

*Д. С. Бойко , Ю. В. Токовий**

*Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача
НАН Украины, Львов, Украина*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ
В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ УПРУГОМ
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ КОМПОЗИТЕ**

*D. S. Boiko and Y. V. Tokovyy**

**DETERMINATION OF THREE-DIMENSIONAL STRESSES
IN A SEMI-INFINITE ELASTIC TRANSVERSELY ISOTROPIC COMPOSITE**

Keywords: transversely isotropic composite, elastic half-space, three-dimensional problem in terms of stresses, explicit solution, boundary effect

A technique is suggested for solving a spatial problem of elasticity theory for a transversely isotropic half-space. The isotropy plane is parallel to the boundary of the half-space where arbitrary local force impacts are given. By using the direct integration method, the original equations of the problem are reduced to the governing integral equations of the second kind for the individual stress tensor components. Explicit solutions of the equations are found in the space of Fourier double-integral transform by the resolvent method. The solution constructed exactly satisfies the original equations and boundary conditions of the problem and ensures its decaying, in accordance with the Saint-Venant principle, away from the loaded segment of the boundary for all the feasible relationships between the elastic moduli of transversely isotropic media.

Ключевые слова: композит трансверсально-изотропный, полупространство упругое, пространственная задача в напряжениях, решение явное, влияние границы

Предложена методика решения пространственной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полупространства,

*Автор, с которым следует вести переписку: tokovyy@gmail.com
Corresponding author: tokovyy@gmail.com

плоскость изотропии которого параллельна границе, где заданы произвольные локальные силовые воздействия. С помощью метода непосредственного интегрирования исходные уравнения задачи сведены к ключевым интегральным уравнениям второго рода для отдельных компонент тензора напряжений, явные решения которых получены в пространстве двойного интегрального преобразования Фурье с использованием метода резольвент. Построенное таким образом решение позволяет точно удовлетворить исходным уравнениям и краевым условиям задачи, а также обеспечить убывание решения в соответствии с принципом Сен-Венана при отдалении от нагруженного участка границы для всевозможных соотношений между упругими модулями трансверсально-изотропных сред.

Введение

Построение аналитических решений задач механики деформируемого твердого тела для элементов конструкций, выполненных с применением упругих композитов, является основой расчёта и оценки их эксплуатационных реологических качеств [1]. Следует отметить, что вследствие анизотропии определенного типа, присущей подавляющему большинству композитных материалов, получение таких решений, особенно в случае общей пространственной формулировки, существенно сложнее, чем в случае изотропных тел [2, 3]. В частности, различие упругих модулей материала в разных пространственных направлениях существенно осложняет изучение локальных эффектов от местных силовых нагрузок границы исследуемых тел, когда искомое решение должно обладать свойством асимптотического убывания, согласующегося с принципом Сен-Венана [4].

Для построения решений с такими свойствами следует располагать полной информацией о типе и кратности собственных чисел ключевых уравнений соответствующих задач механики деформируемого твердого тела. В случае анизотропных материалов эти собственные числа выражаются через коэффициенты ключевых уравнений, определяемые соотношениями между упругими модулями, вследствие чего происходит ветвление зависимостей собственных чисел от коэффициентов уравнения.

Один из простейших типов пространственной анизотропии представляют собой трансверсально-изотропные среды, обладающие так называемой плоскостью изотропии, все направления в которой являются эквивалентными в плане макроскопических свойств материала [3]. Свойства такого типа характерны для некоторых естественных и композитных материалов, в частности, для материалов с кристаллической решеткой, принадлежащей к гексагональной сингонии [3, 5]; для стратифицированных структур, состоящих из большого количества тонких слоев с плоскопараллельными границами [6]; для волокнистых композитов с гексагональным типом укладки волокон [7, 8] и т.п. Упругие свойства материалов такого типа вполне описываются модулями Юнга E и E_z соответственно в пло-

скости изотропии и перпендикулярном к ней направлении, коэффициентами Пуассона ν и ν_z (первый характеризует растяжение—сжатие в перпендикулярном к плоскости изотропии направлении вследствие производимого в ней сжатия—растяжения, второй — наоборот) и модулями сдвига G_z в плоскостях, перпендикулярных к плоскости изотропии (модуль сдвига в последней вычисляется по формуле $G = E / (2 + 2\nu)$).

Несмотря на сравнительно небольшое количество упругих модулей, построение трехмерных асимптотически убывающих решений для неограниченных или полуограниченных трансверсально-изотропных тел представляет сложную проблему математической физики [9]. Прежде всего это связано с тем, что в подавляющем большинстве методы решения задач теории упругости для трансверсально-изотропных тел основаны на подходах, применяемых для анализа упругого поведения изотропных тел (см. обзоры [10—13]), для которых влияние упругих модулей не является столь ощутимым, как в случае анизотропных сред. Существуют также подходы, разработанные сугубо для задач, учитывающих пространственную анизотропию материала. В частности, в работе [14] предложен математический подход к получению общих решений трехмерных задач для трансверсально-изотропных сред, позволяющий выразить поля перемещений в виде линейных комбинаций столбцов оператора, сопряженного с исходным дифференциальным оператором задачи, нормализованных при помощи квазигармонических потенциалов и их производных. Влияние включений и дефектов на статический и динамический отклик в трансверсально-изотропных средах изучали, например, в [15—18] с использованием числовых методов. Случай многослойной трансверсально-изотропной среды исследован в [19]. Следует отметить особый интерес к задачам, в которых рассматриваются трансверсально-изотропные тела с плоскостью изотропии, расположенной под углом к поверхности [20, 21]. Однако вопрос построения универсальных форм решений, отвечающих основополагающим принципам механики, например, в случае изучения локальных эффектов от нагружения границы трансверсально-изотропных тел для произвольных соотношений между упругими модулями, интерес к которому обострился, в частности, в контексте задач Буссинеска в связи с изучением контактного воздействия наноинденторов [22—24], остается открытым.

В [25] был предложен подход к решению пространственной задачи термоупругости для однородного трансверсально-изотропного полупространства, находящегося под воздействием локальных силовых и тепловых нагрузок на его границе, параллельной к плоскости изотропии материала. С использованием метода непосредственного интегрирования [26] исходные уравнения сведены к системе ключевых уравнений для отдельных компонент тензора напряжений. Были получены формы решений, соответствующие различным физически допустимым соотношениям между упругими модулями трансверсально-изотропного материала, обеспечивающие убывание при удалении от нагруженных участков границы. Несмотря на преимущество полученных в явном виде форм решений, использование какого-либо из них для конкретного трансверсально-изотропного матери-

ала требует предварительных исследований собственных чисел ключевых уравнений. С целью устранения такого недостатка в работе [27] предложена методика сведения ключевых уравнений указанной задачи к интегральным уравнениям второго рода [28, 29]. Преимуществом данного подхода является получение универсальной для различных свойств трансверсально-изотропных материалов формы асимптотически убывающего при удалении от нагруженного участка границы решения, построенного в явном виде с использованием метода резольвент [30]. Определенным недостатком, однако, следует признать относительно слабую сходимость к точному решению при использовании в численных расчетах первичных сумм вместо бесконечных рядов, задающих соответствующие резольвентные ядра. Этот факт можно объяснить не совсем удачным выбором фундаментальных решений (соответствуют изотропному материалу), при помощи которых осуществляется сведение ключевых уравнений к интегральным.

В настоящей работе предпринята попытка устранить указанный недостаток работы [27] путем использования для получения интегральных уравнений фундаментальных решений для определенного трансверсально-изотропного материала со свойствами, “близкими” к исследуемым. Таким образом, удаётся обеспечить приемлемую сходимость приближенного решения, построенного с помощью первичных сумм в выражениях резольвентных ядер, к точному.

1. Постановка задачи

Рассмотрим пространственную задачу об упругом равновесии трансверсально-изотропного полупространства $|x| < \infty, |y| < \infty, z \geq 0$, плоскость изотропии которого расположена параллельно к ограничивающей поверхности $z = 0$. Здесь x, y, z — безразмерные декартовы координаты. Компоненты симметричного тензора напряжений $\sigma_{t\ell}, \{t, \ell\} = \{x, y, z\}$, будем определять из уравнений равновесия [4]

$$\frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{t\ell}}{\partial \ell} + \frac{\partial \sigma_{tk}}{\partial k} = 0, \quad \{\ell, t, k\} = \{x, y, z\}, \quad \ell \neq t \neq k, \quad (1)$$

с использованием уравнений сплошности деформаций $\varepsilon_{t\ell}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{tt}}{\partial \ell^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\ell\ell}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{t\ell}}{\partial t \partial \ell}, \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{tt}}{\partial \ell \partial k} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varepsilon_{t\ell}}{\partial k} + \frac{\partial \varepsilon_{tk}}{\partial \ell} - \frac{\partial \varepsilon_{\ell k}}{\partial t} \right), \quad \{\ell, t, k\} = \{x, y, z\}, \quad \ell \neq t \neq k, \end{aligned} \quad (2)$$

и физических соотношений [2]

$$\varepsilon_{\ell\ell} = \frac{1}{E} (\sigma_{\ell\ell} - \nu \sigma_{tt}) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_{zz}, \quad \varepsilon_{\ell z} = \frac{1}{G_z} \sigma_{\ell z}, \quad \{\ell, t\} = \{x, y\}, \quad \ell \neq t, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_z} \sigma_{zz} - \frac{\nu_z}{E_z} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{G} \sigma_{xy}. \quad (3)$$

Считаем, что на ограничивающую поверхность полупространства действуют нормальные и касательные силовые нагрузки

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = -p(x, y), \quad \sigma_{xz}|_{z=0} = q_x(x, y), \quad \sigma_{yz}|_{z=0} = q_y(x, y), \quad (4)$$

где $p(x, y)$, $q_x(x, y)$, $q_y(x, y)$ — заданные функции, убывающие при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$.

Для однозначного определения деформаций и касательных напряжений воспользуемся интегральным условием сплошности деформаций [25, 27]

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^x \left(\varepsilon_{xz}(\xi, y, 0) - \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial \varepsilon_{xx}(\xi_1, y, 0)}{\partial z} d\xi_1 \right) d\xi = \\ & = \int_{-\infty}^y \left(\varepsilon_{yz}(x, \eta, 0) - \int_{-\infty}^{\eta} \frac{\partial \varepsilon_{yy}(x, \eta_1, 0)}{\partial z} d\eta_1 \right) d\eta, \end{aligned} \quad (5)$$

полученным с использованием второй группы уравнений (2).

Далее представлена методика построения решения задачи (1)—(5) для трансверсально-изотропного полупространства путем сведения ее к интегральным уравнениям второго рода. При этом имеем в виду, что решения полученных интегральных уравнений, построенные при помощи метода резольвент, должны обладать быстрой сходимостью при использовании приближенных выражений для резольвентного ядра, и убывать с удалением от нагруженных участков границы, т.е. при $z \rightarrow \infty$.

2. Построение решения

2.1. Ключевые уравнения. В работах [25, 27] с использованием метода непосредственного интегрирования [26, 29] уравнения (1)—(4) сведены к системе ключевых уравнений в напряжениях вида

$$\Delta^+ \Delta^- \sigma_{zz} - \mu^+ \mu^- \Delta_{xy} \Delta_1 \sigma_{zz} = 0, \quad (6)$$

$$\Delta^+ \sigma_{zz} = \mu^+ \Delta_{xy} \sigma, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{xy} \sigma_{yy} + \mu_1 \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial z^2} = & \frac{\mu_2 - \mu^+}{\mu^+} \Delta \sigma_{zz} + (1 - \mu_2) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \\ & + (\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\mu_2}{\mu^-} \sigma + (1 - \mu_3) \sigma_{zz} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2}, \quad (9)$$

где

$$\Delta_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta = \Delta_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_1 = (\mu_4 - 1)\Delta_{xy} + 2 \frac{\mu^+ - \mu_2}{\mu_2 \mu^+} \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\Delta^\pm = \Delta_{xy} \pm (1 \pm \nu) \mu^\pm \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \mu^\pm = \frac{E_z}{\nu_z E \pm E_z},$$

$$\mu_1 = \frac{G_z}{G}, \quad \mu_2 = 2 \frac{G_z}{E}, \quad \mu_3 = 2G_z \frac{1 + \nu_z}{E_z}, \quad \mu_4 = \frac{E}{E_z},$$

а суммарные напряжения определены по формуле

$$\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}. \quad (10)$$

Еще два уравнения, служащие для нахождения σ_{xz} и σ_{yz} через нормальные напряжения, можно получить из (9) циклической перестановкой индексов и переменных, по которым производится дифференцирование.

С использованием уравнений равновесия (1), краевых условий (4) для касательных напряжений можно получить условие для производной от нормальных напряжений

$$\left. \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y}, \quad (11)$$

являющееся альтернативной формой второго и третьего условий (4) при определении нормальных напряжений σ_{zz} .

С учетом характера убывания заданных функций (4) систему уравнений (6)—(10) с условиями (4), (5), (11) решаем в пространстве двойного интегрального преобразования Фурье [31]

$$\bar{f}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) \exp(-i(xs_x + ys_y)) dx dy, \quad (12)$$

где s_x и s_y — параметры преобразования по x и y соответственно, $i^2 = -1$.

2.2. Решение ключевых уравнений. В пространстве преобразования (12) уравнение (6) и условия (4), (11) приобретают вид

$$\left\langle \frac{d^4}{dz^4} - 2a_1 s^2 \frac{d^2}{dz^2} + a_2 s^4 \right\rangle \bar{\sigma}_{zz} = 0, \quad (13)$$

$$\bar{\sigma}_{zz}(0) = -\bar{p}, \quad \left. \frac{d\bar{\sigma}_{zz}(z)}{dz} \right|_{z=0} = -i(s_x \bar{q}_x + s_y \bar{q}_y). \quad (14)$$

Здесь

$$a_1 = \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{G}{G_z} - \nu_z \frac{E}{E_z} \right), \quad a_2 = \frac{1}{1-\nu^2} \left(1 - \nu_z^2 \frac{E}{E_z} \right) \frac{E}{E_z}, \quad s = s_x^2 + s_y^2.$$

Форма решения уравнения (13), убывающего при $z \rightarrow \infty$, зависит от соотношения между коэффициентами a_1 и a_2 , что представляет определенную сложность для унифицированного анализа напряжений [25].

С целью построения унифицированной для всех возможных соотношений между упругими модулями трансверсально-изотропного материала, выраженных зависимостями коэффициентов a_1 и a_2 , формы решения уравнения (13) преобразуем его к виду

$$\left\langle \frac{d^4}{dz^4} - 2a^2 s^2 \frac{d^2}{dz^2} + a^4 s^4 \right\rangle \bar{\sigma}_{zz} = 2s^2 (a_1 - a^2) \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dz^2}, \quad (15)$$

где $a = \sqrt[4]{a_2}$, полагая, что $a_2 > 0$. В случае $a_2 < 0$ решение строится аналогично. Решение уравнения (15) относительно его левой части, убывающее в бесконечно удаленных точках, имеет вид

$$\bar{\sigma}_{zz} = (A + zB) \exp(-a|s|z) - 2b|s| \int_0^{+\infty} \bar{\sigma}_{zz}(\zeta) \left(1 - a|s||z - \zeta| \right) \exp(-a|s||z - \zeta|) d\zeta, \quad b = \frac{a_1 - a^2}{4a}. \quad (16)$$

После определения постоянных интегрирования A и B при помощи подстановки выражения (16) в условия (14) приходим к интегральному уравнению второго рода для напряжений $\bar{\sigma}_{zz}$

$$\bar{\sigma}_{zz} = -\left((1 + a|s|z) \bar{p} + i(s_x \bar{q}_x + s_y \bar{q}_y) z \right) \exp(-a|s|z) + \int_0^{+\infty} \bar{\sigma}_{zz}(\zeta) \mathcal{K}_z(z, \zeta) d\zeta, \quad (17)$$

где

$$\mathcal{K}_z(z, \zeta) = b|s| \left[\left((1 + 2a|s|z)(3 - 2a|s|\zeta) - 1 \right) \exp(-a|s|(z + \zeta)) + 2(a|s||z - \zeta| - 1) \exp(-a|s||z - \zeta|) \right].$$

Решение уравнения (17) построим при помощи метода резольвентного ядра [30], вследствие чего получим выражения для $\bar{\sigma}_{zz}$ в виде явной зависимости от силовых нагрузок на границе:

$$\bar{\sigma}_{zz} = -\bar{p} f_z^p(z) - i(s_x \bar{q}_x + s_y \bar{q}_y) f_z^q(z). \quad (18)$$

Здесь

$$f_z^p(z) = (1 + a|s|z) \exp(-a|s|z) + \int_0^{+\infty} (1 + a|s|\zeta) \exp(-a|s|\zeta) \mathcal{R}_z(z, \zeta) d\zeta,$$

$$f_z^q(z) = z \exp(-a |s| z) + \int_0^{+\infty} \zeta \exp(-a |s| \zeta) \mathcal{R}_z(z, \zeta) d\zeta,$$

а резольвентное ядро $\mathcal{R}_z(z, \zeta)$ определено как

$$\mathcal{R}_z(z, \zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{K}_{m+1}^z(z, \zeta), \tag{19}$$

где

$$\mathcal{K}_1^z(z, \zeta) = \mathcal{K}_z(z, \zeta), \quad \mathcal{K}_{m+1}^z(z, \zeta) = \int_0^{+\infty} \mathcal{K}_1^z(z, \xi) \mathcal{K}_m^z(\xi, \zeta) d\xi, \quad m = 1, 2, \dots$$

Выражение для суммарных напряжений (10) нетрудно найти по нормальным напряжениям (18) при помощи уравнения (7), принимающего в пространстве преобразования (12) следующий вид:

$$\bar{\sigma} = \left(1 + \nu_z \frac{E}{E_z} \right) \bar{\sigma}_{zz} - \frac{1 + \nu}{s^2} \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dz^2}. \tag{20}$$

С учетом (13) и (20) уравнение (8) в пространстве преобразования (12) можно представить как

$$\left\langle \frac{d^2}{dz^2} - (s\kappa)^2 \right\rangle \bar{\sigma}_{yy} = \frac{d_1}{s^2} \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dz^2} + d_2 \bar{\sigma}_{zz}, \tag{21}$$

где

$$d_1 = \frac{E}{2} \left(\frac{s^2}{1 - \nu} \left(\frac{\nu_z E}{G E_z} - \frac{1}{G_z} \right) + \frac{s_x^2}{G_z} + 2 \frac{\nu_z}{E_z} s_y^2 \right),$$

$$d_2 = \frac{E}{E_z} \left(\left(1 - \nu_z^2 \frac{E}{E_z} \right) \frac{s_y^2 + \nu s_x^2}{1 - \nu^2} - s_x^2 \nu_z \frac{G}{G_z} \right), \quad \kappa^2 = \frac{G}{G_z}.$$

Решение уравнения (21) находим в форме, аналогичной (18), выразив явную зависимость напряжений $\bar{\sigma}_{yy}$ от нагружающих факторов:

$$\bar{\sigma}_{yy} = C \exp(-\kappa |s| z) - \bar{p} \varphi_y^p(z) - i(s_x \bar{q}_x + s_y \bar{q}_y) \varphi_y^q(z). \tag{22}$$

Здесь

$$\varphi_y^\eta(z) = \frac{d_1}{s^2} f_z^\eta(z) - \frac{\kappa^2 d_1 + d_2}{2\kappa s} \int_0^{+\infty} f_z^\eta(\zeta) \exp(-\kappa |s| |z - \zeta|) d\zeta, \quad \eta = \{p, q\}.$$

Для определения произвольной постоянной в выражении (22) воспользуемся условием (5), принимающим с учетом (3) и (10) в пространстве интегрального преобразования (12) вид

$$\left. \frac{d\bar{\sigma}_{yy}}{dz} \right|_{z=0} - \frac{s_y^2 + \nu s_x^2}{s^2(1 + \nu)} \left. \frac{d\bar{\sigma}}{dz} \right|_{z=0} = i(s_x q^+ \bar{q}_x + s_x q^- \bar{q}_x), \tag{23}$$

где

$$q^+ = \left(s_x^2 \frac{E}{G_z} + s_y^2 + \nu s_x^2 + (s_y^2 - s_x^2) \nu_z \frac{E}{E_z} \right) \frac{1}{s^2(1+\nu)},$$

$$q^- = \left(-s_y^2 \frac{E}{G_z} + s_y^2 + \nu s_x^2 + (s_y^2 - s_x^2) \nu_z \frac{E}{E_z} \right) \frac{1}{s^2(1+\nu)}.$$

Подставив выражения (20) и (22) в условие (23), найдем постоянную C , вследствие чего решение (22) запишем в виде

$$\bar{\sigma}_{yy} = -\bar{p}f_y^p(z) - is_x \bar{q}_x f_y^{q^-}(z) - is_y \bar{q}_y f_y^{q^+}(z), \quad (24)$$

где

$$f_y^p(z) = \varphi_y^p(z) - p_* \exp(-|s|z), \quad f_y^{q^\pm}(z) = \varphi_y^q(z) - q_*^\pm \exp(-|s|z),$$

$$p_* = \frac{1}{|s|} \left(\frac{s_y^2 + \nu s_x^2}{s^2(1+\nu)} \left(\left(1 + \nu_z \frac{E}{E_z} \right) f_z^p(0) - \frac{1+\nu}{s^2} \frac{d^2 f_z^p}{dz^2} \Big|_{z=0} \right) - \frac{d\varphi_y^p}{dz} \Big|_{z=0} \right),$$

$$q_*^\pm = \frac{1}{|s|} \left(\frac{s_y^2 + \nu s_x^2}{s^2(1+\nu)} \left(\left(1 + \nu_z \frac{E}{E_z} \right) f_z^q(0) - \frac{1+\nu}{s^2} \frac{d^2 f_z^q}{dz^2} \Big|_{z=0} \right) - \frac{d\varphi_y^q}{dz} \Big|_{z=0} - q^\pm \right).$$

Найдя выражения (18) и (24) для нормальных напряжений $\bar{\sigma}_{zz}$ и $\bar{\sigma}_{yy}$ соответственно, используем формулы (20) и (10) для нахождения $\bar{\sigma}_{xx}$, откуда

$$\bar{\sigma}_{xx} = \nu_z \frac{E}{E_z} \bar{\sigma}_{zz} - \frac{1+\nu}{s^2} \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dz^2} - \bar{\sigma}_{yy}$$

и, следовательно,

$$\bar{\sigma}_{xx} = -\bar{p}f_x^p(z) - is_x \bar{q}_x f_x^{q^-}(z) - is_y \bar{q}_y f_x^{q^+}(z). \quad (25)$$

Здесь

$$f_x^p(z) = \nu_z \frac{E}{E_z} f_z^p(z) - \frac{1+\nu}{s^2} \frac{d^2 f_z^p}{dz^2}(z) - f_y^p(z),$$

$$f_x^{q^\pm}(z) = \nu_z \frac{E}{E_z} f_z^q(z) - \frac{1+\nu}{s^2} \frac{d^2 f_z^q}{dz^2}(z) - f_y^{q^\pm}(z).$$

Для нахождения касательных напряжений используем уравнение (9) и еще два уравнения, полученные из него циклической перестановкой

индексов, которые в пространстве интегрального преобразования (12) с учетом условий (4) для касательных напряжений приобретают вид

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xy} &= -\frac{1}{2s_x s_y} \left(s_x^2 \bar{\sigma}_{xx} + s_y^2 \bar{\sigma}_{yy} + \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dz^2} \right), \\ \bar{\sigma}_{yz} &= \frac{\bar{q}_y}{2} + \frac{i}{4s_y} \int_0^{+\infty} \left(s_x^2 \bar{\sigma}_{xx}(\zeta) - s_y^2 \bar{\sigma}_{yy}(\zeta) + \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}(\zeta)}{d\zeta^2} \right) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta, \\ \bar{\sigma}_{xz} &= \frac{\bar{q}_x}{2} + \frac{i}{4s_x} \int_0^{+\infty} \left(s_y^2 \bar{\sigma}_{yy}(\zeta) - s_x^2 \bar{\sigma}_{xx}(\zeta) + \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}(\zeta)}{d\zeta^2} \right) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (26)$$

С использованием выражений (18), (24) и (25) касательные напряжения (26) представим в виде

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xy} &= -\bar{p}f_{xy}^p(z) - i \left(s_x \bar{q}_x f_{xy}^{q-}(z) + s_y \bar{q}_y f_{xy}^{q+}(z) \right), \\ \bar{\sigma}_{\eta z} &= -\bar{p}f_{\eta z}^p(z) - i \left(s_x \bar{q}_x f_{\eta z}^{q-}(z) + s_y \bar{q}_y f_{\eta z}^{q+}(z) \right), \quad \eta = \{x, y\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Выражения для составляющих (27) приведены в Приложении 1.

Найденные компоненты тензора напряжений (18), (24), (25) и (27) можно воспроизвести в физической области при помощи обратного преобразования Фурье [31]

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(z) \exp(i(xs_x + ys_y)) ds_x ds_y.$$

Для практических вычислений полученных напряжений бесконечные ряды в выражении (19) для резольвенты можно заменить [30] конечной начальной суммой

$$\mathcal{R}_z(z, \zeta) \approx \mathcal{R}_z^N(z, \zeta) = \sum_{k=0}^N \mathcal{K}_{k+1}^z(z, \zeta), \quad (28)$$

где N — натуральное число, определяемое из численного эксперимента или с помощью аналитической методики [32].

Заметим, что приближенное решение уравнения (13), полученное в виде (18), где бесконечный ряд в выражении для резольвенты (19) заменен начальной суммой (28), точно удовлетворяет краевым условиям (14) при любом значении N . Эффективность же построенного таким образом приближенного решения определяется точностью удовлетворения уравнения (13) при наименьшем количестве слагаемых в правой части выражения (28), т.е., числом N . При этом значение $N=0$ соответствует случаю $\mathcal{R}_z(z, \zeta) \approx \mathcal{R}_z^0(z, \zeta) = \mathcal{K}_1^z(z, \zeta)$, т.е. резольвента приближенно равна исходному ядру интегрального уравнения (17).

Табл. 1

Упругие свойства трансверсально-изотропных материалов [25]

Композитный материал	E , ГПа	E_z , ГПа	ν	ν_z	G , ГПа	G_z , ГПа
Углеродно-волоконистый (a)	15	232	0,49	0,28	5,03	24
Керамический PZT-4 (b)	81,28	64,53	0,33	0,34	30,56	25,6
60%-Волоконный (c)	9,95	141,1	0,5	0,27	3,32	6
Гексагональный цинк (z)	13,56	5,04	0,21	0,17	5,6	3,85

3. Примеры численной реализации

С целью верификации эффективности построенного решения рассмотрим пример расчета напряженного состояния в полупространстве, вызванного нормальным силовым воздействием, описанным условиями (4), где

$$p(x, y) = p_0 \exp(-x^2 - y^2), \quad q_x = q_y = 0,$$

а p_0 — константа в размерности напряжений. Расчеты осуществим для четырех типов материалов (табл. 1) при использовании приближенного выражения (28) резольвенты вместо бесконечного ряда (19). Сравним по-

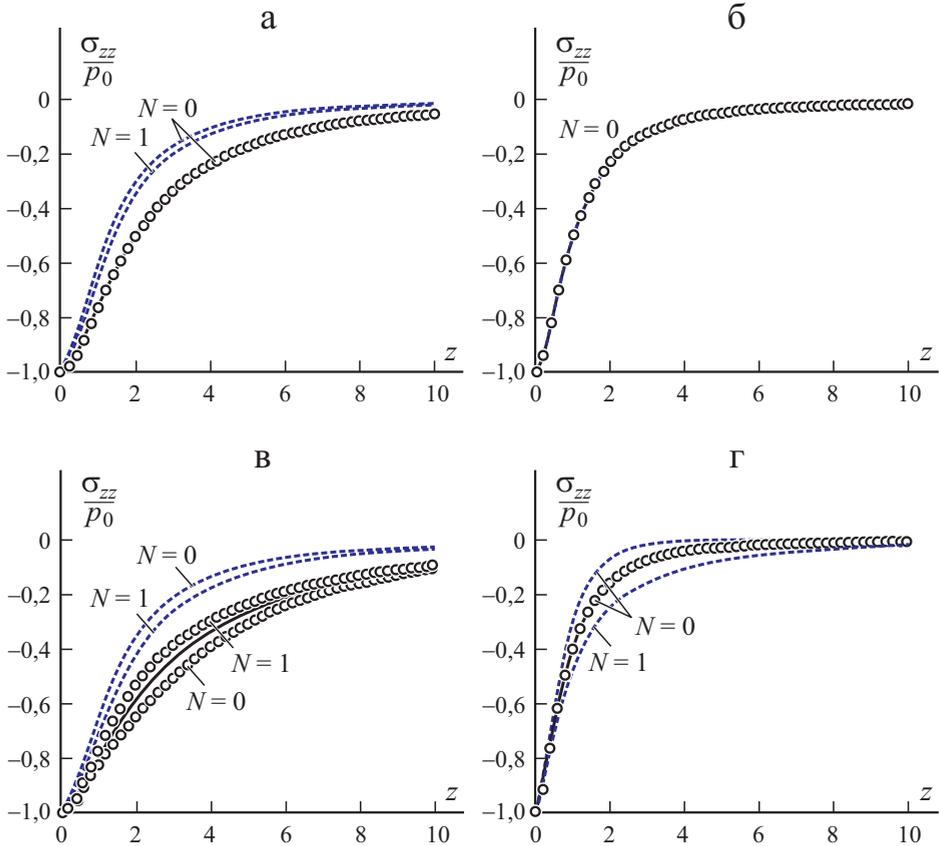
Табл. 2

Относительная погрешность приближенного решения [27] (вверху) и построенного в данной работе (внизу) для σ_{zz} при разных значениях N и $x = y = 0$ (%)

z	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$
	Углеродно-волоконистый			60%-Волоконный		
2,0	39,286	30,911	24,816	38,899	27,697	20,570
	0,283	0,026	0,003	11,307	8,586	7,389
4,0	55,110	46,898	40,259	59,664	47,876	38,898
	0,511	0,041	0,003	17,182	10,859	8,120
6,0	60,716	52,998	46,564	68,059	57,356	48,619
	0,485	0,029	0,002	15,255	7,213	4,213
8,0	63,218	55,791	49,522	72,099	62,211	53,884
	0,395	0,018	0,001	12,116	4,252	1,901
	Керамический PZT-4			Гексагональный цинк		
2,0	0,811	0,126	0,029	55,117	62,237	74,673
	0,010	$4,34 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-10}$	0,398	0,023	0,001
4,0	1,118	0,195	0,046	95,385	128,613	177,824
	0,009	$2,74 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-10}$	0,261	0,007	$2,15 \cdot 10^{-4}$
6,0	1,213	0,218	0,053	111,252	159,492	232,904
	0,006	$1 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-10}$	0,150	0,002	$1 \cdot 10^{-10}$
8,0	1,251	0,227	0,056	118,284	174,114	260,584
	0,003	$2,74 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-10}$	0,093	$8,17 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-10}$

лученные результаты с точными решениями [25], форма которых различна для разных материалов (см. табл. 1) и с приближенным решением [27], приведенным в Приложении 2.

На основе результатов расчетов можно заключить, что построенные решения точно удовлетворяют краевым условиям по нормальным и касательным напряжениям (последнее, в частности, следует из данных рисунка судя по тому, что кривые “выходят” на границу полупространства $z = 0$ параллельно оси Oz) и с отдалением от границы убывают, причем скорость убывания зависит от свойств конкретного материала. Также видно, что с увеличением параметра N приближенные решения (18) и (П2-1) стремятся к точному, причем для керамического композита PZT-4 (см. рис. б) наблюдаем практическое совпадение всех трех решений уже при $N = 0$. Для остальных рассмотренных случаев построенное решение (18) с учетом формулы (27) стремится к точному гораздо быстрее, чем приближенное решение из работы [27], и практически совпадает с точным при $N = 1$ (см. рис. а, г). Для 60%-волоконного материала (см. рис. в) достижение инже-



Распределение безразмерных напряжений σ_{zz} / p_0 , рассчитанных по формулам (П2-1) (---) и (18) (○) при $N = 0, 1$, по точным формулам [25] (—), в зависимости от величины z при $x = y = 0$ для разных материалов (а—г по табл. 1).

нерной точности требует $N = 2$. Подробнее отклонение приближенных решений от точного проиллюстрировано в табл. 2, демонстрирующей относительную погрешность приближенных решений в некоторых точках полупространства.

Заключение

Разработана методика построения универсальной формы решения пространственной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полупространства, граница которого подвергается локальному силовому воздействию. Методом прямого интегрирования решение задачи свели к системе ключевых уравнений, последовательное решение которых в пространстве интегрального преобразования Фурье позволяет найти компоненты тензора напряжений по определяющим напряжениям, нормальным к границе полупространства. Для самих же определяющих напряжений получено интегральное уравнение второго рода, решение которого найдено в форме явной зависимости от приложенных нормальных и касательных силовых нагрузок, универсальной относительно различных соотношений между упругими модулями материала и обеспечивающей убывание решения с отдалением от границы. На примере конкретных материалов продемонстрирована эффективность построенного решения.

Работа выполнена в рамках проекта № 0120U100499 при поддержке бюджетной программы Украины КПКВК 6541230 “Поддержка развития приоритетных направлений научных исследований”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Немировский Ю. В., Резников В. С.* Прочность элементов конструкций из композитных материалов. — Новосибирск: Наука, Сибир. отд-ние, 1986. — 166 с.
2. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977. — 417 с.
3. *Черных К. Ф.* Введение в анизотропную упругость. — М.: Наука, 1988. — 192 с.
4. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 576 с.
5. *Rand O., Rovenski V.* Analytical methods in anisotropic elasticity (with symbolic computational tools). — Boston; Basil; Berlin: Birkhäuser, 2005. — 454 p.
6. *Liu G. R., Tani J., Watanabe K., Ohyoshi T.* Lamb wave propagation in anisotropic laminates // *J. Appl. Mech.* — 1990. — Vol. 57, No. 4. — P. 923—929.
7. *Spencer A. J. M.* Deformations of fibre-reinforced materials. — Oxford: Clarendon Press, 1972. — 128 p.
8. *Christensen R. M., Zywicz E.* A three-dimensional constitutive theory for fiber composite laminated media // *J. Appl. Mech.* — 1990. Vol. — 57, No. 4. — P. 948—955.
9. *Ding H., Chen W., Zhang L.* Elasticity of transversely isotropic materials. — Dordrecht: Springer, 2006. — 435 p.
10. *Chen W. Q., Zhu J., Li X. Y.* General solutions for elasticity of transversely isotropic materials with thermal and other effects: A review // *J. Therm. Stresses.* — 2019. — Vol. 42, No. 1. — P. 90—106.

11. *Tokovyy Y.* Direct integration of three-dimensional thermoelasticity equations for a transversely isotropic layer // *J. Therm. Stresses.* — 2019. — Vol. 42, No. 1. — P. 49—64.
12. *Tokovyy Y., Ma C. C.* Three-dimensional elastic analysis of transversely-isotropic composites // *J. Mech.* — 2017. — Vol. 33, No. 6. — P. 821—830.
13. *Wang M. Z., Xu B. X., Gao C. F.* Recent general solutions in linear elasticity and their applications // *Appl. Mech. Rev.* — 2008. — Vol. 61, No. 3. — 030803—030801-20.
14. *Marmo F., Sessa S., Vaiana N., Grigorio D. D., Rosati L.* Complete solutions of three-dimensional problems in transversely isotropic media // *Continuum Mech. Thermodyn.* — 2020. — Vol. 32. — P. 775—802.
15. *Zhao L., Wang Q. J., Wang Z., Zhang M., Zhang X., Li P.* An efficient method for the elastic field in a transversely isotropic full space due to arbitrary inclusions // *Int. J. Solids Struct.* — 2020. — Vol. 203. — P. 177—196.
16. *Kryvyi O., Morozov Yu.* Thermally active interphase inclusion in a smooth contact conditions with transversely isotropic half-spaces // *Frattura ed Integrità Strutturale.* — 2020. — Vol. 52. — P. 32—50.
17. *Xiao S., Yue Z. Q.* Axisymmetric BEM analysis of one-layered transversely isotropic halfspace with cavity subject to external loads // *Eng. Analysis Bound. Elements.* — 2020. — Vol. 121. — P. 91—103.
18. *Pasternak I., Sulym H., Ilchuk N.* Boundary element analysis of 3D shell-like rigid electrically conducting inclusions in anisotropic thermomagnetoelastic solids // *ZAMM.* — 2019. — Vol. 99, No. 7. — e201800319.
19. *Ai Z. Y., Yang J. J., Li H. T.* General solutions of transversely isotropic multilayered media subjected to rectangular time-harmonic or moving loads // *Appl. Math. Modelling.* — 2019. — Vol. 75. — P. 865—891.
20. *Sebastianiuk P., Perkowski D. M., Kulchytsky-Zhyhailo R.* On contact problem for the microperiodic composite half-plane with slant layering // *Int. J. Mech. Sci.* — 2020. — Vol. 182. — 105734.
21. *Sebastianiuk P., Perkowski D. M., Kulchytsky-Zhyhailo R.* On stress analysis of load for microperiodic composite half-plane with slant lamination // *Meccanica.* — 2019. — Vol. 54. — P. 573—593.
22. *Shen J. J.* Axisymmetric Boussinesq problem of a transversely isotropic half space with surface effects // *Math. Mech. Solids.* — 2019. — Vol. 24, No. 5. — P. 1425-1437.
23. *Gao, X, Hao, F, Fang, D.* Boussinesq problem with the surface effect and its application to contact mechanics at the nanoscale // *Int. J. Solids Struct.* — 2013. — Vol. 50, No. 16. — P. 2620—2630.
24. *Головин Ю. И.* Наноиндентирование и его возможности. — М.: Машиностроение, 2009. — 312 с.
25. *Tokovyy Yu., Boiko D., Gao C.* Three-dimensional thermal-stress analysis of semi-infinite transversely isotropic composites // *Trans. Nanjing Univ. Aeronautics Astronautics.* — 2021. — Vol. 38, No. 1. — P. 18—28.
26. *Tokovyy Yu. V.* Direct integration method / Ed. R. B. Hetnarski // *Encyclopedia of Thermal stresses.* — Dordrecht: Springer, 2014. — Vol. 2. — P. 951—960.
27. *Токовий Ю. В., Бойко Д. С.* Интегральные уравнения трехмерных задач теории упругости для однородного трансверсально-изотропного полупространства // *Прикл. проблемы механики и математики.* — 2020. — Вып 18. — С. 83—92.
28. *Tokovyy Yu. V., Kalynyak B. M., Ma C. C.* Nonhomogeneous solids: integral equations approach / Ed. R. B. Hetnarski // *Encyclopedia of Therm. Stresses.* — Dordrecht: Springer, 2014. — Vol. 7. — P. 3350—3356.
29. *Kalynyak B. M., Tokovyy Yu. V., Yasynskyy A. V.* Direct and inverse problems of thermomechanics concerning the optimization and identification of the thermal stressed state of deformed solids // *J. Math. Sci.* — 2019. — Vol. 236, No. 1. — P. 21—34.

30. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. — Киев: Наук. думка, 1986. — 544 с.

31. *Князев П. Н.* Интегральные преобразования. — Минск: Высшэйшая школа, 1969. — 200 с.

32. *Токова Л. П., Ясинский А. В.* Приближенное решение одномерной задачи теории упругости для неоднородного сплошного цилиндра // Математ. методы и физ.-мех. поля. — 2015. — Т. 59, № 4. — С. 107—112.

Поступила в редакцию 09.03.2021

Окончательный вариант поступил 28.05.2021

Received March 9, 2021 (May 28, 2021)

Приложение 1

$$f_{xy}^p(z) = -\frac{s_x}{2s_y} f_x^p(z) - \frac{s_y}{2s_x} f_y^p(z) - \frac{1}{2s_x s_y} \frac{d^2 f_z^p(z)}{dz^2},$$

$$f_{xy}^{q\pm}(z) = -\frac{s_x}{2s_y} f_x^{q\pm}(z) - \frac{s_y}{2s_x} f_y^{q\pm}(z) - \frac{1}{2s_x s_y} \frac{d^2 f_z^q(z)}{dz^2},$$

$$f_{yz}^p(z) = \frac{i}{4s_y} \int_0^{+\infty} \left(s_x^2 f_x^p(\zeta) - s_y^2 f_y^p(\zeta) + \frac{d^2 f_z^p(\zeta)}{d\zeta^2} \right) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta,$$

$$f_{yz}^{q-}(z) = \frac{i}{4s_y} \int_0^{+\infty} \left(s_x^2 f_x^{q-}(\zeta) - s_y^2 f_y^{q-}(\zeta) + \frac{d^2 f_z^q(\zeta)}{d\zeta^2} \right) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta,$$

$$f_{yz}^{q+}(z) = \frac{i}{4s_y} \int_0^{+\infty} \left(s_x^2 f_x^{q+}(\zeta) - s_y^2 f_y^{q+}(\zeta) + \frac{d^2 f_z^q(\zeta)}{d\zeta^2} \right) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta + \frac{i}{2s_y},$$

$$f_{xz}^p(z) = \frac{i}{4s_x} \int_0^{+\infty} \left(s_y^2 f_y^p(\zeta) - s_x^2 f_x^p(\zeta) + \frac{d^2 f_z^p(\zeta)}{d\zeta^2} \right) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta,$$

$$f_{xz}^{q-}(z) = \frac{i}{4s_x} \int_0^{+\infty} \left(s_y^2 f_y^{q-}(\zeta) - s_x^2 f_x^{q-}(\zeta) + \frac{d^2 f_z^q(\zeta)}{d\zeta^2} \right) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta + \frac{i}{2s_x},$$

$$f_{xz}^{q+}(z) = \frac{i}{4s_x} \int_0^{+\infty} \left(s_y^2 f_y^{q+}(\zeta) - s_x^2 f_x^{q+}(\zeta) + \frac{d^2 f_z^q(\zeta)}{d\zeta^2} \right) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta.$$

Приложение 2

Приближенное решение уравнения (13), полученное в работе [27]:

$$\bar{\sigma}_{zz}(z) = -\bar{p}\tilde{f}_z^P(z) - i(s_x\bar{q}_x + s_y\bar{q}_y)\tilde{f}_z^q(z). \quad (\text{П2-1})$$

Здесь

$$\tilde{f}_z^P(z) = (1+|s|z)\exp(-|s|z) + \int_0^{+\infty} (1+|s|\zeta)\exp(-|s|\zeta)\tilde{\mathcal{R}}_z(z,\zeta)d\zeta,$$

$$\tilde{f}_z^q(z) = z\exp(-|s|z) + \int_0^{+\infty} \zeta\exp(-|s|\zeta)\tilde{\mathcal{R}}_z(z,\zeta)d\zeta,$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_z(z,\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\mathcal{K}}_{m+1}^z(z,\zeta),$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_1^z(z,\zeta) = \tilde{\mathcal{K}}_z(z,\zeta), \quad \tilde{\mathcal{K}}_{m+1}^z(z,\zeta) = \int_0^{+\infty} \tilde{\mathcal{K}}_1^z(z,\xi)\tilde{\mathcal{K}}_m^z(\xi,\zeta)d\xi, \quad m=1,2,\dots,$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_z(z,\zeta) = \frac{|s|}{4} \left((|s|a_2^*z - (1+2|s|z)(a_1^* + |s|a_2^*\zeta))\exp(-|s|(z+\zeta)) + \right.$$

$$\left. + (a_1^* + |s|a_2^*|z-\zeta|)\exp(-|s||z-\zeta|) \right).$$

$$a_1^* = 3 - \frac{2}{1-\nu} \left(\left(\frac{1}{G_z} + \frac{1}{E_z} \right) G - \nu_z \left(1 + \nu_z \frac{G}{E_z} \right) \frac{E}{E_z} \right),$$

$$a_2^* = -1 + \frac{2}{1-\nu} \left(\left(\frac{1}{G_z} - \frac{1}{E_z} \right) G - \nu_z \left(1 - \nu_z \frac{G}{E_z} \right) \frac{E}{E_z} \right).$$