

С. В. Шешенин^а, М. Э. Гритченко^{а}, П. В. Чистяков^б*

^аМосковский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия

^бНаучно-исследовательский институт механики МГУ, Москва, Россия

ОСРЕДНЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ РЕЗИНОКОРДНОГО СЛОЯ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

S. V. Sheshenin, M. E. Gritchenko^{}, and P. V. Chistyakov*

AVERGING THE VISCOELASTIC PROPERTIES OF A RUBBER-CORD PLY IN A PLANE STRESS STATE

Keywords: linear viscoelasticity, effective relaxation function, relaxation function, generalized Maxwell model, averaging method, rubber-cord composite, cyclic loading, heat release, Laplace—Carson transform

Averaging the viscoelastic properties of rubber-cord composites is of interest from both theoretical and practical points of view. For example, the viscoelasticity of rubber leads to heat release in rolling tires, which affects their rolling resistance and the fuel-efficiency. This work focuses on two interrelated aspects: the experimental determination of viscoelastic parameters of the rubber and rubber-cord and their calculation using the averaging method. Since only rather small strains are considered, the linear viscoelasticity theory is used. Parameters of the generalized Maxwell model are obtained. It is revealed that the relaxation times used in the rubber-cord model can also be employed in the rubber model. It is shown that the averaging procedure allows one to obtain the relaxation function and to calculate the mechanical work under harmonic vibrations with a sufficient accuracy.

Ключевые слова: вязкоупругость линейная, функция релаксации эффективная, функция релаксации, модель Максвелла обобщенная, метод осреднения, композит резинокордный, нагружение циклическое, выделение тепла, преобразование Лапласа—Карсона

*Автор, с которым следует вести переписку: maksim.gritchenko@gmail.com
Corresponding author: maksim.gritchenko@gmail.com

Осреднение вязкоупругих свойств резинокордного композита интересно с теоретической и прикладной точек зрения. Вязкоупругость резины приводит к выделению тепла при качении автомобильной шины, что в свою очередь влияет на сопротивление качению и топливную экономичность. Работа посвящена двум связным аспектам: экспериментальному определению вязкоупругих свойств резины и резинокорда и их вычислению методом осреднения. Рассмотрены достаточно малые деформации, поэтому вязкоупругие свойства аппроксимируются линейной теорией вязкоупругости. Описана реализация осцилляционных экспериментов пластин из резины и двухслойных пластин резинокорда с кордными углами $\pm\varphi$ 45, 60 и 90° при разных значениях средней деформации. Измерены параметры обобщенной модели Максвелла. Обнаружено, что в модели резинокорда можно использовать те же времена релаксации, что и для резины. Показано, что для вычисления выделяемого тепла с хорошей точностью при движении автомобиля в диапазоне от 30 до 135 км/ч достаточно двух или трех членов суммы Прони. Проведен анализ точности определения вязкоупругих свойств резинокорда с использованием методики осреднения. Показано, что осреднение с достаточной точностью позволяет найти и функции релаксации, и работу, переходящую в тепло при гармонических колебаниях.

Введение

Область применения резинокордных материалов в промышленности обширна. Наиболее широко их используют в автомобильной промышленности. Резиновые и резинокордные элементы конструкций при циклическом нагружении выделяют тепло, проявляя тем самым вязкоупругие свойства. Данная работа посвящена определению функций релаксации резины и резинокорда. Поскольку выделение тепла происходит при периодическом изменении напряженно-деформированного состояния (НДС), для определения этих функций целесообразно использовать не статический опыт на релаксацию [1], а эксперименты по циклическому нагружению. Отметим работы [2—4], в которых описаны циклические эксперименты для анализа динамических характеристик полимерных композитов. В работах [5, 6] рассматривали эффекты, связанные с нагревом образцов в процессе осцилляционных опытов. Для наполненной резины в случае циклического нагружения известны эффекты Маллинза и Пэйна. Первый выражен в снижении динамического модуля упругости при последовательных растяжениях. Эффект Пэйна заключается в зависимости модуля накопления от амплитуды приложенной деформации. Оба эффекта были изучены, например, в [7].

В литературе предложено множество типов функции релаксации и проведено их сравнение [8—10]. Хорошо известна методика [11—13], позволяющая определять параметры функции релаксации, заданной в виде

линейной комбинации экспонент [14, 15] (обобщенная модель Максвелла), с помощью гармонического деформирования. В работах [16, 17] она применена для идентификации свойств резины. В данной работе с помощью циклических экспериментов получены параметры функций релаксации не только резины, но и резинокорда. Всего было проведено около 60 испытаний.

Функция релаксации резинокорда может быть получена и методом осреднения [18, 19], исходя из функции релаксации резины. Этот метод применен на основе упруговязкоупругой аналогии [19]. Если к определяющим соотношениям линейной вязкоупругости применить преобразование Лапласа—Карсона [20], то получим уравнения, являющиеся аналогом одномерного закона Гука. Проводя осреднение в пространстве изображений, а затем беря обратное преобразование, получаем выражения для эффективной функции релаксации на основании функции релаксации резины. Эффективную функцию релаксации резинокорда для одноосного напряженного состояния сравнивали с найденной экспериментально. Также провели сравнение теоретического предсказания теряемой за цикл колебания энергии деформации с измеренной при разных частотах гармонических колебаний, показавшее достаточно хорошее совпадение.

Определяющие соотношения

Определяющие соотношения линейной теории вязкоупругости для произвольной анизотропии имеют вид

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t R_{ijkl}(t-\tau) d\varepsilon_{kl}(\tau),$$

где R_{ijkl} — тензор функций релаксации, σ, ε — тензоры напряжений и деформации соответственно.

Будем считать, что в случае резинокорда вязкоупругими свойствами обладает только резина при сдвиговом деформировании, а стальной корд представляет собой линейно-упругий материал, как и резина при объемном деформировании:

$$\mathbf{s}(t) = \int_0^t R_r(t-\tau) d\mathbf{e}(\tau), \quad (1)$$

$$\sigma = K\theta,$$

где \mathbf{s}, \mathbf{e} — девиаторы напряжений и деформаций; σ, θ — среднее гидростатическое напряжение и объемная деформация. Для материала корда будем полагать, что

$$\sigma_c = E_c \varepsilon_c,$$

где σ_c, ε_c — одномерные напряжения и деформация в корде. Рассмотрим обобщенную модель Максвелла [21], в которой функция релаксации

сдвига R_{sh} , входящая в (1), записана в виде

$$R_r = c_{0sh} + \sum_{n=1}^N c_{nsh} \exp\left(-\frac{t}{t_{nsh}}\right).$$

Материальные параметры c_{nsh} подлежат экспериментальному определению. При одноосном напряженно-деформированном состоянии модель имеет вид

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \quad E = c_0 + \sum_{n=1}^N c_n \exp\left(-\frac{t}{t_n}\right). \quad (2)$$

Итак, согласно (2) функция релаксации представляется в виде суммы $N+1$ члена $E(t) = \sum_{n=0}^N R_n(t)$. Поэтому напряжение и работу напряжений представляем также в виде сумм

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t-\tau) d\varepsilon(\tau) = \sum_{n=1}^N \int_0^t R_n(t-\tau) d\varepsilon(\tau),$$

$$A(t) = \int_0^t \sigma(s) d\varepsilon(s) = \sum_{n=0}^N A_n(t), \quad A_n(t) = \int_0^t \int_0^s R_n(t-\tau) d\varepsilon(\tau) d\varepsilon(s).$$

Экспериментальная методика заключается в проведении осцилляционных опытов и измерении теряемой за цикл колебания работы напряжений $A(t)$ в одноосном опыте.

Экспериментальное определение параметров модели Максвелла

Для экспериментального определения функции релаксации резины, входящей в (2), проводили циклическое нагружение образцов резины и резинокорда. Осцилляционный опыт реализует стационарный процесс вида

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_A \cos(\omega t), \quad (3)$$

где ε_0 — средняя деформация; ε_A — амплитуда деформаций; ω — частота колебаний. Будем оценивать точность аппроксимации функции релаксации $R(t)$ в норме, которая есть плотность работы деформации за цикл, соответствующий осциллирующему члену $\varepsilon = \varepsilon_A \cos(\omega t)$ в (3):

$$A(T) = \int_t^{t+T} \sigma(\tau) d\varepsilon(\tau),$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega}$; T — период колебаний; ω — круговая частота. Считаем, что напряжения связаны с деформациями соотношением

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-\tau) d\varepsilon(\tau). \quad (4)$$

Здесь, в отличие от уравнения (2), нижний предел интегрирования равен $-\infty$, поскольку рассматриваем установившийся процесс.

Представим величину $E(t)$ в виде

$$E(t) = R_\infty + \tilde{R}(t), \quad \tilde{R}(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

Для дальнейших преобразований удобно рассматривать временную зависимость деформации в комплексном виде с помощью формулы Эйлера

$$\varepsilon = \varepsilon_A [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] = \varepsilon_A e^{i\omega t}, \quad (5)$$

где ε_A — амплитуда деформаций; i — комплексная единица; ω — частота колебаний.

Тогда, подставив эти выражения в (4), будем иметь

$$\sigma(t) = R_\infty \varepsilon(t) + \varepsilon_A i \omega \int_{-\infty}^t \tilde{R}(t-\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (6)$$

Преобразуем интеграл $I = \int_{-\infty}^t \tilde{R}(t-\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$ с помощью замены $s = t - \tau$.

Подставив величину I в (6), запишем

$$\begin{aligned} \sigma(t) = R_\infty \varepsilon(t) + \varepsilon_A e^{i\omega t} \omega \int_0^{+\infty} \tilde{R}(s) \sin(\omega s) ds + \\ + \varepsilon_A e^{i\omega t} i \omega \int_0^{+\infty} \tilde{R}(s) \cos(\omega s) ds = R(\omega) \varepsilon(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$R(\omega) = R' + iR'',$$

$$R' = R_\infty + R^*, \quad R'' = R^{**},$$

$$R^* = \omega \int_0^{+\infty} \tilde{R}(s) \sin(\omega s) ds, \quad R^{**} = \omega \int_0^{+\infty} \tilde{R}(s) \cos(\omega s) ds.$$

Так как в эксперименте задается действительная часть деформации (5) $\varepsilon = \varepsilon_A \cos(\omega t)$, то и в выражении для напряжений оставим только действительную часть. Из (7) получим формулу для осциллирующей части напряжений

$$\sigma(t) = \varepsilon_A [R' \cos(\omega t) - R'' \sin(\omega t)].$$

Обозначим угол механических потерь как $\psi : tg\psi = R'' / R'$. Тогда получим

$$\sigma(t) = |R(\omega)| \varepsilon_A \cos(\omega t + \psi), \quad |R(\omega)| = \sqrt{(R')^2 + (R'')^2}. \quad (8)$$

Согласно (4) и (8) придем к известной формуле для плотности работы деформаций

$$A = \pi R''(\varepsilon_A)^2.$$

Для того, чтобы получить выражение для работы, необходимо определить величину R'' . В случае обобщенной модели Максвелла $\tilde{R}(t) = \sum_{n=1}^N c_n \exp(-\frac{t}{t_n})$ имеем

$$\begin{aligned} R'' &= \omega \int_0^{+\infty} \left[\sum_{n=1}^N c_n \exp(-\frac{s}{t_n}) \right] \cos(\omega s) ds = \\ &= \omega \sum_{n=1}^N c_n \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{s}{t_n}) \cos(\omega s) ds = \sum_{n=1}^N c_n \frac{t_n \omega}{(t_n \omega)^2 + 1}. \end{aligned}$$

Таким образом, плотность работы равна

$$A(\omega) = \pi (\varepsilon_A)^2 \sum_{n=1}^N c_n \frac{t_n \omega}{(t_n \omega)^2 + 1}. \quad (9)$$

Вычисляя по экспериментальным данным работу $A(\omega)$ при разных значениях частоты ω , можно получить значения параметров t_n и c_n , приближая экспериментальную зависимость $A(\omega)$ выражением (9).

Методика проведения экспериментов

Эксперименты проводили на образцах резины и двухслойных образцах резинороба с кордным углом $\varphi = 90, 60$ и 45° . Каждый образец представляет собой пластинку $300 \times 80 \times 2$ мм. Объем образца $48\,000$ мм³, общий объем роба в образце $5654,7$ мм³, концентрация роба в образце $11,78\%$, концентрация резины в образце $88,22\%$.

Экспериментальная установка позволяла реализовать заданную среднюю деформацию. Вначале проводили нагружение в течение 10 мин, чтобы процесс установился, затем проводили измерения. Образец испытывали в течение 10 мин при одной из семи частот нагружения: 5, 7,5, 10, 12,5, 15, 17,5, 20 Гц. Отметим, что частота 5 Гц при наружном диаметре шины 60 см соответствует скорости ~ 30 км/ч, а частота 20 Гц — 135 км/ч. По истечении каждой минуты на короткое время включался сбор данных, которые сохранялись для дальнейшей обработки. Таким образом,

для каждой частоты получали 10 наборов данных из нескольких циклов нагружения с разницей 1 мин.

Эксперименты проводили на установке, позволяющей реализовать максимальную амплитуду деформаций 2,5%. Регистрировались следующие параметры: сила, перемещение захвата и температура образца. Осевую силу измеряли с помощью стандартного тензометрического динамометра НИКИМП 1798ДСТУ2-0.1 (Россия). Перемещение захвата регистрировалось датчиком WI/10мм-Т, (НВМ, Германия). Пределы измерения 0—10 мм. Таким образом, в ходе эксперимента получали информацию о деформации образца, равной отношению перемещения захвата к начальной длине. Температуру образца измеряли с помощью термопары типа К (Хромель–Алюмель). Регистрация показаний датчиков осуществлялась тензометрической станцией Spider 8 (НВМ, Германия). Каждый опыт был произведен при поддержании одной и той же температуры 22 °С, до которой образец предварительно разогревали.

Определение параметров функции релаксации

Основные эксперименты проведены при постоянной температуре. В общей сложности проведено восемь наборов экспериментов: для четырех образцов из резины и резинокорда с углом $\varphi = 90, 60$ и 45° , при средней деформации $\varepsilon = 2$ и 4%. На рис. 1 представлены результаты экспериментов для образца резины при $\varepsilon = 2\%$. Зависимость $A(\omega)$ используем при нахождении параметров функции релаксации, для чего ее следует аппроксимировать функцией $A(\omega)$ из (9). Существенным является вопрос о достаточном количестве членов суммы. Ранее с помощью статических опытов [1] было обнаружено, что для вычисления выделяемой энергии достаточно аппроксимации экспериментальной кривой релаксации двумя или тремя членами. Поэтому анализ проведен для этих двух случаев. Чтобы улучшить аппроксимацию, сначала экспериментальные точки аппроксимировали полиномом четвертой степени, а затем формулой (9).

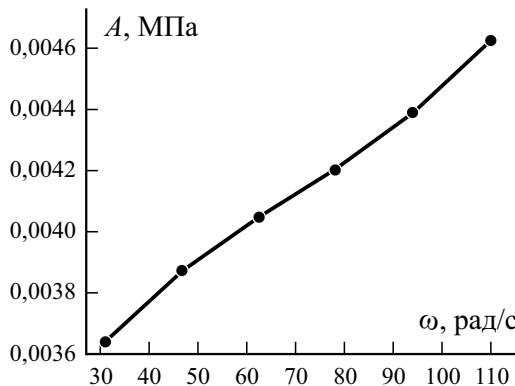


Рис. 1. Зависимость работы A от круговой частоты ω .

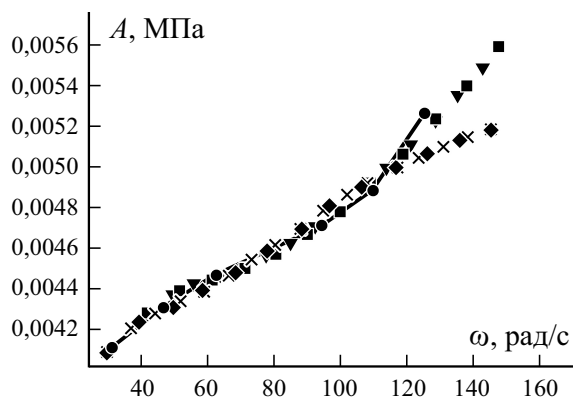


Рис. 2. Аппроксимация экспериментальных точек по формуле (9) с двумя (▼, ◆) и тремя (■, ×) слагаемыми; ◆, × — с использованием значений t_n для образцов резины; ● — эксперимент.

При определении параметров c_n и t_n функции релаксации для резинокорда возникает вопрос о возможности использования времен релаксации, полученных для резины. Поэтому была проведена аппроксимация величины $A(\omega)$ образца резинокорда по формуле (9) с использованием значений t_n , полученных для резины. Результаты для образца резинокорда при $\varphi = 60^\circ$ и $\varepsilon = 2\%$ приведены на рис. 2. Достаточное совпадение наблюдается до частоты 120 Гц. В таблице приведены значения функции релаксации c_n и t_n . Из данных таблицы видно, что при $N = 3$ фактически находим только два времени релаксации. Подобное наблюдали и в других случаях аппроксимации, что позволяет сделать вывод о том, что в рассмотренном диапазоне частот достаточно проанализировать случай $N = 2$. Однако использование для резинокорда времен релаксации, полученных для резины, приводит к ошибке для частот, превосходящих 120 Гц.

На рис. 3, 4 приведены графики функции релаксации. Отметим хорошее совпадение графиков для случаев $N = 2$ и $N = 3$ (см. рис. 3), а также удовлетворительное совпадение для случаев нахождения параметров t_n из аппроксимации и использования времен релаксации для резины (см. рис. 4).

Параметры функции релаксации

Случай	t_1	t_2	t_3	c_1	c_2	c_3
	МПа			с		
$N = 2$	0,0286	0,000526	-	16,552	142,023	-
$N = 2, t_n$ для резины	0,0395	0,0046	-	15,281	23,988	-
$N = 3$	0286	0,00045	0,0046	16,558	80,548	83,06
$N = 3, t_n$ для резины	0,0395	0,0045	0,0046	15,281	11,994	11,994

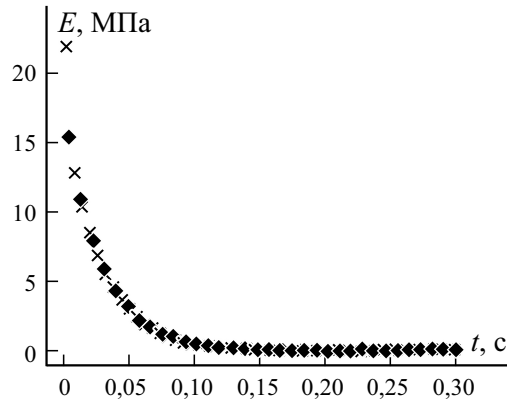


Рис. 3. График полученных функций релаксации E для случаев $N = 2$ (♦) и $N = 3$ (×).

Приближение вязкоупругих свойств резинокорда с использованием метода осреднения

Перепишем еще раз одномерные определяющие соотношения для резины и корда

$$\sigma_r(t) = \int_0^t E_r(t-\tau) d\varepsilon_r(\tau), \quad E_r = c_0 + \sum_{n=1}^N c_n \exp\left(-\frac{t}{t_n}\right),$$

$$\sigma_c(t) = E_c \varepsilon_c(t),$$
(10)

где E_r — функция релаксации резины для одномерного напряженного состояния; E_c — модуль Юнга корда; σ_A, ε_A — одномерные напряжения и деформации корда; σ_r, ε_r — одномерные напряжения и деформации

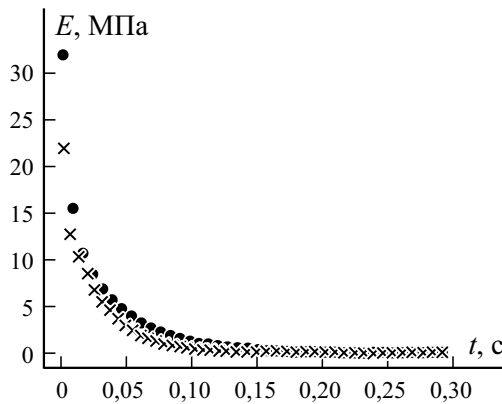


Рис. 4. График полученных функций релаксации E для случаев $N = 3$ (×) и $N = 3, t_n$ резины (●).

резины. Применим к соотношениям (10) преобразование Лапласа—Карсона

$$L_k[f(t)] = \bar{f}(p) = p \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \bar{E}_r \bar{\varepsilon}_r, & \bar{\sigma}_c &= \bar{E}_c \bar{\varepsilon}_c, \\ \bar{E}_r(p) &= c_0 + \sum_{n=1}^N \frac{c_n p}{p + \frac{1}{t_n}}, & \bar{E}_c &= E_c. \end{aligned} \quad (11)$$

Соотношения (11) позволяют использовать методику осреднения, описанную в [18], в пространстве изображений так, будто речь идет о линейной упругости, а затем перейти в пространство оригиналов.

Введем в пространстве изображений понятие средних по объему напряжений и деформаций

$$\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle(p) = \frac{1}{V} \int_V \bar{\sigma}_{ij}(x, p) dV, \quad \langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle(p) = \frac{1}{V} \int_V \bar{\varepsilon}_{ij}(x, p) dV,$$

а также эффективных модулей

$$\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle(p) = \bar{C}_{ijkl}^{eff}(p) \langle \bar{\varepsilon}_{kl} \rangle(p)$$

При этом эквивалентность среды с эффективными модулями и композита, для которого справедливо

$$\bar{\sigma}_{ij}(x, p) = \bar{C}_{ijkl}^{eff}(x, p) \bar{\varepsilon}_{kl}(x, p),$$

понимается в также, как и в теории упругости.

Эффективные модули резинокорда $\bar{C}_{ijkl}^{eff}(p)$ находим в два этапа. Первый этап — расчет эффективных модулей одного слоя как волокнистого композита, второй — осреднение по слоям как слоистого композита.

Схема резинокордного слоя представлена на рис. 5. Система координат LT связана с кордом и повернута относительно оси OX на положительный кордный угол φ . Второй слой корда повернут на угол $-\varphi$.

С учетом модулей корда E_c , резины \bar{E}_r и известных значений объемных концентраций корда и резины в образце эффективные модули резинокордного слоя \bar{E}_L и \bar{E}_T приближенно рассчитываем по правилу смеси и по формуле [22] (называемой иногда формулой Акасака) соответственно:

$$\bar{E}_L = \gamma_c E_c + \gamma_r \bar{E}_r, \quad (12)$$

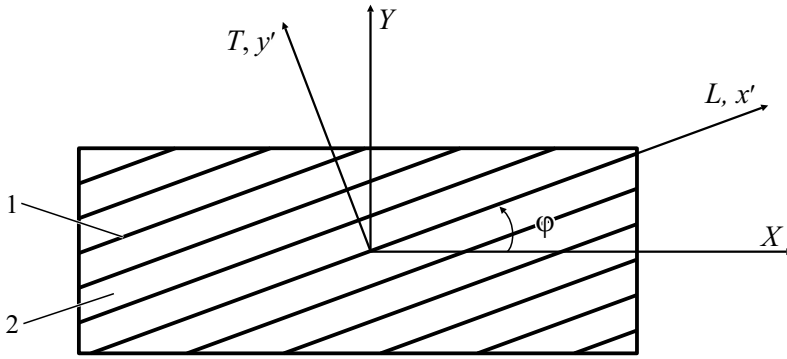


Рис. 5. Слой резинокорда: 1 — корд; 2 — резина.

$$\frac{1}{\bar{E}_T} = \frac{\gamma_c}{E_c} + \frac{\gamma_r}{\bar{E}_r} - \gamma_c \gamma_r \frac{\left(\frac{\bar{\nu}_r}{\bar{E}_r} - \frac{\bar{\nu}_c}{E_c}\right)^2}{\frac{\gamma_c}{\bar{E}_r} + \frac{\gamma_r}{E_c}}. \quad (12)$$

Будем считать, что коэффициент Пуассона $\bar{\nu}_r \approx 0,5$. Тогда, учитывая, что $E_c \gg \text{Re}(\bar{E}_r)$ и $E_c \gg \text{Im}(\bar{E}_r)$, можно упростить формулы (12) и получить выражения для эффективных модулей

$$\bar{E}_L = E_L = \gamma_c E_c, \quad \bar{E}_T = \frac{4 \bar{E}_r}{3 \gamma_r}.$$

Так как резинокордные образцы представляют собой двухслойную пластину, находящуюся в плосконапряженном состоянии, то аналог закона Гука в пространстве изображений в системе координат $Ox'y'$ с учетом $\bar{\nu}_{LT} = \bar{\nu}_r \approx 0,5$ и $\bar{G}_{LT} = \frac{\bar{E}_T}{4}$ запишем как

$$\begin{bmatrix} \langle \bar{\varepsilon}'_{11} \rangle \\ \langle \bar{\varepsilon}'_{22} \rangle \\ \langle \bar{\gamma}'_{12} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{1}{2E_L} & 0 \\ -\frac{1}{2E_L} & \frac{1}{\bar{E}_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\bar{E}_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \bar{\sigma}'_{11} \rangle \\ \langle \bar{\sigma}'_{22} \rangle \\ \langle \bar{\sigma}'_{12} \rangle \end{bmatrix}.$$

Выразив из данного уравнения напряжения через деформации, получаем закон Гука, записанный в системе координат $Ox'y'$. Переходя в систему координат Oxy , находим матрицу жесткостей $[\bar{C}]$, заканчивая на этом первый этап осреднения. Второй этап осреднения для двухслойного композита заключается в осреднении жесткостей при растяжении по слоям и

сводится к вычислению полусумм выражений компонент матрицы $[\bar{C}]$ друг с другом при условии, что кордный угол равен $+\varphi$ для одного слоя и $-\varphi$ — для другого. После вычислений окончательно получаем

$$\bar{E}^{eff} = \frac{E_L(1-3s^2c^2) + \frac{3}{4}\bar{E}_T}{s^4E_L + \bar{E}_T} \bar{E}_T, \quad (13)$$

где \bar{E}^{eff} — эффективная функция релаксации двухслойного образца при одноосном напряженном состоянии; s и c — синус и косинус кордного угла φ . Чтобы вернуться в пространство оригиналов, необходимо выполнить обратное преобразование в следующих предположениях: $E_c \gg \text{Re}(\bar{E}_r)$, $E_c \gg \text{Im}(\bar{E}_r)$, а значит, $E_L \gg \text{Re}(\bar{E}_T)$, $E_L \gg \text{Im}(\bar{E}_T)$. Тогда соотношение (13) упрощаем, и оно принимает вид

$$\bar{E}^{eff} = \frac{(1-3s^2c^2)}{s^4} \bar{E}_T.$$

С учетом линейности преобразования получаем окончательное выражение для эффективной функции релаксации двухслойного резинокорда с кордным углом φ в виде

$$E^{eff}(t) = E_r(t) \frac{4}{3\gamma_r} \frac{(1-3s^2c^2)}{s^4}. \quad (14)$$

Эта формула имеет смысл для кордных углов, больших некоторого предельного значения, поскольку не учитывает зависимость функции релаксации от модуля Юнга корда, которая играет существенную роль при малых углах.

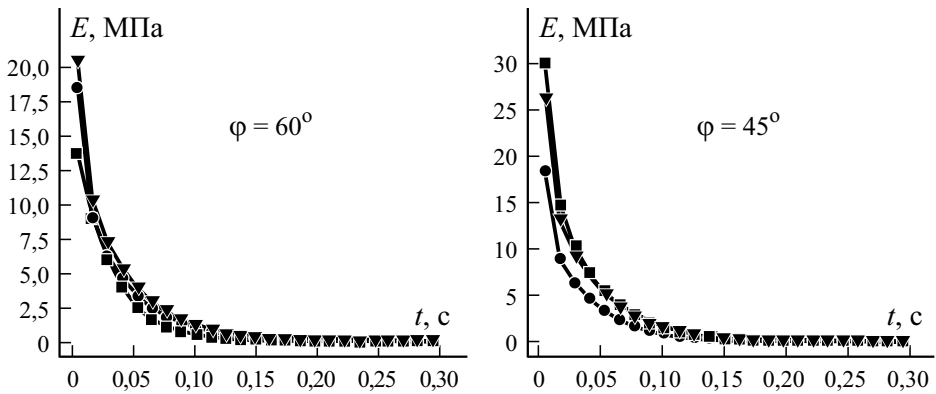


Рис. 6. Приближение функции релаксации E для резинокорда при $\varphi = 60$ и 45° : ● — резина; ■ — резинокорд, эксперимент; ▼ — аппроксимация по формуле (14).

На рис. 6 приведены графики, показывающие точность приближения функций релаксации для резинокорда с углами 60 и 45° формулой (14) для случаев начальной деформации 2%. Видно, что приближение, полученное осреднением, с удовлетворительной точностью совпадает с экспериментальным.

Также можно получить приближение для работы резинокорда, используя в формуле (9) эффективную функцию релаксации (14).

Таким образом, имеем следующую аппроксимацию работы деформации для двухслойного образца резинокорда:

$$A_{rc}(\omega) = A_r(\omega) \frac{4}{3\gamma_r} \frac{(1 - 3s^2c^2)}{s^4}. \tag{15}$$

Ошибку аппроксимации (15) вычисляли по формуле

$$\text{err} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (A_i - A(\omega_i))^2}}{\sum_{i=1}^N A_i / N} \cdot 100\%,$$

где A_i — работа, определенная из эксперимента при частоте ω_i .

На рис. 7 представлены экспериментальные зависимости работы от частоты для образцов из резины, резинокорда и график аппроксимации работы по формуле (15). Исходя из данных рисунка, можно сделать вывод о приемлемой точности аппроксимации (ошибка 6—20%) для резинокорда 90° и удовлетворительной точности (ошибка 14,5—30%) для резинокорда с углами 60 и 45°.

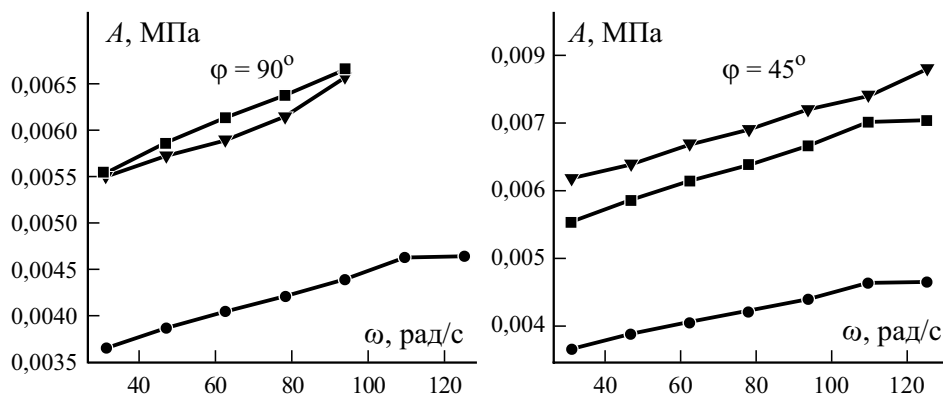


Рис. 7. Аппроксимация работы A для резинокорда при $\phi = 90$ и 45° : ● — резина, ▼ — эксперимент; ■ — аппроксимация по формуле (15).

Заключение

Экспериментально для образцов резины и двухслойных образцов резинокорда были определены параметры функции релаксации, выбранной в форме суммы Прони, содержащей два или три члена суммы. Результаты теоретического и экспериментального исследования показали следующее.

Осцилляционная методика позволила найти достаточно малые времена релаксации вплоть до 10^{-4} с. Для резины в диапазоне частот от 5 до 20 Гц значения времени релаксации, полученные в случае трех членов суммы Прони, совпадают со значениями для случая двух слагаемых. Это верно и для функции релаксации резинокорда при $\varphi = 90, 60$ и 45° . Оценена возможность использования времен релаксации для резины в качестве соответствующих времен для резинокорда. Выявлено, что при этом рассеиваемая работа аппроксимируется с погрешностью меньше 8%. Также оценена возможность нахождения функции релаксации и рассеиваемой энергии для резинокорда методом осреднения. Для резинокорда с $\varphi = 90^\circ$ при средней деформации 2% и амплитудой деформации 1% работа может быть аппроксимирована с точностью 6%, при $\varphi = 60^\circ$ — с точностью 20%, при $\varphi = 45^\circ$ точность составляет 21% при той же средней деформации. Для средней деформации 4% точность составила 14,5 и 14% процентов для углов 90 и 60° соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шешенин С. В., Чистяков П. В., Гритченко М. Э., Закалюкина И. М. Осреднение вязкоупругих свойств резинокордного слоя // Сб. тр. 9-й Всерос. науч. конф. с междунар. участием “Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред им. И. Ф. Образцова и Ю. Г. Яновского, посвященной 30-летию Института прикладной механики РАН”. — М.: — ИПРИМ РАН, 2019. — С. 264—268.
2. Адамов А. А., Матвеев В. П., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н. Методы прикладной вязкоупругости. — Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2003. — С. 412.
3. Янкин А. С., Бульбович Р. В., Словиков С. В., Вильдеман В. Э. Методические вопросы экспериментальных исследований вязкоупругих наполненных полимерных композитов при сложных динамических циклических воздействиях // Вестн. ПНИПУ. Механика. — 2013. — №4. — С. 180—192.
4. Ly M., Khan K. A., Muliana A. Modeling self-heating under cyclic loading in fiber-reinforced polymer composites // J. Mater. Eng. Perform. — 2020. — Vol. 29. — doi: 10.1007/s11665-020-04663-7
5. Larin O., Vyazovichenko Y., Barkanov E., Itskov M. Experimental investigation of viscoelastic characteristics of rubber-cord composites considering the process of their self-heating // Strength Mater. — 2018. — Vol. 50. — P. 841—851. — doi: 10.1007/s11223-019-00030-7
6. Schieppati J., Schrittester B., Wondracek A., Robin St., Holzner A., Pinter G. Heat build-up of rubbers during cyclic loading // ECCMR. — 2019. — Nantes, France.

7. *Hadjov K., Aleksandrova V.* Cyclic loading of rubbers — amplitude spectrum and payne effect // *J. Chem. Technol. Metall.* — 2019. — Vol. 52. — P. 415—420.
8. *Xiao R., Sun H., Chen W.* An equivalence between Generalized Maxwell Model and Fractional Zener Model // *Mech. Mater.* — 2016. — Vol. 100. — doi: 10.1016/j.mechmat.2016.06.016
9. *Hodge I.* Classical Relaxation Phenomenology. — 2019. — P. 81—107. — doi: 10.1007/978-3-030-02459-8
10. *Ferrante M., Capponi C.* Comparison of viscoelastic models with a different number of parameters for transient simulations // *J. Hydroinformatics.* — 2017. — Vol. 20, No. 1. — doi: 10.2166/hydro.2017.116
11. *Baumgaertel M., Winter H.* Determination of discrete relaxation and retardation time spectra from dynamic mechanical data // *Rheol. Acta.* — 1989. — Vol. 28, No. 6. — P. 511—519.
12. *Nasdala L., Kaliske M., Becker A., Rothert H.* An efficient viscoelastic formulation for steady-state rolling structures // *Comput. Mech.* — 1998. — Vol. 22, No. 5. — P. 395—403.
13. *Белкин А. Е., Семенов В. К.* Теоретический и экспериментальный анализ контакта массивной шины с беговым барабаном // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* — 2016. — № 3. — С. 71—82.
14. *Bódai G., Goda T.* Parameter identification methods for Generalized Maxwell Models: Engineering approach for small-strain viscoelasticity // *Mater. Sci. Forum.* — 2010. — Vol. 659. — P. 379—384. — doi: 10.4028/www.scientific.net/MSF.659.379
15. *Jalocha D., Constantinescu A., Nevière R.* Revisiting the identification of Generalized Maxwell Models from experimental results // *Int. J. Solids Struct.* — 2015. — Vol. 67. — doi: 10.1016/j.ijsolstr.2015.04.018
16. *Basagiannis C., Williams M.* Modified Generalized Maxwell Model for hysteresis behavior of elastomeric dampers // *J. Eng. Mech.* — 2020. — Vol. 146, No. 8. — doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001801
17. *Fatima I., Shafi N., Anjum H.* Viscoelastic properties of rubber material modelling // *ICAEM.* — 2019. — P. 117—121. — doi: 10.1109/ICAEM.2019.8853764
18. *Bakhvalov N. S., Panasenko G.* Homogenisation: Averaging processes in periodic media (mathematical problems in the mechanics of composite materials) // *Recherche.* — 1989. — Vol. 67.
19. *González O., Otero J., Ramírez-Torres A., Penta R., Lebon F.* On the effective behavior of viscoelastic composites in three dimensions // *Int. J. Eng. Sci.* — 2020. — Vol. 157. — doi: 10.1016/j.ijengsci.2020.103377
20. *Lévesque M., Gilchrist M., Bouleau N., Derrien K., Baptiste D.* Numerical inversion of the Laplace—Carson transform applied to homogenization of randomly reinforced linear viscoelastic media // *Comput. Mech.* — 2007. — Vol. 40, No. 4. — P. 771—789. — doi: 10.1007/s00466-006-0138-6
21. *Kaliske M., Rothert H.* Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains // *Comput. Mech.* — 1997. — Vol. 19, No. 3. — P. 228—239. — doi: 10.1007/s004660050171
22. *Vasiliev V. V., Morozov E.* *Advanced Mechanics of Composite Materials.* — 2nd ed. — Elsevier, 2007. — P. 504. — doi: 10.1016/B978-0-08-045372-9.X5000-3
23. *Chen Z., Xie Y., Wang Z., Li Q., Wu X., Zhou S.* A Comparison of fast Fourier transform-based homogenization method to asymptotic homogenization method // *Compos. Struct.* — 2020. — Vol. 238. — doi: 10.1016/j.compstruct.2020.111979
24. *Christensen R.* *Theory of Viscoelasticity. An Introduction.* — 2nd ed. — Acad. Press, 1982.

25. *Akhundov V. M., Lunyov V. P.* Calculation and experimental study of a two-way reinforced rubber-cord composite in tension // *Mech. Compos. Mater.* — 2001. — Vol. 37, No. 2. — P. 131—138. — doi: 10.1023/A:1010669502769

26. *Pidaparti R. M. V.* Analysis of cord-rubber composite laminates under combined tension and torsion loading // *Composites: Part B.* — 1997. — Vol. 28, No. 4. — P. 433—438. — doi: 10.1016/S1359-8368(96)00064-9

Поступила в редакцию 11.03.2021
Received March 11, 2021
