

*В. Т. Т. Ань<sup>а</sup>, В. Т. Хуон<sup>а</sup>, Ф. Д. Нгуен<sup>а</sup>, Н. Д. Дык<sup>б, в\*</sup>*

<sup>а</sup>*Department of Engineering and Technology in Constructions and Transportation, VNU Hanoi — University of Engineering and Technology (UET), 144 — Xuan Thuy — Cau Giay — Hanoi — Vietnam*

<sup>б</sup>*International School of Vietnam National University, Hanoi, G7 & G8 Building, 144 Xuan Thuy Street, Cau Giay, Ha Noi, Viet Nam*

<sup>в</sup>*NTT Institute of High Technology, Nguyen Tat Thanh University — District 4, Ho Chi Minh City, Vietnam*

## **НЕЛИНЕЙНЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОЛОГИХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ТИПА САНДВИЧ ИЗ ПОРИСТОГО КОМПОЗИТА, АРМИРОВАННОГО ПЛАСТИНКАМИ ГРАФЕНА<sup>1</sup>**

*V. T. T. Anh, V. T. Huong, P. D. Nguyen, and N. D. Duc\**

### **NONLINEAR DYNAMIC ANALYSIS OF POROUS GRAPHENE PLATELET-REINFORCED COMPOSITE SANDWICH SHALLOW SPHERICAL SHELLS**

**Keywords:** nonlinear dynamic analysis, shallow spherical shells, porous graphene platelet-reinforced composites, sandwich-structures

Using the first-order shear deformation theory of shells and the Galerkin and Runge—Kutta methods, the nonlinear dynamic behavior and the natural frequencies of porous graphene platelet-reinforced composite sandwich shallow spherical shells supported by an elastic foundation are studied in this work. The modified Halpin—Tsai model and the rule of mixtures are used to establish the effective properties of the material. Formulas related to porosity distributions and graphene platelet patterns are also presented in the analysis section.

**Ключевые слова:** анализ динамический нелинейный, оболочки сферические пологие, композит пористый, армированный пластинками графена, сандвич-структуры

С помощью теории сдвигового деформирования оболочек первого порядка и методов Галеркина и Рунге—Кутта исследовано нелинейное динамическое поведение и собственные частоты

---

\*Автор, с которым следует вести переписку: [ducnd@vnu.edu.vn](mailto:ducnd@vnu.edu.vn)  
Corresponding author: [ducnd@vnu.edu.vn](mailto:ducnd@vnu.edu.vn)

<sup>1</sup>Перевод с англ.

пологих сферических сэндвич-оболочек из пористого композита, армированного пластинками графена, покоящихся на упругом основании. Для определения эффективных свойств материала использована модифицированная модель Халпина—Цая и правило смесей. Приведены формулы для анализа распределений пористости.

## Введение

Структуры типа сэндвич состоят из двух тонких лицевых слоев и сравнительно толстой сердцевины. В этих структурах армирующий элемент, например, углеродные волокна, углеродные нанотрубки и пластинки графена (ПГ), обладает высокой прочностью и жесткостью. В последние годы значительно увеличилось количество исследований свойств сэндвич-структур в силу их высоких прочностных и жесткостных характеристик, а также благодаря оптимизации затрат и массы конструкции [1—17].

Одна из проблем, возникающих при изготовлении композитов, обусловленная различием свойств составляющих их материалов, — пористость, уменьшающая жесткость, несущую способность, рассеивание энергии и массу, но увеличивающая их термостойкость. Выполнены исследования, в которых проанализировали влияние пористости на статическое и динамическое поведение функционально-градиентных балок [18—24], пластин [25—29] и оболочек [30—33].

Потеря устойчивости и закритическое поведение оболочек из пористых нанокомпозитов в термических средах изучали в [34—36]. Результаты нелинейного динамического отклика и колебаний сэндвич-пластин и оболочек из функционально-градиентных композитов, армированных пластинками графена, покоящихся на упругом основании Винклера—Папстернака, представлены в [37—39]. “Умная” сэндвич-пластина, состоящая из пьезоэлектрических слоев, рассмотрена в [40]. Результаты анализа колебаний “умной” сэндвич-оболочки описаны в [41]. В [42] исследовали нелинейные колебания “умной” оболочки с двойной кривизной из сэндвич-композита с податливой сердцевинной с интегрированным пьезоэлектрическим слоем.

Цель настоящей работы — исследование нелинейного динамического поведения и свободных колебаний пологих сферических сэндвич-оболочек из пористого композита, армированного пластинками графена (ПК-А-ПГ), с помощью теории сдвигового деформирования первого порядка (ТСДПП) оболочек и методов Галеркина и Рунге—Кутта. Кроме того, использован аналитический подход для вывода определяющих уравнений и определения собственных частот и зависимостей прогиб—время пологих сферических сэндвич-оболочек из ПК-АПГ.

### 1. Пологие сферические сэндвич-оболочки из ПК-АПГ

Рассмотрим две модели пологой сферической сэндвич-оболочки (ПСО) из ПК-АПГ, состоящей из трех слоев.

Модель I: два изотропных лицевых слоя толщиной  $h_f$  и сердцевина из ПК-АПГ толщиной  $h_c$ .

Модель II: два лицевых слоя из ПК-АПГ толщиной  $h_f$  и изотропная сердцевина толщиной  $h_c$ .

На рис. 1  $R$  — радиус кривизны,  $r_0$  — радиус основания;  $h = h_c + 2h_f$  — общая толщина ПСО.

Модуль упругости  $E(z)$ , плотность  $\rho$ , коэффициент пористости  $e_0$  и массовую плотность  $e_m$  пористой нанокompозитной ПСО вычисляем по формулам [43]

$$E(z) = E_1(1 - e_0\lambda(z)), \quad \rho(z) = \rho_1(1 - e_m\lambda(z)), \quad e_m = 1 - \sqrt{1 - e_0}, \quad 0 \leq e_0 \leq 1. \quad (1)$$

Рассмотрим три типа функции распределения пор  $\lambda(z)$ : неоднородное симметричное (тип 1), неоднородное асимметричное (тип 2) и однородное (тип 3), а именно:

$$\lambda(z) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) & \text{(тип 1),} \\ \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) & \text{(тип 2),} \\ \lambda = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left( \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2 & \text{(тип 3).} \end{cases} \quad (2)$$

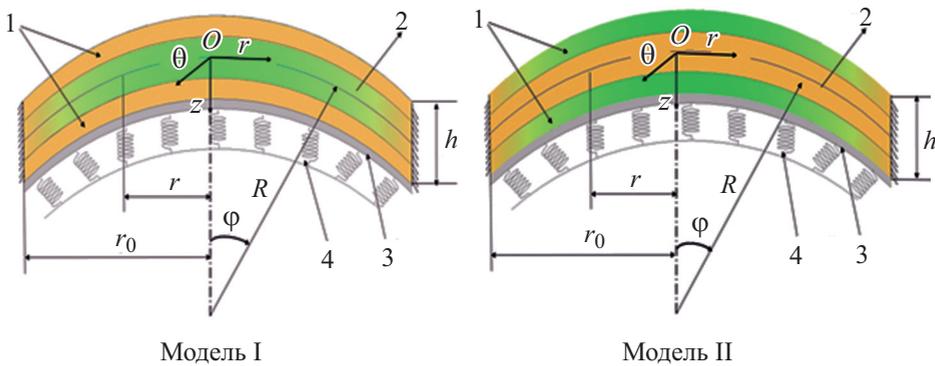


Рис. 1. Поперечное сечение моделей I и II и система координат  $(\varphi, \theta, z)$  ПСО: 1 — лицевые слои; 2 — сердцевина; 3 — слой, работающий на сдвиг; 4 — пружины Винклера.

Взаимосвязь между объемным  $V_{GPL}$  и массовым  $\Lambda_{GPL}$  содержанием пластинок графена выражает уравнение [38]

$$\frac{\Lambda_{GPL}}{\Lambda_{GPL} + \frac{\rho_{GPL}}{\rho_m} - \frac{\rho_{GPL}}{\rho_m} \Lambda_{GPL}} \int_{-h/2}^{h/2} [1 - e_m \lambda(z)] dz = \int_{-h/2}^{h/2} V_{GPL} [1 - e_m \lambda(z)] dz. \quad (3)$$

Модуль слоя нанокompозита вычисляем как [44]

$$E_1 = \frac{3}{8} \left( \frac{1 + \xi_L \eta_L V_{GPL}}{1 - \eta_L V_{GPL}} \right) E_m + \frac{5}{8} \left( \frac{1 + \xi_T \eta_T V_{GPL}}{1 - \eta_T V_{GPL}} \right) E_m,$$

$$\eta_L = \frac{E_{GPL} - E_m}{E_{GPL} + \xi_L E_m}, \quad \eta_T = \frac{E_{GPL} - E_m}{E_{GPL} + \xi_T E_m},$$

$$\xi_L = 2(a_{GPL} / h_{GPL}), \quad \xi_T = 2(b_{GPL} / h_{GPL}), \quad (4)$$

$$\rho_1 = \rho_{GPL} V_{GPL} + \rho_m V_m, \quad v_1 = v_{GPL} V_{GPL} + v_m V_m, \quad V_m = 1 - V_{GPL},$$

где нижние индексы  $GPL$  и  $m$  относятся к величинам, характеризующим пластинку графена и матрицу соответственно.

## 2. Теоретические формулировки

На основе ТСДПП предположим, что сэндвич-ПСО — осесимметричная с компонентами перемещения  $(u, v, w)$  произвольной точки  $(\varphi, \theta, z)$  [45]:

$$u(r, \theta, z) = u_0 + z\psi_u, \quad v(r, \theta, z) = 0, \quad w(r, \theta, z) = w_0, \quad (5)$$

где  $r = R \sin \varphi \approx R\varphi, \cos \varphi = 1$ .

Используя геометрически нелинейное предположение фон Кармана, деформации  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{rz}$  можно выразить как [45]

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^0 + z\chi_r, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 + z\chi_\theta, \quad \varepsilon_{rz} = \psi + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_r^0 = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \varepsilon_\theta^0 = \frac{u}{r} - \frac{w}{R}, \quad \chi_r = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \chi_\theta = \frac{\psi}{r}.$$

где  $\varepsilon_r^0, \varepsilon_\theta^0, \varepsilon_{rz}$  — компоненты нормальных деформаций на срединной поверхности;  $\chi_r, \chi_\theta$ , — их составляющие, обусловленные изгибом и кручением;  $u, v, w$  — перемещения;  $\psi$  — угол поворота нормали к срединной поверхности.

Закон Гука для пологих сферических сандвич-оболочек из ПК-АПГ имеет вид

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix}^{(k)}, \quad (7)$$

где верхний индекс  $k = f, c$  указывает на лицевой слой ( $f$ ) и сердцевину ( $c$ ):

$$Q_{11}^{(k)} = \frac{E(z)^{(k)}}{1-\nu^{(k)}\nu^{(k)}} = Q_{22}^{(k)}, \quad Q_{12}^{(k)} = \frac{\nu^{(k)}E(z)^{(k)}}{1-\nu^{(k)}\nu^{(k)}}, \quad Q_{66}^{(k)} = G_{12}^{(k)} = \frac{E(z)^{(k)}}{2(1+\nu^{(k)})}.$$

Силовые и моментные поля можно представить в виде

$$(N_i, M_i) = \int_{-\frac{1}{2}h_c - h_f}^{-\frac{1}{2}h_c} \sigma_i^f(1, z) dz + \int_{-\frac{1}{2}h_c}^{\frac{1}{2}h_c} \sigma_i^c(1, z) dz + \int_{\frac{1}{2}h_c}^{\frac{1}{2}h_c + h_f} \sigma_i^f(1, z) dz, \quad (8)$$

$$Q_r = K \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}h_c & \frac{1}{2}h_c & \frac{1}{2}h_c + h_f \\ \int_{-\frac{1}{2}h_c - h_f}^{\frac{1}{2}h_c} \sigma_{rz}^f dz + \int_{-\frac{1}{2}h_c}^{\frac{1}{2}h_c} \sigma_{rz}^c dz + \int_{\frac{1}{2}h_c}^{\frac{1}{2}h_c + h_f} \sigma_{rz}^f dz \\ \int_{-\frac{1}{2}h_c - h_f}^{\frac{1}{2}h_c} \sigma_{rz}^f dz + \int_{-\frac{1}{2}h_c}^{\frac{1}{2}h_c} \sigma_{rz}^c dz + \int_{\frac{1}{2}h_c}^{\frac{1}{2}h_c + h_f} \sigma_{rz}^f dz \end{pmatrix}, \quad i = r, \theta, rz,$$

где  $K$  — коэффициент коррекции сдвига.

Подставив (7) в (8), выразим силовые и моментные составляющие оболочки как

$$\begin{Bmatrix} N_r \\ N_\theta \\ M_r \\ M_\theta \\ Q_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} \\ A_{12} & A_{11} & 0 & B_{12} & B_{11} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} \\ B_{12} & B_{11} & 0 & D_{12} & D_{11} \\ 0 & 0 & KA_{66} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{rz} \\ \chi_r \\ \chi_\theta \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

где

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{1}{2}h_c - h_f}^{-\frac{1}{2}h_c} Q_{ij}^1(1, z, z^2) dz + \int_{-\frac{1}{2}h_c}^{\frac{1}{2}h_c} Q_{ij}^2(1, z, z^2) dz +$$

$$+ \int_{-\frac{1}{2}h_c}^{\frac{1}{2}h_c+h_f} Q_{ij}^3(1, z, z^2) dz, \quad ij = 11, 12, 22, 66.$$

Нормальные деформации на срединной поверхности из уравнений (8) можно переписать как

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^0 &= C_{10}N_r + C_{11}N_\theta + C_{12}\chi_r + C_{13}\chi_\theta + C_{14}, \\ \varepsilon_\theta^0 &= C_{11}N_r + C_{10}N_\theta + C_{13}\chi_r + C_{12}\chi_\theta + C_{14}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} C_{10} &= \frac{-A_{11}}{A_{12}^2 - A_{11}^2}, C_{11} = \frac{A_{12}}{A_{12}^2 - A_{11}^2}, C_{12} = \frac{A_{11}B_{11} - A_{12}B_{12}}{A_{12}^2 + A_{11}^2}, \\ C_{13} &= \frac{A_{11}B_{12} - A_{12}B_{11}}{A_{12}^2 + A_{11}^2}, C_{14} = \frac{A_{12} - A_{11}}{A_{12}^2 + A_{11}^2}. \end{aligned}$$

Согласно ТСДПП уравнения движения сандвич-ПСО из ПК-АПГ, покоящейся на упругом основании, имеют вид [46]

$$\frac{\partial(rN_r)}{r\partial r} - \frac{N_\theta}{r} = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (11a)$$

$$\frac{\partial(rM_r)}{r\partial r} - \frac{M_\theta}{r} - Q_r = I_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (11b)$$

$$\frac{\partial(rQ_r)}{r\partial r} + \frac{1}{R}(N_r + N_\theta) + \frac{\partial(rN_r \frac{\partial w}{\partial r})}{r\partial r} + q - k_1 w + k_2 \Delta w = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (11c)$$

$$\begin{aligned} \{I_0, I_1, I_2\} &= \int_{-\frac{1}{2}h_c}^{-\frac{1}{2}h_c-h_f} \rho(z)^1(1, z, z^2) dz + \\ &+ \int_{-\frac{1}{2}h_c}^{\frac{1}{2}h_c} \rho(z)^2(1, z, z^2) dz + \int_{\frac{1}{2}h_c}^{\frac{1}{2}h_c+h_f} \rho(z)^3(1, z, z^2) dz. \end{aligned}$$

где  $q$  — равномерно распределенная нагрузка;  $k_1$  — коэффициент жесткости пружины Винклера;  $k_2$  — коэффициент жесткости сдвигового слоя в модели Пастернака (см. рис. 1).

Функцию напряжений  $f(r, \theta, t)$  определим как

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r}, \quad N_\theta = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}. \quad (12)$$

Подстановка (12) в (11а) приводит к соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{I_1}{I_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (13)$$

Подставив (6), (9) и (10) в (11b) и (11c) и объединив результаты с уравнениями (13) и (12), получим систему уравнений

$$C_{20} \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} + \frac{1}{r} C_{20} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} C_{20} \frac{\partial f}{\partial r} - KA_{66} \frac{\partial w}{\partial r} + C_{22} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} +$$

$$+ \left( \frac{1}{r} C_{22} + C_{23} - \frac{1}{r} C_{23} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r} - \left( \frac{1}{r^2} C_{22} + KA_{66} - \frac{1}{r^2} C_{23} \right) \psi = I_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (14)$$

$$\frac{1}{R} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) + (KA_{66} + k_2) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) -$$

$$- k_1 w + KA_{66} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \psi \right) + q = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (15)$$

Уравнение совместности деформаций представим в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r^0}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_\theta^0}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta^0}{\partial r^2} = \frac{1}{R} \Delta w + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}. \quad (16)$$

Подставив (6), (7) и (12) в (10), а результат — в уравнение совместности, придем к уравнению

$$- C_{10} \frac{\partial^4 f}{\partial r^4} - 2C_{10} \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} + \frac{1}{r^2} C_{10} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} C_{10} \frac{\partial f}{\partial r} - C_{13} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} +$$

$$+ \left( \frac{1}{r} C_{12} - C_{12} - \frac{2}{r} C_{13} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} (C_{13} - 2C_{12}) \frac{\partial \psi}{\partial r} - \left( \frac{1}{R} \Delta w + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) = 0. \quad (17)$$

Соотношения (14), (15) и (17) — основные уравнения для анализа нелинейного динамического отклика и свободных колебаний ПСО при заданных начальных и граничных условиях.

### 3. Аналитическое решение

Рассмотрим симметричную ПСО, край которой зашпемлен и свободно перемещается. Граничные условия зададим как [46]

$$r = 0, \quad \psi = 0, w = W, \quad r = r_0, \quad \psi = 0, w = 0, N_r = 0. \quad (18)$$

Предположим, что приближенное решение  $(w, \psi, f)$  удовлетворяет условиям

$$w = W \frac{(r_0^2 - r^2)^2}{r_0^4}, \quad \psi = \Phi \frac{r(r_0^2 - r^2)}{r_0^3}, \quad f = F \frac{r(r_0 - r)}{r_0^2}, \quad (19)$$

где  $F = F_1 W^2 + F_2 W + F_3 \Phi$ . Параметры  $F_1, F_2, F_3$  определим, подставив (19) в (17):

$$F_1 = -\frac{48r^7}{r_0^7 C_{10}} + \frac{64r^5}{r_0^5 C_{10}} - \frac{16r^3}{r_0^3 C_{10}}, \quad F_2 = -\frac{16r^5}{r_0^3 RC_{10}} + \frac{8r^3}{r_0 RC_{10}},$$

$$F_3 = \frac{(12C_{12} - 3C_{13})r^4}{r_0^2 C_{10}} + \frac{(-6C_{12} + 18C_{13})r^3}{r_0^2 C_{10}} + \frac{(C_{13} - 12C_{12})r^2}{C_{10}}.$$

Подстановка приближенного решения (19) в (14) и (15) и использование метода Бубнова—Галеркина приводит к следующим результатам:

$$n_1 W^2 + n_2 W + n_3 \Phi = \left( I_2 - \frac{I_1^2}{I_0} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (20)$$

$$m_1 W^3 + m_2 W^2 + (m_3 \Phi + m_4) W + m_5 \Phi + \frac{21}{16} q = I_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad (21)$$

где  $n_i$  и  $m_j$  ( $i = \overline{1,3}, j = \overline{1,5}$ ) запишем как

$$n_1 = \frac{15}{4} \frac{C_{20}}{r_0^3 C_{10}}, \quad n_2 = \frac{(8KA_{66} + 415)C_{10}R - C_{20}}{r_0},$$

$$n_3 = -KA_{66} + \frac{-4139C_{12}C_{20} + 823C_{13}C_{20}}{16C_{10}r_0} +$$

$$+ \frac{12,495C_{12}C_{20} - 1785C_{13}C_{20} - 1140C_{10}C_{22} + 600C_{10}C_{23}}{80C_{10}r_0^2},$$

$$m_1 = -\frac{1611}{1144} \frac{1}{r_0^4 C_{10}}, \quad m_2 = -\frac{93}{352} \frac{1}{r_0^2 RC_{10}},$$

$$m_3 = \frac{63}{128} \frac{(-2989C_{12} + 134C_{13})}{231r_0^2 C_{10}} + \frac{1143(C_{12} - 3C_{13})}{128r_0^3 C_{10}},$$

$$m_4 = -k_1 - \frac{45}{128R^2 C_{10}} + 15 \frac{-C_{10}KA_{66} - C_{10}k_2}{2r_0^2 C_{10}},$$

$$m_5 = \frac{315}{128} \frac{\frac{29}{30}C_{12} - \frac{17}{168}C_{13}}{RC_{10}} + \frac{2100C_{10}RKA_{66} + 315(-149C_{12} + 447C_{13})}{1120r_0 C_{10}R}.$$

Для сэндвич-ПСО из ПК-АПГ без нагрузки ( $q = 0$ ) система уравнений (20), (21) принимает вид

$$I_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = l_1 W^3 + l_2 W^2 + l_3 W, \tag{22}$$

где

$$l_1 = m_1 - \frac{n_1 m_3}{n_3}, l_2 = m_2 - \frac{n_2 m_3}{n_3} - \frac{n_1 m_5}{n_3}, l_3 = m_4 - \frac{n_2 m_5}{n_3}.$$

Собственные частоты сэндвич-ПСО из ПК-АПГ находим из уравнения (22)

$$\omega_{mn} = \sqrt{-l_3 / I_0}. \tag{23}$$

#### 4. Анализ численных результатов

Свойства алюминия и ПГ следующие: алюминий —  $E = 68,3$  ГПа,  $\nu = 0,34$  и  $\rho = 2689,8$  кг/м<sup>3</sup>; ПГ —  $E = 1010$  ГПа,  $\nu = 0,186$ ,  $\rho = 1062,5$  кг/м<sup>3</sup>,  $a = 2,5$  мкм,  $b = 1,5$  мкм,  $h = 1,5$  нм.

**4.1. Сравнительное изучение.** В табл. 1 приведены результаты для основной частоты изотропной ПСО при  $E = 70$  ГПа,  $\rho = 2702$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0,3$ ,  $R = 3$  м,  $R/h = 100$ , полученные в настоящей работе и в [47].

Табл. 1

Сравнение собственной частоты  $\omega$  (рад/с) изотропных ПСО

$(k_1, k_2)$ , (МПа/м, МПа·м)	$R/r_0$	[46]	Настоящая работа
$k_1 = k_2 = 0$	3	911,8	956,03
	5	776,6	784,95
$k_1 = 50$ $k_2 = 0,1$	3	1084,5	1216,3
	5	900,0	945,77

Табл. 2

Влияние коэффициентов  $(k_1, k_2)$ , отношения  $R/h$  и распределения пористости на собственную частоту  $\omega_{mn}$  (рад/с) для модели I при  $h_c/h = 0,8$ ,  $r_0/R = 0,3$ ,  $e_0 = 0,3$ ,  $\Lambda_{GPL} = 1\%$

$(k_1, k_2)$ , (МПа/м, МПа·м)	$R/h$	Тип 1	Тип 2	Тип 3
(0,0)	60	6726,6	6504,3	6647,0
	70	5379,7	5215,6	5324,4
	80	4473,0	4348,4	4432,9
(20,2)	60	8051,9	7867,2	7989,2
	70	6598,9	6465,9	6557,3
	80	5601,8	5502,8	5572,8
(40,4)	60	9188,0	9026,6	9136,2
	70	7625,7	7510,8	7592,5
	80	6538,5	6453,9	6516,3

Авторы [47] использовали классическую теорию оболочек, не учитывающую деформацию поперечного сдвига, а в настоящей работе — ТСДПП для пологих сферических оболочек.

**4.2. Собственная частота.** Данные табл. 2 иллюстрируют влияние коэффициентов  $(k_1, k_2)$ , отношения  $R/h$  и распределения пористости на собственные частоты  $\omega_{mn}$  сэндвич-ПСО. Как видно, значения  $\omega_{mn}$  возрастают с увеличением жесткости упругих оснований. В частности,  $(k_1, k_2) = (0,0)$  соответствует оболочке без упругого основания с собственной частотой  $\omega_{mn} = 6726,6$  рад/с (тип 1,  $R/h = 60$ ). В случае упругого основания Пастернака ее собственная частота увеличивалась с 8051,9 до

Табл. 3

Влияние массового содержания  $\Lambda_{GPL}$  и отношения  $r_0/R$  на собственную частоту  $\omega_{mn}$  (рад/с) ПСО моделей I и II при  $R/h = 80$ ,  $e_0 = 0,3$ , тип I,  $h_c/h = 0,8$ ,  $k_1 = k_2 = 0$

$r_0/R$	$\Lambda_{GPL} = 0,3\%$	$\Lambda_{GPL} = 0,5\%$	$\Lambda_{GPL} = 1,0\%$
Модель I			
0,3	4470,3	4471,1	4473,0
0,4	3891,9	3892,6	3894,4
0,5	3717,5	3718,2	3720,0
Модель II			
0,3	4590,5	4590,9	4591,7
0,4	4032,3	4032,8	4033,4
0,5	3865,3	3865,7	3866,2

Табл. 4

Влияние отношения  $h_c/h$  и коэффициента пористости  $e_0$  на собственную частоту  $\omega_{mn}$  (рад/с) сэндвич-ПСО модели I при  $R/h = 80$ ,  $r_0/R = 0,3$ ,  $\Lambda_{GPL} = 1\%$ , тип 1,  $k_1 = k_2 = 0$

$h_c/h$	$e_0 = 0$	$e_0 = 0,3$	$e_0 = 0,5$
0,4	4565,0	4536,1	4528,0
0,6	4566,4	4511,3	4489,6
0,8	4568,7	4473,0	4424,6

9188,0 рад/с. Напротив, при увеличении  $R/h$  с 60 до 80 собственная частота резко уменьшилась с 6726,6 to 4473 рад/с.

В данном случае рассмотрели три типа распределения пористости, определяемые формулой (3). В случае типа 1 (неоднородное симметричное распределение) при  $R/h = 60$  наблюдали наибольшие значения  $\omega_{mn}$  (7626,6 рад/с при  $k_1 = k_2 = 0$ ; 8051,9 рад/с при  $k_1 = 20$  МПа/м,  $k_2 = 2$  МПа·м; 9188 рад/с при  $k_1 = 40$  МПа/м,  $k_2 = 4$  МПа·м).

В табл. 3 приведены значения собственной частоты сэндвич-ПСО из ПК-АПГ, полученные для моделей I и II. Видно, что при тех же параметрах собственная частота оболочки модели II больше, чем модели I, на ~2,5—3,5%. Также видно, что собственная частота уменьшается с увеличением отношения  $r_0/R$ , т.е. с увеличением длины оболочки ее жесткость уменьшается.

В табл. 4 приведены значения собственной частоты ПСО при разных значениях  $h_c/h$  и  $e_0$ . Видно, что собственная частота немного уменьшается с увеличением коэффициента пористости  $e_0$ . Собственная частота  $\omega_{mn}$  оболочки без пористости ( $e_0 = 0$ ) достигает пикового значения 4569,7 рад/с.

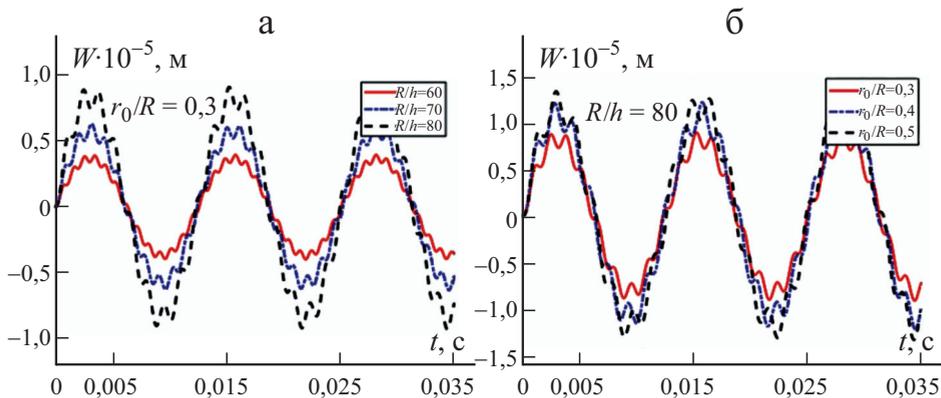


Рис. 2. Влияние отношений  $R/h$  (а) и  $r_0/R$  (б) на нелинейный динамический отклик  $W-t$  оболочек из ПК-АПГ модели I, тип 3 при  $e_0 = 0,3$ ,  $k_1 = k_2 = 0$ ,  $q = 300 \sin(500t)$ .

Это означает, что наличие пор уменьшает жесткость и несущую способность композитных конструкций.

**4.3. Динамический отклик.** Данные рис. 2 иллюстрируют влияние параметров  $R/h$  и  $r_0/R$  на зависимости прогиб—время  $W—t$  для сандвич-ПСО из ПК-АПГ. Видно, что амплитуда прогиба  $W$  сандвич-ПСО существенно изменяется при изменении значений  $R/h$  и  $r_0/R$ . На рис. 2—*a* наибольшая амплитуда прогиба  $W$  оболочки равна  $\approx 5 \cdot 10^{-6}$  м при  $R/h = 80$ ,  $t = 0,005$  с, а наименьшая —  $\approx 2,5 \cdot 10^{-6}$  м при  $R/h = 60$ ,  $t = 0,005$  с. На рис. 2—*б* наибольшая амплитуда прогиба оболочки  $W \approx 10 \cdot 10^{-6}$  м при  $r_0/R = 0,5$ ,  $t = 0,005$  с, наименьшая —  $W \approx 5 \cdot 10^{-6}$  м при  $r_0/R = 0,3$ ,  $t = 0,005$  с. На обоих рисунках несущая способность пологих сферических сандвич-оболочек уменьшается при увеличении отношения  $R/h$  или  $r_0/R$ , т.е. когда оболочка становится тоньше или длиннее, ее несущая способность снижается.

Данные рис. 3—*a* иллюстрируют влияние отношения толщин слоя сердцевины и оболочки  $h_c/h$  на нелинейный динамический отклик  $W—t$  ПСО. Видно, что с повышением значений  $h_c/h$  от 0,4 до 0,8 амплитуда прогиба  $W$  возрастает только с  $\approx 7,75 \cdot 10^{-6}$  до  $\approx 8,5 \cdot 10^{-6}$  м при  $t = 0,015$ .

Влияние пористости  $e_0$  на зависимость прогиб—время  $W—t$  сандвич-ПСО иллюстрируют данные рис. 3—*б*. Видно, что амплитуда прогиба  $W$  увеличивается с  $\approx 6 \cdot 10^{-6}$  до  $\approx 10 \cdot 10^{-6}$  м при  $t = 0,015$  с, когда коэффициент пористости  $e_0$  возрастает от 0 до 0,5.

На рис. 4 проведено сравнение зависимостей  $W—t$  сандвич-оболочек из ПК-АПГ моделей I и II с пористостью 1, 2 и 3 типов. Видно, что в случае однородного распределения пористости (тип 3) зависимость  $W—t$  расположена выше, чем при неоднородном симметричном распределении пористости (тип 1), и ниже, чем при неоднородном асимметричном (тип 2).

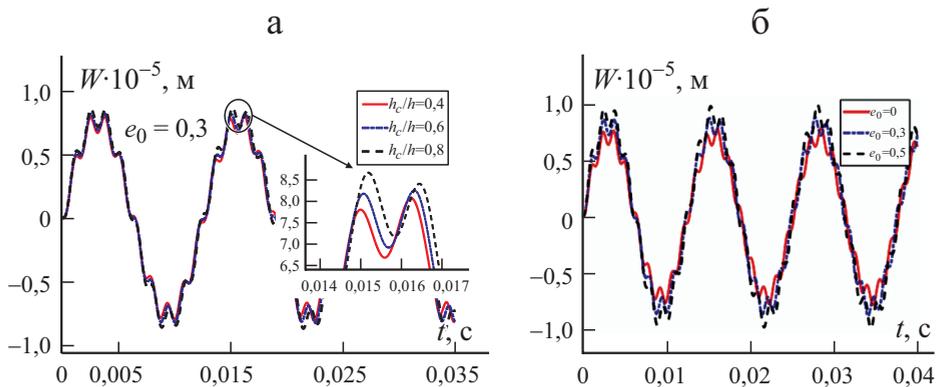


Рис. 3. Влияние отношения  $h_c/h$  (а) и коэффициента пористости  $e_0$  (б) на нелинейный динамический отклик  $W—t$  оболочек модели I, тип 1 при  $r_0/R = 0,3$ ,  $R/h = 80$ ,  $k_1 = k_2 = 0$ ,  $q = 300 \sin(500t)$ .

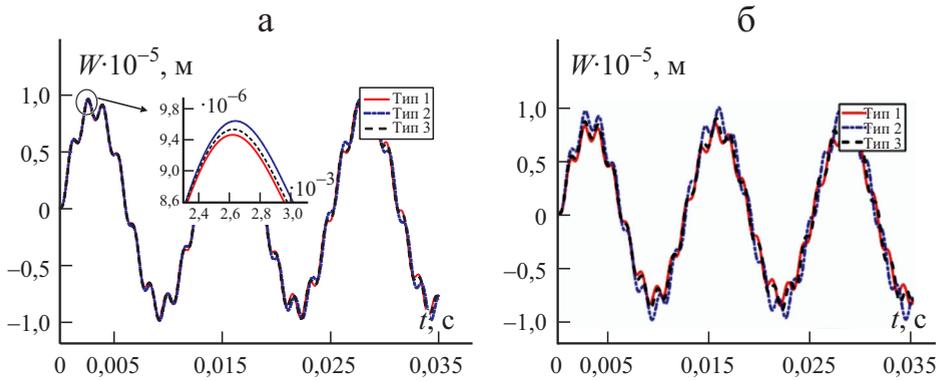


Рис. 4. Сравнение зависимостей  $W-t$  оболочек из ПК-АПГ моделей I (а) и II (б) при  $e_0 = 0,3, r_0/R = 0,3, R/h = 80, k_1 = k_2 = 0, q = 300 \sin(500t)$ .

Видно (см. рис. 4—а), что наименьшее значение амплитуды  $W$  оболочки  $\approx 9,4 \cdot 10^{-6}$  м (тип 1),  $\approx 9,6 \cdot 10^{-6}$  м (тип 2) и  $\approx 9,5 \cdot 10^{-6}$  м (тип 3) при  $t = 2,6 \cdot 10^{-3}$  с.

Влияние массового содержания ПГ на зависимость прогиба от времени  $W-t$  сандвич-ПСО из ПК-АПГ отражают данные на рис. 5. Видно, что при  $\Lambda_{GPL} = 0,3\%$  и  $t = 0,0153$  с величина амплитуды наибольшая ( $\approx 9,01 \cdot 10^{-6}$  м), а при  $\Lambda_{GPL} = 1\%$  и  $t = 0,0153$  с — немного меньше ( $\approx 8,99 \cdot 10^{-6}$  м). Это означает, что армирование ПГ повышает несущую способность сандвич-ПСО.

Зависимость нелинейного динамического отклика оболочек от жесткости упругих оснований представлена на рис. 6. Зависимость  $W-t$  для сандвич-ПСО, покоящейся на упругом основании Пастернака ( $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ ),

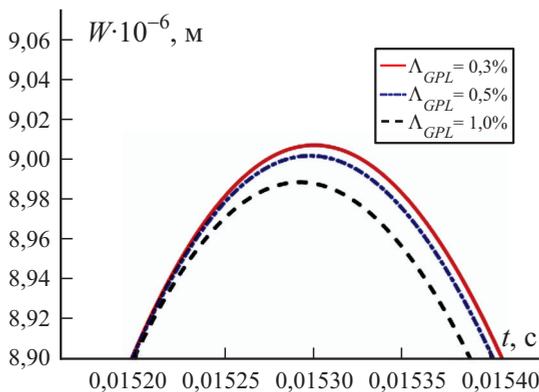


Рис. 5. Влияние массового содержания ПГ  $\Lambda_{GPL}$  на нелинейный динамический отклик  $W-t$  оболочек модели II при  $e_0 = 0,3, r_0/R = 0,3, R/h = 80, k_1 = k_2 = 0, q = 300 \sin(500t)$ .

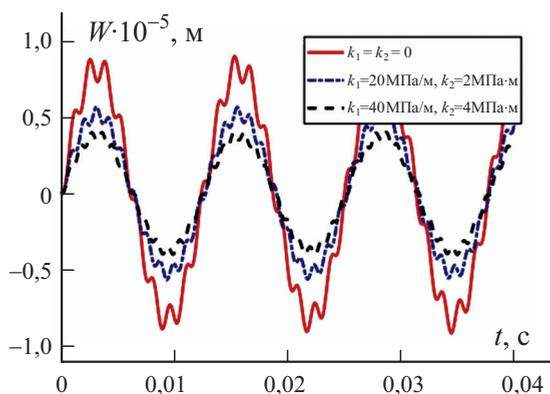


Рис. 6. Влияние жесткости упругих оснований  $k_1, k_2$  на нелинейный динамический отклик  $W-t$  оболочек при  $(k_1, k_2) = (0, 0)$  (—),  $(20, 2)$  (- · -),  $(40, 4)$  (- - -) (МПа/м, МПа·м). Модель I, тип 3,  $e_0 = 0,3, r_0/R = 0,3, R/h = 80, k_1 = k_2 = 0, q = 300 \sin(500t)$ .

расположена ниже, чем оболочки без упругого основания ( $k_1 = k_2 = 0$ ). Амплитуда прогиба  $W$  оболочки обратно пропорциональна жесткости упругого основания. При  $t = 0,005$  с амплитуда  $W$  оболочки без упругого основания ( $k_1 = k_2 = 0$ ) наибольшая —  $\approx 5 \cdot 10^{-6}$  м, а покоящейся на упругом основании с  $k_1 = 20$  МПа/м и  $k_2 = 2$  МПа·м — примерно вдвое меньше.

Данные рис. 7 иллюстрируют резонанс полой сферической сандвич-оболочки из ПК-АПГ в диапазоне частот  $\omega$  внешней нагрузки  $q$  от 4000 до 4300 рад/с. Эти частоты близки к основной частоте оболочки  $\omega_{mn} = 4432,9$  рад/с.

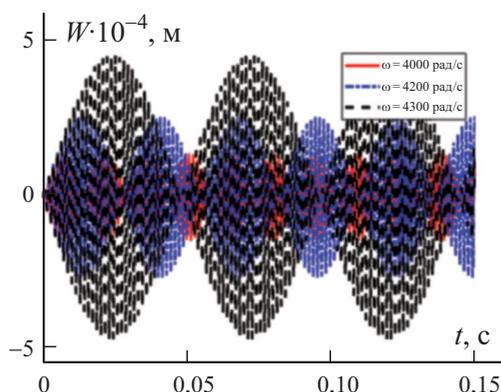


Рис. 7. Влияние частоты  $\omega$  на нелинейный динамический отклик  $W-t$  оболочек модели I, тип 3 при  $e_0 = 0,3, r_0/R = 0,3, R/h = 80, k_1 = k_2 = 0, q = 300 \sin(500t)$ .

## Заключение

Предложены две модели трехслойных пологих сферических сэндвич-оболочек для получения аналитических решений их собственной частоты и динамического отклика с использованием аналитического подхода.

Деформации оболочек определили, используя геометрическое нелинейное предположение фон Кармана и ТСДПП. Исследовали влияние распределения и коэффициента пористости, массового содержания пластинок графена, жесткости упругого основания и геометрических параметров на динамические характеристики и свободные колебания сэндвич-ПСО.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

— Несущая способность пологой сферической оболочки из лицевых слоев ПК-АПГ и изотропного сердечника (модель II) больше, чем оболочки из изотропных лицевых слоев и сердцевины из ПК-АПГ (модель I).

— Пористость снижает несущую способность оболочек; при этом несущая способность сэндвич-оболочки с неоднородным симметричным распределением пористости больше, чем с однородным.

— Увеличение жесткости упругих оснований повышает собственную частоту и уменьшает амплитуду колебаний пологих сферических сэндвич-оболочек из ПК-АПГ.

— Увеличение отношения  $R/h$  или  $r_0/R$  уменьшает собственную частоту и увеличивает амплитуду прогиба пологих сферических сэндвич-оболочек из ПК-АПГ.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Вьетнамского национального фонда развития науки и технологий в рамках гранта № 107.02-2018.314. Работа также была поддержана стипендиальной программой для отечественных магистров/докторов наук Фондом инноваций Vingroup (Фам Динь Нгуен выражает признательность за эту поддержку).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Safaei B., Dastjerdi R. M., Qin Z., Behdinin K. and Chu F.* Determination of thermoelastic stress wave propagation in nanocomposite sandwich plates reinforced by clusters of carbon nanotubes // *J. Sandwich Struct. Mater.* — 2019. Online: 8 May. — P. 1—22. <https://doi.org/10.1177%2F1099636219848282>
2. *Motezaker M., Jamali M., and Kolahchi R.* Application of differential cubature method for nonlocal vibration, buckling and bending response of annular nanoplates integrated by piezoelectric layers based on surface-higher order nonlocal-piezoelectricity theory // *J. Comput. Appl. Math.* — 2020. — Vol. 369. — P. 112625.
3. *Motezaker M. and Kolahchi R.* Seismic response of concrete columns with nanofiber reinforced polymer layer // *Comput. Concrete.* — 2017. — Vol. 20, No. 3. — P. 371—378.
4. *Motezaker M. and Kolahchi R.* Seismic response of SiO<sub>2</sub> nanoparticles-reinforced concrete pipes based on DQ and newmark methods // *Comput. Concrete.* — 2017. — Vol. 19, No. 6. — P. 751—759.
5. *Motezaker M. and Eyvazian A.* Post-buckling analysis of Mindlin Cut out-plate reinforced by FG-CNTs // *Steel Compos. Struct.* — 2020. — Vol. 34, No. 2. — P. 289—297.

6. *Motezaker M. and Eyvazian A.* Buckling load optimization of beam reinforced by nanoparticles // *Struct. Eng. Mech.* — 2020. — Vol. 73, No. 5. — P. 481—486.
7. *Chien T. M. and Kim S. E.* Nonlinear thermo-mechanical behaviors of thin functionally graded sandwich shells with double curvature // *Compos. Struct.* — 2018. — Vol. 195. — P. 335—348.
8. *Chien T. M. and Kim S. E.* Nonlinear stability of moderately thick functionally graded sandwich shells with double curvature in thermal environment // *Aerospace Sci. Technol.* — 2019. — Vol. 84. — P. 672—685
9. *Vinyas M. and Kattimani S. C.* Static analysis of stepped functionally graded magneto-electro-elastic plates in thermal environment: A finite element study // *Compos. Struct.* — 2017. — Vol. 178. — P. 63—86.
10. *Vinyas M., Subhaschandra K., and Piyush J. S.* Influence of coupled fields on free vibration and static behaviour of functionally graded magneto-electro-thermo-elastic plate // *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* — 2018. — Vol. 29, No. 7. — P. 1430—1455.
11. *Vinyas M. and Kattimani S. C.* Static studies of stepped functionally graded magneto-electro-elastic beam subjected to different thermal loads // *Compos. Struct.* — 2017. — Vol. 163. — P. 216—237.
12. *Vinyas M., Harursampath D., and Trung N. T.* Influence of active constrained layer damping on the coupled vibration response of functionally graded magneto-electro-elastic plates with skewed edges // *Defence Technol.* — 2020. — Vol. 16, No. 5. — P. 1019—1038.
13. *Vinyas M., Harursampath D., and Kattimani S. C.* On vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced magneto-electro-elastic plates with different electro-magnetic conditions using higher order finite element methods // *Defence Technol.* — 2021. — Vol. 17, No. 1. — P. 287—303.
14. *Chan D. Q., Quan T. Q., Kim S. E., and Duc N. D.* Nonlinear dynamic response and vibration of shear deformable piezoelectric functionally graded truncated conical panel in thermal environments // *Eur. J. Mech. A/Solids.* — 2019.— Vol. 77. — P. 103795.
15. *Qaderi S., Ebrahimi F., and Vinyas M.* Dynamic analysis of multi-layered composite beams reinforced with graphene platelets resting on two-parameter viscoelastic foundation // *Eur. Phys. J. Plus.* — 2019. — Vol. 134. — P. 339.
16. *Dasjerdi R. M. and Behdinin K.* Temperature effect on free vibration response of a smart multifunctional sandwich plate // *J. Sandwich Struct. Mater.* — 2020. — Online: 9 March. <https://doi.org/10.1177%2F1099636220908707>
17. *Qaderi S., Ebrahimi F., and Vinyas M.* Free vibration analysis of graphene platelets-reinforced composites plates in thermal environment based on higher-order shear deformation plate theory // *Int. J. Aeronautical Space Sci.* — 2019. — Vol. 20, No. 4. — P. 902—912.
18. *Wu D., Liu A., Huang Y., Huang Y., Pi Y., and Gao W.* Dynamic analysis of functionally graded porous structures through finite element analysis // *Eng. Struct.* — 2018. — Vol. 165. — P. 287—301.
19. *Chen D., Kitipornchai S, and Yang J.* Dynamic response and energy absorption of functionally graded porous structures // *Mater. Des.* — 2018. — Vol. 140. — P. 473—487.
20. *Chen D., Yang J., and Kitipornchai S.* Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams // *Int. J. Mech. Sci.* — 2016. — Nos. 108—109. — P. 14—22.
21. *Kitipornchai S., Chen D., and Yang J.* Free vibration and elastic buckling of functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets // *Mater. Des.* — 2017. — Vol. 116. — P. 656—665.
22. *Chen D., Yang J., and Kitipornchai S.* Nonlinear vibration and postbuckling of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite beams // *Compos. Sci. Technol.* — 2017. — Vol. 142. — P. 235—245.

23. Liu Y., Su S., Huang H., and Liang Y. Thermal-mechanical coupling buckling analysis of porous functionally graded sandwich beams based on physical neutral plane // Composites: Part B. — 2019. — Vol. 168. — P. 236—242.
24. Divevayev B., Butyter I., and Pelekh Y. Dynamic properties of symmetric and asymmetric Beams made of Functionally Graded materials in bending // Mech. Compos. Mater. — 2018. — Vol. 54, No. 1. — P. 159—170.
25. Yang J., Chen D., and Kitipornchai S. Buckling and free vibration analyses of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite plates based on Chebyshev—Ritz method // Compos. Struct. — 2018. — Vol. 193. — P. 281—294.
26. Saidi A. R., Bahaadini R., and Mozafari K. M. On vibration and stability analysis of porous plates reinforced by graphene platelets under aerodynamical loading // Composites: Part B. — 2019. — Vol. 164. — P. 778—799.
27. Cong P. H., Chien T. M., Khoa N. D., and Duc N. D. Nonlinear thermomechanical buckling and post-buckling response of porous FGM plates using Reddy's HSDT // Aersp. Sci. Technol. — 2018. — Vol. 77. — P. 419—428.
28. Xue Y., Jin G., Ma X., Chen H., Ye T., Chen M., and Zhang Y. Free vibration analysis of porous plates with porosity distributions in the thickness and in-plane directions using isogeometric approach // Int. J. Mech. Sci. — 2019. — Vol. 152. — P. 346—362.
29. Chen D., Yang J., and Kitipornchai S. Buckling and bending analyses of a novel functionally graded porous plate using Chebyshev—Ritz method // Arch. Civ. Mech. Eng. — 2019. — Vol. 19, No. 1. — P. 157—170.
30. Duc N. D., Kim S. E., Khoa N. D., and Chan D. Q. Nonlinear buckling and post-buckling analysis of shear deformable stiffened truncated conical sandwich shells with functionally graded face sheets and a functionally graded porous core // J. Sandwich Struct. Mater. — 2020. — Online: 18 March. <https://doi.org/10.1177%2F1099636220906821>
31. Chien T. M. and Kim S. E. A three variable refined shear deformation theory for porous functionally graded doubly curved shell analysis // Aerospace Sci. Technol. — 2019. — Vol. 94. — P. 105356.
32. Chien T. M., Duc N. D., and Kim S. E. Effects of porosity and thermo-mechanical loading on free vibration and nonlinear dynamic response of functionally graded sandwich shells with double curvature // Aerospace Sci. Technol. — 2019. — Vol. 87. — P. 119—132.
33. Vinyas M. On frequency response of porous functionally graded magneto-electro-elastic circular and annular plates with different electro-magnetic conditions using HSDT // Compos. Struct. — 2020. — Vol. 240. — P. 112044.
34. Safaei B., Rasool M. D., Behdinin K., Qin Z., and Chu F. Thermoelastic behavior of sandwich plates with porous polymeric core and CNT clusters/polymer nanocomposite layers // Compos. Struct. — 2019. — Vol. 226. — P. 111209.
35. Safaei B., Dastjerdi R. M., Behdinin K., and Chu F. Critical buckling temperature and force in porous sandwich plates with CNT-reinforced nanocomposite layers // Aerospace Sci. Technol. — 2019. — Vol. 91. — P. 175—185.
36. Nam H. V., Trung N. T., and Hoa L. K. Buckling and postbuckling of porous cylindrical shells with functionally graded composite coating under torsion in thermal environment // Thin-Walled Struct. — 2019. — Vol. 144. — P. 106253—.
37. Gao K., Gao W., Chen D., and Yang J. Nonlinear free vibration of functionally graded graphene platelets reinforced porous nanocomposite plates resting on elastic foundation // Compos. Struct. — 2018. — Vol. 204. — P. 831—846.
38. Li Q., Wu D., Chen X., Liu L., Yu Y., and Gao W. Nonlinear vibration and dynamic buckling analyses of sandwich functionally graded porous plate with graphene platelet reinforcement resting on Winkler—Pasternak elastic foundation // Int. J. Mech. Sci. — 2018. — Vol. 148. — P. 596610.

39. *Dong Y. H., Li Y. H., Chen D., and Yang J.* Vibration characteristics of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite cylindrical shells with spinning motion // *Composites: Part B*. — 2018. — Vol. 145. — P. 1—13.
40. *Dashtjerdi R. M. and Behdinin K.* Stability analysis of multifunctional smart sandwich plates with graphene nanocomposite and porous layers // *Inter. J. Mech. Sci.* — 2020. — Vol. 167. — P. 105283.
41. *Setoodeh A. R., Shojaee M., and Malekzadeh P.* Vibrational behavior of doubly curved smart sandwich shells with FG-CNTRC face sheets and FG porous core // *Composites: Part B*. — 2019. — Vol. 165. — P. 798—822.
42. *Karimiasl M., Ebrahimi F., and Mahesh V.* Nonlinear forced vibration of smart multiscale sandwich composite doubly curved porous shell // *Thin-Walled Struct.* — 2019. — Vol. 143. — P. 106152.
43. *Li H., Pang F., Ren Y., Miao X., and Ye K.* Free vibration characteristics of functionally graded porous spherical shell with general boundary conditions by using first-order shear deformation theory // *Thin-Walled Struct.* — 2019. — Vol. 144. — P. 106331.
44. *Villoria R. G. and Miravete A.* Mechanical model to evaluate the effect of the dispersion in nanocomposites // *Acta Materialia*. — 2017. — Vol. 55, No. 9. — P. 3025—3031.
45. *Xu C. S.* Buckling and post-buckling of symmetrically laminated moderately thick spherical caps // *Inter. J. Solids Struct.* — 1991. — Vol. 28, No. 9. — P. 1171—1184.
46. *Li Q. S., Liu J., and Tang J.* Buckling of shallow spherical shells including the effects of transverse shear deformation // *Int. J. Mech. Sci.* — 2003. — Vol. 45, No. 9. — P. 1519—1529.
47. *Duc N. D., Quang V. D., and Anh V. T. T.* The nonlinear dynamic and vibration of the S-FGM shallow spherical shells resting on an elastic foundations including temperature effects // *Int. J. Mech. Sci.* — 2017. — Vol. 123. — P. 54—63.

Поступила в редакцию 10.02.2020  
Окончательный вариант поступил 08.04. 2021  
Received Feb. 10, 2020 (Apr. 8, 2021)

---