

В. Н. Бакулин^{а,б}, Д. А. Бойцова^б, А. Я. Недбай^б*

^а*Российская Академия наук, Институт прикладной механики (ИПРИМ РАН), Москва, Россия*

^б*Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Россия*

^а*АО «Корпорация «Московский институт теплотехники», Москва, Россия*

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС ПОДКРЕПЛЕННОЙ ШПАНГОУТАМИ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОМПОЗИТНОЙ ОБОЛОЧКИ

*Светлой памяти чл.-кор. АН СССР Всеволода Ивановича Феодосьева в год 105-летия
со дня рождения (05.05.1916—24.09.1991)*

V. N. Bakulin, D.A. Boytsova, and A. Ya. Nedbay*

PARAMETRIC RESONANCE OF A THREE-LAYER CYLINDRICAL COMPOSITE SHELL STRENGTHENED BY RIBS

Keywords: parametric resonance, three-layer cylindrical shell, strengthenings, ribs, hollow isotropic cylinder, axial forces, harmonic time-varying pressure

Equations are obtained for the parametric resonance of a three-layer cylindrical shell with composite layers strengthened by ribs and containing a hollow isotropic cylinder. The shell is loaded by axial forces and an external pressure varying harmonically in time. The influence of the cylinder is modeled as an elastic foundation whose modulus of subgrade reaction was determined from equations of the three-dimensional elasticity theory. The solution of the equations is sought in the form of a trigonometric series in the axial coordinate. The resulting infinite system of inhomogeneous differential equations of Mathieu–Hill type is solved using a trigonometric series in time. Using a numerical example, the main regions of instability were obtained for the first time, and graphical dependences for the critical frequencies on the channel radius and the elastic modulus of cylinder material, the number and height of ribs were found. The mathematical model proposed extends the range of relevant scientific and applied problems in studying three-layer reinforced shells.

* Автор, с которым следует вести переписку: vbak@yandex.ru

Corresponding author: vbak@yandex.ru

Ключевые слова: резонанс параметрический, оболочка цилиндрическая трехслойная, подкрепления, шпангоуты, цилиндр изотропный пустотелый, силы осевые, гармонически изменяющееся во времени давление

Получены уравнения параметрического резонанса подкрепленной шпангоутами трехслойной цилиндрической оболочки с композитными слоями, внутри которой расположен пустотелый изотропный цилиндр. Оболочка нагружена осевыми силами и внешним давлением, гармонически изменяющимся во времени. Влияние цилиндра учитывается в виде упругого основания, коэффициент постели которого определяется из уравнений трехмерной теории упругости. Решение уравнений ищется в виде тригонометрического ряда по осевой координате. Полученная бесконечная система неоднородных дифференциальных уравнений типа Матье—Хилла решается с помощью тригонометрического ряда по временной координате. На числовом примере впервые получены главные области неустойчивости и приведены графические зависимости критических частот от радиуса канала и модуля упругости материала цилиндра, количества и высоты шпангоутов. Предложенная математическая модель расширяет круг решаемых актуальных научных и прикладных задач при исследовании трехслойных подкрепленных оболочек.

Введение. Трехслойные композитные оболочки находят широкое применение в технике [1], при эксплуатации которой на внешней поверхности оболочки может происходить пульсация давления, обусловленная турбулентностью атмосферы, бафтингом [2], вибрациями и многими другими причинами. При определенных условиях эти пульсации способны привести к возникновению параметрического резонанса [3] и разрушению конструкции.

Расчету напряжённо-деформированного состояния (НДС) трехслойных оболочек посвящены, например, работы [4—6], расчету колебаний — работы [7—9], устойчивости — работы [7, 8]. Результаты исследования параметрического резонанса рассмотрены, например, в [10—13], исследования флаттера — в [14—18], в том числе для гладких [19—22] и подкрепленных [23—25] оболочек.

Анализ большого количества работ показал, что параметрический резонанс трехслойных оболочек, в том числе усиленных шпангоутами и пустотелым цилиндром, не изучен.

Постановка задачи. Для разработки расчетной модели параметрического резонанса рассмотрим трехслойную цилиндрическую оболочку с несимметричным по толщине пакетом, усиленную шпангоутами и упругим пустотелым цилиндром, при действии на поверхности внешнего давления, изменяющегося во времени по гармоническому закону. Расчетная схема представлена на рис. 1. Композитные ортотропные несущие слои соеди-

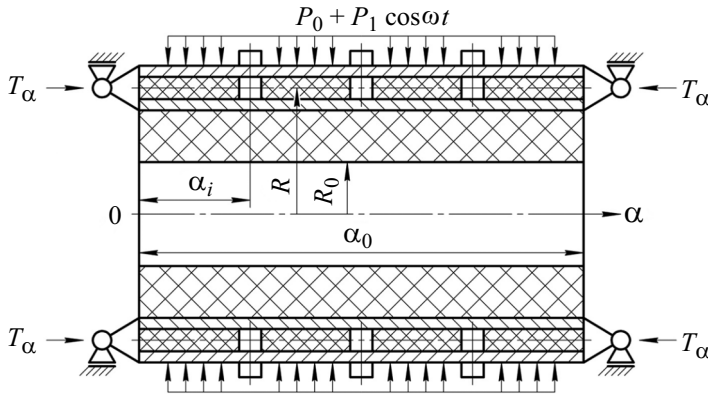


Рис. 1. Расчётная схема трехслойной цилиндрической оболочки с внутренним цилиндром и подкреплениями в виде кольцевых ребер (шпангоутов).

нены слоем легкого заполнителя. Примем, что шпангоуты связывают оба несущих слоя в окружном и радиальном направлениях и расположены сравнительно редко, а взаимным влиянием тангенциальных контактных усилий и радиальных инерционных сил можно пренебречь. Расположенный внутри трехслойной оболочки цилиндр рассматриваем как упругое основание Винклера с коэффициентом постели, определяемым из уравнений трехмерной теории упругости [26].

Математическая модель. Введем безразмерную систему цилиндрических координат, в которой за координатную поверхность принята срединная поверхность заполнителя. Получение уравнений движения трехслойной цилиндрической оболочки с несимметричным по толщине пакетом, усиленной шпангоутами и упругим пустотелым цилиндром, описано в монографии [26]. Кратко поясним, как выводится система уравнений движения трехслойной цилиндрической оболочки с точки зрения механики. Для получения этих уравнений движения рассмотрены дифференциальные уравнения равновесия элемента трехслойной цилиндрической оболочки с учетом взаимодействия со шпангоутами и упругим пустотелым цилиндром аналогично [27]. Полные внутренние усилия и моменты в трехслойной цилиндрической оболочке выражаем через силовые факторы в слоях [26]. Входящие в дифференциальные уравнения равновесия элемента трехслойной цилиндрической оболочки внутренние силовые факторы связаны с геометрическими соотношениями упругости. Внутренние силовые факторы каждого слоя выражены через функции перемещений и его жесткостные характеристики.

Записываем дифференциальные уравнения равновесия элемента шпангоута с учетом взаимодействия его с оболочкой. Силовые факторы в шпангоуте выражены через функции перемещений и его жесткостные характеристики. Записываем условия совместности перемещений шпангоута и оболочки. Проведя необходимые математические операции, получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений в перемещениях трехслойной цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами и упругим пустотелым цилиндром.

Уравнения движения оболочки представим в виде [26]

$$L_{j1}u_{\alpha} + L_{j2}v_{\alpha} + L_{j3}w + L_{j4}u_{\beta} + L_{j5}v_{\beta} +$$

$$+ (\delta_{j2} + \delta_{j3} + \delta_{j5}) \sum_{i=1}^M [l_{j2}^{(i)}v_{\alpha i} + l_{j3}^{(i)}w_i + l_{j5}^{(i)}v_{\beta i}] \delta(\alpha - \alpha_i) = 0 \quad (1)$$

$$(j = 1, 2, \dots, 5),$$

где L_{ji} , l_{ji} — дифференциальные операторы, имеющие вид

$$L_{11} = B_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{33} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad L_{12} = L_{21} = (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta},$$

$$L_{13} = L_{31} = B_{12} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad L_{14} = L_{41} = \bar{B}_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \bar{B}_{33} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2},$$

$$L_{15} = L_{51} = (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{33}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, \quad L_{22} = B_{33} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2},$$

$$L_{23} = L_{32} = B_{22} \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad L_{24} = L_{42} = (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{33}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta},$$

$$L_{25} = L_{52} = \bar{B}_{33} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \bar{B}_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2},$$

$$L_{33} = \frac{D_{11}}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{2(D_{12} + D_{33})}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{D_{22}}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - \frac{h_0^2}{h} \left(G_{13} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \right.$$

$$\left. + G_{23} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + T_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (P_0 + P_1 \cos \omega t) R \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \Pi R^2 + B_{22} + F_0 R^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$L_{34} = L_{43} = \left(\bar{B}_{12} - 2 \frac{R h_0}{h} G_{13} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad L_{35} = L_{53} = \left(\bar{B}_{22} - 2 \frac{R h_0}{h} G_{23} \right) \frac{\partial}{\partial \beta},$$

$$L_{44} = B_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{33} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 4 \frac{R^2}{h} G_{13}, \quad L_{45} = L_{54} = (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta},$$

$$L_{55} = B_{33} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 4 \frac{R^2}{h} G_{23},$$

$$l_{22}^{(i)} = \frac{E_i F_i}{R} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad l_{23}^{(i)} = l_{32}^{(i)} = \frac{E_i F_i}{R} \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad l_{25}^{(i)} = l_{52}^{(i)} = -2 \frac{\varepsilon_i E_i F_i}{R h_0} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2},$$

$$l_{33}^{(i)} = \frac{1}{R} (E_i F_i - a_i \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}) + \rho_i F_i R \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$l_{35}^{(i)} = l_{53}^{(i)} = -\frac{2}{Rh_0} (\varepsilon_i E_i F_i + R a_i) \frac{\partial}{\partial \beta},$$

$$l_{55}^{(i)} = -\frac{4}{Rh_0^2} \left[a_i R^2 - E_i (\varepsilon_i^2 F_i + I_i) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right], \quad F_0 = \rho_B h_1 + \rho_H h_2 + h \rho_C,$$

$$B_{ss} = B_s^B + B_s^H, \quad \bar{B}_{ss} = B_s^B - B_s^H, \quad B_{12} = B_1^B v_2^B + B_1^H v_2^H \quad (s=1,2,3),$$

$$\bar{B}_{12} = B_1^B v_2^B - B_1^H v_2^H, \quad B_1^B = E_1^B h_1 / \eta^B, \quad B_2^B = E_2^B h_1 / \eta^B, \quad B_3^B = G_{12}^H h_1,$$

$$D_{12} = D_1^B v_2^B + D_1^H v_2^H, \quad D_1^B = E_1^B h_1^3 / (12\eta^B),$$

$$D_2^B = E_2^B h_1^3 / (12\eta^B), \quad D_3^B = G_{12}^B h_1^3 / 6, \quad z_0 = R_0 / R,$$

$$\eta^B = 1 - v_1^B v_2^B, \quad h_0 = h + (h_1 + h_2) / 2, \quad 2\varepsilon_i = r_i^B + r_i^H, \quad a_i = 5G_i F_i / 6.$$

Здесь α, β — безразмерные координаты вдоль образующей и в окружном направлении срединной поверхности заполнителя, принятой за координатную поверхность; R, R_0 — радиус срединной поверхности заполнителя и внутренний радиус цилиндра (радиус канала цилиндра) соответственно; h_1, h_2, h — толщина верхнего, нижнего и среднего слоев соответственно; r_i^B, r_i^H — расстояние от оси ребра до срединной поверхности верхнего и нижнего слоев соответственно, причем эта величина считается положительной, если ось ребра лежит ниже срединной поверхности несущего слоя; $w, u_\alpha, u_\beta, v_\alpha, v_\beta$ — нормальное и приведенные осевые и тангенциальные перемещения [26], $u_\alpha, u_\beta, v_\alpha, v_\beta$ выражены через осевые и тангенциальные перемещения срединных поверхностей верхнего u_1, v_1 и нижнего u_2, v_2 слоев соотношениями [26]

$$2u_\alpha = u_1 + u_2, \quad 2u_\beta = u_1 - u_2, \quad 2v_\alpha = v_1 + v_2, \quad 2v_\beta = v_1 - v_2;$$

$E_1^B, E_2^B, G_{12}^B, v_1^B, v_2^B$ — осевой и окружной модули упругости, модуль сдвига и коэффициенты Пуассона верхнего слоя соответственно (обозначения для нижнего слоя с индексом “H” имеют аналогичный смысл); G_{13}, G_{23} — модули поперечного сдвига заполнителя; ρ_B, ρ_H, ρ_C — плотности материалов верхнего, нижнего и среднего слоев; E_i, G_i, ρ_i — модуль упругости, модуль сдвига и плотность материала i -го ребра; F_i, I_i — площадь и момент инерции ребра; $w_i, v_{\alpha i}, v_{\beta i}$ — перемещения w, v_α, v_β оболочки в местах установки i -го ребра; M — количество ребер; Π — коэффициент постели; T_α — начальное осевое усилие; $\delta(\alpha)$ — дельта-функция; δ_{kj} — символ Кронекера.

Решение уравнений (1) представим в виде

$$\begin{aligned} \{u_\alpha, u_\beta\} &= \cos n\beta \sum_{m=1}^{\infty} \{f_{1m}(t), f_{4m}(t)\} \cos \gamma_m \alpha, \\ \{v_\alpha, v_\beta\} &= \sin n\beta \sum_{m=1}^{\infty} \{f_{2m}(t), f_{5m}(t)\} \sin \gamma_m \alpha, \\ w &= \cos n\beta \sum_{m=1}^{\infty} f_{3m}(t) \sin \gamma_m \alpha, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\gamma_m = m\pi / \alpha_0$; $\alpha_0 = L / R$; L — длина оболочки; $f_{jm}(t)$ — неизвестные функции времени (в дальнейшем аргумент t опускаем); m — количество полуволин в осевом направлении; n — количество волн в окружном направлении.

Разложив дельта-функцию в тригонометрический ряд и подставив (2) в (1), получим неоднородную систему дифференциальных уравнений типа Матье—Хилла

$$\begin{aligned} a_{11}f_{1m} + a_{12}f_{2m} + a_{13}f_{3m} + a_{14}f_{4m} + a_{15}f_{5m} &= 0, \\ a_{21}f_{1m} + a_{22}f_{2m} + a_{23}f_{3m} + a_{24}f_{4m} + a_{25}f_{5m} &= \\ &= -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{i=1}^M (b_{22}f_{2i} + b_{23}f_{3i} + b_{25}f_{5i}) \sin \gamma_m \alpha_i, \\ a_{31}f_{1m} + a_{32}f_{2m} + \left(R^2 F_0 \frac{d^2}{dt^2} - R P_1 n^2 \cos \omega t + a_{33}^0 \right) f_{3m} + a_{34}f_{4m} + a_{35}f_{5m} &= \\ &= -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{i=1}^M \left[b_{32}f_{2i} + \left(R \rho_i F_i \frac{d^2}{dt^2} + b_{33}^0 \right) f_{3i} + b_{35}f_{5i} \right] \sin \gamma_m \alpha_i, \\ a_{41}f_{1m} + a_{42}f_{2m} + a_{43}f_{3m} + a_{44}f_{4m} + a_{45}f_{5m} &= 0, \\ a_{51}f_{1m} + a_{52}f_{2m} + a_{53}f_{3m} + a_{54}f_{4m} + a_{55}f_{5m} &= \\ &= -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{i=1}^M (b_{52}f_{2i} + b_{53}f_{3i} + b_{55}f_{5i}) \sin \gamma_m \alpha_i, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= -B_{11}\gamma_m^2 - B_{33}n^2, \quad a_{12} = a_{21} = (B_{12} + B_{33})\gamma_m n, \\ a_{13} &= -a_{31} = B_{12}\gamma_m, \quad a_{14} = a_{41} = -\bar{B}_{11}\gamma_m^2 - \bar{B}_{33}n^2, \\ a_{15} &= a_{51} = (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{33})\gamma_m n, \\ a_{22} &= -B_{33}\gamma_m^2 - B_{22}n^2, \quad a_{23} = -B_{22}n, \end{aligned}$$

$$a_{24} = a_{42} = (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{33})\gamma_m n, \quad a_{25} = a_{52} = -\bar{B}_{33}\gamma_m^2 - \bar{B}_{22}n^2,$$

$$a_{32} = B_{22}n,$$

$$a_{33}^0 = \frac{D_{11}}{R^2}\gamma_m^4 + \frac{2(D_{12} + D_{33})}{R^2}\gamma_m^2 n^2 + \frac{D_{22}}{R^2}n^4 + \\ + \frac{h_0^2}{h}(G_{13}\gamma_m^2 + G_{23}n^2) - T_\alpha \gamma_m^2 + B_{22} + R^2\Pi - RP_0 n^2,$$

$$a_{34} = -a_{43} = -\left(\bar{B}_{12} - \frac{2Rh_0}{h}G_{13}\right)\gamma_m, \quad a_{35} = \left(\bar{B}_{22} - \frac{2Rh_0}{h}G_{23}\right)n,$$

$$a_{44} = -B_{11}\gamma_m^2 - B_{33}n^2 - \frac{4R^2}{h}G_{13}, \quad a_{45} = a_{54} = (B_{12} + B_{33})\gamma_m n,$$

$$a_{53} = -\left(\bar{B}_{22} - \frac{2Rh_0}{h}G_{23}\right)n, \quad a_{55} = -B_{33}\gamma_m^2 - B_{22}n^2 - \frac{4R^2}{h}G_{23},$$

$$b_{22} = -E_i F_i n^2 / R, \quad b_{23} = -b_{32} = -E_i F_i n / R, \quad b_{25} = b_{52} = 2\varepsilon_i E_i F_i n^2 / (Rh_0),$$

$$b_{33}^0 = (E_i F_i + a_i n^2) / R_i, \quad b_{35} = -b_{53} = -2n(\varepsilon_i E_i F + Ra_i) / (Rh_0),$$

$$b_{55} = -4\left[R^2 a_i + E_i(\varepsilon_i^2 F_i + I_i)n^2\right] / (Rh_0^2).$$

Коэффициент постели Π запишем в виде

$$\Pi = \frac{2\mu}{R} \frac{\Delta}{\psi}, \quad \psi = \sum_{j=1}^6 \Phi_j D_{6j}, \quad \xi = \gamma_m, \quad x = z_0 \gamma_m,$$

$$\Phi_1 = -\frac{n^2}{\xi} I_n(\xi), \quad \Phi_3 = -\frac{(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)} \xi \left(\frac{n^2}{\xi^2} + 1\right) I_n(\xi), \quad \Phi_5 = -I'_n(\xi),$$

D_{6j} , Δ — соответственно дополнение и определитель матрицы, элементы которой имеют вид

$$C_{11} = \frac{n^2}{x} I_n(x), \quad C_{13} = -I'_n(x) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{n^2}{x^2} + 1\right) x I_n(x), \quad C_{15} = 2I'_n(x),$$

$$C_{21} = \left(\frac{n^2}{x^2} + \frac{1}{2}\right) I_n(x) - \frac{1}{x} I'_n(x),$$

$$C_{23} = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{1}{x} I'_n(x) - \left(\frac{n^2}{x^2} + 1\right) I_n(x)\right],$$

$$\begin{aligned}
 C_{25} &= \frac{1}{x} \left[I'_n(x) - \frac{1}{x} I_n(x) \right], \quad C_{31} = \frac{n^2}{x} \left[\frac{1}{x} I_n(x) - I'_n(x) \right], \\
 C_{33} &= \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \left[\left(\frac{n^2}{x^2} + 1 \right) x I'_n(x) - \left(\frac{n^2}{x^2} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) I_n(x) \right], \\
 C_{35} &= \frac{1}{x} I'_n(x) - \left(\frac{n^2}{x^2} + 1 \right) I_n(x), \quad C_{41} = \frac{n^2}{\xi} I_n(\xi), \\
 C_{43} &= -I'_n(\xi) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{n^2}{x^2} + 1 \right) \xi I_n(\xi), \quad C_{45} = 2I'_n(\xi), \\
 C_{51} &= \left(\frac{n^2}{\xi^2} + \frac{1}{2} \right) I_n(\xi) - \frac{1}{\xi} I'_n(\xi), \\
 C_{53} &= \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{1}{\xi} I'_n(\xi) - \left(\frac{n^2}{\xi^2} + 1 \right) I_n(\xi) \right], \\
 C_{55} &= \frac{1}{\xi} \left[I'_n(\xi) - \frac{1}{\xi} I_n(\xi) \right], \quad C_{61} = n^2 \left[\frac{1}{\xi} I_n(\xi) - I'_n(\xi) \right], \\
 C_{63} &= \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \xi \left[\left(\frac{n^2}{\xi^2} + 1 \right) \xi I'_n(\xi) - \left(\frac{n^2}{\xi^2} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) I_n(\xi) \right], \\
 C_{65} &= \xi \left[\frac{1}{\xi} I'_n(\xi) - \left(\frac{n^2}{\xi^2} + 1 \right) I_n(\xi) \right], \quad \mu = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)}, \quad \lambda = \frac{E_0 \nu_0}{(1 + \nu_0)(1 - 2\nu_0)}.
 \end{aligned}$$

Здесь штрихом обозначена производная по соответствующему аргументу; E_0, ν_0 — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала заполнителя (см. рис. 1).

При записи четных столбцов матрицы C_{ij} и Φ_j заменяем функцию $I_n(x)$ на модифицированную функцию Бесселя $K_n(x)$ с тем же аргументом.

Запишем решение уравнений (3) как

$$\begin{aligned}
 & \{f_{1m}, f_{2m}, f_{3m}, f_{4m}, f_{5m}; f_{2i}, f_{3i}, f_{5i}\} = \\
 &= \sum_{q=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ \left[A_{1m}^{(q)}, A_{2m}^{(q)}, A_{3m}^{(q)}, A_{4m}^{(q)}, A_{5m}^{(q)}; A_{2i}^{(q)}, A_{3i}^{(q)}, A_{5i}^{(q)} \right] \sin \frac{q\omega t}{2} \right\} + \\
 &+ \sum_{q=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ \left[H_{1m}^{(q)}, H_{2m}^{(q)}, H_{3m}^{(q)}, H_{4m}^{(q)}, H_{5m}^{(q)}; H_{2i}^{(q)}, H_{3i}^{(q)}, H_{5i}^{(q)} \right] \cos \frac{q\omega t}{2} \right\}. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Подставив первую сумму из (4) в (3) и приравняв коэффициенты при одинаковых $\sin(q\omega t / 2)$, получим систему неоднородных алгебраических уравне-

ний. Согласно [28, 29] для практических расчётов в большинстве случаев достаточно ограничиться первым членом ряда $q = 1$, который определяет границу главной области неустойчивости. Тогда запишем (индекс q в дальнейшем опускаем)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^5 a_{1j} A_{jm} &= 0, \quad \sum_{j=1}^5 a_{4j} A_{jm} = 0, \\ \sum_{j=1}^5 a_{2j} A_{jm} &= -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{i=1}^M (b_{22} A_{2i} + b_{23} A_{3i} + b_{25} A_{5i}) \sin \gamma_m \alpha_i, \\ \sum_{j=1}^5 a_{3j} A_{jm} &= -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{i=1}^M (b_{32} A_{2i} + b_{33} A_{3i} + b_{35} A_{5i}) \sin \gamma_m \alpha_i, \\ \sum_{j=1}^5 a_{5j} A_{jm} &= -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{i=1}^M (b_{52} A_{2i} + b_{53} A_{3i} + b_{55} A_{5i}) \sin \gamma_m \alpha_i, \end{aligned} \quad (5)$$

где $a_{33} = a_{33}^0 - R^2 F_0 \omega^2 / 4 \mp R P_1 n^2 / 2; \dots b_{33} = b_{33}^0 - R \rho_i F_i \omega^2 / 4$.

Решая систему (5), получим

$$A_{km} = -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{i=1}^M (B_{k1} A_{2i} + B_{k2} A_{3i} + B_{k3} A_{5i}) \sin \gamma_m \alpha_i \quad (k = 1, 2, \dots, 5), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} B_{k1} &= (b_{22} D_{2k} + b_{32} D_{3k} + b_{52} D_{5k}) / \Delta, \\ B_{k2} &= (b_{23} D_{2k} + b_{33} D_{3k} + b_{53} D_{5k}) / \Delta \\ B_{k3} &= (b_{25} D_{2k} + b_{35} D_{3k} + b_{55} D_{5k}) / \Delta, \end{aligned}$$

Δ , D_{jk} — определитель и дополнение элемента a_{jk} матрицы (5).

В местах установки ребер справедливы соотношения

$$\{A_{2r}, A_{3r}, A_{5r}\} = \sum_{m=1}^{\infty} \{(A_{2m}, A_{3m}, A_{5m}) \sin \gamma_m \alpha_r\}.$$

Подставив в них (6), будем иметь систему $3M$ уравнений относительно A_{ij} :

$$\begin{aligned} A_{2r} &= -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^M (B_{12} A_{2i} + B_{22} A_{3i} + B_{32} A_{5i}) \sin \gamma_m \alpha_i \sin \gamma_m \alpha_r, \\ A_{3r} &= -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^M (B_{13} A_{2i} + B_{23} A_{3i} + B_{33} A_{5i}) \sin \gamma_m \alpha_i \sin \gamma_m \alpha_r, \\ A_{5r} &= -\frac{2}{\alpha_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^M (B_{15} A_{2i} + B_{25} A_{3i} + B_{35} A_{5i}) \sin \gamma_m \alpha_i \sin \gamma_m \alpha_r \quad (r = 1, 2, \dots, M). \end{aligned} \quad (7)$$

Приравняв определитель системы (7) нулю, получим характеристическое уравнение критических частот.

Подставив вторую сумму из (4) в (3), будем иметь характеристическое уравнение типа (7), в котором необходимо коэффициенты A_{jr} заменить на H_{jr} и в a_{33} поставить знак “+”.

При равномерной установке шпангоутов ($\alpha_i = i\alpha_0 / (M+1)$) коэффициенты при A_{ki} не будут зависеть от индекса i , и решение системы (7) запишем в виде

$$\{A_{2i}, A_{3i}, A_{5i}\} = \{A_2, A_3, A_5\} \sin \frac{\pi N \alpha_i}{\alpha_0}, 1 \leq N \leq M, \quad (8)$$

где A_2, A_3, A_5 — постоянные; N — целое число, характеризующее форму потери устойчивости.

Подставив (8) в уравнение (7), будем иметь однородную систему трех алгебраических уравнений

$$\frac{M+1}{\alpha_0} \sum_m (B_{1j} A_2 + B_{2j} A_3 + B_{3j} A_5) + A_j = 0; j = 2, 3, 5. \quad (9)$$

При этом суммирование производится по m :

$$m = N, 2s(M+1) \pm N, s = 1, 2, 3 \dots$$

Приравняв определитель системы (9) нулю, получим характеристическое уравнение. Задавая целочисленные значения для n и N , будем иметь значения критических частот.

Результаты исследования. Исследуем параметрический резонанс трехслойной цилиндрической оболочки с несимметричным пакетом ортотропных несущих слоев и изотропным внутренним цилиндром с указанными далее параметрами при действии осевой сжимающей силы и гармонически изменяющегося по времени внешнего давления:

$$\begin{aligned} L/R &= 6, h_1/R = 0,002, h_2/R = 0,006, h/R = 0,008, \\ (E_1^B, E_1^H)/E_0 &= 1,5 \cdot 10^4, (E_2^B, E_2^H, E_i)/E_0 = 2,3 \cdot 10^4, \\ (G_{12}^B, G_{12}^H, G_i)/E_0 &= 2,4 \cdot 10^3, (G_{13}, G_{23})/E_0 = 30, \\ v_1^B = v_1^H &= 0,15, v_2^B = v_2^H = 0,23, F_i/R^2 = 8 \cdot 10^{-4}, H/R = 0,04, \\ I/(FR^2) &= 1,33 \cdot 10^{-4}, R_0/R = 0,6, P_0/E_0 = 0,05, \\ T/(E_0 R^2) &= 0,5 T_{cr}/(E_0 R^2) = 2, r_i^B/R = 0,01, r_i^H/R = 0,02, \\ (\rho_B, \rho_H, \rho_i)/\rho_C &= 5, v_0 = 0,49; \end{aligned}$$

T_{cr} — критическое усилие потери устойчивости неподкрепленной трехслойной оболочки; H — высота ребра.

Рассмотрен случай подкрепления одним и тремя кольцевыми ребрами (шпангоутами).

Полученные в результате расчетов области неустойчивости для трехслойной цилиндрической оболочки с одним шпангоутом при разных значениях радиуса канала внутреннего цилиндра приведены на рис. 2—*а* (заштрихованная часть). Для сравнения штриховой линией показана область неустойчивости для трехслойной цилиндрической оболочки без внутреннего цилиндра. По оси ординат отложено отношение критической частоты пульсаций к собственной частоте неподкреплённой трехслойной цилиндрической оболочки $Y = \omega / \omega_0$, а по оси абсцисс — отношение амплитуды переменной составляющей внешнего давления к постоянной, величина которой равна 0,8 критического давления потери устойчивости неподкреплённой трехслойной оболочки, — $X = p_1 / p_0$.

На рис. 2—*б* представлены аналогичные зависимости для трехслойной цилиндрической оболочки с тремя шпангоутами при разных значениях модуля упругости внутреннего цилиндра для $z_0 = 0,6$. Штриховой линией представлена область неустойчивости для трехслойной цилиндрической оболочки без внутреннего цилиндра.

Области неустойчивости для трехслойной цилиндрической оболочки с тремя шпангоутами при разных значениях безразмерной высоты H / R шпангоутов показаны на рис. 2—*в*.

По полученным результатам расчетов можно сделать следующие выводы:

— повышение толщины свода внутреннего подкрепляющего цилиндра трехслойной цилиндрической оболочки в два раза увеличивает границы критических частот примерно в три раза и уменьшает почти в 2,7 раза площадь области неустойчивости;

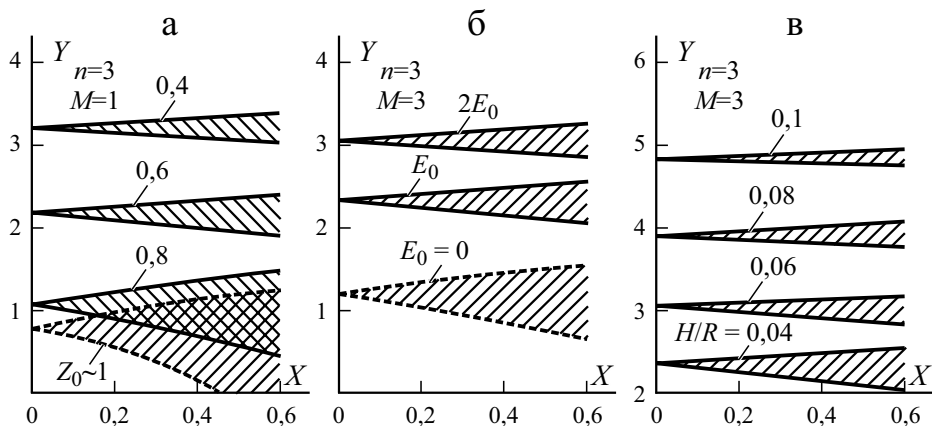


Рис. 2. Области неустойчивости трехслойной цилиндрической оболочки при разных значениях радиуса канала внутреннего цилиндра (*а*); модуля упругости внутреннего цилиндра (*б*); при разной высоте H ребра (*в*). M — количество ребер, n — количество кольцевых волн. Пояснения в тексте.

— для трехслойной цилиндрической оболочки с одним шпангоутом в случае 20% толщины свода внутреннего цилиндра уменьшается площадь области неустойчивости примерно в два раза;

— в случае трехслойной цилиндрической оболочки без внутреннего подкрепляющего цилиндра повышение количества шпангоутов до трех увеличивает границы критических частот почти на 40% и уменьшает площадь области неустойчивости примерно в 2,1 раза, наличие же внутреннего цилиндра с $z_0 = 0,6$ оставляет одинаковыми параметры области неустойчивости;

— повышение модуля упругости материала внутреннего цилиндра в два раза увеличивает границы области неустойчивости почти на 35% и соответствует увеличению в 1,5 раза толщины свода внутреннего цилиндра;

— повышение высоты шпангоутов в два раза увеличивает границы критических частот примерно в 1,8 раза и уменьшает почти в два раза площадь области неустойчивости.

Работа выполнена в рамках Программы создания и развития научного центра мирового уровня Сверхзвук на 2020—2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение № 075-15-2020-924 от 16.11.2020 г.).

Модель трехслойной оболочки разработана в рамках государственного задания, номер государственной регистрации темы АААА-А19-119012290177-0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bakulin V. N.* Investigation of the influence of the cutout dimensions on the stress-strain state of three-layer shells with load-bearing layers of composite materials // J. Phys. Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. — 2020. Vol. 714. — P. 012002.

2. *Липанов А. М., Карсканов С. А., Чернышев С. Л., Липатов И. И.* Теоретическое исследование условий возникновения скоростного бафтинга // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2019. — Т. 29, № 3. — С. 382—395.

3. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. — М.: Физматлит, 1976. — 416 с.

4. *Бакулин В. Н.* Эффективная модель послойного анализа трехслойных нерегулярных оболочек вращения цилиндрической формы // Докл. РАН. — 2018. — Т. 478, № 2. — С. 148—152.

5. *Бакулин В. Н.* Блочный-послойный подход для анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек вращения // Прикл. математика и механика. — 2021. — Т. 85, № 3. — С. 383—395.

6. *Паймушин В. Н.* Теория среднего изгиба подкрепленных на контуре трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем // Механика композит. материалов. — 2017. — Т. 53, № 1. — С. 3—26.

7. *Бакулин В. Н., Образцов И. Ф., Потопахин В. А.* Динамические задачи нелинейной теории многослойных оболочек: Действие интенсивных термосиловых нагрузок, концентрированных потоков энергии. — М.: Физматлит, 1998. — 464 с.

8. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. — 172 с.
9. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Резонансные колебания трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем // Механика композиц. материалов и конструкций. — 2016. — Т. 22, № 1. — С. 60—68.
10. Bakulin V. N., Volkov E. N., Nedbai A. Ya. . Dynamic stability of a cylindrical shell reinforced by longitudinal ribs and a hollow cylinder under the action of axial forces // J. Eng. Phys. Thermophys. — 2016. — Vol. 89, No 3. — P. 747—753.
11. Бакулин В. Н., Недбай А. Я. Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами кусочно-постоянной толщины, при действии осевой нагрузки // Докл. РАН. Физика, техн. науки. — 2020. — Т. 495. — С. 43—49.
12. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. — М.: Физматлит, 2009. — 400 с
13. Цзинь Ёу Као, Чунь Шэн Чэнь, Вэй Жень Чэнь. Отклик пластины типа сэндвич со вспененным наполнителем на параметрические колебания при периодических нагрузках // Механика композит. материалов. — 2012. — Т. 48, № 5. — С. 765—782.
14. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 600 с.
15. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М.: Наука, 1972. — 432 с.
16. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Флаттер пластин и оболочек. — М.: Наука, 2006. — 247 с.
17. Бакулин В. Н., Волков Е. Н., Недбай А. Я. Флаттер слоистой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами и нагруженной осевыми силами // Докл. РАН. — 2015. — Т. 463, №4. — С. 414—417.
18. Bakulin V. N., Konopel'chev M. A., and Nedbai A. Ya. Flutter of a laminated cantilever cylindrical shell with a ring-stiffened edge // Russ. Aeronautics. — 2018. — Vol. 61, No. 4. — P. 517—523.
19. Москвин В. Г. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки из линейного вязкоупругого материала в сверхзвуковом потоке газа // Тр. 8-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. — М.: Наука, 1962. — С. 527—531.
20. Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В Исследование панельного флаттера круговых цилиндрических оболочек, выполненных из функционально-градиентного материала // Вестн. ПНИПУ. Механика. — 2014. — № 1. — С. 57—75.
21. Бакулин В. Н., Волков Е. Н., Симонов А. И. Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки при действии переменного по оси внешнего давления // Изв. вузов. Авиац. техника. — 2017. № 4. — С. 11—17.
22. Бакулин В. Н., Боков М. А., Недбай А. Я. Аэроупругая устойчивость цилиндрической оболочки из композитного материала при двухстороннем обтекании // Механика композит. материалов. — 2017. — Т. 53, № 6. — С. 1153—1164.
23. Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я., Волков Е. Н. Динамическая устойчивость слоистой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами и цилиндром, при внешнем давлении // Механика композиц. материалов и конструкций. — 2013. — Т. 19, № 4., — С. 61—623.
24. Багдасарян В. В, Кузнецов О. В., Малютин И. С. О параметрическом резонансе цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами // Вопр. мат. физики и теории колебаний. — 1975. — Вып. 3. — С. 89—96.
25. Bakulin V. N., Danilkin E. V. and Nedbai A. Ya. Dynamic stability of a cylindrical shell stiffened with a cylinder and longitudinal diaphragms at external pressure // J. Eng. Phys. Thermophys. — 2018. — Vol. 91, No. 2. — P. 537—543.

26. Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я., Андриюшин В. А. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. — М.: Физматлит, 2014. — 408 с.

27. Малютин И. С. Устойчивость трехслойных ортотропных цилиндрических оболочек, дискретно подкрепленных ребрами жесткости // Прикл. механика. — 1979. — Т. 15, № 7. — С. 20—26.

28. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 600 с.

29. Bakulin V. N., Nedbai A. Ya. Dynamic stability of composite cylindrical shell of linear-variable thickness under the action pulsed external pressure // J. Eng. Phys. Thermophys. — 2021. — Vol. 94, No. 2. — P. 525—533.

Поступила в редакцию 17.03.2021

Окончательный вариант поступил 18.06.2021

Received March 17, 2021 (June 18, 2021)
