

А. О. Сердюк^а, Д. О. Сердюк^{а}, Г. В. Федотенков^{а,б}*

*^аМосковский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Россия*

^бНИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

A. O. Serdyuk, D. O. Serdyuk, G. V. Fedotenkov*

STRESS-STRAIN STATE OF A COMPOSITE PLATE UNDER THE ACTION OF A TRANSIENT MOVABLE LOAD

Keywords: transient dynamics, anisotropic material, Green's function, composite plate

The transient stress-strain state and normal displacements in a thin elastic unrestricted composite plate of constant thickness under an unsteady pressure, in particular, with a movable “load spot,” is investigated for the problem of a tangential impact on the plate. The approach to solving the problem is based on Green’s function method and the superposition principle, according to which the desired solution is related to the load by means of an integral operator of convolution type in spatial variables and time. The kernel of this operator is Green’s function, which is a transient fundamental solution to the function of normal deflections of the plate from the action of a single concentrated normal force momentum applied to some point on its surface. To find the Green’s function, the integral Laplace transform in time and a two-dimensional integral Fourier transform in coordinates are used. The original integral Laplace transform was found analytically, but for the inverse two-dimensional integral Fourier transform, a numerical method for integrating rapidly oscillating functions was used. The fundamental solution obtained made it possible to represent the sought-for function of transient normal displacements in the form of a triple convolution of Green’s function

*Автор, с которым следует вести переписку: d.serduk55@gmail.com
Corresponding author: d.serduk55@gmail.com

with the function of transient pressure distributed over a rectangular area with a time-varying amplitude and impact boundaries. To calculate the convolutions integrals, the numerical method of rectangles is used. Employing the function of normal displacements, the transient stress-strain state of a composite unbounded Kirchhoff plate is found and investigated. In this case, reduced engineering constants are used, which are calculated from the generalized stiffness of the laminated material. As an example, the space-time dependences of the transient deflection are constructed and distributions of stresses and strains in the upper layers of a polymer composite plate with a symmetric reinforcement scheme with respect to the median plane under the influence of a time-varying pressure distributed over a movable rectangular load spot are obtained.

Ключевые слова: динамика нестационарная, материал анизотропный, функция Грина, пластина композитная

Проведено исследование нестационарного напряжённо-деформированного состояния и нормальных перемещений в тонкой упругой неограниченной композитной пластине постоянной толщины при нестационарном воздействии давления, в частности, с подвижным “пятном нагрузки”, которое можно рассматривать как модель задачи удара по касательной к пластине. Подход к решению основан на методе функции Грина и принципе суперпозиции, согласно которому искомое решение связано с нагрузкой посредством интегрального оператора типа свёртки по пространственным переменным и по времени. Ядром этого оператора является функция Грина, представляющая собой нестационарное фундаментальное решение для функции нормальных прогибов пластины от действия приложенного в некоторой точке её поверхности импульса единичной сосредоточенной нормальной силы. Для нахождения функции Грина применяются интегральное преобразование Лапласа по времени и двухмерное интегральное преобразование Фурье по координатам. Оригинал интегрального преобразования Лапласа найден аналитически, а для обращения двухмерного интегрального преобразования Фурье использован численный метод интегрирования быстро осциллирующих функций. Полученное фундаментальное решение позволило представить искомую функцию нестационарных нормальных перемещений в виде тройной свёртки функции Грина с функцией нестационарного распределённого по прямоугольной площадке давления с переменными во времени амплитудой и границами воздействия. Для вычисления интегралов свёрток использован численный метод прямоугольников. С помощью функции нормальных перемещений найдено и исследовано нестационарное напряжённо-деформированное состояние ком-

позитной неограниченной пластины Кирхгофа. При этом использованы приведённые технические постоянные, вычисленные через обобщённые жёсткости слоистого материала. В качестве примера построены пространственно-временные зависимости нестационарного прогиба, а также распределение напряжений и деформаций в верхних слоях полимерной композитной пластины с симметричной относительно срединной плоскости схемой армирования при воздействии изменяющегося во времени давления, распределённого по подвижному пятну нагрузки прямоугольной формы.

Введение

Полимерные композитные пластины представляют широкий класс конструктивных элементов аэрокосмической техники. Исследование напряжённо-деформированного состояния композитных пластин при статических и ударных нагрузках является неотъемлемым этапом проектирования новых перспективных элементов конструкций, что обуславливает актуальность разработки уточнённых аналитических, численных и экспериментальных методик и подходов. Новые аналитические модели деформирования и анализ динамических реакций пластин из волокнистых композитов при резонансных колебаниях представлены в работах [1, 2]. В работе [3] описана модель двухмерного изопараметрического конечного элемента, основанная на теории сдвигового деформирования третьего порядка, применительно к расчёту пластин из слоистых композитов. В [4] представлен подход к диагностике объёмного напряжённого состояния в композитных конструкциях с помощью пьезоэлектролюминесцентного оптоволоконного датчика.

Исследование поведения конструкций при нестационарных динамических воздействиях имеет дополнительные сложности по сравнению со статическими и стационарными задачами, связанные с существенной неоднородностью напряжённо-деформированного состояния по координатам и времени. В [5] построено аналитическое решение задачи о распространении нестационарных волн в изотропной неограниченной пластине Кирхгофа. Получено фундаментальное решение. Представлены пространственно-временные зависимости функции Грина для перемещения.

В работе [6] рассмотрены два подхода к построению нестационарной динамической задачи для кольцевой пластины Тимошенко переменной толщины. Первый основан на аппроксимации тела вращения набором кольцевых пластин Тимошенко постоянной толщины и решении нестационарной динамической задачи для полученной кольцевой пластины Тимошенко кусочно-переменной толщины с помощью разложений в ряды по собственным формам. В рамках второго подхода автором на основе

энергетического метода выведена система дифференциальных уравнений, которая решена численно.

В [7] аналитическими методами получены решения нестационарных задач для изотропных прямоугольных и круглых пластин типа Тимошенко при наиболее общих граничных условиях для широкого класса динамических нагрузок. Автор предложил оригинальный подход, который позволяет получать в замкнутой форме решения нестационарных задач динамики пластин и оболочек вращения ступенчато-переменной толщины с конечной сдвиговой жёсткостью. Приведено дифференциальное уравнение, все компоненты разложения которого определяются на основе интегрирования уравнений для линейного осциллятора и решения краевой задачи Штурма—Лиувилля.

Задача о воздействии на тонкую неограниченную ортотропную пластину локальной динамической нагрузки, распределённой по круговой области, рассмотрена в [8]. Построено фундаментальное решение, приведены численные результаты прогиба точки пластины, соответствующей центру площадки нагружения.

В работах [9—22] эффективно использован метод функций Грина применительно к решению различных нестационарных задач теории упругости и теории оболочек. В [9, 10, 13—16] исследованы нестационарные контактные задачи для тонких цилиндрических, сферических оболочек и упругого полупространства. Работы [11, 12, 17] посвящены исследованию нестационарных колебаний оболочек с упругим и акустическим заполнителями. Исследована нестационарная динамика анизотропных цилиндрических оболочек [18, 19]. Рассмотрен случай нестационарного воздействия жёсткого индентора на упругую полуплоскость [20, 21]. В [22] построены поверхностные нестационарные функции для упругого полупространства.

В [23—26] рассмотрены задачи о статическом и динамическом деформировании композитных, в частности трехслойных [23—25], пластин под воздействием разной нагрузки, а также колебания круглых композитных пластин на упругом основании [26]. В работе [27] исследованы собственные колебания композитной цилиндрической оболочки с упругим заполнителем.

Применение функций Грина к решению различных задач механики анизотропных тел и композитных оболочек в сочетании с оригинальными способами численного обращения интегрального преобразования Лапласа на основе методов граничных элементов продемонстрировано в [28—33].

Вопросы, связанные с исследованием нестационарного напряжённо-деформированного состояния пластин, обладающих анизотропией, на данный момент являются наименее изученными по сравнению с аналогич-

ными исследованиями для изотропных пластин. В данной работе разработан подход к исследованию напряжённно-деформированного состояния тонкой неограниченной композитной пластины постоянной толщины под воздействием давления, равномерно распределённого по прямоугольной подвижной площадке, с переменной во времени амплитудой.

Цель исследования — нахождение нестационарных функций напряжений, деформаций и перемещений, а также изучение закономерностей неоднородного напряжённно-деформированного состояния композитной пластины под действием нестационарной нагрузки, область приложения которой изменяется во времени.

Постановка задачи

Рассмотрим тонкую композитную пластину постоянной толщины h (рис. 1) с симметричной относительно срединной плоскости пластины укладкой однонаправленных волокнистых слоев [34]. При численном моделировании предположим, что плотность ρ по всему объёму композитной пластины постоянна. Движение пластины рассматриваем относительно декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$. Плоскость Ox_1x_2 совпадает со срединной плоскостью пластины. Армированный слой [34] композитной пластины характеризуется следующими упругими постоянными: E_1, E_2 — модули упругости первого рода, G_{12} — модуль упругости второго рода, μ_{12}, μ_{21} — коэффициенты Пуассона, где нижние индексы “1” и “2” соответствуют координатным осям x_1 и x_2 , при этом направление оси x_1 совпадает с направлением волокон, ось x_3 ортогональна плоскости армирования.

Для описания движения пластины из волокнистого композита принята модель пластины Кирхгофа [5], срединная плоскость которой Ox_1x_2 совпадает с единственной плоскостью симметрии материала. Упругие

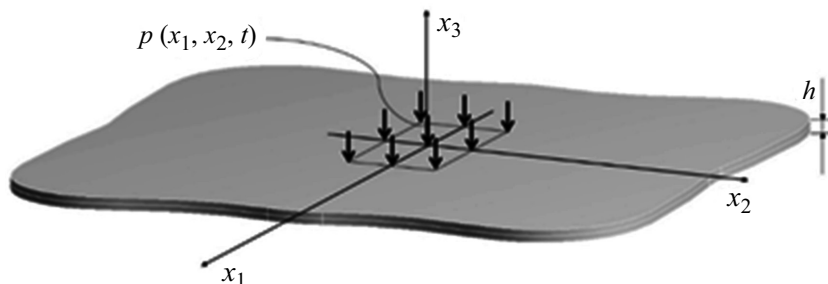


Рис. 1. Схема пластины.

свойства пластины характеризуются шестью независимыми упругими постоянными C^{1111} , C^{1122} , C^{1112} , C^{2222} , C^{2212} , C^{1212} — компонентами тензора упругих свойств материала в главных осях, для вычисления которых используется их связь с обобщёнными жёсткостями слоистого материала [34].

В начальный момент времени к невозмущённой пластине прикладывается нестационарное нормальное давление $p(x_1, x_2, t)$. Уравнение движения композитной пластины в перемещениях имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -D(w) + \frac{1}{\rho h} p(x_1, x_2, t), \quad (1)$$

$$D(w) = A_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + A_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + A_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + A_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} + A_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3}.$$

где

$$A_1 = \frac{Ic_{11}}{\rho h}, A_2 = \frac{Ic_{22}}{\rho h}, A_3 = \frac{2I(c_{12} + 2A_{66})}{\rho h}, A_4 = \frac{4Ic_{16}}{\rho h}, A_5 = \frac{4Ic_{26}}{\rho h},$$

$$c_{11} = C^{1111}, c_{12} = C^{1122}, c_{16} = C^{1112},$$

$$c_{22} = C^{2222}, c_{26} = C^{2212}, c_{66} = C^{1212}, I = h^3 / 12.$$

Уравнение (1) совместно с начальными условиями

$$w|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (2)$$

образует начальную задачу. В соотношениях (1), (2) t — время, w — нормальный прогиб, ρ — плотность материала.

Нестационарное напряжённо-деформированное состояние

Решение начальной задачи (1), (2) может быть построено с применением функции Грина $G(x_1, x_2, t)$ [21, 22]

$$w(x_1, x_2, t) = G(x_1, x_2, t) *** p(x_1, x_2, t), \quad (3)$$

где символ “***” означает операцию свёртки по пространственным координатам x_1, x_2 и времени t .

Построим функцию Грина для прогиба пластины $G(x_1, x_2, t)$ как решение задачи

$$\frac{\partial^2 G(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} = -R(G) + \frac{1}{\rho h} \delta(x_1, x_2) \delta(t),$$

$$R(G) = A_1 \frac{\partial^4 G}{\partial x_1^4} + A_2 \frac{\partial^4 G}{\partial x_2^4} + A_3 \frac{\partial^4 G}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + A_4 \frac{\partial^4 G}{\partial x_1^3 \partial x_2} + A_5 \frac{\partial^4 G}{\partial x_1 \partial x_2^3}, \quad (4)$$

$$G(x_1, x_2, t)|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial G(x_1, x_2, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0,$$

где $\delta(\bullet)$ — дельта-функция Дирака.

Для решения задачи (4) используем интегральные преобразования Лапласа по времени t и двухмерное преобразование Фурье по пространственным координатам x_1 и x_2 . С учётом свойств интегральных преобразований дельта-функции [5] получим алгебраическое уравнение относительно изображения функции Грина в пространстве преобразований Фурье и Лапласа. Обратное интегральное преобразование Лапласа построено аналитически с применением таблиц [35], а обратное интегральное преобразование Фурье выполнено численно с помощью метода интегрирования быстро осциллирующих функций [36]. Оригинал функции Грина имеет вид

$$G(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-Q}^Q \int_{-Q}^Q G^F(q_1, q_2, t) e^{i(q_1 x_1 + q_2 x_2)} dq_1 dq_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta}{2} \left\{ e^{i \frac{q_{1k+1} x_1 + q_{1k} x_1}{2}} \left[D_1 S(q_{1k}, x_2, t) + D_2 S(q_{1k+1}, x_2, t) \right] \right\}, \quad (5)$$

$$S(q_1, x_2, t) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta}{2} \left\{ e^{i \frac{q_{2k+1} x_2 + q_{2k} x_2}{2}} \left[D_1 G^F(q_1, q_{2k}, t) + D_2 G^F(q_1, q_{2k+1}, t) \right] \right\},$$

где G^F — изображение по Фурье функции Грина

$$G^F(q_1, q_2, t) = \frac{1}{\rho h} \frac{\sin(t\sqrt{P(q_1, q_2)})}{\sqrt{P(q_1, q_2)}},$$

$$P(q_1, q_2) = q_1^3 (A_1 q_1 + A_4 q_2) + q_2^3 (A_2 q_2 + A_5 q_1) + A_3 q_1^2 q_2^2.$$

В соотношениях (5)

$$\Delta = \frac{2Q}{N}, \quad m = \frac{\Delta}{2}, \quad D_{1,2} = \frac{\sin m}{m} \pm \frac{m \cos m - \sin m}{m^2} i,$$

$$q_{2_k} = -Q + k\Delta, \quad q_{2_{k+1}} = -Q + (k+1)\Delta, \quad k = 0 \dots N-1,$$

$$q_{1_k} = -Q + k\Delta, \quad q_{1_{k+1}} = -Q + (k+1)\Delta, \quad k = 0 \dots N-1,$$

верхний индекс “ F ” у функции означает её двухмерное преобразование Фурье по координатам x_1, x_2 ; q_1, q_2 — параметры этого преобразования; Q — “достаточно большое” положительное число.

При воздействии на пластину нестационарного распределённого по прямоугольной площадке давления с переменными во времени амплитудой и границами воздействия выражение для $p(x_1, x_2, t)$ из (3) примет вид

$$p(x_1, x_2, t) = P(t)H(t) \left[H(x_1 + f_1(t)) - H(x_1 - f_2(t)) \right] \times$$

$$\times \left[H(x_2 + g_1(t)) - H(x_2 - g_2(t)) \right], \quad (6)$$

$$f_1(t) = \frac{a}{2} + V_1 t, \quad f_2(t) = \frac{a}{2} - V_1 t, \quad g_1(t) = \frac{b}{2} + V_2 t, \quad g_2(t) = \frac{b}{2} - V_2 t,$$

где $H(\bullet)$ — функция Хэвисайда; $P(t)$ — закон изменения амплитуды давления; $f_i(t), g_i(t)$ ($i=1,2$) — законы перемещения границ области воздействия; a, b — размеры прямоугольной площадки давления; V_1, V_2 — скорости движения границ по осям x_1, x_2 соответственно.

Выбор нагрузки в виде (6) обусловлен практически важными задачами, в которых “пятно нагрузки” (область её приложения) изменяется во времени (например, в случае нестационарных контактных задач с подвижными границами).

Интегралы свёрток в (3) с учётом (6) примут вид

$$w(x_1, x_2, t) = G(x_1, x_2, t) *** p(x_1, x_2, t) =$$

$$= \int_0^t p(\tau) d\tau \int_{-f_2(t)}^{f_1(t)} d\xi \int_{-g_2(t)}^{g_1(t)} G(x_1 - \xi, x_2 - \zeta, t - \tau) d\zeta. \quad (7)$$

В результате применения метода прямоугольников для взятия интегралов (7) получим приближенное выражение для нормального прогиба пластины

$$w(x_1, x_2, t) \approx \frac{a}{p} \frac{b}{m} \frac{t}{n} \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^n G_{ijk}(x_1, x_2, t) P\left(\frac{t}{n} - k\right), \quad (8)$$

$$G_{ijk}(x_1, x_2, t) = G \left(x_1 - \frac{a}{p}i + \frac{a}{2} + f \left(\frac{t}{n}k \right), x_2 - \frac{b}{m}j + \frac{b}{2} + g \left(\frac{t}{n}k \right), t - \frac{t}{n}k \right). \quad (8)$$

Нестационарные функции для нормальных σ_{11} , σ_{22} и касательного τ_{12} напряжений в пластине

$$\sigma_{11} = \frac{12M_{11}}{h^3}x_3, \quad \sigma_{22} = \frac{12M_{22}}{h^3}x_3, \quad \tau_{12} = \frac{12M_{12}}{h^3}x_3, \quad -\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2} \quad (9)$$

связаны с прогибом соотношениями [37]

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x_1, x_2, t) &= -x_3 \left(c_{11} \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + 2c_{16} \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{12} \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} \right), \\ \sigma_{22}(x_1, x_2, t) &= -x_3 \left(c_{21} \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + 2c_{26} \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{22} \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} \right), \quad (10) \\ \tau_{12}(x_1, x_2, t) &= -x_3 \left(c_{16} \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + 2c_{66} \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{26} \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} \right). \end{aligned}$$

При выводе формул (10) использованы физические и кинематические соотношения для анизотропной пластины Кирхгофа, в частности, для компонент тензора моментов [1]

$$M_{11} = I(c_{11}\kappa_{11} + 2c_{16}\kappa_{12} + c_{12}\kappa_{22}), \quad M_{22} = I(c_{21}\kappa_{11} + 2c_{26}\kappa_{12} + c_{22}\kappa_{22}),$$

$$M_{12} = M_{21} = I(c_{16}\kappa_{11} + 2c_{66}\kappa_{12} + c_{26}\kappa_{22})$$

и тензора изменения кривизны

$$\kappa_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad \kappa_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \quad \kappa_{12} = \kappa_{21} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Обратный закон Гука с учетом рассматриваемого случая анизотропии имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(x_1, x_2, t) &= d_{11}\sigma_{11}(x_1, x_2, t) + d_{12}\sigma_{22}(x_1, x_2, t) + d_{16}\tau_{12}(x_1, x_2, t), \\ \varepsilon_{22}(x_1, x_2, t) &= d_{12}\sigma_{11}(x_1, x_2, t) + d_{22}\sigma_{22}(x_1, x_2, t) + d_{26}\tau_{12}(x_1, x_2, t), \quad (11) \\ \gamma_{12}(x_1, x_2, t) &= d_{16}\sigma_{11}(x_1, x_2, t) + d_{26}\sigma_{22}(x_1, x_2, t) + d_{66}\tau_{12}(x_1, x_2, t), \end{aligned}$$

где d_{ij} — упругие податливости.

Соотношения (8), (10) и (11) позволяют исследовать нестационарное напряжённо-деформированное состояние неограниченной тонкой упругой композитной пластины под воздействием распределённого по прямоугольной площадке давления с переменными во времени амплитудой и границами. Они справедливы как для анизотропных, так и для ортотропных, трансверсально-изотропных или изотропных пластин при соответствующих значениях упругих постоянных материала.

Пример расчётов

В качестве примера исследуем напряжённо-деформированное состояние полимерной композитной пластины толщиной $h = 8$ мм, плотностью $\rho = 1500$ кг/м³ с симметричной относительно срединной плоскости схемой армирования и приведёнными для пакета техническими постоянными (модули упругости 1-го и 2-го рода, Па): $E_1 = 8,029 \cdot 10^{10}$, $E_2 = 3,226 \cdot 10^{10}$, $E_3 = 8,43 \cdot 10^9$, $G_{12} = 1,656 \cdot 10^{10}$, $G_{23} = 1,656 \cdot 10^{10}$, $G_{31} = 1,656 \cdot 10^{10}$, $\mu_{12} = 0,176$, $\mu_{23} = 0,176$, $\mu_{13} = 0,176$.

Значения упругих постоянных c_{ij} (Па) и упругих податливостей d_{ij} (Па⁻¹) следующие: $c_{11} = 8,168 \cdot 10^{10}$, $c_{12} = 6,091 \cdot 10^9$, $c_{16} = 0$, $c_{22} = 3,298 \cdot 10^{10}$, $c_{26} = 0$, $c_{66} = 1,656 \cdot 10^{10}$, $d_{11} = 1,245 \cdot 10^{-11}$, $d_{12} = -2,192 \cdot 10^{-12}$, $d_{16} = 0$, $d_{22} = 3,1 \cdot 10^{-11}$, $d_{26} = 0$, $d_{66} = 6,039 \cdot 10^{-11}$.

На пластину воздействует нестационарная нагрузка $p(x_1, x_2, t)$ вида (6), где

$$P(t) = -90\,000 \sin(90t) e^{-90t}, \quad f(t) \equiv 0, \quad g(t) = -30t,$$

$$a = 0,01 \text{ м}, \quad b = 0,02 \text{ м},$$

имитирующая удар по касательной к пластине.

При расчётах в соотношениях (5) и (8) принимали $Q = 10$, $N = 125$, $p = 20$, $m = 20$, $n = 10$. Выбор значений параметров обусловлен анализом сходимости по норме Чебышёва:

$$\begin{aligned} & \|G_1(0, x_2, 0, 01) - G_2(0, x_2, 0, 01)\| = \\ & = \max_{-3 \leq x_2 \leq 3} |G_1(0, x_2, 0, 01) - G_2(0, x_2, 0, 01)| = 0,321 \cdot 10^{-4}, \end{aligned}$$

где функция Грина $G_1(0, x_2, 0, 01)$ построена при $Q = 102$, $N = 1275$, а функция $G_2(0, x_2, 0, 01)$ — при $Q = 10$, $N = 125$;

$$\|w_1(0, x_2, 0, 01) - w_2(0, x_2, 0, 01)\| =$$

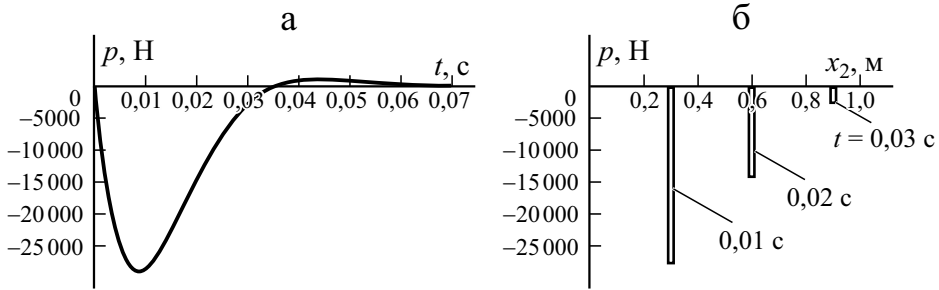


Рис. 2. Нестационарная нагрузка.

$$= \max_{-3 \leq x_2 \leq 3} |w_1(0, x_2, 0, 01) - w_2(0, x_2, 0, 01)| = 1,037 \cdot 10^{-6},$$

где функция прогиба $w_1(0, x_2, 0, 01)$ построена при $p = 20$, $m = 20$, $n = 10$, $Q = 10$, $N = 125$, а функция $w_2(0, x_2, 0, 01)$ — при $p = 15$, $m = 15$, $n = 10$, $Q = 10$, $N = 125$.

На рис. 2 представлена зависимость амплитуды нагрузки от времени и от координаты в фиксированные моменты времени соответственно, а на рис. 3 — прогиб пластины в момент времени 0,01 с и прогибы пластины в плоскости Ox_2x_3 в моменты времени 0,01, 0,02 и 0,03 с.

Из данных рис. 3—б видно, что смещение давления вдоль оси x_2 приводит к смещению максимального прогиба пластины вдоль оси x_2 . При этом локальные максимумы прогиба за нагрузкой (отрицательное направление оси x_2) гораздо меньше, чем перед нагрузкой (положительное направление оси x_2). На рис. 2—б и рис. 3—б заметно запаздывание прогиба пластины по отношению к действующей нагрузке как по вели-

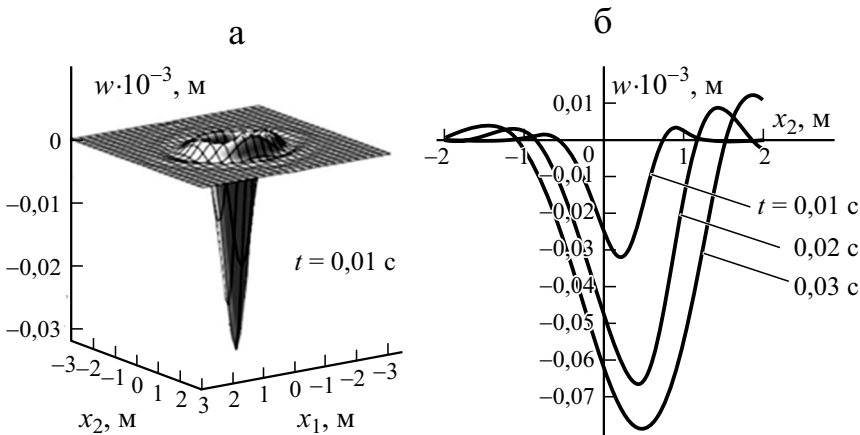


Рис. 3. Нестационарный прогиб пластины.

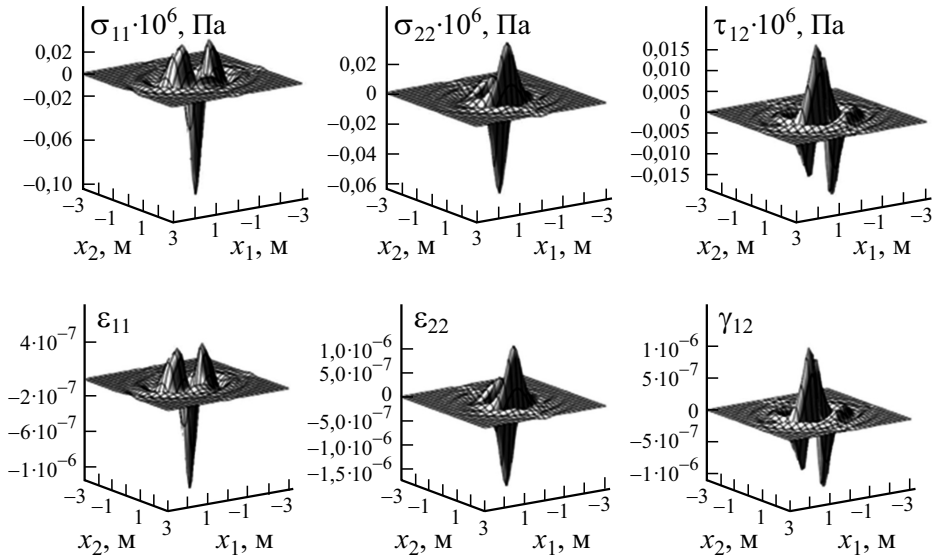


Рис. 4. Распределение напряжений и деформаций в верхних волокнах пластины при $t = 0,01$ с.

чине максимального прогиба, так и по его координате, что обусловлено влиянием сил инерции.

На рис. 4 представлены пространственные распределения напряжений σ_{11} , σ_{22} , τ_{12} и деформаций ϵ_{11} , ϵ_{22} , γ_{12} в верхних волокнах композитной пластины в момент времени 0,01 с. Данные рисунка иллюстрируют существенную неоднородность напряжённого и деформированного состояния по координатам, которая характеризуется двумя плоскостями симметрии, что согласуется с моделью ортотропной среды.

Выводы

В работе получены новые численно-аналитические решения динамической задачи теории упругости для анизотропной композитной пластины при воздействии на неё нестационарной подвижной нагрузки, в частности, с подвижным “пятном нагрузки”, моделирующим задачу удара по касательной к пластине с использованием новых фундаментальных решений для динамических функций Грина. С применением функции Грина построены пространственно-временные зависимости нормальных перемещений и исследовано нестационарное напряжённо-деформированное состояние анизотропной композитной неограниченной пластины Кирхгофа.

Представленный в работе подход демонстрирует возможности для выработки инженерных рекомендаций при решении прикладных задач, связанных с исследованием нестационарных перемещений, а также для анализа напряжённо-деформированного состояния композитных пластин.

Новизна работы заключается в нахождении новой функции Грина для анизотропной композитной пластины, а также в получении нового решения нестационарной задачи о воздействии на пластину распределенного давления с изменяющимся во времени “пятном нагрузки”. Кроме того, применение найденной функции Грина возможно при решении широкого круга нестационарных задач для анизотропных пластин, например нестационарных контактных и обратных задач, а также исследования напряжённо-деформированного состояния анизотропных пластин конечных размеров, например, с применением метода компенсирующих нагрузок [38].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-19-00217).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Paimushin V. N., Kayumov R. A., and Kholmogorov S. A.* Deformation features and models of $[\pm 45]_{2s}$ cross-ply fiber-reinforced plastics under tension // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 55, No. 2. — P. 205—224.
2. *Paimushin V. N., Firsov V. A., and Shishkin V. M.* Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonant vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping // *Mech. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 53, No. 4. — P. 609—630.
3. *Belkaid K.* Development of a 2D isoparametric finite-element model based on Reddy’s third-order theory for the bending behavior analysis of composite laminated plates // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 55, No. 2. — P. 345—366.
4. *Pan’kov A. A.* A piezoelectroluminescent fiber-optical sensor for diagnostics of the 3D stress state in composite structures // *Mech. Compos. Mater.* — 2018. — Vol. 54, No. 2. — P. 233—248.
5. *Гориков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В.* Волны в сплошных средах: Учеб. пособие.: Для вузов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 472 с.
6. *Морачев К. С.* Нестационарная динамика кольцевой пластины Тимошенко переменной толщины // *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та.* — 2007. — Т. 15, № 2. — С. 162—164.
7. *Дьяченко Ю. Г.* Нестационарная задача динамики пластин переменного сечения в уточненной постановке: Автореф. дис ... канд. физ.-мат. наук. — Саратов, ГОУ ВПО “СГУ”, — 2008. — С. 19.
8. *Шевченко В. П., Ветров О. С.* Динамика ортотропной пластины под действием локальных внезапно приложенных нагрузок // *Тр. ИПММ НАН Украины.* — 2011. — Т. 22. — С. 207—215.

9. *Mikhailova E. Yu., Fedotenkov G. V.* Nonstationary axisymmetric problem of the impact of a spherical shell on an elastic half-space (initial stage of interaction) // *Mech. Solids*. — 2011. — Vol. 46, No. 2. — P. 239—247. DOI: 10.3103/S0025654411020129
10. *Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V.* Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells // *J. Machinery Manufacture and Reliability*. — 2014. — Vol. 43, No. 2. — P. 145—152. DOI: 10.3103/S1052618814010178
11. *Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V.* Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell // *Mech. Solids*. — 2015. — Vol. 50, No. 2, — P. 208—217. DOI: 10.3103/S0025654415020107
12. *Vestyak A. V., Igumnov L. A., Tarlavovskii D. V., Fedotenkov G. V.* The influence of non-stationary pressure on a thin spherical shell with an elastic filler // *Comput. Continuum Mech*. — 2016. — Vol. 9, No. 4. — C. 443—452. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.37
13. *Fedotenkov G. V., Mikhailova E. Y., Kuznetsova E. L., Rabinskiy L. N.* Modeling the unsteady contact of spherical shell made with applying the additive technologies with the perfectly rigid stamp // *Int. J. Pure and Appl. Math*. — 2016. — Vol. 111, No. 2. — P. 331—342.
14. *Mikhailova E. Y., Tarlavovskii D. V., Fedotenkov G. V.* Transient contact problem for spherical shell and elastic half-space // *Shell Structures: Theory and Applications*. — 2017. — Vol. 4. — P. 301—304. DOI: 10.1201/9781315166605-67
15. *Mikhailova E. Y., Tarlavovskii D. V., Fedotenkov G. V.* The impact of liquid filled concentric spherical shells with a rigid wall // *Shell Structures: Theory and Applications*. — 2017. — Vol. 4. — P. 305—308. DOI: 10.1201/9781315166605-68
16. *Mikhailova E. Y., Tarlavovskii D. V., Fedotenkov G. V.* Transient contact problem for liquid filled concentric spherical shells and a rigid barrier // *Proc. First Int. Conf. Theoretical, Appl. and Experimental Mech*. — 2019. — P. 385—386. DOI: 10.1007/978-3-319-91989-8_92
17. *Kalinchuk V. V., Mitin A. Y., Fedotenkov G. V.* Three-dimensional non-stationary motion of timoshenko-type circular cylindrical shell // *Lobachevskii J. Math*. — 2019. — Vol. 40, No. 3. — P. 311—320. <https://doi.org/10.1134/S1995080219030107>
18. *Lokteva N. A., Serdyuk D. O., Skopintsev P. D.* Non-stationary influence function for an unbounded anisotropic Kirchoff-Love shell // *J. Appl. Eng. Sci*. — 2020. — Vol. 18, No. 4. — P. 737—744. DOI: 10.5937/jaes0-28205
19. *Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д., Федотенков Г. В.* Нестационарное напряженно-деформированное состояние композитной цилиндрической оболочки // *Механика композиц. материалов и конструкций*. — 2020. — Т. 26, № 4. — С. 544—559. DOI: 10.33113/mkmm.ras.2020.26.04.544_559.08
20. *Okonechnikov A. S., Tarlavovski D. V., Ul'yashina A. N., Fedotenkov G. V.* Transient reaction of an elastic half-plane on a source of a concentrated boundary disturbance // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng*. — 2016. — Vol. 158, No. 1. — P. 012073, doi:10.1088/1757-899X/158/1/012073
21. *Okonechnikov A. S., Tarlavovsky D. V., Fedotenkov G. V.* transient interaction of rigid indenter with elastic half-plane with adhesive force // *Lobachevskii J. Math*. — 2019. — Vol. 40, No. 4. — P. 489—498. DOI: 10.1134/S1995080219030132

22. *Kuznetsova E. L., Tarlakovski D. V., Hoa N. N., Starovoytov E. I.* Surface transient functions for elastic half space // *Appl. Math. Sci.* — 2016. — Vol. 10, No. 22. — P. 057—1067. DOI: 10.12988/ams.2016.6132

23. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V.* Deformation of an elastoplastic three-layer circular plate in a temperature field // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 55, No. 4. — P. 503—512. DOI: 10.1007/s11029-019-09829-6

24. *Ryazantseva M. Y., Starovoitov E. I.* Static and dynamic models of bending for elastic sandwich plates // *Structural Integrity.* — 2019. — Vol. 8. — P. 294—297. DOI: 10.1007/978-3-030-21894-2_54

25. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Tarlakovskii D. V.* Thermoelastic deformation of a circular sandwich plate by local loads // *Mech. Compos. Mater.* — 2018. — Vol. 54, No. 3. — P. 299—312. DOI: 10.1007/s11029-018-9740-x

26. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V.* Vibrations of circular composite plates on an elastic foundation under the action of local loads // *Mech. Compos. Mater.* — 2016. — Vol. 52, No. 5. — P. 665—672. DOI: 10.1007/s11029-016-9615-y

27. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Rabinskiy L. N.* Natural vibrations of a composite cylindrical shell with an elastic filler // *Composites: Mech., Comput., Appl.* — 2016. — Vol. 7, No. 2. — P. 119—133. DOI: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.v7.i2.30

28. *Markov I. P., Igumnov L. A.* BEM modeling of a 3D homogeneous anisotropic elastic half space under dynamic load // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* — 2019. — Vol. 510, No. 1. — P. 012011. DOI: 10.1088/1757-899X/510/1/012011

29. *Abrosimov N. A., Elesin A. V., Igumnov L. A.* Numerical simulation of the process of loss of stability of composite cylindrical shells under combined quasi-static and dynamic actions // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 55, No. 1. — P. 41—52. DOI: 10.1007/s11029-019-09790-4

30. *Ipatov A. A., Igumnov L. A., Litvinchuk S. Y., Lyubimov A. K.* Modification of numerical inversion of laplace transform in solving problems of poroviscoelasticity via BEM // *Lobachevskii J. Math.* — 2019. — Vol. 40, No. 3. — P. 304—310. DOI: 0.1134/S1995080219030090

31. *Igumnov L. A., Markov I. P., Boev A. V.* A static boundary element analysis of 3D anisotropic elastic problems // *Mater. Phys. Mech.* — 2019. — Vol. 42, No. 4. — P. 461—469. DOI: 10.18720/MPM.4242019_11

32. *Igumnov L. A., Tarlakovskii D. V., Zemskov A. V.* Bulk Green's functions in one-dimensional unsteady problems of elastic diffusion // *Mater. Phys. Mech.* — 2019. — Vol. 42, No. 2. — P. 191—197. DOI: 10.18720/MPM.4222019_5

33. *Abrosimov N. A., Igumnov L. A., Aizikovich S. M., Elesin A. V.* Computer modeling of nonlinear deformation and loss of stability of composite shell structures under a combined effect of quasi-static and pulsed loads // *Adv. Struct. Mater.* — 2019. — Vol. 110. — P. 5—32. DOI: 10.1007/978-3-030-17747-8_2

34. *Васильев В. В.* Механика конструкций из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1988. — 272 с.

35. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразований. — М.: Наука, 1971. — 288 с.

36. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — М.: Наука, 1975. — 630 с.

37. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. — М.: ОГИЗ, 1947. — 356 с.

38. *Венцель Э. С., Джан-Темиров К. Е., Трофимов А. М., Негольша Е. В.* Метод компенсирующих нагрузок в задачах теории тонких пластинок и оболочек. — Харьков, 1992. — 92 с.

Поступила в редакцию 02.11.2020

Окончательный вариант поступил 05.05.2021

Received Nov. 2, 2020 (May 5, 2021)
