^*, C_{13}^*, C_{33}^*, C_{44}^*$ . С их помощью так называемые технические модули упругости, а именно: эффективные продольный (вдоль волокон)  $E_{33}^*$  и поперечный (в перпендикулярном к волокнам направлении)  $E_{11}^*$  модули Юнга, соответствующие модули сдвига в осевом  $G_{13}^*$  и поперечном  $G_{12}^*$  направлениях, а также коэффициент Пуассона  $\nu_{13}^*$  при осевом нагружении, определяем по формулам

$$E_{33}^* = C_{33}^* - \frac{2(C_{13}^*)^2}{C_{11}^* + C_{12}^*}, \quad E_{11}^* = \frac{(C_{11}^* - C_{12}^*) \left[ C_{11}^* C_{33}^* + C_{12}^* C_{33}^* - 2(C_{13}^*)^2 \right]}{C_{11}^* C_{33}^* - (C_{13}^*)^2}, \quad (1.10)$$

$$G_{13}^* = C_{44}^*, \quad G_{12}^* = \frac{C_{11}^* - C_{12}^*}{2}, \quad \nu_{13}^* = \frac{C_{13}^*}{C_{11}^* + C_{12}^*}.$$

Дальнейший переход к композиту со случайно ориентированными в пространстве короткими волокнами (справа на рис. 1) как макроскопически изотропного материала достигается дополнительным усреднением этого

тензора по всевозможным направлениям либо пространственным углам Эйлера [31]. С учетом осевой симметрии РОЭ соответствующее усреднение удается выполнить в замкнутой форме [5] с получением аналитических значений для эффективных модуля Юнга  $E^*$  и коэффициента Пуассона  $\nu^*$

$$E^* = \frac{\left(2C_{11}^* + 2C_{12}^* + 4C_{13}^* + C_{33}^*\right)\left(7C_{11}^* - 5C_{12}^* - 4C_{13}^* + 2C_{33}^* + 12C_{44}^*\right)}{3\left(9C_{11}^* + 5C_{12}^* + 12C_{13}^* + 4C_{33}^* + 4C_{44}^*\right)}, \quad (1.11)$$

$$\nu^* = \frac{C_{11}^* + 5C_{12}^* + 8C_{13}^* + C_{33}^* - 4C_{44}^*}{9C_{11}^* + 5C_{12}^* + 12C_{13}^* + 4C_{33}^* + 4C_{44}^*}.$$

Вследствие бесконечности матрицы рассматриваемого РОЭ, а также непосредственной зависимости (1.7) искомых компонент тензоров концентрации деформаций  $\mathbf{A}^{(2)}$  и  $\mathbf{A}^{(12)}$  от граничных значений перемещений на присутствующей межфазной поверхности для его анализа целесообразно использовать метод граничных элементов. Тогда гранично-интегральная формулировка соответствующих задач для введенного РОЭ осуществляется переходом к межфазной поверхности  $S$  в интегральных представлениях компонент перемещений в матрице и волокне [26]. В результате этого с учетом задания однородной деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \text{const}$  на бесконечности приходим к следующей системе шести граничных интегральных уравнений относительно граничных величин  $t_i^{(k)}$ ,  $u_i^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ,  $i = 1, 2, 3$ ):

$$u_i^{(1)}(\mathbf{x}) - \int_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left[ u_j^{(1)}(\mathbf{y}) - u_i^{(1)}(\mathbf{x}) \right] dS_{\mathbf{y}} + \int_S U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j^{(1)}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \varepsilon_{ij}^0 x_j,$$

$$\int_S \int_S T_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left[ u_j^{(2)}(\mathbf{y}) - u_i^{(2)}(\mathbf{x}) \right] dS_{\mathbf{y}} - \int_S U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j^{(2)}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = 0, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{x} \in S, \quad i = \overline{1, 3},$$

где  $U_{ij}^{(k)}$  и  $T_{ij}^{(k)}$  — известные фундаментальные решения статических трехмерных задач теории упругости [26] для среды с механическими характеристиками матрицы ( $k = 1$ ) и волокна ( $k = 2$ ), причем интегралы с сингулярными в точке источника  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  ядрами  $T_{ij}^{(k)}$  записаны в приспособленной к численному определению регулярной форме.

Замыкание системы ГИУ (1.12) обеспечивается удовлетворением в них граничных условий скользящего контакта (1.1). Для этого следующую из условий (1.1) непрерывность межфазных усилий можно записать через их связь  $t_i^{(1)} = t_i^{(2)} = t_n n_i$  с нормальным усилием  $t_n$  на межфазной поверхности.



Результатом условий (1.1) являются зависимости скачков межфазных перемещений  $\Delta u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$  от соответствующих скачков тангенциальных перемещений на межфазной поверхности в виде  $\Delta u_i = r_i \Delta u_r + \tau_i \Delta u_\tau$ . Подставляя эти соотношения в равенства (1.12), получим неявно учитывающую условия (1.1) замкнутую систему ГИУ для определения шести неизвестных функций  $u_i^{(2)} (i = \overline{1, 3}), t_n, \Delta u_r, \Delta u_\tau$ :

$$\begin{aligned}
 & u_i^{(2)}(\mathbf{x}) + r_i(\mathbf{x}) \Delta u_r(\mathbf{x}) + \tau_i(\mathbf{x}) \Delta u_\tau(\mathbf{x}) - \int \int_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left[ u_j^{(2)}(\mathbf{y}) - u_j^{(2)}(\mathbf{x}) \right] dS_{\mathbf{y}} + \\
 & + \int \int_S T_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left\{ \left[ r_j(\mathbf{y}) \Delta u_r(\mathbf{y}) - r_j(\mathbf{x}) \Delta u_r(\mathbf{x}) \right] + \right. \\
 & \left. + \left[ \tau_j(\mathbf{y}) \Delta u_\tau(\mathbf{y}) - \tau_j(\mathbf{x}) \Delta u_\tau(\mathbf{x}) \right] \right\} dS_{\mathbf{y}} + \\
 & + \int \int_S U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) t_n(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \varepsilon_{ij}^0 x_j, \quad (1.13) \\
 & \int \int_S T_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left[ u_j^{(2)}(\mathbf{y}) - u_i^{(2)}(\mathbf{x}) \right] dS_{\mathbf{y}} - \\
 & - \int \int_S U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j(\mathbf{y}) t_n(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = 0, \\
 & i = \overline{1, 3}, \quad \mathbf{x} \in S.
 \end{aligned}$$

Следует отметить, что присутствие межфазных перемещений в качестве решений результирующей системы ГИУ (1.13) позволяет применять их непосредственно в формулах (1.7) для описания матриц влияния в схеме гомогенизации композита.

Процедура численного решения ГИУ (1.13) предусматривает покрытие межфазной поверхности  $S$  компактной сеткой четырехугольных восьмиузловых и треугольных шестиузловых граничных элементов, как показано на рис. 2. Для учета топологии поверхности интегрирования, состоящей из цилиндрической и сферических частей, и аппроксимации неизвестных функций ГИУ использовали квадратичные и линейные функции формы соответственно (их детальное описание приведено в работе [26]). Дискретный аналог задачи в виде системы линейных алгебраических уравнений получен колокационным удовлетворением ГИУ в узловых точках введенной сетки граничных элементов с использованием интерполяционных формул Гаусса для численного определения входящих двухмерных интегралов, пространственная область интегрирования которых предварительно отображена на плоскую. Аналогичный алгоритм применяли для вычисления пространственных интегралов (1.7).

Таким образом, анализ эффективных свойств коротковолокнистого композита сводится к реализации нескольких последовательных этапов,

а именно: определения из ГИУ (1.13) функций поверхностных перемещений матрицы и волокна, подстановки этих решений в соотношения (1.7), а затем использования выражений (1.10) для случая однонаправленных волокон и (1.11) — для случайно ориентированных волокон.

## 2. Численные результаты и их обсуждение

Верификация предложенного аналитико-численного подхода и оценка точности расчетов проведены сравнением численных результатов с известными в литературе аналитическими решениями для композитных материалов со стохастически распределенными сферическими абсолютно жесткими [27] и упругими [28] включениями при условии их скользящего контакта с матрицей (рис. 3). Результатом гомогенизации таких материалов является макроскопически изотропная среда. Для соответствия с входными параметрами указанных работ в случае абсолютно жестких включений принимали  $\nu^{(1)} = 0,3$ ,  $E^{(2)}/E^{(1)} \rightarrow \infty$  (тогда коэффициент Пуассона включений  $\nu^{(2)}$  не влияет на поведение решений), а в случае упругих включений —  $\nu^{(1)} = 0,3$ ,  $\nu^{(2)} = 0,2$ ,  $E^{(2)}/E^{(1)} = 20$ . Из данных рисунка следует, что численные (сплошные линии) и аналитические (маркированные треугольниками для случая жестких включений [27] и квадратами для случая упругих включений [28]) значения эффективного модуля Юнга композита для всего диапазона концентрации включений, ограниченного условием непересечения наполнителей, хорошо согласуются.

Для дополнительной проверки точности расчетов с наполнителем в виде однонаправленных коротких волокон использовали приведенные в [15] аналитические данные на основании так называемой соединительной модели (“bridging model”) и численные данные конечно-элементного анализа эффективных свойств композита как гомогенизированной трансвер-

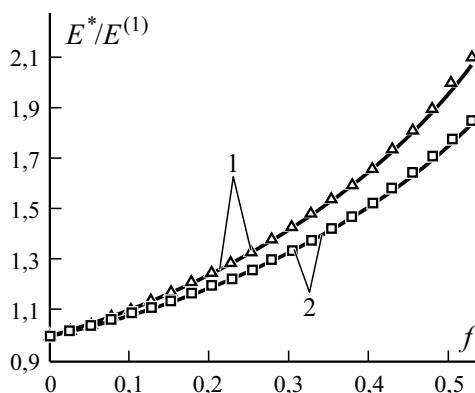


Рис. 3. Зависимость эффективного модуля Юнга композита от объемной доли сферических включений при скольжении на межфазных поверхностях: 1 — абсолютно жесткие включения; 2 — упругие включения.

Табл. 1

Сравнение результатов анализа эффективных свойств композита с однонаправленными короткими волокнами при условии идеального контакта на межфазных поверхностях

Расчет $H/R$	$E_{11}^*$	$E_{33}^*$	$G_{12}^*$	$G_{13}^*$	$\nu_{13}^*$
	ГПа				
2 МГЭ и схема Мори—Танака	4,794	5,641	1,758	1,809	0,334
Соединительная “bridging” модель	5,073	7,461	1,800	1,802	0,341
МКЭ	5,579	6,522	2,161	1,728	0,287
4 МГЭ и схема Мори—Танака	4,830	7,234	1,726	1,782	0,332
Соединительная “bridging” модель	5,177	9,602	1,800	1,802	0,337
МКЭ	5,425	8,113	1,959	1,770	0,299
16 МГЭ и схема Мори—Танака	4,945	12,095	1,703	1,742	0,317
Соединительная “bridging” модель	5,291	14,103	1,800	1,802	0,327
МКЭ	5,266	12,830	1,843	1,795	0,308

сально-изотропной среды. В этих примерах рассмотрены периодически распределенные стеклянные волокна ( $E^{(2)} = 74$  ГПа,  $\nu^{(2)} = 0,2$ ,  $f = 0,2$ ), которые идеально контактируют с эпоксидным матричным материалом ( $E^{(1)} = 3,35$  ГПа,  $\nu^{(1)} = 0,35$ ). Сравнение результатов (табл. 1) для разной относительной длины волокон  $H/R$ , полученных этими подходами и предлагаемым методом граничных элементов, свидетельствует об удовлетворительной точности расчетов. Незначительное различие значений эффективных модулей упругости объясняется различием распределения и формы концов коротких волокон, которые в работе [15] предполагали периодически расположенными и с плоскими концами, а в нашем случае — случайно расположенными и со сглаженными полусферическими концами. Поэтому сходство результатов больше для более вытянутых волокон, когда влияние формы их концов на эффективные модули упругости нивелируется.

Следует отметить, что в рассмотренных примерах использовали разбиение сферической межфазной поверхности включения на 288 граничных элементов, при рассмотрении сфероцилиндрической поверхности короткого волокна это количество элементов дополнялось  $48h^*$  элементами на его цилиндрической части, где  $h^*$  — целая часть относительной длины  $H/R$  волокна.

Для упрощения параметризации расчетов эффективных упругих свойств композита в последующих примерах рассмотрены материалы с одинаковыми коэффициентами Пуассона  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,45$ ; тогда неоднородность структуры определяется соотношением между модулями Юнга матрицы  $E^{(1)}$  и волокон  $E^{(2)}$ . Влияние скользящего межфазного контакта отражают данные сопоставления соответствующих результатов (сплошные линии на

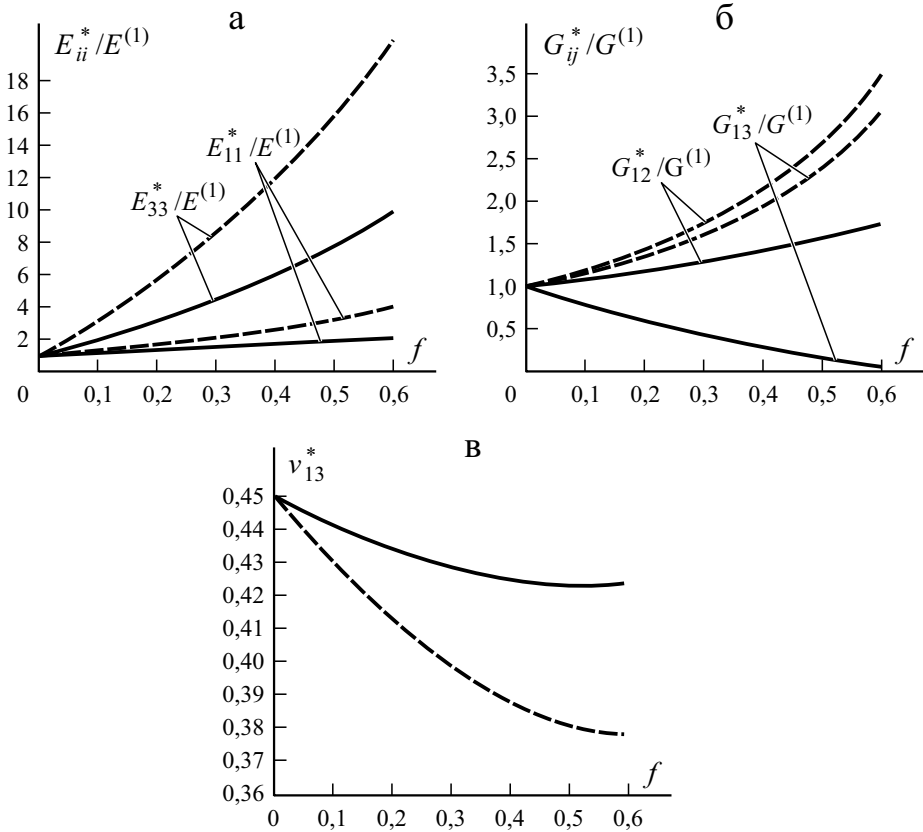


Рис. 4. Зависимости нормированных эффективных модулей Юнга (а), модулей сдвига (б) и эффективного коэффициента Пуассона (в) композита от объемной доли однонаправленных коротких волокон при  $H/R = 15$ .

рис. 4—6) со случаем совершенного контакта составляющих композита (штриховые линии).

Для макроскопически трансверсально-изотропного композита с упорядоченными параллельной ориентацией короткими волокнами эффективные модули упругости при неидеальном соединении компонентов меньше своих аналогов в случае идеального межфазного контакта, за исключением коэффициента Пуассона  $\nu_{13}^*$ , для которого имеет место противоположный эффект. Указанные закономерности более выразительны при возрастании объемной концентрации волокон для всех пяти эффективных модулей упругости (рис. 4), а с увеличением относительной длины волокон — для осевых модулей  $E_{33}^*$  и  $G_{13}^*$  (табл. 2). Как при идеальном, так и неидеальном межфазном контакте составляющих композита, с увеличением относительной длины волокон эффективный модуль Юнга  $E_{33}^*$  существенно возрастает, модули упругости  $E_{11}^*$ ,  $G_{12}^*$ , и коэффициент Пуассона  $\nu_{13}^*$  меняются незначительно. Относительно эффективного модуля сдвига  $G_{13}^*$  имеет

Табл. 2

Значения относительных эффективных модулей упругости композита с однонаправленными короткими волокнами разной относительной длины  $H/R$  при условиях идеального и скользящего контакта на межфазных поверхностях ( $f = 0,3, E^{(2)}/E^{(1)} = 50$ )

$H/R$	Тип межфазного контакта	$E_{11}^*/E^{(1)}$	$E_{33}^*/E^{(1)}$	$G_{12}^*/G^{(1)}$	$G_{13}^*/G^{(1)}$	$\nu_{13}^*$
1	Идеальный	1,9313	1,9313	1,9313	1,9313	0,4307
	Скользкий	1,3257	1,3257	1,3257	1,3257	0,4463
2	Идеальный	1,9441	2,4472	1,8345	1,8293	0,4301
	Скользкий	1,3870	1,6903	1,3180	0,6710	0,4453
5	Идеальный	1,9940	4,1540	1,7751	1,6992	0,4250
	Скользкий	1,4680	2,4819	1,3110	0,5581	0,4412
10	Идеальный	2,0520	6,7486	1,7571	1,6386	0,4109
	Скользкий	1,5266	3,5974	1,3107	0,4718	0,4345
15	Идеальный	2,0745	8,7097	1,7514	1,6178	0,3994
	Скользкий	1,5553	4,5406	1,3107	0,4611	0,4286

место незначительное его изменение в первом случае и связанное со скольжением заметное уменьшение — во втором.

Похожее поведение эффективных модуля Юнга  $E^*$  и коэффициента Пуассона  $\nu^*$  установлено применительно к макроскопически изотропному композиту с неупорядоченной ориентацией коротких волокон, а именно: превышение эффективного модуля Юнга при идеальном и эффективного коэффициента Пуассона при неидеальном межфазном контакте (рис. 5, 6).

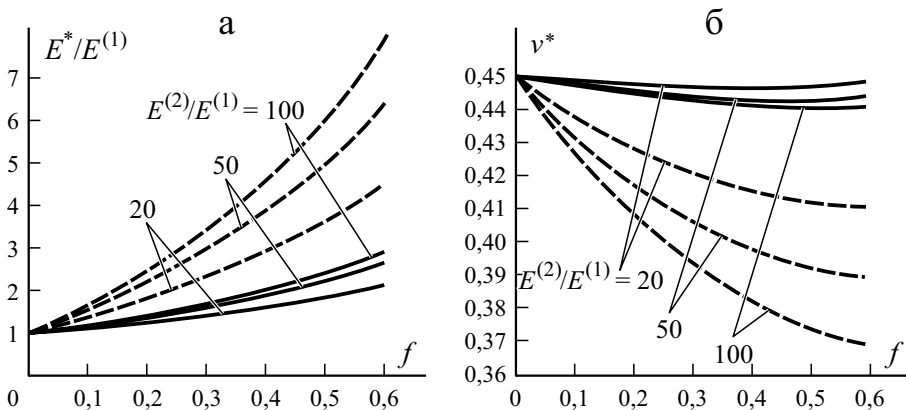


Рис. 5. Зависимость нормированных эффективных модулей Юнга (а) и эффективного коэффициента Пуассона (б) композита от объемной доли случайно ориентированных коротких волокон при  $H/R = 15$  и разным отношении  $E^{(2)}/E^{(1)}$  составляющих материалов.

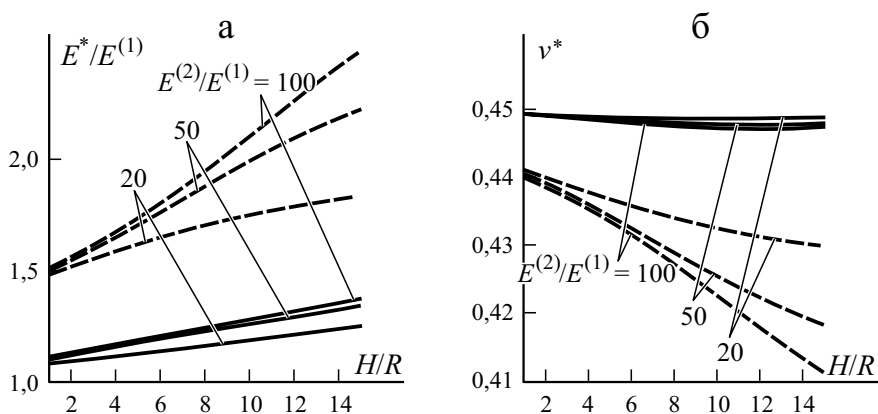


Рис. 6. Зависимость нормированных эффективного модуля Юнга (а) и эффективного коэффициента Пуассона (б) композита от относительной длины случайно ориентированных коротких волокон  $H/R$  при  $f = 0,2$  и разных значениях  $E^{(2)}/E^{(1)}$  составляющих материалов.

Композит со скольжением характеризуется более монотонными зависимостями эффективных модулей упругости как от концентрации (рис. 5), так и относительной длины (рис. 6) волокон. Также в таком композите менее существенно влияние на макроскопические упругие свойства комбинации модулей Юнга  $E^{(2)}/E^{(1)}$  его компонент.

### Заключение

Численный метод граничных элементов в совокупности с модифицированной схемой гомогенизации Мори—Танака является эффективным инструментом решения трехмерных задач микромеханики упругих волокнистых композитов, характеризующихся как сложной формой включений, так и условиями неидеального контакта на межфазных поверхностях. Непосредственное включение условий скользящего межфазного контакта в гранично-интегральную формулировку задач и использование исключительно межфазных перемещений в процессе гомогенизации приводят к построению оптимального по точности и затратам расчетного времени решения.

На примере композитов, армированных упорядоченными и случайно ориентированными короткими цилиндрическими волокнами со скольжением на их поверхностях, установлены качественные и количественные различия эффективных модулей упругости сравнительно со случаем идеального межфазного контакта. В частности, обнаружено существенное снижение эффективных модулей Юнга и сдвига, ответственных за осевую нагрузку композита.

Изменение эффективных упругих свойств вследствие нарушения сцепления наполнителя с матричным материалом в случае длинных жестких волокон и их большой объемной концентрации необходимо учитывать как

в расчетах долговечности новых, так и остаточного ресурса эксплуатируемых композитных элементов конструкций.

Работа выполнена при поддержке бюджетной программы Украины “Поддержка развития приоритетных направлений научных исследований” (КПКВК 6541230).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kim J. K., Mai Y. W.* Engineered Interfaces in Fiber-Reinforced Composites. — Kidlington, UK: Elsevier Ltd., 1998. — 401 p.
2. *Mallik P. K.* Fiber-Reinforced Composites: Materials, Manufacturing and Design. — Boca Raton, FL: CRC Press, 2007. — 621 p.
3. *Zhou K., Hoh H. J., Wang X., Keer L. M., Pang J. H. L., Song B., Wang Q. J.* A review of recent works on inclusions // *Mech. Mater.* — 2013. — Vol. 60. — P. 144—158.
4. *Kushch V. I.* Microstresses and effective elastic moduli of a solid reinforced by periodically distributed spheroidal inclusions // *Int. J. Solids Struct.* — 1997. — Vol. 34. — P. 1353—1366.
5. *Huang J. H.* Some closed-form solutions for effective moduli of composites containing randomly oriented short fibers // *Mater. Sci. Eng., A.* — 2001. — Vol. 315. — P. 11—20.
6. *To Q. D., Bonnet G., Hoang D. H.* Explicit effective elasticity tensors of two-phase periodic composites with spherical or ellipsoidal inclusions // *Int. J. Solids Struct.* — 2016. — Vols. 94-95. — P. 100—111.
7. *Nazarenko L., Stolarski H., Khoroshun L., Altenbach H.* Effective thermo-elastic properties of random composites with orthotropic components and aligned ellipsoidal inhomogeneities // *Int. J. Solids Struct.* — 2018. — Vols. 136, 137. — P. 220—240.
8. *Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H.* Thermo-elastic properties of random composites with unidirectional anisotropic short-fibers and interphases // *Europ. J. Mech. — A/Solids.* — 2018. — Vol. 70. — P. 249—266.
9. *Goh K. L., Aspden R. M., Mathias K. J., Hukins W. L.* Finite element analysis of the effect of properties and fibre shape on stresses in an elastic fibre embedded in an elastic matrix in a fibre-composite material // *Proc. Roy. Soc. London.* — 2004. — Vol. 460. — P. 2339—2352.
10. *Okada H., Fukui Y., Kumazawa N.* Homogenization analysis for particulate composite materials using the boundary element method // *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences.* — 2004. — Vol. 5. — P. 135-149.
11. *Kim H. G., Kwac L. K.* Evaluation of elastic modulus for unidirectionally aligned short fiber composites // *J. Mech. Sci. Technol.* — 2009. — Vol. 23. — P. 54—63.
12. *Kundalwal S. I., Ray M. C.* Effective properties of a novel composite reinforced with short carbon fibers and radially aligned carbon nanotubes // *Mech. Mater.* — 2012. — Vol. 53. — P. 47—60.
13. *Попов Г. Я., Вайсфельд Н. Д.* Осесимметричная задача теории упругости для бесконечной плиты с цилиндрическим включением при учете ее удельного веса // *Прикл. механика.* — 2014. — Т. 50, № 6. — С. 27—38.
14. *Mykhas'kiv V. V., Stasyuk B. M.* Stress intensification due to the crack outside/inside a finite fiber in 3-D elastic matrix // *Theor. Appl. Fracture Mech.* — 2015. — Vol. 80. — P. 133—142.
15. *Huang Z. M., Zhang C. C., Xue Y. D.* Stiffness prediction of short fiber reinforced composites // *Int. J. Mech. Sci.* — 2019. — Vols. 161, 162. — P. 105068.



16. Hashin Z. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites // *J. Mech. Phys. Solids*. — 2002. — Vol. 50. — P. 2509—2537.
17. Кунец Я. И., Матус В. В., Михаськив В. В., Бострем А., Жанг Ч. Рассеяние сдвиговой горизонтальной волны упругим волокном неклассического поперечного сечения с трещиной по поверхности раздела // *Механика композит. материалов*. — 2008. — Т. 44, № 2. — С. 245—254.
18. Gu S. T., Liu J. T., He Q. C. Size-dependent effective elastic moduli of particulate composites with interfacial displacement and traction discontinuities // *Int. J. Solids Struct.* — 2014. — Vol. 51. — P. 2283—2296.
19. Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H. Effective properties of short-fiber composites with Gurtin-Murdoch model of interphase // *Int. J. Solids Struct.* — 2016. — Vols. 97, 98. — P. 75—88.
20. Хорошун Л. П. Эффективные упругие свойства зернистых стохастических композитных материалов с дефектами на границе раздела компонентов // *Прикл. механика*. — 2017. — Т. 53, № 5. — С. 108—121.
21. Kushch V. I. Elastic interaction between ellipsoidal inhomogeneities with imperfect interface and effective stiffness of particulate composite // *Int. J. Eng. Sci.* — 2019. — Vol. 142. — P. 94—105.
22. Mura T., Furuhashi R. The elastic inclusion with a sliding interface // *ASME J. Appl. Mech.* — 1984. — Vol. 51. — P. 308—310.
23. Jasiuk I., Tsuchida E., Mura T. The sliding inclusion under shear // *Int. J. Solids Struct.* — 1987. — Vol. 23. — P. 1373—1385.
24. Zhong Z., Meguid S. A. On the Elastic Field of a Spherical Inhomogeneity with an Imperfectly Bonded Interface // *J. Elasticity*. — 1997. — Vol. 46. — P. 91—113.
25. Hatami-Marbini H., Shodja H. M. Thermoelastic fields of a functionally graded coated inhomogeneity with sliding/perfect interlaces // *ASME J. Appl. Mech.* — 2007. — Vol. 74. — P. 389—398.
26. Mykhas'kiv V. V., Stasyuk B. M. Elastic State of a Sliding Short Fiber Inclusion in a Three-Dimensional Matrix // *Int. Appl. Mech.* — 2015. — Vol. 51, No. 6. — P. 640—647.
27. Jasiuk I. Elastic moduli of composites with rigid sliding inclusions // *J. Mech. Phys. Solids*. — 1992. — Vol. 40. — P. 373—391.
28. Huang J. H., Furuhashi R., Mura T. Frictional sliding inclusions // *J. Mech. Phys. Solids*. — 1993. — Vol. 41. — P. 247—265.
29. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // *Acta Metallurgica*. — 1973. — Vol. 21. — P. 571—574.
30. Benveniste Y. The effective mechanical behavior of composite materials with imperfect contact between the constituents // *Mech. Mater.* — 1985. — Vol. 4. — P. 197—208.
31. Mykhas'kiv V. V., Stasyuk B. M. Effective elastic properties of 3D composites with short curvilinear fibers: numerical simulation and experimental validation // *Solid State Phenomena*. — 2017. — Vol. 258. — P. 452—455.

Поступила в редакцию 29.07.2020

Окончательный вариант поступил 06.04.2021

Received July 29, 2020 (Apr. 6, 2021)

---