МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ. — 2021. — Т. 57, № 4. — С. 611—628
MECHANICS OF COMPOSITE MATERIALS. — 2021. — Vol. 57, No. 4. — P. 611—628
https://doi.org/10.22364/mkm.57.4.01

П. А. Белов, С. А. Лурье*

Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Россия

РАЗВИТИЕ КОНЦЕПЦИИ “РАЗДЕЛЕННОЙ АНИЗОТРОПИИ” В ТЕОРИИ ГРАДИЕНТНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ

P. A. Belov and S. A. Lurie*

DEVELOPMENT OF THE “SEPARATED ANISOTROPY” CONCEPT IN THE THEORY OF GRADIENT ANISOTROPIC ELASTICITY

Keywords: Gradient anisotropic elasticity, structures of anisotropic tensors of modules, spectrum of boundary conditions

A variation model of the gradient anisotropic elasticity theory is constructed. Its distinctive feature is the fact that the density of potential energy, along with symmetric fourth- and sixth-rank stiffness tensors, also contains a nonsymmetric fifth-rank stiffness tensor. Accordingly, the stresses in it also depend on the curvatures and the couple stresses depend on distortions. The Euler equations are three fourth-order equilibrium equations. The spectrum of boundary-value problems is determined by six pairs of alternative boundary conditions at each nonsingular surface point. At each special point of the surface (belonging to surface edges), in the general case, additional conditions arise for continuity of the displacement vector and the meniscus force vector when crossing the surface through the edge. In order to reduce the number of the physical parameters requiring experimental determination, particular types of the fifth- and sixth-rank stiffness tensors are postulated. Along with the classical tensor of anisotropic moduli, it is proposed to introduce a first-rank stiffness tensor (a vector with a length dimension), with the help of which the fifth-rank tensor is constructed from the classical fourth-rank tensor by means of tensor multiplication. The sixth-rank tensor is constructed as the tensor product of the classical fourth-rank tensor and two first-rank tensors.

*Автор, с которым следует вести переписку: BelovPA@yandex.ru
Corresponding author: BelovPA@yandex.ru

Ключевые слова: анизотропная теория упругости градиентная, структуры анизотропных тензоров модулей, спектр краевых задач

Построена вариационная модель градиентной анизотропной теории упругости. Её существенным отличием является то, что плотность потенциальной энергии в ней содержит наряду с тензорами модулей четвертого и шестого рангов тензор модулей пятого ранга, не обладающего никакой симметрией. Соответственно напряжения в ней зависят и от кривизн, а моментные напряжения — и от дисторсий. Уравнениями Эйлера являются три уравнения равновесия четвертого порядка. Спектр краевых задач определяется шестью парами альтернативных граничных условий в каждой неособенной точке поверхности. В каждой особенной точке поверхности (принадлежащей ребрам поверхности) в общем случае появляются дополнительные условия непрерывности вектора перемещений и вектора менисковых сил при переходе по поверхности через ребро. Для сокращения количества физических параметров, требующих экспериментального определения, постулирован частный вид структур тензоров модулей пятого и шестого рангов. Наряду с классическим тензором анизотропных модулей предложено ввести тензор модулей первого ранга (вектор размерности длины), с помощью которого из классического тензора модулей четвертого ранга тензорным умножением строится тензор пятого ранга. Тензор модулей шестого ранга строится как тензорное произведение классического тензора модулей четвертого ранга с двумя тензорами первого ранга.

Введение

Градиентные модели теории упругости в современном звучании стали предметом исследований ученых с середины прошлого века благодаря трудам Э. Л. Аэро и З. В. Кувшинского [1], Р. А. Тупина [2] и Р. Д. Миндлина [3]. Было установлено [4], что в приложении к мелкодисперсным композитам, начиная с диаметров включений около сотен микрон и меньше, появляются существенные различия в эффективной жесткости композита по сравнению с прогнозом на основании классической теории упругости. Моделирование этого эффекта стало возможным в рамках градиентной изотропной теории [5].

Первоначально предложенная в [2, 3] градиентная теория деформации для изотропных материалов содержит пять дополнительных физических постоянных материала в дополнение к двум константам Ламе классической теории упругости [6]. Идентификация этих дополнительных параметров является непростой проблемой, которую, однако, можно решить, например, с использованием результатов моделирования методом молекулярной динамики [7] или методов получения эффективных свойств [8], которые в свою очередь находят экспериментальным путем. Вводя специальные предположения для определяющих соотношений высокого порядка, можно уменьшить количество материальных констант градиентных теорий для получения прикладных моделей с тремя [9—11], двумя [2, 12, 13] или с одним дополнительным параметром масштаба [13—15], так что процедура идентификации упрощается. Такие предположения, как правило, очень привлекательны с точки зрения решения краевых задач, однако их справедливость следует проверять на основе строгого теоретического анализа и экспериментально [16].

При исследовании эффективной жесткости композитов, включения в которых были короткими однонаправленными волокнами, были обнаружены эффекты аномального увеличения жесткости композита как функции длины волокон [17, 18]. Моделирование этого эффекта потребовало формулировки прикладной градиентной ортотропной модели [19, 20]. Следующим логическим шагом при моделировании силовых слоистых композитов с несбалансированной структурой является формулировка градиентной анизотропной теории упругости.

В последнее время область применения градиентной упругости была расширена. Прикладные модели градиентной деформации использовали для описания механических свойств анизотропных метаматериалов [21, 22]. Большой интерес представляет привлечение градиентных моделей к моделированию кристаллических материалов, являющихся в большинстве случаев сильно анизотропными, для которых расчеты из первых принципов и динамические модели можно использовать для идентификации градиентных материальных констант [23]. Это приводит к необходимости развития градиентных моделей анизотропных сред.

Такие теории в общей формулировке недавно были проанализированы с помощью классов групп симметрии в [24, 25] и рассмотрены прикладные задачи статики и динамики, например, в [26, 27].

Однако механические свойства градиентной анизотропной теории упругости определяются тремя тензорами: четвертого C_{ijmn}, пятого C_{ijmnl} и шестого C_{ijkmnl} рангов. В общем случае тензор пятого ранга может содержать 243 неклассических модуля, а тензор шестого ранга — 729 неклассических модулей. Совершенно очевидно, что даже при использовании свойств симметрии, связанных с обратимостью процесса деформирования и парностью касательных напряжений, теория, требующая такого огромного объёма экспериментов по определению неклассических модулей, будет обречена на забвение из-за своей практической неприменимости. Поэтому центр тяжести исследований в области теории нанокомпозитов сместился к поискам таких частных моделей, которые бы минимизировали количество неклассических модулей, сохраняя при этом возможность объяснения наиболее существенных масштабных эффектов в нанокомпозитах.

По-видимому, первая такая попытка была сделана в [13], где тензор шестого ранга C_{ijkmnl} постулирован в виде $C_{ijkmnl} = C_{ijmn}(l^2\delta_{kl})$, тензор C_{ijmn} — классический анизотропный тензор модулей, а характерная длина l — единственный неклассический параметр, определяющий масштабные эффекты.

В градиентных моделях анизотропной упругости существенно увеличено количество дополнительных материальных констант. Таким образом, разработка прикладных упрощенных, но при этом достаточно богатых механическими свойствами градиентных теорий анизотропного тела является важной задачей. Самый известный подход — введение так называемого тензора внутренних масштабов длины, связывающего тензор градиентных модулей шестого порядка с классическим тензором упругости с заданным типом симметрии [28—34]. Такой подход широко использовали для анализа дислокаций в анизотропных кристаллах [34, 35].

Отметим работу [33], где дан достаточно полный обзор существующих на начало 2018 года гипотез упрощения структуры анизотропного тензора модулей шестого ранга и предложена концепция “разделенной анизотропии”, в соответствии с которой тензор C_{ijmn} определял анизотропию упругих свойств, а анизотропный тензор второго ранга L_{kl} (симметричный при перестановке индексов) — анизотропию масштабных эффектов. При этом была постулирована следующая структура тензора шестого ранга: $C_{ijkmnl} = C_{ijmn}L_{kl}$. Однако из стремления упростить теорию из поля зрения некоторых авторов выпало то обстоятельство, что при любой анизотропии следует изучить и упростить структуру и тензора пятого ранга, которым нет оснований пренебрегать. В результате в данной работе, в развитие концепции “разделенной анизотропии”, предложена следующая структура модулей пятого и шестого рангов: $C_{ijmnl} = C_{ijmn}l_l$ и $C_{ijkmnl} = C_{ijmn}l_k l_l$, построенная на тензоре первого ранга l_l, определяющем анизотропию характерных длин масштабных эффектов.

Принцип возможных перемещений в приложении к градиентной среде

При исследовании свойств тензоров четвертого, пятого и шестого рангов [29, 30] было установлено следующее: тензор модулей пятого ранга не имеет никакой симметрии; тензор четвертого ранга должен быть симметричным при перестановке первой и второй пары индексов:

$$C_{ijmn} = C_{mnij}; \tag{1}$$

тензор шестого ранга должен быть симметричным при перестановке первой и второй троек индексов:

$$C_{ijkmnl} = C_{mnlijk}. \tag{2}$$

Если тензоры модулей не зависят от дисторсий $R_{m,n}$ и кривизн $R_{m,nl}$, где R_i — вектор перемещений, доказано, что напряжения σ_{ij} и моментные напряжения σ_{ijk} удовлетворяют уравнениям обобщенного закона Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}R_{m,n} + C_{ijmnl}R_{m,nl}, \tag{3}$$

$$\sigma_{ijk} = C_{mnijk}R_{m,n} + C_{mnlijk}R_{m,nl}. \tag{4}$$

Из (3), (4) следует определение плотности потенциальной энергии U_V в градиентной анизотропной теории упругости

$$U_V = \frac{1}{2}(C_{ijmn}R_{m,n}R_{i,j} + 2C_{ijmnl}R_{m,nl}R_{i,j} + C_{ijkmnl}R_{m,nl}R_{i,jk}). \tag{5}$$

Как было отмечено во введении, во всех моделях градиентной анизотропной теории упругости одним из главных достоинств считается обоснованное сокращение количества неклассических модулей, отражающих только существенные механические свойства градиентной среды, определяющие multiscale-эффекты.

Выдвинем две гипотезы о структуре тензоров C_{ijmnl} и C_{ijkmnl}:

$$\begin{cases} C_{ijmnl} = C_{ijmn}l_l, \\ C_{ijkmnl} = C_{ijmn}l_k l_l. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь l_k — тензор первого ранга характерных длин когезионных взаимодействий теории градиентной анизотропной упругости.

Гипотезы (6) устанавливают дополнительные свойства симметрии тензоров C_{ijmnl} и C_{ijkmnl}:

тензор C_{ijmnl} приобретает свойство

$$C_{ijmnl} = C_{mnijl}, \tag{7}$$

тензор C_{ijkmnl} —

$$\begin{cases} C_{ijkmnl} = C_{ijlmnk}, \\ C_{ijkmnl} = C_{mnkijl}, \end{cases} \tag{8}$$

плотность потенциальной энергии приобретает вид

$$U_V = \frac{1}{2}C_{ijmn}(R_{m,n} + l_l R_{m,nl})(R_{i,j} + l_k R_{i,jk}). \tag{9}$$

Из формул Грина, с учетом (9), вытекают уравнения закона Гука для напряжений

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = C_{ijmn}(R_m + l_l R_{m,l})_{,n}\,, \tag{10}$$

а также уравнения закона Гука для моментных напряжений

$$\sigma_{ijk} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,jk}} = C_{ijmn} l_k (R_m + l_l R_{m,l})_{,n} = \sigma_{ij} l_k\,. \tag{11}$$

Введем определение “классических” напряжений τ_{ij}

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ijk,k} = \sigma_{ij} - l_k \sigma_{ij,k} = C_{ijmn}(R_{m,n} - l_k l_l R_{m,nkl}) \tag{12}$$

и определение “классических” перемещений U_m

$$U_m = R_m - l_k l_l R_{m,kl}\,. \tag{13}$$

Тогда классические напряжения τ_{ij} будут связаны с классическими дисторсиями $U_{m,n}$ (с градиентом классических перемещений) классическим законом Гука

$$\tau_{ij} = C_{ijmn} U_{m,n}\,. \tag{14}$$

Кроме того, из (13) полное перемещение R_m можно представить в виде суммы “классических” перемещений U_m и градиентной поправки к нему u_m, которую можно называть векторным полем когезионных перемещений:

$$R_m = U_m + (l_k l_l R_{m,kl})\,. \tag{15}$$

Из (15) следует определение поля когезионных перемещений

$$u_m = l_k l_l R_{m,kl}\,. \tag{16}$$

Таким образом, введены два поля перемещений — классических (13) и когезионных (16), выраженные через линейные дифференциальные операторы второго порядка от вектора полных перемещений R_m. В свою очередь вектор полных перемещений является суммой классических и когезионных перемещений.

Вариационная постановка теории градиентной анизотропной упругости

Лагранжиан L теории с учетом (5) приобретает вид

$$L = A - \int_V U_V dV\,. \tag{17}$$

Здесь $A=\int\limits_V P_i^V R_i dV+\int\limits_F P_i^F R_i dF$ — работа внешних объёмных P_i^V и поверхностных P_i^F сил на перемещениях R_i. Вариационное уравнение вытекает из требования стационарности лагранжиана (17). Вариационное уравнение будем выводить в два этапа. Первый этап — взятие по частям объёмной части потенциальной энергии:

$$\delta L=\int\limits_V (\tau_{ij,j}+P_i^V)\delta R_i dV+\int\limits_F [(P_i^F-\tau_{ij}n_j)\delta R_i-(l_k n_k)\sigma_{ij}\delta R_{i,j}]dF=0\,. \quad (18)$$

Здесь n_j — орт нормали к поверхности F. В результате можно утверждать, что получены уравнения равновесия:

в напряжениях

$$\tau_{ij,j}+P_i^V=0\,, \quad (19)$$

в перемещениях

$$C_{ijmn}(...)_{,nj}[(...)-l_k(...)_{,k}][(...)+l_l(...)_{,l}]R_m+P_i^V=0\,. \quad (20)$$

Теорема 1: Систему трех дифференциальных уравнений четвертого порядка в частных производных (20) можно представить в виде распадающейся системы двух векторных уравнений второго порядка относительно векторов классических (13) и когезионных (16) перемещений.

Доказательство:

1. Последовательно действуя в (20) операторами $[(...)+l_l(...)_{,l}]$ и $[(...)-l_k(...)_{,k}]$ на вектор перемещений R_m, получим соотношение (13), определяющее вектор классических перемещений U_m через оператор второго порядка над вектором полных перемещений. В результате уравнения равновесия (20) примут вид

$$C_{ijmn}U_{m,nj}+P_i^V=0\,. \quad (20a)$$

2. Используя (16), перепишем (15) в виде $R_m=U_m+u_m$ и подставим в (16). Перенося налево часть, зависящую от вторых производных от когезионного перемещения, в результате получим

$$u_m-l_k l_l u_{m,kl}=l_k l_l U_{m,kl}\,. \quad (20b)$$

Теорема 1 доказана. Отсюда следует, что уравнения равновесия на вектор классических перемещений (20a) всегда отделяются от уравнений когезионных перемещений. Система (20b) определяет систему трех дифференциальных уравнений второго порядка на вектор когезионных перемещений с правыми частями, зависящими от классических перемещений.

Формулировка спектра краевых задач на поверхности тела

Заметим, что поверхностный интеграл в (18) содержит 12 слагаемых, множители которых содержат зависимые вариации. Действительно, из девяти вариаций тензора дисторсии $\delta R_{i,j}$ шесть в силу коммутативности операций варьирования и дифференцирования содержат касательные производные от вариаций перемещений. Будем называть стандартной процедуру формулировки спектра краевых задач, в которой независимыми вариациями на поверхности тела являются δR_i и $\delta(R_{i,q}n_q)$. Сами независимые переменные R_i и $(R_{i,q}n_q)$ на поверхности будем называть стандартными кинематическими переменными на поверхности. В соответствии с этим второй поверхностный интеграл в (18) следует записать в стандартной формулировке, взяв слагаемые с касательными производными от вариаций перемещений по частям:

$$\int_F \sigma_{ijk}n_k\delta R_{i,j}dF = \int_F \sigma_{ij}(l_k n_k)\delta R_{i,q}(\delta^*_{qj} + n_q n_j)dF =$$

$$= \int_F \sigma_{ij}(l_k n_k)(\delta R_i)_{,q}\delta^*_{qj}dF + \int_F \sigma_{ij}n_j(l_k n_k)\delta(R_{i,q}n_q)dF =$$

$$= \int_F [(\sigma_{ij}(l_k n_k)\delta R_i)_{,q}\delta^*_{qj} - (\sigma_{ij}(l_k n_k))_{,q}\delta^*_{qj}\delta R_i]dF +$$

$$+ \int_F \sigma_{ij}n_j(l_k n_k)\delta(R_{i,q}n_q)dF = \sum \oint \sigma_{ij}\nu_j(l_k n_k)\delta R_i ds -$$

$$- \int_F (\sigma_{ij}(l_k n_k))_{,q}\delta^*_{qj}\delta R_i dF + \int_F \sigma_{ij}n_j(l_k n_k)\delta(R_{i,q}n_q)dF\ .$$

Здесь n_j — орт нормали к поверхности; $\delta^*_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j$ — 2D-тензор Кронекера $\delta^*_{ij}\delta^*_{ij} = 2$; ν_j — орт нормали к ребру поверхности, лежащий в касательной плоскости к гладкой поверхности, ограниченной выбранным контуром из ребер.

В результате стандартное вариационное уравнение будет иметь следующую структуру:

$$\delta L = \int_V (\tau_{ij,j} + P_i^V)\delta R_i dV +$$

$$+ \int_F \{[P_i^V - \tau_{ij}n_j + (\sigma_{ij}(l_k n_k))_{,q}\delta^*_{qj}]\delta R_i - \sigma_{ij}n_j(l_k n_k)\delta(R_{i,q}n_q)\}dF -$$

$$- \sum \oint \sigma_{ij}\nu_j(l_k n_k)\delta R_i ds = 0\ . \qquad (21)$$

Произведения, содержащие множителями вариации стандартных кинематических переменных на поверхности, дают спектр краевых задач из шести пар альтернативных граничных условий в каждой неособенной точке поверхности.

Назовем классическими граничными условиями три пары альтернативных граничных условий, вытекающих из требования

$$\int_F [P_i^F - \tau_{ij} n_j + (\sigma_{ij}(l_k n_k))_{,q} \delta_{qj}^*] \delta R_i dF = 0 ; \tag{22}$$

назовем неклассическими граничными условиями три пары альтернативных граничных условий, вытекающих из требования

$$\int_F (l_k n_k) \sigma_{ij} n_j \delta(R_{i,q} n_q) dF = 0 . \tag{23}$$

Под альтернативной парой граничных условий будем понимать: ИЛИ требование равенства нулю множителя при вариации стандартной кинематической переменной на поверхности (статическое условие), ИЛИ требование равенства нулю самой вариации (кинематическое условие). Обратим внимание на то, что на каждой гладкой поверхности кусочно-гладкой поверхности F, ограничивающей тело, могут быть заданы различные наборы из шести граничных условий. Будем называть “основными” такие краевые задачи, в которых на всей поверхности задан один и тот же набор граничных условий. При этом, дополнительно, граничные условия сформулированы относительно векторов $[P_i^V - \tau_{ij} n_j + (\sigma_{ij}(l_k n_k))_{,q} \delta_{qj}^*]$ или δR_i для классических граничных условий, а не отдельных их проекций. Аналогично для неклассических граничных условий задаются векторы $\sigma_{ij} n_j$ или $\delta(R_{i,q} n_q)$, а не их отдельные проекции.

Формулировка **первой краевой задачи** — требования равенства нулю статических множителей в классических и неклассических граничных условиях с учетом (14) и (10):

$$\begin{cases} C_{ijmn} U_{m,n} n_j - \{(l_k n_k)[C_{ijmn}(U_{m,n} + l_l U_{m,nl}) + C_{ijmn}(u_{m,n} + l_l u_{m,nl})]\}_{,q} \delta_{qj}^* = P_i^F , \\ (l_k n_k)[C_{ijmn}(U_{m,n} + l_l U_{m,nl}) + C_{ijmn}(u_{m,n} + l_l u_{m,nl})] n_j = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Формулировка **второй краевой задачи** — требования равенства нулю статического множителя в классических и вариации стандартных кинематических переменных в неклассических граничных условиях с учетом (14):

$$\begin{cases} C_{ijmn} U_{m,n} n_j - \{(l_k n_k)[C_{ijmn}(U_{m,n} + l_l U_{m,nl}) + C_{ijmn}(u_{m,n} + l_l u_{m,nl})]\}_{,q} \delta_{qj}^* = P_i^F , \\ \delta(U_{i,q} n_q + u_{i,q} n_q) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Формулировка **третьей краевой задачи** — требования равенства нулю вариации стандартных кинематических переменных в классических граничных условиях и статического множителя в неклассических граничных условиях:

$$\begin{cases} \delta(U_m + u_m) = 0, \\ (l_k n_k)[C_{ijmn}(U_{m,n} + l_l U_{m,nl}) + C_{ijmn}(u_{m,n} + l_l u_{m,nl})]n_j = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Формулировка **четвертой краевой задачи** — требования равенства нулю вариаций стандартных кинематических переменных как в классических, так и в неклассических граничных условиях:

$$\begin{cases} \delta(U_m + u_m) = 0, \\ \delta(U_{i,q} n_q + u_{i,q} n_q) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Анализ спектра краевых задач показывает, что для всех основных краевых задач классическими методами уравнений математической физики не удается разделить решение на классическую краевую задачу и на краевую задачу о когезионном поле.

Формулировка спектра краевых задач на ребрах поверхности тела

Отдельного обсуждения требуют особенные точки поверхности, принадлежащие ребрам на поверхности, где стандартными вариациями кинематических переменных являются только δR_i. Пусть верхним индексом I и II обозначены две гладкие поверхности F, при пересечении которых образуется ребро поверхности. И для простоты $F = F^I \bigcup F^{II}$. Тогда в соответствии с (21) получим

$$\sum \oint \sigma_{ij} v_j (l_k n_k) \delta R_i ds = \sum \oint \sigma_i^I \delta R_i^I ds - \sum \oint \sigma_i^{II} \delta R_i^{II} ds =$$

$$= \sum \oint \{\sigma_i^I [(\delta R_i^I + \delta R_i^{II}) / 2 + (\delta R_i^I - \delta R_i^{II}) / 2] -$$

$$-\sigma_i^{II} [(\delta R_i^I + \delta R_i^{II}) / 2 - (\delta R_i^I - \delta R_i^{II}) / 2]\} ds =$$

$$= \frac{1}{2} \sum \oint [(\sigma_i^I - \sigma_i^{II})(\delta R_i^I + \delta R_i^{II}) + (\sigma_i^I + \sigma_i^{II})(\delta R_i^I - \delta R_i^{II})] ds = 0 . \tag{28}$$

Здесь дано определение менисковой силы на ребрах поверхности

$$\sigma_i = \sigma_{ij} v_j . \tag{29}$$

Условия (28) определяют две пары векторных альтернативных контурных условий на каждом ребре.

Формулировка **первой задачи на ребрах** поверхности:

$$\begin{cases} (\sigma_i^I - \sigma_i^{II}) = 0, \\ (\sigma_i^I + \sigma_i^{II}) = 0. \end{cases} \tag{28a}$$

Эта краевая задача не допускает менисковых сил на ребрах, так как требует выполнения условий, наложенных только на напряжения $\sigma_i^I = \sigma_i^{II} = 0$, и не обеспечивает непрерывность перемещений при переходе через ребро с одной поверхности на другую.

Формулировка **второй задачи на ребрах** поверхности:

$$\begin{cases} (\sigma_i^I - \sigma_i^{II}) = 0, \\ \delta(R_i^I - R_i^{II}) = 0. \end{cases} \tag{28b}$$

В общем случае (28b) требует заданного скачка перемещений на ребре $R_i^I - R_i^{II} = R_i^e$. Если на ребре задан нулевой скачок перемещений $R_i^e = 0$ (требование непрерывности перемещений), то в совокупности краевая задача (28b) требует непрерывности вектора перемещений и вектора менисковых сил при переходе с одной поверхности на другую через ребро.

Формулировка **третьей задачи на ребрах** поверхности:

$$\begin{cases} \delta(R_i^I + R_i^{II}) = 0, \\ (\sigma_i^I + \sigma_i^{II}) = 0. \end{cases} \tag{28c}$$

Даже если задать среднее перемещение на ребрах нулевым, скачок перемещений не определен и условие (28c) не обеспечивает отсутствие скачка перемещений при переходе через ребро.

Формулировка **четвертой задачи на ребрах** поверхности:

$$\begin{cases} \delta(R_i^I + R_i^{II}) = 0, \\ \delta(R_i^I - R_i^{II}) = 0. \end{cases} \tag{28d}$$

Если на ребре задан нулевой скачок перемещений (требование непрерывности перемещений), то в совокупности краевая задача (28d) требует непрерывности вектора перемещений, причем “среднее” перемещение на ребре $(R_i^I + R_i^{II})$ должно принимать заранее заданное значение.

В результате из четырех краевых задач на ребрах только две соответствуют постановкам реальных задач, а именно, краевые задачи (28b) и (28d).

Формулировка трансверсально-изотропной градиентной модели

Обратим внимание на то, что предложенный здесь подход применим к средам, в которых есть хотя бы одно выделенное направление, чтобы орт этого направления Z_i мог быть тензорным множителем в тензоре пятого ранга. Поэтому простейшую неизотропную модель следует строить с помощью трансверсально-изотропного тензора классических модулей упругости:

$$C_{ijmn} = C^1 \delta^*_{ij} \delta^*_{mn} + C^3 (\delta^*_{ij} Z_m Z_n + \delta^*_{mn} Z_i Z_j) + C^5 Z_i Z_j Z_m Z_n +$$

$$+ C^2 (\delta^*_{im} \delta^*_{jn} + \delta^*_{in} \delta^*_{jm}) + C^4 (\delta^*_{in} Z_j Z_m + \delta^*_{mj} Z_n Z_i + \delta^*_{jn} Z_i Z_m + \delta^*_{mi} Z_n Z_j) . \quad (29)$$

Рассмотрим частный случай среды с тремя модулями, которую получаем из (29), если положить

$$\begin{gathered} C^1 = \lambda , \\ C^2 = \mu , \\ C^3 = \lambda , \\ C^4 = G , \\ C^5 = 2\mu + \lambda . \end{gathered} \quad (30)$$

Тензор классических модулей четвертого ранга в этом случае определяется тремя базисными тензорами и соответственно тремя модулями упругости μ, λ, G и приобретает вид

$$C_{ijmn} = \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu (\delta^*_{im} \delta^*_{jn} + \delta^*_{in} \delta^*_{jm} + 2 Z_i Z_j Z_m Z_n) +$$

$$+ G (\delta^*_{in} Z_j Z_m + \delta^*_{mj} Z_n Z_i + \delta^*_{jn} Z_i Z_m + \delta^*_{mi} Z_n Z_j). \quad (31)$$

Уравнения закона Гука для полных напряжений в соответствии с (10) и (31) принимают вид

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{ij} X_i X_j = 2\mu \varepsilon_{xx} + \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \\ \sigma_{yy} = \sigma_{ij} Y_i Y_j = 2\mu \varepsilon_{yy} + \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \\ \sigma_{zz} = \sigma_{ij} n_i n_j = 2\mu \varepsilon_{zz} + \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_{yz} = \sigma_{ij} Y_i Z_j = G \gamma_{yz}, \\ \sigma_{zx} = \sigma_{ij} Z_i X_j = G \gamma_{zx}, \\ \sigma_{xy} = \sigma_{ij} X_i Y_j = \mu \gamma_{xy}. \end{cases} \quad (31a)$$

При этом тензор первого ранга характерных длин масштабных эффектов будет содержать две характерные длины: вдоль выделенного направления и поперёк. Тензор неклассических модулей первого ранга (характерных длин масштабных эффектов) l_k в любых частных случаях трансверсально-изотропной среды будет иметь одну и ту же структуру и содержать два неклассических параметра:

$$l_k = h_k + lZ_k = he_k + lZ_k\,,$$
$$\begin{cases} l = l_a Z_a, \\ h_k = l_a \delta^*_{ak}, \end{cases} \quad \begin{cases} h = l_a l_b \delta^*_{ab}, \\ e_k = h_k / h, \end{cases} \quad \begin{cases} e_k e_k = 1, \\ e_k Z_k = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Тензоры неклассических модулей пятого и шестого ранга полностью определяются в соответствии с (6), (31) и (32).

Подставив (31) и (32) в (9), можно получить выражения энергетических инвариантов для среды с любой анизотропией в рамках предложенной концепции. Энергетические инварианты будут определяться структурой тензора упругих модулей, в частности, для предложенной простейшей модели как

$$U_V = \lambda U_1 + \mu U_2 + GU_3\,,$$

$$\begin{cases} U_1 = \dfrac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{mn}(R_{m,n} + l_l R_{m,nl})(R_{i,j} + l_k R_{i,jk}), \\ U_2 = \dfrac{1}{2}(\delta^*_{im}\delta^*_{jn} + \delta^*_{in}\delta^*_{jm} + 2Z_i Z_j Z_m Z_n)(R_{m,n} + l_l R_{m,nl})(R_{i,j} + l_k R_{i,jk}), \\ U_3 = \dfrac{1}{2}(\delta^*_{in} Z_j Z_m + \delta^*_{mj} Z_n Z_i + \delta^*_{jn} Z_i Z_m + \delta^*_{mi} Z_n Z_j)(R_{m,n} + l_l R_{m,nl})(R_{i,j} + l_k R_{i,jk}). \end{cases} \tag{33}$$

В результате простейшая трансверсально-изотропная градиентная теория содержит всего пять независимых физических параметров μ, λ, G, l, h . Причем минимальное количество упругих модулей — три, а характерных длин масштабных эффектов — две.

Формулировка ортотропной градиентной модели — модели среды с кубической симметрией

В работе [36] приведена модель классической теории упругости с кубической симметрией, имеющая вид

$$C_{ijkl} = (3\lambda + 2\mu)J_{ijkl} + GL_{ijkl} + 2\mu M_{ijkl}\,, \tag{34}$$

где $(3\lambda + 2\mu), G, 2\mu$ — три упругих модуля среды с кубической симметрией; $J_{ijkl}, L_{ijkl}, M_{ijkl}$ — базисные тензоры, определенные через базисные орты декартовой системы X_i, Y_i, Z_i следующим образом:

$$\begin{cases} \delta_{ij} = X_i X_j + Y_i Y_j + Z_i Z_j, \\ J_{ijkl} = \dfrac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}, \\ L_{ijkl} = \dfrac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - X_i X_j X_k X_l - Y_i Y_j Y_k Y_l - Z_i Z_j Z_k Z_l, \\ M_{ijkl} = X_i X_j X_k X_l + Y_i Y_j Y_k Y_l + Z_i Z_j Z_k Z_l - \dfrac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}. \end{cases} \tag{35}$$

Уравнения закона Гука для полных напряжений —

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{ij} X_i X_j = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \\ \sigma_{yy} = \sigma_{ij} Y_i Y_j = 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \\ \sigma_{zz} = \sigma_{ij} Z_i Z_j = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_{yz} = \sigma_{ij} Y_i Z_j = G\gamma_{yz}, \\ \sigma_{zx} = \sigma_{ij} Z_i X_j = G\gamma_{zx}, \\ \sigma_{xy} = \sigma_{ij} X_i Z_j = G\gamma_{xy}. \end{cases} \tag{36}$$

При этом тензор первого ранга характерных длин масштабных эффектов будет содержать уже три характерные длины, так как при построении тензорного базиса (35) использованы все три орта как множители в тензорном произведении. Тензор неклассических модулей первого ранга (характерных длин масштабных эффектов) l_k в любых частных случаях анизотропной среды (кроме трансверсально-изотропной) будет иметь одну и ту же структуру и содержать три неклассических параметра:

$$l_i = l_x X_i + l_y Y_i + l_z Z_i. \tag{37}$$

Тензоры неклассических модулей пятого и шестого ранга по-прежнему полностью определяются в соответствии с (6), (31) и (32).

Количество энергетических инвариантов в среде с кубической симметрией определяется также, как и в других моделях предложенной концепции, количеством базисных тензоров четвертого ранга в разложении классического тензора модулей упругости четвертого ранга:

$$U_V = \frac{1}{2} C_{ijmn}(R_{m,n} + l_l R_{m,nl})(R_{i,j} + l_k R_{i,jk}) = (3\lambda + 2\mu)J + GL + 2\mu M,$$

$$\begin{cases} J = \dfrac{1}{2} J_{ijmn}(R_{m,n} + l_l R_{m,nl})(R_{i,j} + l_k R_{i,jk}), \\ L = \dfrac{1}{2} L_{ijmn}(R_{m,n} + l_l R_{m,nl})(R_{i,j} + l_k R_{i,jk}), \\ M = \dfrac{1}{2} M_{ijmn}(R_{m,n} + l_l R_{m,nl})(R_{i,j} + l_k R_{i,jk}). \end{cases} \tag{38}$$

В результате простейшая ортотропная градиентная теория (среда с кубической симметрией) содержит всего шесть независимых физических параметров $\mu, \lambda, G, l_x, l_y, l_z$. При этом минимальное количество упругих модулей — три, как и характерных длин масштабных эффектов.

Выводы

Построена градиентная анизотропная теория упругости с лагранжианом (2), (9) и (17). Её существенным отличием является то, что плотность потенциальной энергии наряду с тензорами модулей четвертого (1) и шестого (2) ранга содержит и тензор модулей пятого ранга (6). Соответственно напряжения в ней зависят не только от дисторсий, но и от кривизн (3), а моментные напряжения — не только от кривизн, но и от дисторсий (4). Для сокращения количества физических параметров, требующих экспериментального определения, предложена модель с максимально упрощенной структурой тензоров модулей пятого и шестого ранга (6), обладающих дополнительными постулированными свойствами (7) и (8). Уравнениями Эйлера являются три уравнения равновесия четвертого порядка (20). Спектр краевых задач определяется шестью парами альтернативных граничных условий в каждой неособенной точке поверхности (24)—(27). Три пары из них, содержащих вариации вектора перемещений, названы “классическими” (22), а остальные — “неклассическими” (23). Спектр краевых задач на ребрах определяется тремя парами альтернативных граничных условий (28).

В работе сознательно не рассматривали особый частный случай вырождения данной модели, связанный с возможностью существования на части поверхности тела нулевого скалярного произведения $(l_k n_k) = 0$, требующего отдельного аккуратного анализа.

В качестве примеров простейших вариантов анизотропных градиентных теорий предложены модели трансверсально-изотропной градиентной среды и ортотропной среды с кубической симметрией. Показано, что в рамках концепции “разделенной анизотропии” в трансверсально-изотропных средах появляются всего две неклассические физические константы — характерные длины масштабных эффектов, а в средах с более высокой степенью анизотропии — три.

С помощью классического анизотропного тензора упругих модулей построены энергетические инварианты, необходимые для определения эффективных свойств нанокомпозитов при энергетическом методе осреднения.

Работа поддержана Российским научным фондом (РНФ) в рамках гранта 20-41-04404, выданного Институту прикладной механики РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аэро Э. Л., Кувшинский Е.В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // ФТТ. — 1960. — Т. 2, Вып. 7. — С. 1399—1409.

2. *Toupin R. A.* Elastic materials with couple-stresses // Archive of Rational Mech. Analysis. — 1962. — Vol. 11. — P. 385—414.

3. *Mindlin R. D.* Micro-structure in linear elasticity // Archive of Rational Mech. Analysis. — 1964. — No. 1. — P. 51—78.

4. *Miva M.* Influence of the diameters of particals on the modulus of elasticity of reinforced polymers // Kobunshi Ronbunshu. — 1978. — Vol. 35, № 2. — P. 125—129.

5. *Образцов И. Ф., Лурье С. А., Белов П. А., Волков-Богородский Д. Б., Яновский Ю. Г., Кочемасова Е. И., Дудченко А. А., Потупчик Е. М., Шумова Н. П.* Основы теории межфазного слоя // Механика композиц. материалов и конструкций. — 2004. — Т.10, № 4. — С. 596—612.

6. *Dell'Isola F., Sciarra G., Vidoli S.* Generalized Hooke's law for isotropic second gradient materials // Proc. Roy. Soc. A: Math., Phys., Eng. Sci. — 2009. — Vol. 465, No. 2107. — P. 2177—2196.

7. *Gusev A. A., Lurie S. A.* Strain-gradient elasticity for bridging continuum and atomistic estimates of stiffness of binary Lennard-Jones crystals // Adv. Eng. Mater. — 2010. — Vol. 12, No. 6. — P. 529—533.

8. *Forest S., Trinh D. K.* Generalized continua and non-homogeneous boundary conditions in homogenisation methods // ZAMM-J. Appl. Math. Mech. — 2011. —Vol. 91, No. 2. — P. 90—109.

9. *Pideri C., Seppecher P.* A second gradient material resulting from the homogenization of an heterogeneous linear elastic medium // Continuum Mech. Thermodyn. — 1997. — Vol. 9, No. 5. — P. 241—257.

10. *Hutchinson J. W., Fleck N.* Strain gradient plasticity // Adv. Appl. Mech. — 1997. — Vol. 33. — P. 295—361.

11. *Lam David C. C., Yang Fan, Chong A. C. M, Wang Jianxun, Tong Pin.* Experiments and theory in strain gradient elasticity // J. Mech. Phys. Solids. — 2003. — Vol. 51, No. 8. — P. 1477—1508.

12. *Zhou Shenjie, Li Anqing, Wang Binglei.* A reformulation of constitutive relations in the strain gradient elasticity theory for isotropic materials // Int. J. Solids Struct. —2016. — Vol. 80. — P. 28—37.

13. *Askes H., Aifantis E. C.* Gradient elasticity in statics and dynamics: an overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results // Int. J. Solids Struct. — 2011. — Vol. 48, No. 13. — P. 1962—1990.

14. *Polizzotto C.* A hierarchy of simplified constitutive models within isotropic strain gradient elasticity // Eur. J. Mech. A/Solids. — 2017. — Vol. 61, Oct. — P. 92—109.

15. *Gao X.-L. and Park S. K.* Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem // Int. J. Solids Struct. — 2007. — Vol. 44, No. 22— 23. — P. 7486—7499.

16. *Müller W. H.* The experimental evidence for higher gradient theories // Mech. Strain Gradient Mater. — Springer, Cham. — 2020. — P. 1—18.

17. *Odegard G. M., Gates T. S., Wise K. E., Park C., Siochi E. J.* Constitutive modeling of nanotube--reinforced polymer composites // Compos. Sci. Technol. — 2003. — Vol. 63, No. 11. — P. 1671—1687.

18. *Odegard G. M., Frankland S. J. V., Gates T. S.* Effect of nanotube functionalization on the elastic properties of polyethylene nanotube composites // AIAA J. — 2005. — Vol. 43. — P. 1828—1835.

19. *Белов П. А., Лурье С. А., Гордеев А. В.* Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Градиентная модель нанокомпозита, армированного SWNT // Материаловедение. — 2013. — № 5. — С. 35—39

20. *Белов П. А., Зайцев О. В.* Объяснение “Эффекта Одегарда на коротких SWNT” в рамках градиентной теории межфазного слоя // Материаловедение. — 2013. — № 7. — С. 44—46.

21. *Barchiesi E., Eugster S. R., Placidi L., Dell'Isola F.* Pantographic beam: A complete second gradient 1D-continuum in plane // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, — 2019. — Vol. 70, No. 5. — P. 135.

22. *Dell'Isola F., Seppecher P., Spagnuolo M., Barchiesi E., Hild F., Lekszycki T., Eugster S. R.* Advances in pantographic structures: design, manufacturing, models, experiments and image analyses // Continuum Mech. Thermodyn. —2019. — Vol. 31, No. 4. — P. 1231—1282.

23. *Maranganti R., Sharma P.* A novel atomistic approach to determine strain-gradient elasticity constants: Tabulation and comparison for various metals, semiconductors, silica, polymers and the (ir) relevance for nanotechnologies // J. Mech. Phys. Solids. — 2007. — Vol. 55, No. 9. — P. 1823—1852.

24. *Auffray N., Dirrenberger J., Rosi G.* A complete description of bi-dimensional anisotropic strain-gradient elasticity // Int. J. Solids Struct. — 2015. — Vol. 69. — P. 195—206.

25. *Auffray N., Bouchet R., Brechet Y.* Derivation of anisotropic matrix for bi-dimensional strain-gradient elasticity behavior // Int. J. Solids Struct. — 2009. — Vol. 46, No. 2. — P. 440—454.

26. *Rosi G., Auffray N.* Anisotropic and dispersive wave propagation within strain-gradient framework // Wave Motion. — 2016. — Vol. 63. — P. 120—134.

27. *Yvonnet J., Auffray N., Monchiet V.* Computational second-order homogenization of materials with effective anisotropic strain-gradient behavior // Int. J. Solids Struct. — 2020. — Vol. 191. — P. 434—448.

28. *Lazar M., Po G.* The non-singular Green tensor of Mindlin's anisotropic gradient elasticity with separable weak non-locality // Phys. Lett. A. — 2015. — Vol. 379, No. 24—25. — P. 1538—1543.

29. *Mousavi S. M., Reddy J., Romanoff J.* Analysis of anisotropic gradient elastic shear deformable plates // Acta Mech. — 2016. — Vol. 227, No. 12. — P. 3639—3656.

30. *Polizzotto C.* Anisotropy in strain gradient elasticity: Simplified models with different forms of internal length and moduli tensors // Eur. J. Mech.-A/Solids. — 2018. — Vol. 71. — P. 51—63.

31. *Lazar M., Po G.* Singularity-free dislocation continuum theory for anisotropic crystals // PAMM. —2018. — Vol. 18, No. 1. — P. e201800095.

32. *Lazar M., Agiasofitou E., Po G.* Three-dimensional nonlocal anisotropic elasticity: a generalized continuum theory of Ångström-mechanics // Acta Mechanica. — 2020. — Vol. 231, No. 2. — P. 743—781.

33. *Belov P. A., Lurie S. A., Dobryanskiy V. N.* Variational formulation of linear equations of coupled thermohydrodynamics and heat conductivity // Lobachevskii J. Math. — 2020. — Vol. 41, No. 10. — P. 1948—1962.

34. *Belov P. A., Lurie S. A., Solyaev U.* Symmetry and applied variational models of the strain gradient anisotropic elasticity with second order tensor multiscale parameter // Nanosci. Technol.: Int. J. — 2021. — Vol. 12, Iss. 1. —P. 75—99.

35. *Walpole L. J.* Fourth-rank tensors of the thirty-two crystal classes: multiplication tables // Proc.R.Soc. Lond. A. — 1984. — Vol. 391. — P. 149—179.

Поступила в редакцию 21.12.2020
Окончательный вариант поступил 06.04.2021
Received Dec. 21, 2020 (Apr. 6, 2021)